Exemplos de aplicação dos modelos teóricos apresentados no livro de base, disponível na plataforma de eLearning da UA

Exemplo 01

Uma placa metálica e rectangular com 3.5 mm de espessura é dobrada até assumir uma forma cilíndrica, com um raio igual a (r). Calcular o valor dessa dimensão, bem como o valor do momento flector que se instala na superfície da placa deformada, quando a tensão máxima instalada iguala o valor da tensão limite elástica (90 MPa).
Assumir que o material possui um módulo de elasticidade de 70 GPa e um coeficiente de Poisson da ordem de 0.3.

REFERÊNCIA : CAPÍTULO 3 (UGURAL)

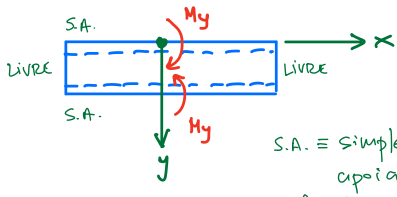
DADOS DO PROBLEMA :

$\sigma_{ced} = 90$ MPa $t = 3{,}5$ mm

$E = 70$ GPa

$\nu = 0{,}3$

CONDIÇÕES DE CONTORNO (VISTA SUPERIOR)



S.A. ≡ simplesmente apoiada (apoio simples)

PEDE-SE :

raio de curvatura $r = ?$

momentos fletores $M_x = ?$, $M_y = ?$, quando a "tensão de serviço" (tensão instalada) for igual à tensão de cedência do material (σ_{ced})

SOLUÇÃO :

APÓS A PLACA ESTAR DEFORMADA → CURVATURAS →

$$\kappa_x = \frac{1}{r_x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad *$$

raio de curvatura no plano xz

$$\kappa_y = \frac{1}{r_y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = ??$$

raio de curvatura no plano yz

$r_y = r \neq 0$

MOMENTOS FLECTORES :

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = -D\nu\frac{1}{r}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right) = -D\frac{1}{r}$$

como $\nu < 1 \longrightarrow M_y > M_x$

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$ ⇒ módulo de rigidez à flexão

CAMPO DE TENSÕES

CASO MAIS DESFAVORÁVEL $\longrightarrow \sigma_y = \dfrac{12 M_y}{t^3} z \xrightarrow{z \in [-t/2;\, t/2]} \sigma_y\big|_{max} = \dfrac{6 M_y}{t^2}$

NA SITUAÇÃO QUANDO $\sigma_y\big|_{max} = \sigma_{ced} = 90$ MPa e

PARA AS CARACTERÍSTICAS DA PLACA $D = 274{,}8$ Nm

temos então :

$$M_y = \frac{\sigma_{ced}\cdot t^2}{6} = -D\frac{1}{r} \Rightarrow \|r\| = \frac{6D}{\sigma_{ced}\cdot t^2} =$$

$= 1{,}50$ m ✓

$M_y = (\dots)$ ✓

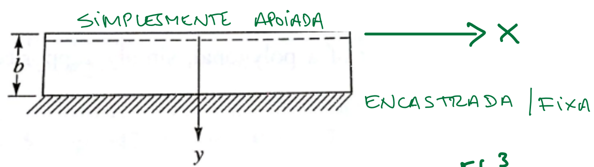
$M_x = (\dots)$ ✓

Exemplo 02

Uma placa comprida e estreita em aço ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$) encontra-se sujeita a um carregamento uniformemente distribuído ($p = p_0$), estando simplesmente apoiada no lado $y = 0$ e encastrada no lado $y = b$, conforme a figura.

a) Determinar uma expressão genérica para a deflexão numa posição qualquer da placa;
b) Identificar os pontos da placa onde irá ocorrer o valor máximo da deflexão (bem como a metodologia usada para chegar a esses pontos), calculando o seu valor;
c) Determinar o valor máximo da tensão normal σ_{yy}, para o caso particular em que $b = 0.5$ m, $t = 10$ mm, $p_0 = 100$ kPa.

$E = 200$ GPa
$\nu = 0{,}3$
$p = p_0 = 100$ kPa
$b = 0{,}5$ m
$t = 10$ mm



RIGIDEZ À FLEXÃO DA PLACA $\quad D = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 18315$ Nm

(a) EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA A DEFLEXÃO DA PLACA $\longrightarrow$ $\dfrac{d^4 w}{dy^4} = \dfrac{p_0}{D}$

EXPRESSÃO SIMPLIFICADA PARA A SITUAÇÃO PARTICULAR DESTA PLACA

A DEFLEXÃO É CONSTANTE AO LONGO DA DIREÇÃO x, COMO RESULTADO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

* VER EXEMPLO ANTERIOR ...

$C_i \Rightarrow$ constantes de integração

$$D \cdot w(y) = \frac{p_0}{24} y^4 + \frac{1}{6} C_1 y^3 + \frac{1}{2} C_2 y^2 + C_3 y + C_4$$

COMO CALCULAR AS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO ? CONDIÇÕES DE CONTORNO!

$y = 0 \longrightarrow w = 0 \longrightarrow C_4 = 0$ ✓

$ \longrightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ e $M_y = 0 \longrightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow C_2 = 0$ ✓

$y = b \longrightarrow w = 0 \longrightarrow \dfrac{1}{6} C_1 b^3 + C_3 b = -\dfrac{p_0}{24} b^4$

$ \longrightarrow \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 \longrightarrow C_3 = -\dfrac{1}{2} C_1 b^2 - \dfrac{p_0}{6} b^3$

$C_1 = -\dfrac{3}{8} p_0 b = -0{,}375\, p_0 \cdot b$ ✓ ; $\quad C_3 = 0{,}0208\, p_0 b^3$ ✓

$$w(y) = \frac{1}{D}\left[0{,}0417\, p_0 y^4 - 0{,}0625\, p_0 b y^3 + 0{,}0208\, p_0 b^3 y\right]$$

↳ função que calcula o valor da deflexão w da placa, para qualquer valor de posição $y \in [0;b]$

(b) em que pontos da placa ocorre a máxima deflexão? qual é o valor desse deslocamento máximo?

MÁXIMA DEFLEXÃO $\longrightarrow$ MÁXIMO VALOR DA FUNÇÃO $w(y)$ $\longrightarrow$ QUANDO TEMOS $\dfrac{dw}{dy} = 0$

$$D \frac{dw}{dy} = \frac{p_0}{6} y^3 + \frac{1}{2} C_1 y^2 + C_2 y + C_3 = 0$$

$$\therefore\ 0{,}1668\, y^3 - 0{,}1875\, b y^2 + 0{,}0208\, b^3 = 0$$

PARA A PLACA EM QUESTÃO $\longrightarrow b = 0{,}5$ m $\longrightarrow y \cong 0{,}205$ m ✓

POSIÇÃO NA PLACA ONDE TEMOS A MÁXIMA DEFLEXÃO

NA POSIÇÃO $y = 0{,}205$ m $\longrightarrow w\big|_{max} = 1{,}8$ mm ✓

(c) CALCULAR O VALOR MÁXIMO DA TENSÃO σ_{yy} NO INTERIOR DA PLACA

$M_y > M_x \longrightarrow M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \longrightarrow \sigma_{yy} = \dfrac{12 M_y}{t^3} z$

* VER EXEMPLO ANTERIOR ...

ZONA ONDE TEREMOS VALORES MÁXIMOS PARA M_y (e σ_{yy}):

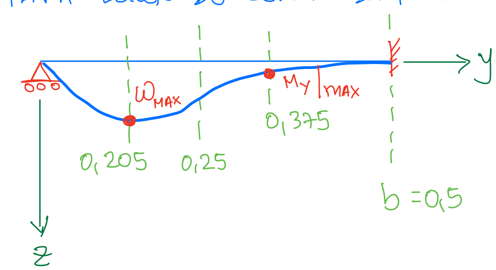
$$\frac{dM_y}{dy} = 0 \longrightarrow y = \frac{3}{8} b = 0{,}375 \text{ m}$$

$$M_y\big|_{max} = \frac{9}{128} p_0 b^2$$

$$\sigma_{yy}\big|_{max} = \frac{6 M_y\big|_{max}}{t^2}$$

$$\sigma_{yy}\big|_{max} = 105 \text{ MPa}$$

AS CONDIÇÕES DE CONTORNO EM CAUSA TRAZEM A ZONA CRÍTICA DE TENSÕES PARA LONGE DO CENTRO DA PLACA



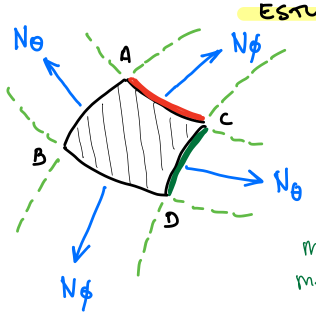
* EXTRA: QUAL O VALOR DE σ_{yy} NA ZONA DE ENCASTRAMENTO ($y = b$)??

REFERÊNCIA:
CAPÍTULO 12

Exemplo 03

METODOLOGIA DE CÁLCULO / PROJETO COM BASE NA TEORIA DE MEMBRANA P/ CASCAS DE REVOLUÇÃO:

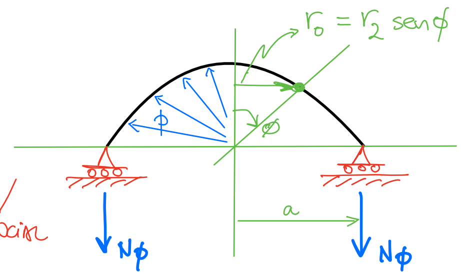
ESTUDO DE CASO PARA UMA CASCA SEMI-ESFÉRICA



$r_1 = r_2 = a$

$\overline{CD}$ → medido no meridiano

$\overline{AC}$ → TANGENCIAL/CIRCUNFERENCIAL



ASSUMINDO UMA SITUAÇÃO DE PRESSÃO INTERNA CONSTANTE p

OBJETIVO: CALCULAR OS ESFORÇOS NA ZONA DOS APOIOS DA ESTRUTURA → $\phi = 90°$

$p_z = -p$ → PRESSÃO INTERNA, PERPENDICULAR À SUPERFÍCIE DA ESTRUTURA

$R = -p \cdot \pi a^2$ → FORÇA VERTICAL EQUIVALENTE À PRESSÃO INTERNA

SINAL NEGATIVO, POIS ATUAM NO SENTIDO CONTRÁRIO À CONVENÇÃO POSITIVA PARA A DIREÇÃO z

ESFORÇOS SOBRE A ESTRUTURA (EXPRESSÕES GENÉRICAS)

$$N_\phi = -\frac{R}{2\pi r_0 \operatorname{sen}\phi} \quad ; \quad \frac{N_\phi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -p_z$$

↳ $r_0 = r_2 \operatorname{sen}\phi$

$$N_\phi = -\frac{R}{2\pi a \operatorname{sen}^2\phi} \quad ; \quad N_\phi + N_\theta = -p_z \cdot a$$

$$N_\phi = \frac{\pi a^2 p}{2\pi a \operatorname{sen}^2\phi} \quad ; \quad N_\phi + N_\theta = p \cdot a \quad \Big\}\ \text{genéricas}$$

ZONA DOS APOIOS → $\phi = 90°$ → $N_\phi = \dfrac{pa}{2}$; $N_\theta = N_\phi$

CAMPO DE TENSÕES

TENSÕES AO LONGO DO MERIDIANO

$$\underbrace{\sigma_{\phi\phi} = \frac{N_\phi}{t} = \frac{pa}{2t}}$$

TENSÕES AO LONGO DO PARALELO

$$\underbrace{\sigma_{\theta\theta} = \frac{N_\theta}{t} = \frac{pa}{2t}}$$

CAMPO DE DEFORMAÇÕES

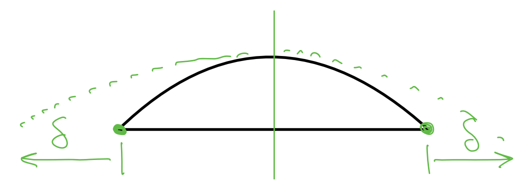
$$\underbrace{\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{Et}\left(N_\phi - \nu N_\theta\right)}_{\text{meridiano}}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{Et}\left(N_\theta - \nu N_\phi\right)}_{\text{circunferencial}}$$

EXPANSÃO RADIAL NA ZONA DOS APOIOS ($\phi = 90°$)

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\Delta r_0}{r_0} = \frac{\delta}{r_0}$$

$$\delta = r_0\, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{r_0}{Et}\left(N_\theta - \nu N_\phi\right) = \frac{pa^2}{2Et}(1-\nu)$$

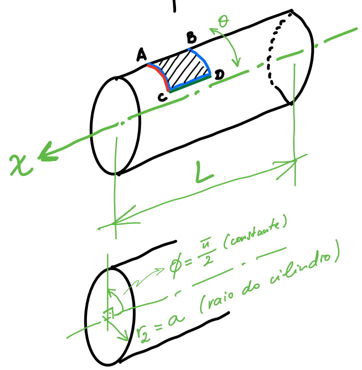


REFERÊNCIA :
CAPÍTULO 12

Exemplo 04

METODOLOGIA DE CÁLCULO / PROJETO COM BASE NA TEORIA DE MEMBRANA P/ CASCAS DE REVOLUÇÃO : ESTUDO DE CASO PARA UMA CASCA CILÍNDRICA, COM PRESSÃO INTERNA p

$$\begin{cases} \text{pressão interna} \quad p_z = -p \\ r_0 = r_2 \, \text{sen}\phi = a \end{cases}$$



esforços internos

- $N_\phi = -\dfrac{R}{2\pi r_0 \,\text{sen}\phi}$

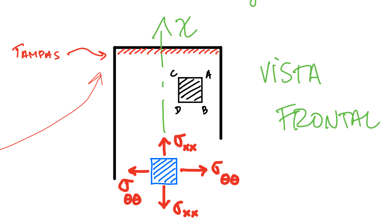
$$= -\frac{R}{2\pi a} \longrightarrow N_\phi \equiv N_x$$, tendo em conta a geometria e sistema de eixos representado

- $\dfrac{N_\phi}{r_1} + \dfrac{N_\theta}{r_2} = -p_z \longrightarrow N_\theta = p.a$

$r_1 = \infty$; $r_2 = a$
$\overline{CD}$ meridiano ; $\overline{AC}$ tangencial

- RESULTANTE DA PRESSÃO INTERNA QUE ATUA NA FACE PERPENDICULAR AO EIXO DE REVOLUÇÃO

$$R = -p.\pi a^2$$
(de dentro para fora)



JUNTANDO AS EXPRESSÕES ANTERIORES

$$N_x = -\frac{R}{2\pi a} = \frac{pa}{2} \; ; \quad N_\theta = pa \quad \text{(esforços)}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{pa}{2t} \; ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pa}{t} \qquad \sigma_{\theta\theta} > \sigma_{xx} \qquad \text{(tensões)}$$

$$\delta = \frac{r_0}{E}\left(\sigma_{\theta\theta} - \nu\,\sigma_{xx}\right) = \frac{pa^2}{2Et}(2-\nu) \quad \text{(expansão radial)}$$