

Aviônica e Espaciônica

Sistemas de Navegação

Telmo Reis Cunha

trcunha@ua.pt

2024/2025

Índice

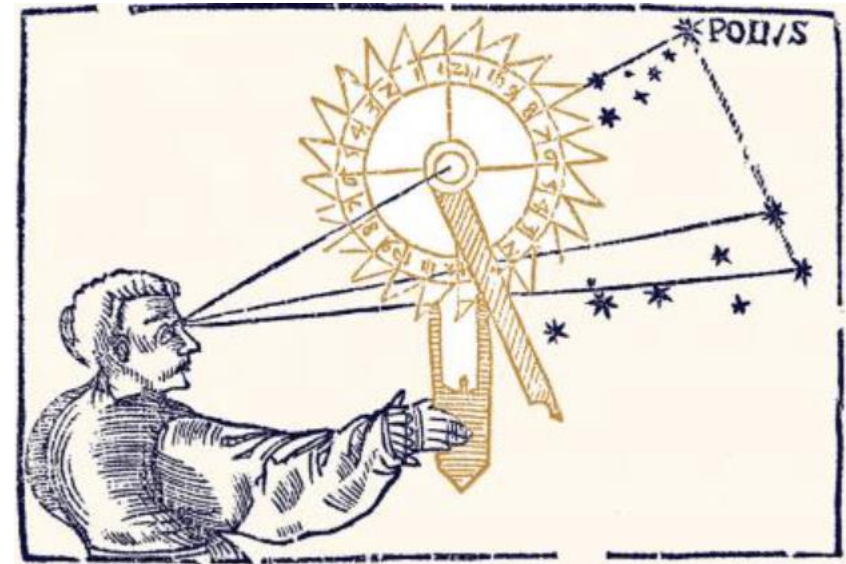
- Introdução
- Sistemas de posicionamento por satélite
- Sistemas inerciais de navegação
- Integração de sistemas inerciais com sistemas de posicionamento por satélite

Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

Desde que se iniciaram as viagens de longo curso (por terra, por mar, pelo ar, e para o espaço), surgiu a necessidade de se conhecer, em cada instante de tempo, a localização e a orientação de pessoas e veículos.

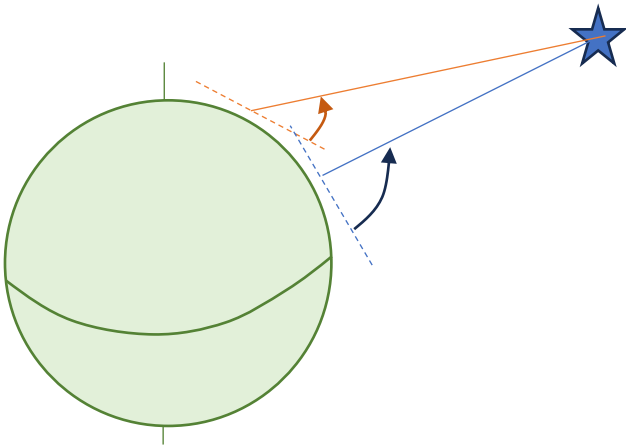
Ao se observar que o céu noturno apresenta diferenças quando observado de vários pontos do planeta, os antigos navegantes desenvolveram técnicas para se guiarem pelas estrelas e astros celestes (referem-se registos de há mais de 4000 anos), uma arte conhecida genericamente por Navegação Celeste.



Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

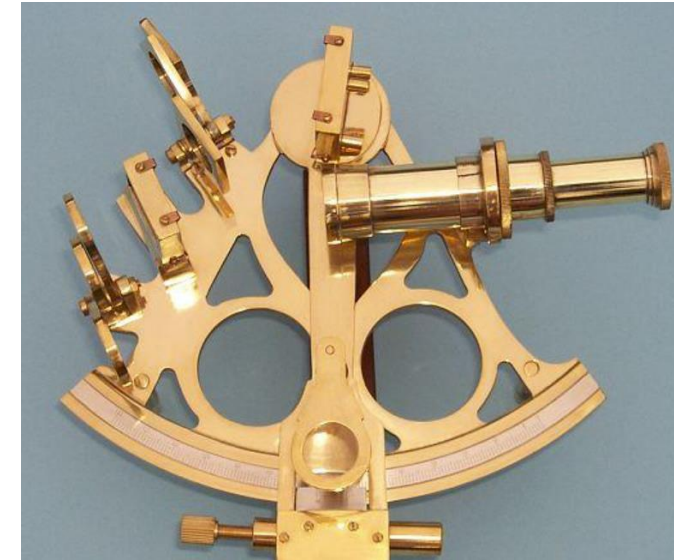
Com a necessidade de se aumentar a precisão das estimativas de localização, surgiram técnicas e instrumentos especializados na medição de ângulos entre uma determinada linha de referência (tipicamente, a horizontal local, e a linha que une o observador a um determinado astro).



A necessidade de medir o tempo com precisão tornou-se igualmente relevante.



Astrolábio
(c. 200 a.C.)



Sextante
(séc. XVIII)

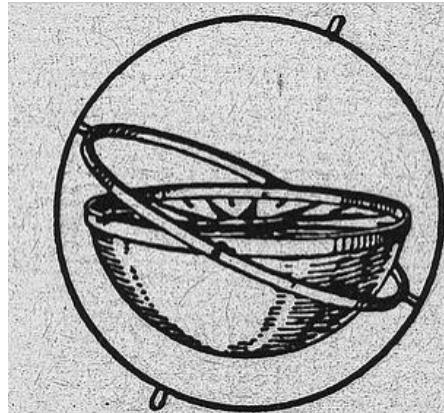
Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

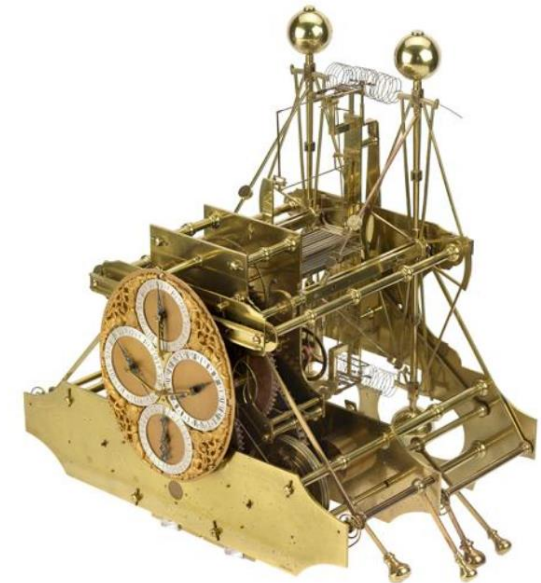
A invenção da bússola (China) e de cronómetros (por exemplo, o de John Harrison, séc. XVIII) vieram a trazer um incremento substancial da precisão de posicionamento, especialmente para embarcações que faziam travessias oceânicas, e outras viagens de longo curso sem referências terrestres visíveis. Estes instrumentos criam medidas referidas a pontos consistentes de referência globais.



Bússola
(c. 200 a.C.)



Bússola náutica
(séc. XVI)



Cronómetro náutico de
John Harrison (séc. XVIII)

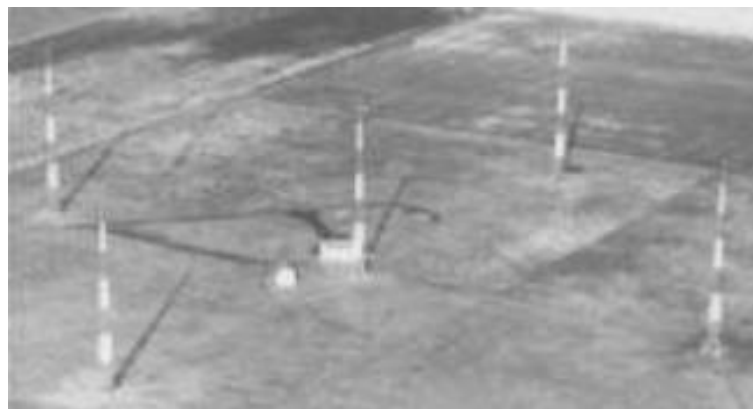
Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

Com a descoberta/dedução das ondas eletromagnéticas e respetiva propagação (transição entre o séc. XIX e o séc. XX), vários sistemas de navegação (especialmente para aeronaves e embarcações) foram desenvolvidos permitindo uma maior precisão a longas distâncias. Os pontos de referência passam a ser criados pelo Homem.



Estação VOR



Estação LFR



Estação ILS

The
KOLSTER RADIO COMPASS
for
YACHTS and SMALL CRAFT

**Reduction
in Price**

HAS a normal range of 50 miles and is as accurate in thick or stormy weather as in clear weather. Suitable for vessels as small as 40-footers. This radio compass is the last word in navigation aids. KOLSTER radio compasses are used throughout the world by many governments including 8 departments of the U. S. GOVT. and yacht owners everywhere.

Dr. Kolster operating his yacht type Radio Compass

Write for details, including prices and the many uses to which this compass can be put.
Manufactured, sold and serviced by

FEDERAL TELEGRAPH COMPANY
10700 Helena Ave. CLEVELAND
625 Market Street SAN FRANCISCO

(1930)

Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

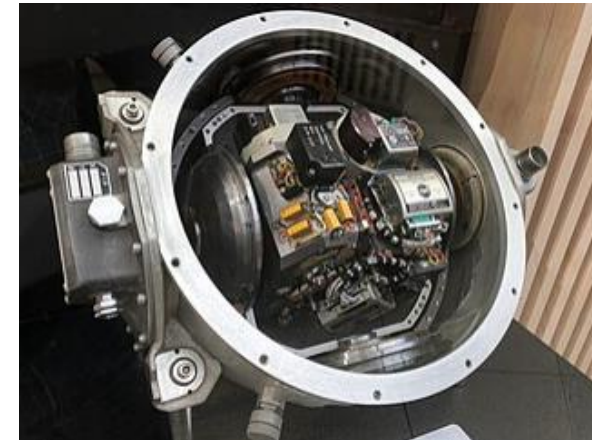
A qualidade da construção de sensores (acelerómetros e giroscópios) e a capacidade de processamento dos dados por estes gerados permitiram, no séc. XX, a criação de Sistemas Inerciais de Navegação (*Inertial Navigation Systems* – INS), que ainda hoje determinam a posição e orientação (atitude) de aeronaves, embarcações e veículos espaciais.



INS



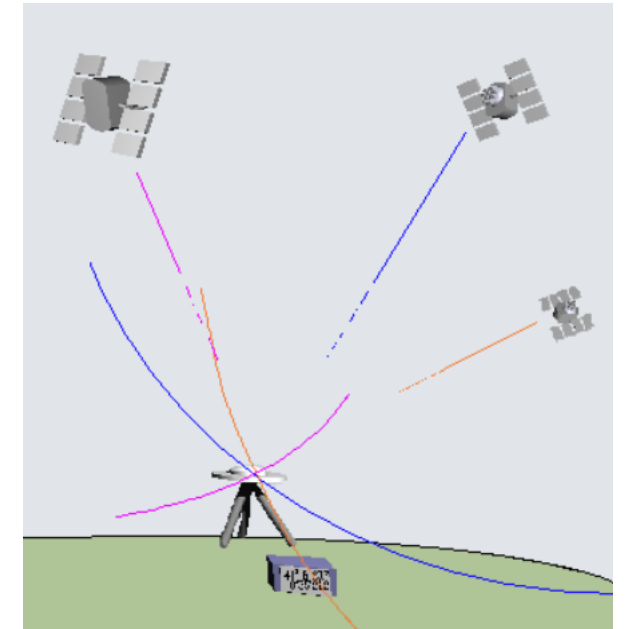
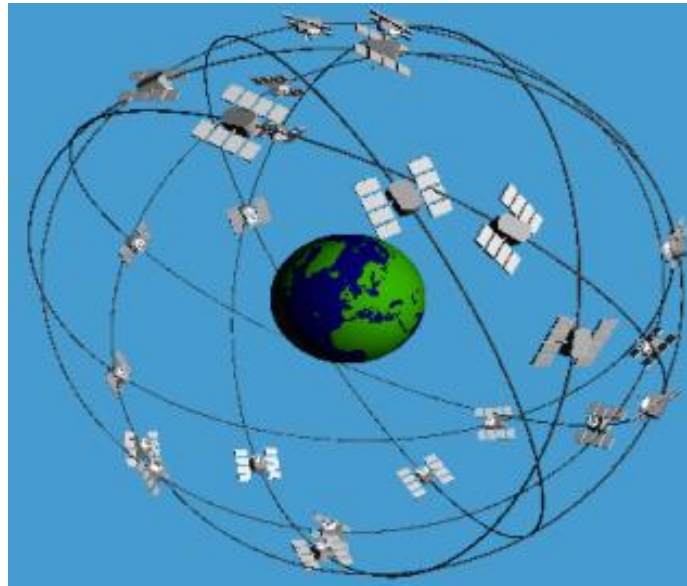
IMU em plataforma estabilizadora
(*gimballed*) das missões Apollo



Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

Mais recentemente, introduzidos nas últimas décadas do séc. XX, surgiram os Sistemas de Posicionamento por Satélite (*Global Navigation Satellite Systems* – GNSS) que mais uma vez fazem uso de sinais eletromagnéticos de referência, agora colocados em satélites que circundam a Terra.



Índice

- Introdução
- **Sistemas de posicionamento por satélite**
- Sistemas inerciais de navegação
- Integração de sistemas inerciais com sistemas de posicionamento por satélite

Sistemas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

As técnicas de posicionamento por satélite consistem em medir com precisão as distâncias entre o recetor (cujas coordenadas se pretende determinar) e os satélites em linha de vista com o recetor.

Se se conhecer as coordenadas de cada satélite, cada medida da distância satélite-recetor forma uma superfície esférica contendo as possíveis posições onde o recetor se poderá encontrar.

As coordenadas do recetor podem ser determinadas, então, pela interseção das superfícies esféricas referidas aos vários satélites que o recetor consegue observar – esta técnica é genericamente denominada de **Triangulação**.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

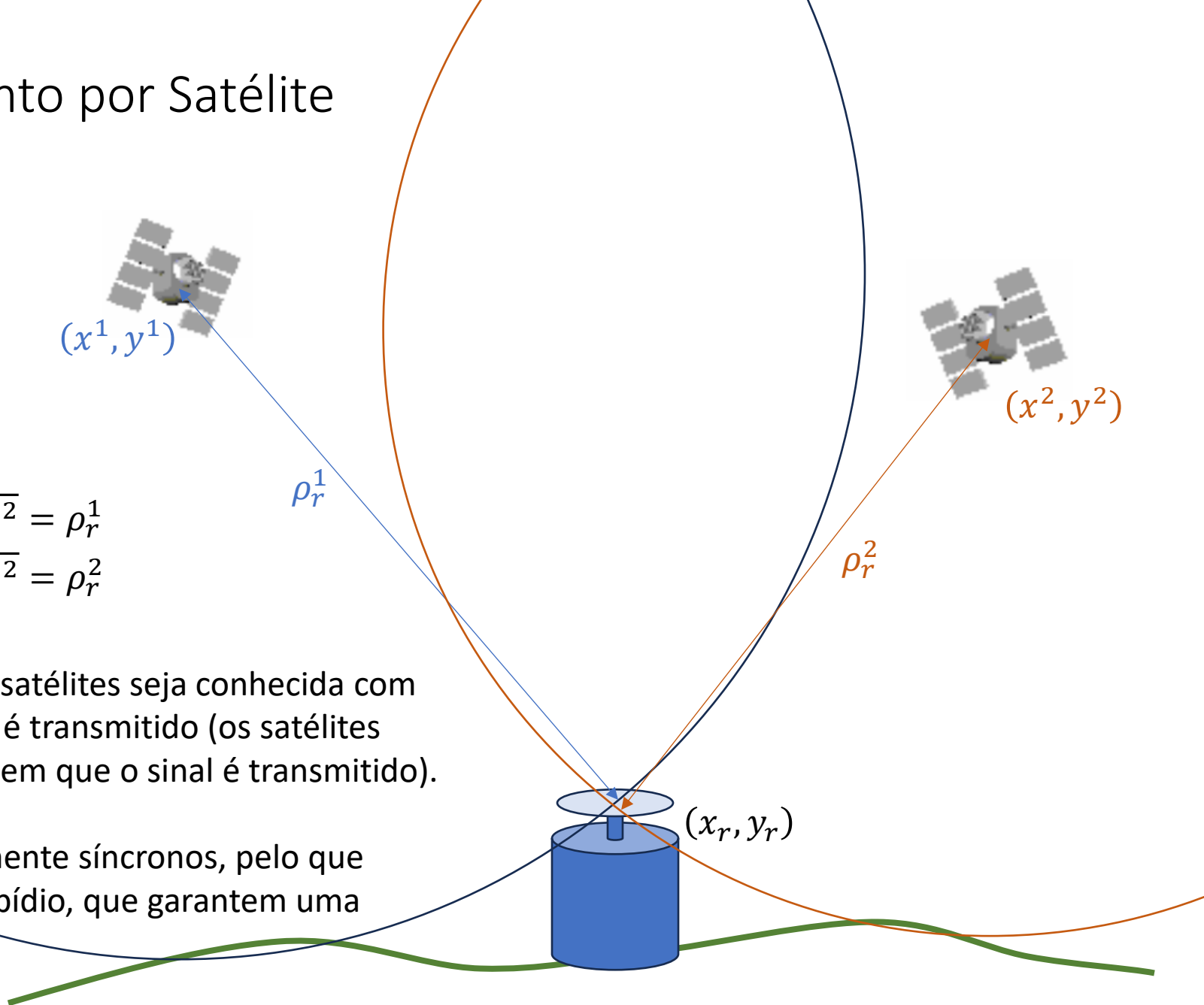
Princípio de operação

Exemplificação em 2D:

$$\begin{cases} \sqrt{(x^1 - x_r)^2 + (y^1 - y_r)^2} = \rho_r^1 \\ \sqrt{(x^2 - x_r)^2 + (y^2 - y_r)^2} = \rho_r^2 \end{cases}$$

Mas estas equações exigem que a posição dos satélites seja conhecida com muito rigor, no preciso instante em que o sinal é transmitido (os satélites enviam informação sobre o instante de tempo em que o sinal é transmitido).

Logo, os satélites precisam de estar temporalmente síncronos, pelo que transportam relógios baseados em célio ou rubídio, que garantem uma deriva temporal muito baixa (unidades de 10^{-14} ou 10^{-13} segundos por segundo).



Sistemas de Posicionamento por Satélite

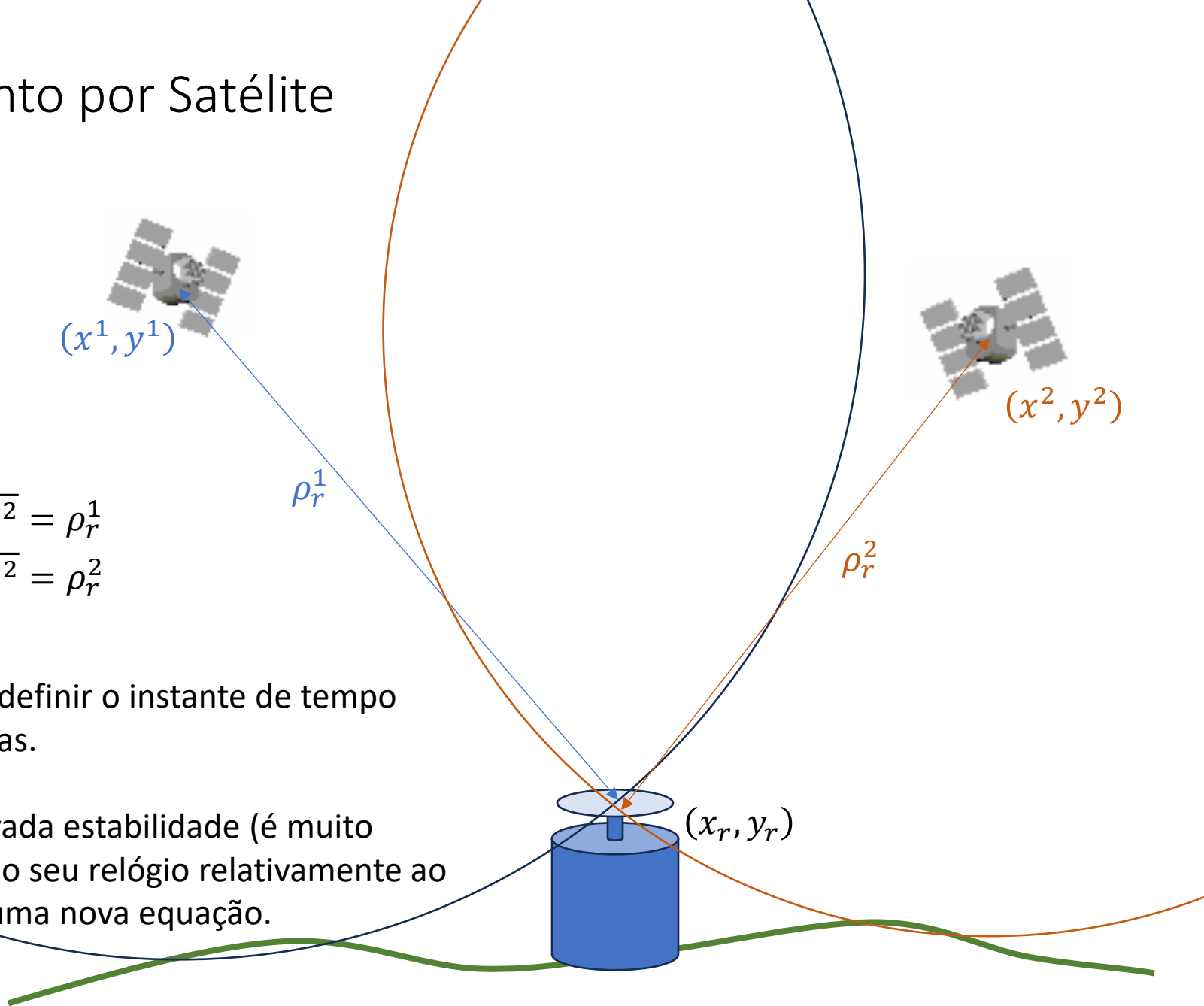
Princípio de operação

Exemplificação em 2D:

$$\begin{cases} \sqrt{(x^1 - x_r)^2 + (y^1 - y_r)^2} = \rho_r^1 \\ \sqrt{(x^2 - x_r)^2 + (y^2 - y_r)^2} = \rho_r^2 \end{cases}$$

Mais ainda, é o recetor que é responsável por definir o instante de tempo em que as distâncias aos satélites são calculadas.

Mas o recetor não pode ter um relógio de elevada estabilidade (é muito caro), pelo que tem que determinar o desvio do seu relógio relativamente aos satélites. Uma incógnita adicional requer uma nova equação.



Sistemas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

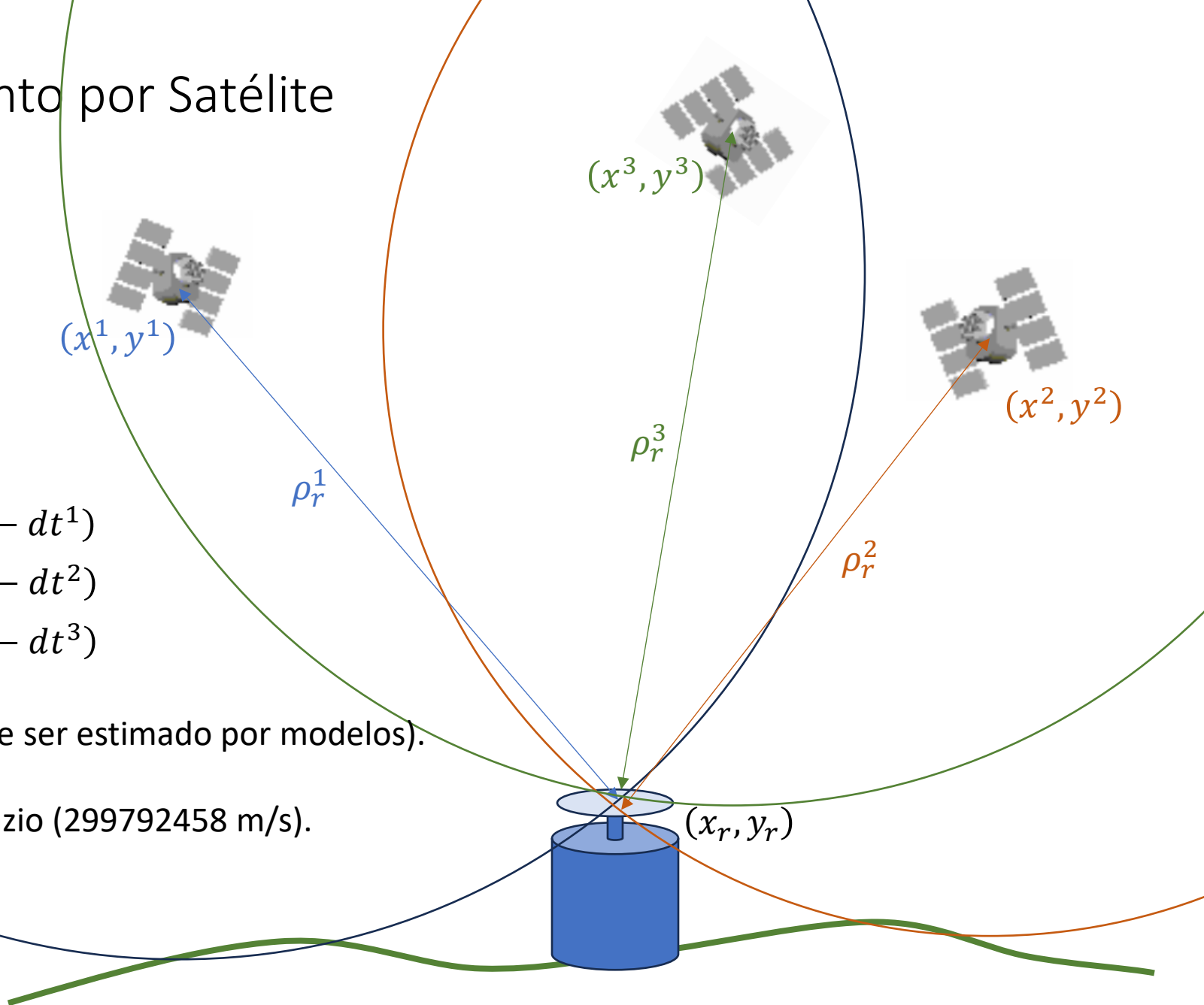
Exemplificação em 2D:

$$\begin{cases} \sqrt{(x^1 - x_r)^2 + (y^1 - y_r)^2} = \rho_r^1 + c(dt_r - dt^1) \\ \sqrt{(x^2 - x_r)^2 + (y^2 - y_r)^2} = \rho_r^2 + c(dt_r - dt^2) \\ \sqrt{(x^3 - x_r)^2 + (y^3 - y_r)^2} = \rho_r^3 + c(dt_r - dt^3) \end{cases}$$

dt^k : Desvio do relógio do satélite k (pode ser estimado por modelos).

dt_r : Desvio do relógio do recetor r .

c : velocidade de propagação da luz no vazio (299792458 m/s).



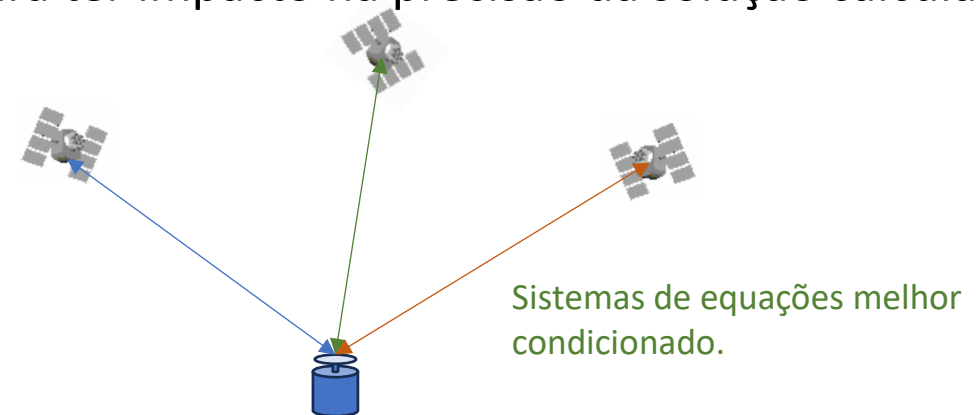
Sistemas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

No cenário 3D, há mais uma coordenada para ser determinada, pelo que é necessária mais uma equação (logo, o número mínimo de satélites observados em simultâneo para permitir o cálculo da posição do recetor é de 4):

$$\sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2} = \rho_r^k + c(dt_r - dt^k), \quad k = 1, \dots, 4, \dots$$

A geometria formada pelos satélites observados irá ter impacto na precisão da solução calculada:



Sistemas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

Os sinais enviados pelos satélites percorrem meios que reduzem a velocidade de propagação desses sinais, adicionando erros à estimativa da verdadeira distância entre satélites e recetor.

Pequenas imprecisões geométricas relativamente aos pontos exatos de emissão e receção dos sinais também contribuem para a imprecisão dessa estimativa.

$$\sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2} = \rho_r^k + c(dt_r - dt^k) + I_r^k + T_r^k + c(d_r + d^k) + \varepsilon_r^k, \quad k = 1, \dots, 4, \dots$$

I_r^k : Desvio introduzido pela passagem do sinal pela Ionosfera (é uma camada com cargas elétricas).

T_r^k : Desvio introduzido pela passagem do sinal pela Troposfera (nuvens e humidade têm impacto).

d_r : Incerteza geométrica na localização exata do centro de fase da antena do recetor.

d^k : Incerteza geométrica relativamente ao ponto de emissão do satélite k .

ε_r^k : Ruído associado ao processo de propagação e receção do sinal.

Sistemas de Posicionamento por Satélite



O Sistema GPS (*Global Positioning System*) - Introdução

Conduzido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América, o sistema GPS foi desenvolvido nos anos 70 (arranque em 1973), sendo colocado em operação ao longo dos anos 80 e 90 (em 1993 completou a constelação de satélites).

O segmento espacial do sistema GPS considera uma constelação nominal de 24 satélites (no momento existem 31 satélites), colocados ao longo de seis planos orbitais distintos (igualmente espaçados, e com uma inclinação de 55° relativamente ao plano do equador), em órbitas praticamente circulares de raio aproximado de 26.56 mil km. O período orbital é de aproximadamente 12 horas siderais.

Inicialmente desenvolvido para aplicações militares, em 1983 foi aberta a possibilidade de se tornar disponível para operadores civis (mas com um erro de cerca de 100 metros propositadamente adicionado – esta perturbação intencional foi removida no ano 2000).

Sistemas de Posicionamento por Satélite

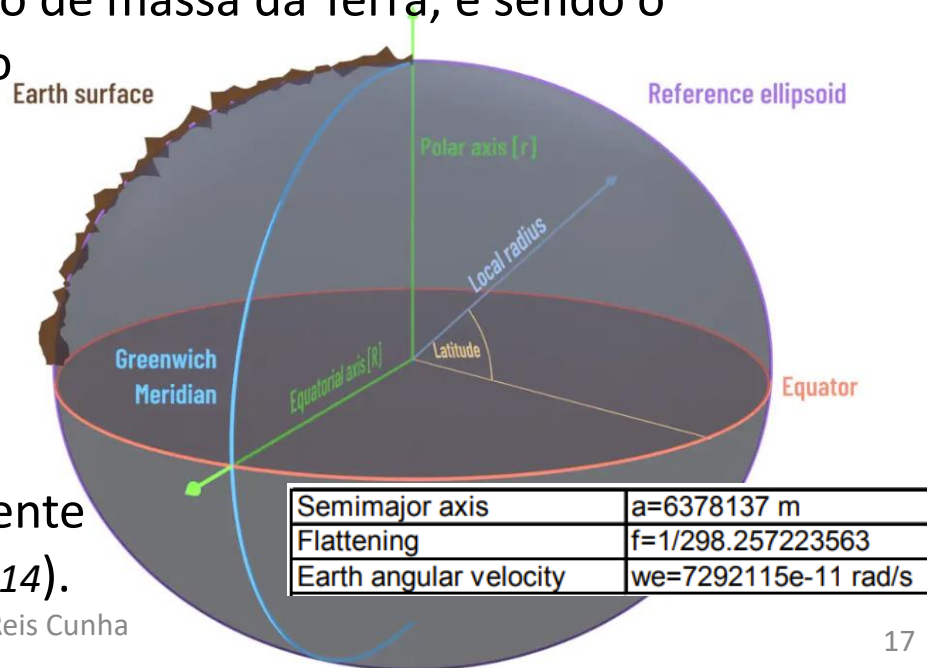
O Sistema GPS – Sistema Coordenado de Referência

Cada sistema de posicionamento requer a definição prévia de um referencial espacial, relativo ao qual as coordenadas são especificadas.

O sistema GPS considera o sistema de referência WGS84 (*World Geodetic System 1984*), que define um sistema de três eixos ortogonais centrado no centro de massa da Terra, e sendo o eixo dos xx coincidente com o plano do equador, intersecando o meridiano de Greenwich, e o eixo dos zz atravessa o polo Norte geográfico da Terra.

Este sistema define um elipsoide que aproxima o formato da Terra (para a representar Latitude, Longitude e Altitude).

Este sistema é regularmente atualizado, sendo quase coincidente com o sistema ITRS2014 (*International Terrestrial Reference System 2014*).



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Sistema Coordenado de Referência

Também considera um sistema de referência para o tempo, sendo este designado de **Tempo GPS**.

O tempo GPS segue o sistema de referência UTC (*Coordinated Universal Time*), a menos da inserção dos *leap seconds* (o tempo GPS não considera esta alteração esporádica de um segundo). No momento, o Tempo GPS é igual ao Tempo UTC mais 18 segundos.

O tempo GPS é o tempo acumulado deste o instante de transição do dia 5 para o dia 6 de Janeiro de 1980.

Usualmente, é descrito por dois parâmetros:

- **Número da Semana:** contador de semanas desde a origem do tempo GPS
- **Número de Segundos da Semana:** segundos decorridos desde a última transição de Sábado para Domingo.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Sinais

Cada satélite envia continuamente duas (ou mais, até cinco) ondas sinusoidais de frequências distintas:

- L1 (1.57542 GHz)
- L2 (1.22760 GHz)

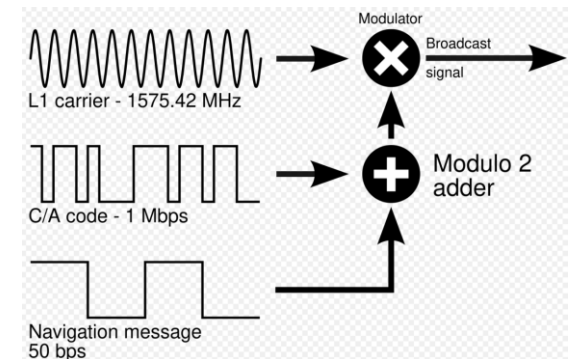
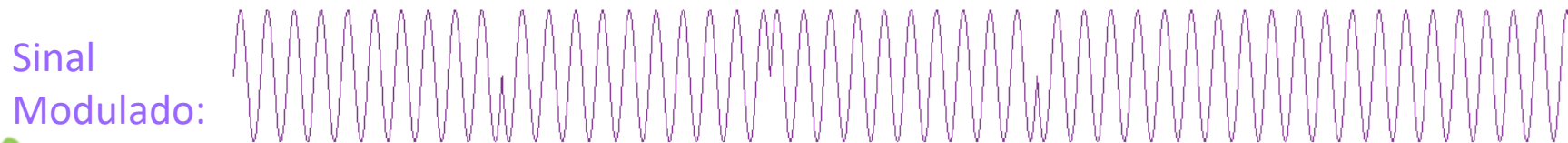
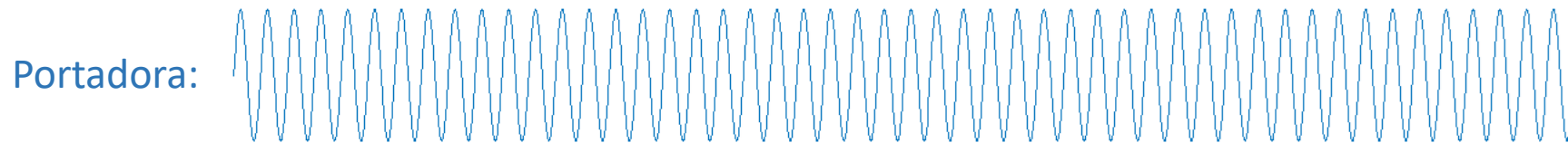
Estas ondas são moduladas por sinais de informação (mais códigos foram sendo adicionados):

- **Mensagem de navegação** (37500 bits enviados à taxa de 50 bits/s, em L1 e L2): Contém os valores dos parâmetros do modelo que permite determinar a posição precisa desse satélite num instante de tempo próximo (~4 horas) ao do envio dessa mensagem, assim como dos parâmetros que permitem estimar (com menor precisão) a posição dos restantes satélites. Também envia informação sobre o estado do satélite.
- **Código *Coarse-aquisition*, C/A** (1023 bits a 1.023 Mbits/s, em L1 apenas): Código de uso civil que permite identificar o satélite e calcular a pseudo-distância entre satélite e recetor.
- **Código *Precise*, P** (10.23 Mbits/s, em L1 e L2): Código encriptado para uso militar.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Sinais

Os códigos modulam as portadoras através de modulação BFSK (*binary phase-shift keying*):



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Sinais

O código C/A é constituído por uma sequência pseudo-aleatória de bits que é única para cada satélite, e constitui o identificador desse satélite (PRN – *pseudo-random number*).

As 32 sequências PRN são escolhidas por forma a apresentarem uma correlação praticamente nula entre si – é esta característica que permite ao recetor (que conhece as sequências PRN) separar os sinais recebidos de vários satélites (usam todos a mesma frequência). Esta técnica de partilha de um recurso comum é conhecida por CDMA (*code division multiple access*).

Uma vez que cada trama (*frame*) da mensagem de navegação começa exatamente no início de cada minuto ou a meio de cada minuto (cada trama corresponde a 30 segundos, e contém o valor do instante de tempo do seu início, segundo o relógio do satélite), e como cada código C/A é repetido a cada milissegundo, torna-se possível contabilizar o tempo demorado pelo sinal a viajar entre o satélite e o recetor (a menos dos erros de relógio e de propagação).

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Sinais

O tempo de duração de cada bit do código C/A corresponde a cerca de 293 metros de propagação do sinal.

Como o código P é 10 vezes mais rápido que o código C/A, cada bit seu corresponde a 29 metros.

O hardware dos recetores GPS têm a possibilidade de detetar as transições de bits com precisão melhor que 1 bit de código, o que permite estimar as distâncias para os satélites com melhor precisão.

Em boas condições de receção de sinais de satélites, dispostos numa geometria favorável, a precisão de posicionamento através de medidas de pseudo-distância provenientes de código C/A ronda os 5 metros (uma melhor precisão será obtida com medidas provenientes do sinal L5).

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Sinais

Recetores mais avançados possuem PLLs (*Phase-Lock Loops*) que efetuam o seguimento da portadora (L1 e/ou L2) a partir de um determinado instante (definido pelo próprio recetor).

Depois de recuperar a portadora (onda sinusoidal) que foi modulada pelos sinais de código, as PLLs alinham-se com essa onda e vão contando os períodos (neste contexto designados por ciclos) que vão acumulando deste esse instante inicial.

Estas medidas de ciclos acumulados, que vão sendo registadas pelo recetor a cada instante de registo de dados (tipicamente, a cada segundo), são denominadas de Medidas de Fase, e proporcionam uma forma alternativa de estimar (com uma precisão superior) a distância entre cada satélite e o recetor.

O comprimento de onda da portadora L1 é de 19 cm, e as PLLs conseguem medir o número de ciclos acumulados com uma resolução de frações de ciclo da portadora.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Sinais

O problema da utilização das medidas de fase é o facto de não ser conhecido, no instante inicial de referência, quantos ciclos inteiros da portadora preenchem o trajeto instantâneo entre satélite e recetor (as medidas de fase iniciam no valor zero).

Esse número inteiro de ciclos iniciais denomina-se de **Ambiguidade de Fase**, sendo de determinação complexa.

Os algoritmos dedicados que efetuam o cálculo desses valores (genericamente designada por Resolução de Ambiguidades) permitem obter nível de precisão de posicionamento impressionantes.

Com equipamento adequado e condições favoráveis, a precisão de posicionamento instantâneo (i.e., em tempo-real) ronda os 2 cm, e para os casos em que o recetor se encontra estacionário durante um período de tempo razoável essa precisão atinge valores de poucos mm.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Medidas

São, assim, duas as principais medidas que servem para estimar a distância satélite-recetor:

Medida de Pseudo-distância:

$$P_r^k(t) = \rho_r^k(t, t - \tau_r^k) + c(dt_r - dt^k) + I_r^k(t) + T_r^k(t) + c(d_r + d^k) + \varepsilon_r^k$$

Diagram illustrating the components of the Pseudo-range measurement equation:

- $P_r^k(t)$: Valor de pseudo-distância (em metros) medido pelo recetor r relativa ao satélite k (em cada instante de medição)
- $\rho_r^k(t, t - \tau_r^k)$: Valor real da distância entre o recetor r (no instante de receção, t) e o satélite k (no instante de transmissão, $t - \tau_r^k$)
- $c(dt_r - dt^k)$: Desvio do relógio do recetor r , relativamente ao tempo de referência (green arrow) and Desvio do relógio do satélite k , relativamente ao tempo de referência (yellow arrow)
- $I_r^k(t)$: Atraso (expresso em metros) induzido pela ionosfera à medida que o sinal enviado pelo satélite k (em direcção ao recetor r) atravessa essa camada (orange arrow)
- $T_r^k(t)$: Atraso (expresso em metros) induzido pela troposfera à medida que o sinal enviado pelo satélite k (em direcção ao recetor r) atravessa essa camada (yellow arrow)
- $c(d_r + d^k)$: Tempo de propagação entre o plano de referência de geração do sinal no satélite k e a sua antena (blue arrow) and Tempo de propagação entre a antena do recetor r e o plano de referência de receção do sinal (green arrow)
- ε_r^k : Ruído aleatório (red arrow)

c – velocidade da luz no vácuo

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Medidas

São, assim, duas as principais medidas que servem para estimar a distância satélite-recetor:

Medida de Fase:

$$\Phi_r^k(t) = \lambda \phi_r^k(t) = \rho_r^k(t, t - \tau_r^k) + c(dt_r - dt^k) - I_r^k(t) + T_r^k(t) + c(\delta_r + \delta^k) + \lambda N_r^k + \varepsilon_r^k$$

A perturbação ionosférica revela-se com sinal oposto à da medida da pseudo-distância

Número de ciclos (períodos) da portadora enviada pelo satélite k que vão sendo contados (acumulados) pelo recetor r , sendo este valor registado em cada instante de amostragem (instante de medida)

Tempo de propagação entre o plano de referência de receção/geração do sinal e a antena do recetor r /satélite k

Ambiguidade de Fase – é o número inteiro de ciclos da portadora que existia no percurso entre o satélite k e o recetor r no instante de tempo em que o recetor começou a fazer o seguimento da fase da portadora

λ – comprimento de onda da portadora, no vácuo

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS - Medidas

Há recetores que também medem a derivada instantânea da medida de fase:

Medida de Doppler:

$$\lambda D_r^k(t) = \dot{\rho}_r^k(t, t - \tau_r^k) + c(\dot{d}t_r - \dot{d}t^k) - \dot{I}_r^k(t) + \dot{T}_r^k(t) + \varepsilon_r^k$$

Medida de Doppler observada pelo recetor r
relativamente ao sinal enviado pelo satélite k
(em Hz)

$\dot{x}(t)$ – derivada do sinal $x(t)$ em ordem ao tempo

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Stand-Alone Positioning:

Consiste em resolver as equações de triangulação através de um método de otimização (minimização do erro quadrático, por exemplo) com base nas medidas diretas registadas por um único recetor GPS, resultando na estimativa da posição 3D da antena desse recetor (e do erro do seu relógio).

$$\sqrt{(x^k - x_r)^2 + (y^k - y_r)^2} = \rho_r^k + c(dt_r - dt^k) + I_r^k + T_r^k + c(d_r + d^k) + \varepsilon_r^k, \quad k = 1, \dots, 4, \dots$$

Os atrasos provocados pela ionosfera e pela troposfera são estimados através de modelos (a mensagem de navegação envia, também, parâmetros de um modelo para estimar o atraso ionosférico). Estes modelos não são extremamente precisos...

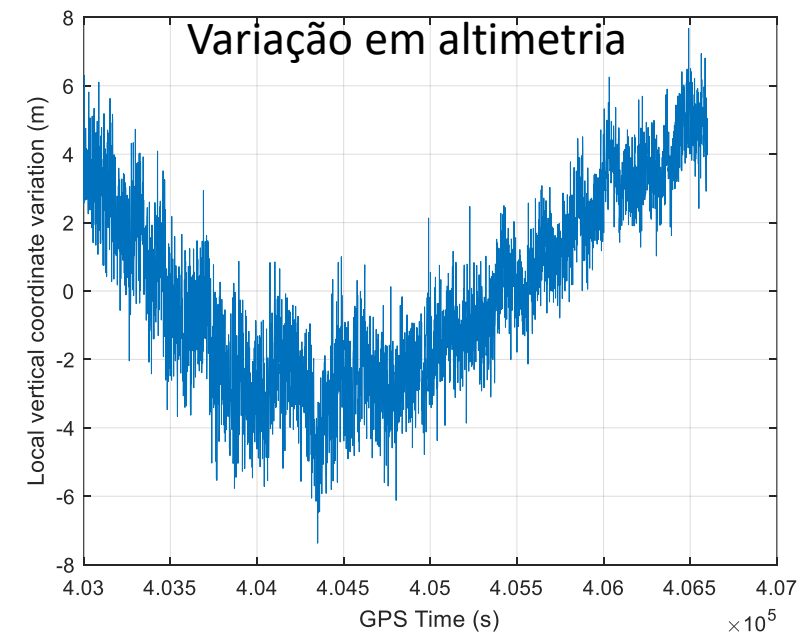
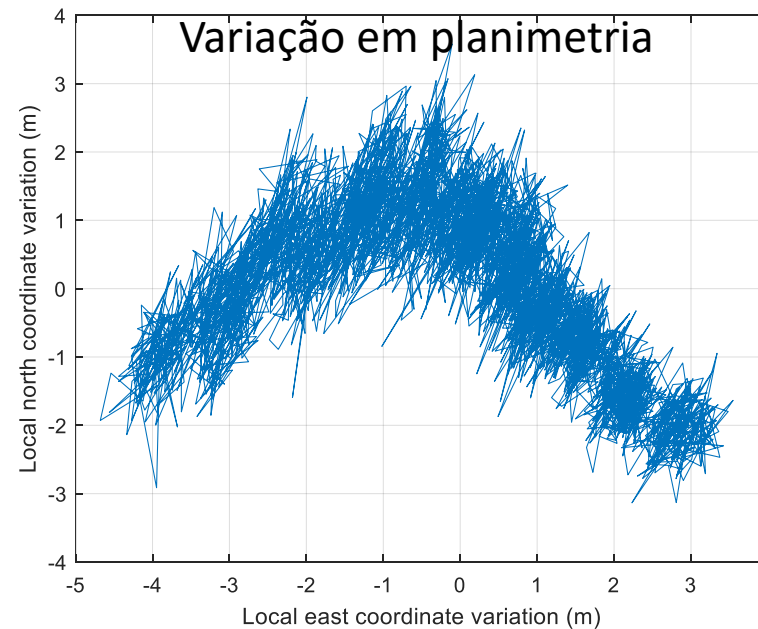
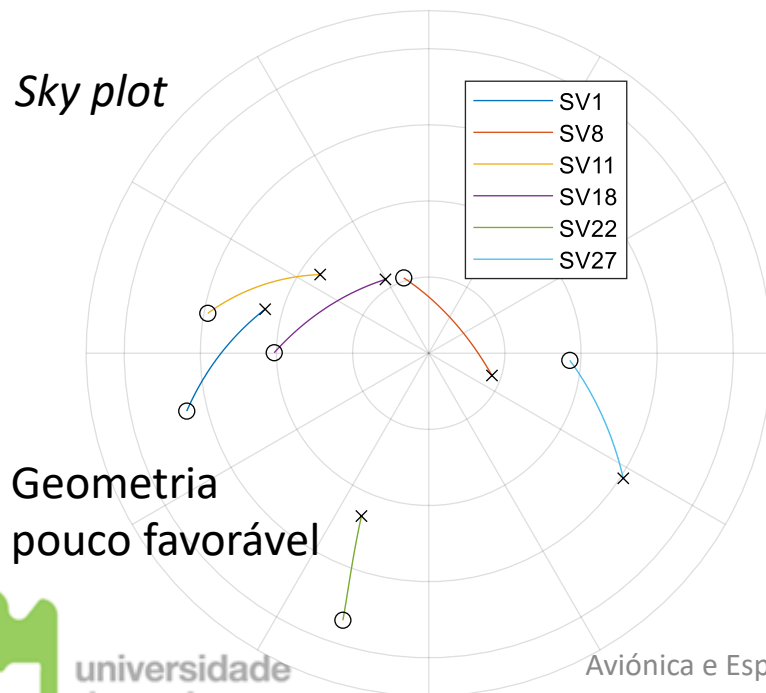
Os erros de estimação dos vários termos têm muito impacto na precisão da posição calculada.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Stand-Alone Positioning:

Exemplo da variação da posição calculada de um recetor estático, ao longo de uma hora, com base nos dados recebidos de seis satélites GPS:



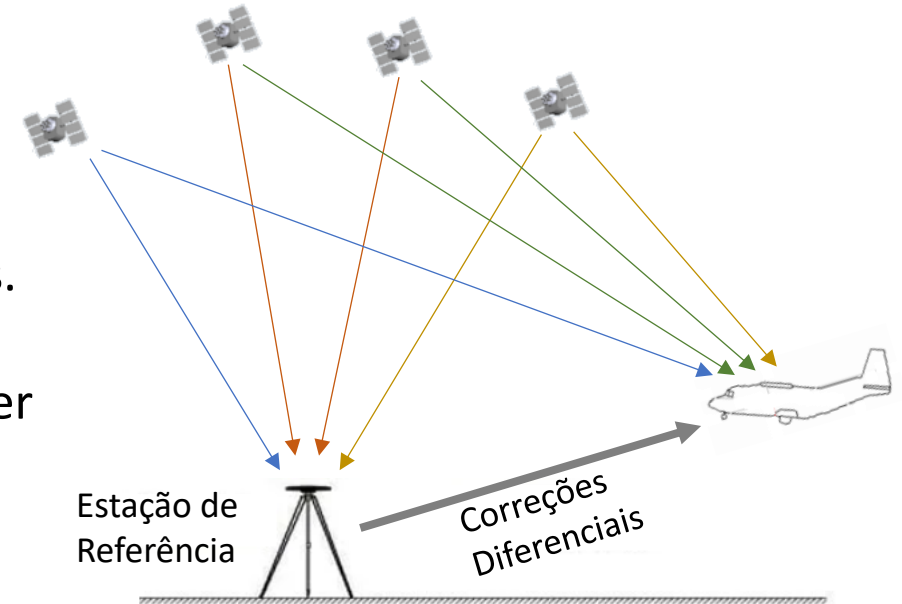
Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Posicionamento Diferencial

As perturbações introduzidas pela ionosfera, troposfera e pelo desvio do relógio do satélite podem ser reduzidas através de modelos existentes para o efeito, ou praticamente cancelados através do uso de **Técnicas Diferenciais**: coloca-se um segundo recetor num ponto estático próximo mas de coordenadas conhecidas, sendo este usado para estimar as perturbações.

Em aplicações de tempo real torna-se necessário estabelecer uma comunicação (por rádio, usualmente) entre a estação de referência e o recetor a localizar (*rover*).



Sistemas de Posicionamento por Satélite

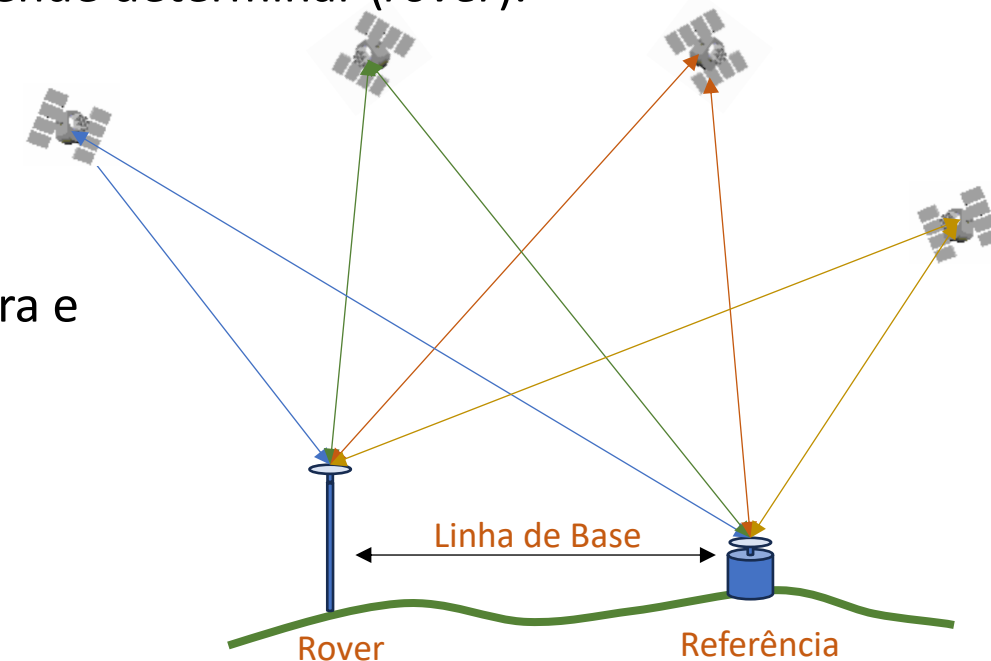
O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Posicionamento Diferencial – *Between Receivers Single-Difference Positioning*:

Consiste em colocar um segundo recetor GPS numa posição estática conhecida (estação de referência) nas imediações do recetor cuja posição se pretende determinar (*rover*).

Os erros remanescentes associados às posições e relógio dos satélites são anulados.

Os efeitos dos atrasos sofridos pela propagação na ionosfera e troposfera são significativamente reduzidos.



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

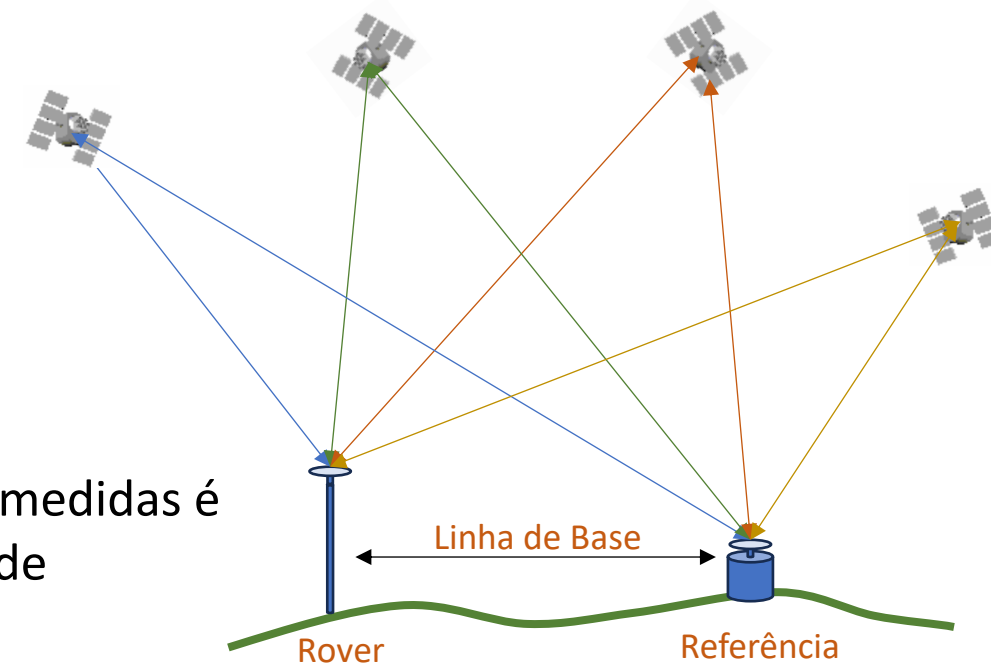
Posicionamento Diferencial – *Between Receivers Single-Difference Positioning*:

As equações de diferenças simples das medidas de pseudo-distância seriam:

$$P_{rs}^k(t) = P_r^k(t) - P_s^k(t) \approx \rho_r^k(t, t - \tau_r^k) - \rho_s^k(t, t - \tau_s^k) + cd\tau_{rs} + \varepsilon_{rs}^k$$

onde: $dt_{rs} = dt_r - dt_s$

Contudo, o nível de ruído associado a esta combinação de medidas é o dobro (em potência) do verificado nas medidas isoladas de cada recetor.



Sistemas de Posicionamento por Satélite

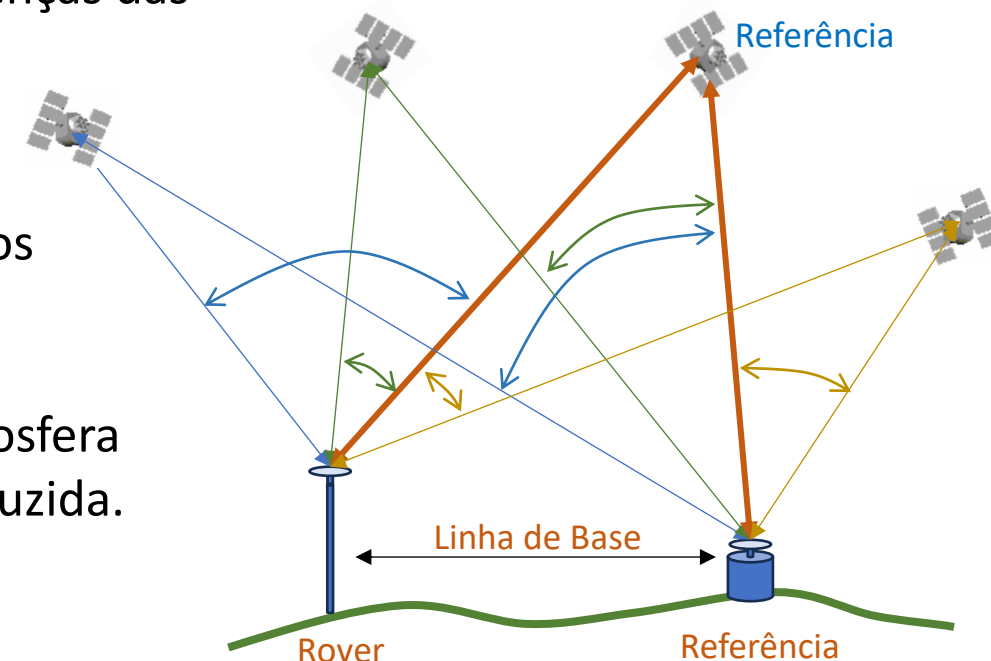
O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Posicionamento Diferencial – *Double-Difference Positioning*:

Consiste em considerar, adicionalmente, um satélite de referência (usualmente, o de maior elevação) relativamente ao qual são consideradas as diferenças das medidas dos restantes satélites.

Para além dos erros associados aos satélites, são eliminados os erros associados aos recetores (erros de relógio, etc.).

Os erros introduzidos pela propagação na ionosfera e troposfera permanecem reduzidos, assumindo uma linha de base reduzida.



Sistemas de Posicionamento por Satélite

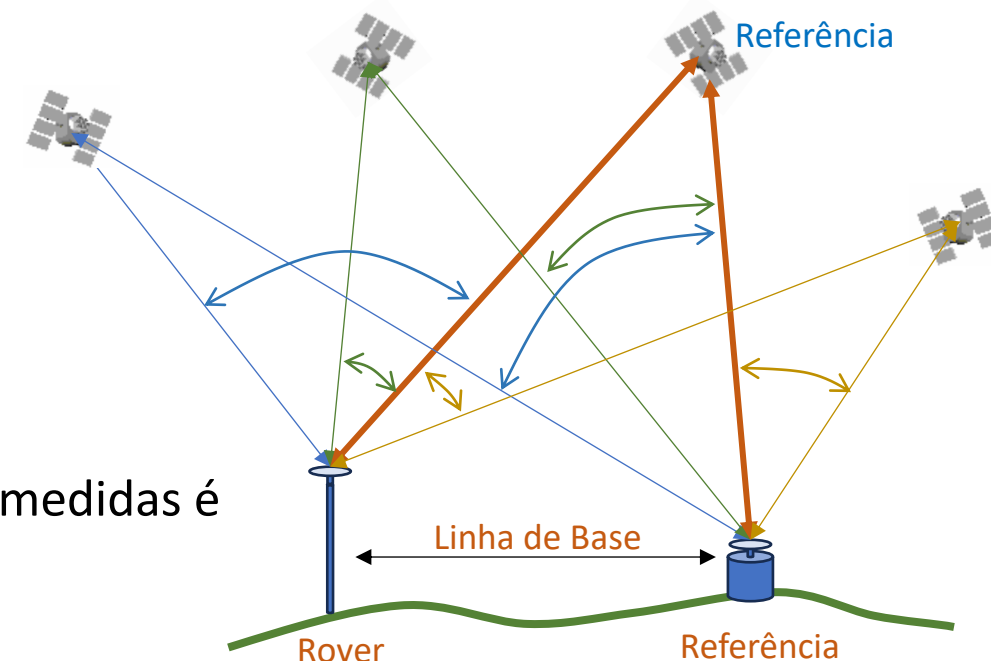
O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Posicionamento Diferencial – *Double-Difference Positioning*:

As equações das medidas de diferenças duplas de pseudo-distância são:

$$\begin{aligned} P_{rs}^{kl}(t) &= P_{rs}^k(t) - P_{rs}^l(t) = P_r^k(t) - P_s^k(t) - P_r^l(t) + P_s^l(t) \\ &\approx \rho_r^k(t, t - \tau_r^k) - \rho_s^k(t, t - \tau_s^k) - \rho_r^l(t, t - \tau_r^l) + \rho_s^l(t, t - \tau_s^l) + \varepsilon_{rs}^{kl} \end{aligned}$$

Contudo, o nível de ruído associado a esta combinação de medidas é ainda mais elevado.



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Posicionamento por Medidas de Fase:

O mesmo processo pode ser efetuado com as medidas de fase, em alternativa às medidas de pseudo-distância, conseguindo-se precisões de posicionamento muito superiores (da ordem de 1 a 2 cm, em tempo-real).

Exemplo das medidas de diferenças duplas de fase:

$$\begin{aligned}\lambda\phi_{rs}^{kl}(t) &= \lambda\phi_{rs}^k(t) - \lambda\phi_{rs}^l(t) = \lambda\phi_r^k(t) - \lambda\phi_s^k(t) - \lambda\phi_r^l(t) + \lambda\phi_s^l(t) \\ &\approx \rho_r^k(t, t - \tau_r^k) - \rho_s^k(t, t - \tau_s^k) - \rho_r^l(t, t - \tau_r^l) + \rho_s^l(t, t - \tau_s^l) + \lambda N_{rs}^{kl} + \varepsilon_{rs}^{kl}\end{aligned}$$

Contudo, surge a necessidade de calcular também os valores (são números inteiros e constantes) das ambiguidades N_{rs}^{kl} , havendo uma nova incógnita por cada satélite em análise. As técnicas de fixação de ambiguidades requerem a observação durante instantes (épocas) consecutivos.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

Técnicas Avançadas:

O posicionamento em tempo real é muitas vezes complementado com a assunção de um modelo da dinâmica do rover (tipicamente, um modelo em espaço de estados), o que permite separar melhor o efeito das perturbações no cálculo das posições – o processamento é usualmente efetuado através de um estimador denominado **Filtro de Kalman**.

A camada da ionosfera é dispersiva para as frequências usadas nos sistemas de posicionamento por satélite, pelo que o uso de recetores capazes de captar sinais dos satélites enviados a diferentes frequências permite distinguir melhor os efeitos introduzidos pela ionosfera.

Outras combinações das medidas observadas pelos recetores podem ser consideradas para diversos fins (diferenças triplas, medidas insensíveis ao efeito da ionosfera (*ionospheric-free combination*), ...).

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GPS – Técnicas de Posicionamento

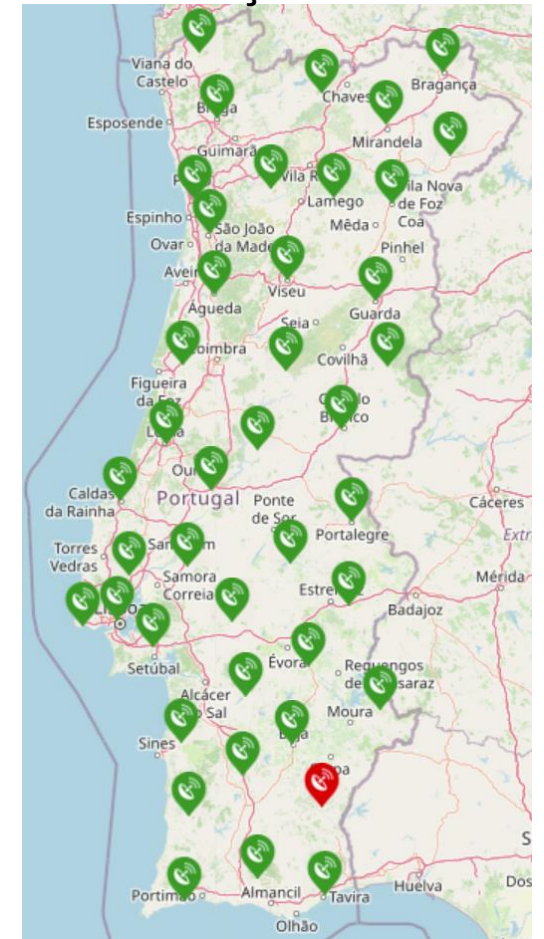
Redes de Estações de Referência:

Através da colocação de recetores em vários pontos fixos de coordenadas conhecidas, espalhados por uma determinada região, torna-se possível estudar os efeitos das camadas da ionosfera e da troposfera (por exemplo, averiguar a presença de vapor de água, nuvens, ...).

Essas redes permitem gerar as correções diferenciais para o cálculo da posição de recetores por métodos diferenciais.

Permitem criar ainda Estações de Referência Virtuais localizadas num Ponto arbitrário na região de implantação da rede.

Rede Nacional de Estações Permanentes GNSS



Sistemas de Posicionamento por Satélite



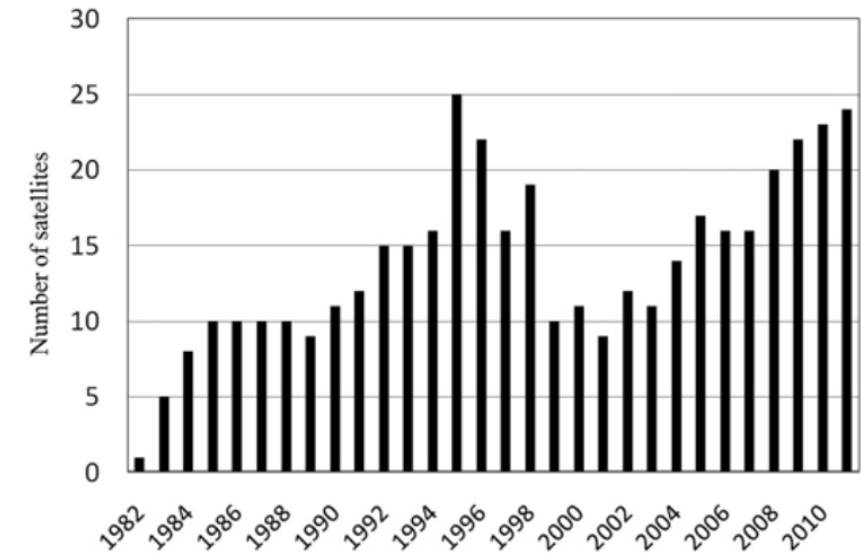
O Sistema GLONASS (*GLOBAL Navigation Satellite System*) – Introdução

O GLONASS é o sistema de posicionamento por satélite gerido pela Rússia (*Russian Space Forces*), tendo sido desenvolvido praticamente em simultâneo com o sistema GPS (arranque em 1976; primeiro satélite em 1982; evolução variável da constelação).

A sua constelação nominal considera 24 satélites dispostos por três planos orbitais (de inclinação de 64.8° com o plano equatorial) separados de 120° , com 8 satélites igualmente espaçados ao longo de cada plano.

O raio das órbitas ronda os 25.51 mil km, sendo totalmente percorridas a cada 11h15m.

O tempo é mantido em cada satélite através de relógios atômicos de césio, que garantem uma estabilidade da ordem de unidades de 10^{-14} segundos por segundo.

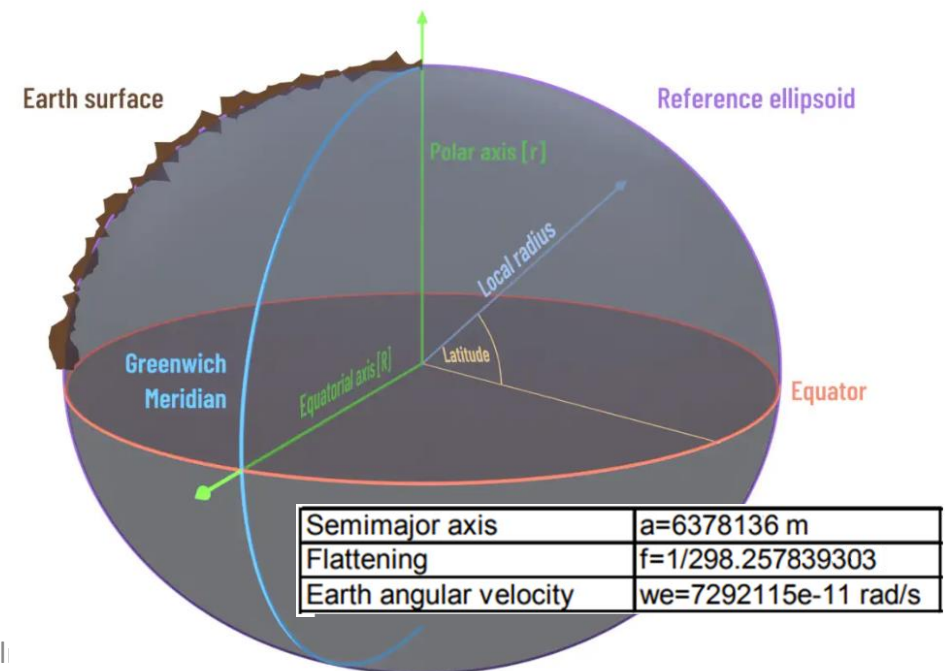


Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GLONASS – Sistema Coordenado de Referência

O sistema de coordenadas é também ECEF (*Earth Centered – Earth Fixed*), mas considera um outro elipsoide de referência – o PZ90 (*Parametry Zemli 1990*).

A referência temporal segue o sistema UTC, considerando também os *leap seconds*, tendo como única diferença um *offset* constante de 3 horas, para o referir à hora de Moscovo.



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GLONASS – Sinais

Em vez de considerar CDMA para distinção dos sinais enviados por diferentes satélites, o GLONASS apostou no FDMA (*frequency division multiple access*) – cada satélite gera portadoras de frequências específicas diferentes das dos outros satélites, sendo assim identificados.

Os satélites enviam duas portadoras em bandas distintas (L1 por volta dos 1.6 GHz e L2 por volta dos 1.2 GHz).

A atribuição de frequências considera a seguinte regra:

$$\begin{cases} f_1(k) = f_{o_1} + k\Delta f_1 \\ f_2(k) = f_{o_2} + k\Delta f_2 \end{cases} \quad \text{com: } \begin{cases} f_{o_1} = 1.602 \text{ GHz} \\ f_{o_2} = 1.246 \text{ GHz} \\ \Delta f_1 = 562.5 \text{ kHz} \\ \Delta f_2 = 437.5 \text{ kHz} \\ k = -7, \dots, 13 \end{cases}$$

Recentemente, o sistema GLONASS considerou também a modulação CDMA numa nova portadora adicionada aos satélites mais recentes.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GLONASS – Sinais

O sistema GLONASS modula dois códigos nas suas portadoras.

O código SP, de acesso livre, considera uma sequência de 511 bits que se repete a cada milissegundo, enviado à cadência de 511 Kbps.

O código HP, permitindo uma precisão superior, é enviado a um *bitrate* 10 vezes superior ao do SP, e é acessível apenas a utilizadores autorizados.

Também é modulada, em conjunto com os códigos anteriores, uma mensagem de navegação (a uma cadência muito baixa) que consiste no envio das posições dos satélites e das suas duas primeiras derivadas, em instantes de tempo específicos (os utilizadores calculam as posições dos satélites em instantes intermédios através de algoritmos de interpolação, como o Runge-Kutta de 4ª ordem).

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GLONASS – Técnicas de Posicionamento

As técnicas de posicionamento vistas para o sistema GPS são igualmente aplicáveis ao sistema GLONASS.

O facto de o sistema GLONASS utilizar frequências diversas para identificar os satélites e para enviar os sinais não altera o processo inerente às técnicas de posicionamento.

De igual forma, o recetor estima as distâncias a cada satélite, cujas coordenadas são emitidas pelos satélites, sendo essas estimativas perturbadas pelos mesmos fatores (erro de relógio do recetor e dos satélites, propagação na ionosfera e troposfera, etc.).

Os recetores da Rede Nacional de Estações Permanentes GNSS estão também preparados para receber e registar os sinais recebidos pelos satélites do sistema GLONASS.

Sistemas de Posicionamento por Satélite



O Sistema GALILEO – Introdução

Sobre a alçada da União Europeia (tendo como responsáveis a Comissão Europeia e a Agência Espacial Europeia), o sistema GALILEO foi oficialmente aprovado em 2003 como uma alternativa aos sistemas de posicionamento existentes nessa altura (GPS e GLONASS), direcionado à prestação de serviços para o setor civil e para plataformas de emergência e segurança pública.

O primeiro satélite GALILEO foi lançado em 2005, tendo o sistema entrado em operação preliminarmente em 2016 (com 14 satélites), aumentado para 18 satélites em 2018, e apresentando no momento (Out/2024) uma constelação de 25 satélites.

Os satélites GALILEO distribuem-se por 3 planos orbitais, com inclinação de 56° e com raio de cerca de 23.22 mil km, com 8 satélites por plano (mais 2 suplentes por plano). O período da órbita é de 14h05m (17 órbitas exatas em 10 dias siderais).

O sistema GALILEO foi concebido para proporcionar uma precisão superior à do GPS (1 m vs. 3 m).

Sistemas de Posicionamento por Satélite

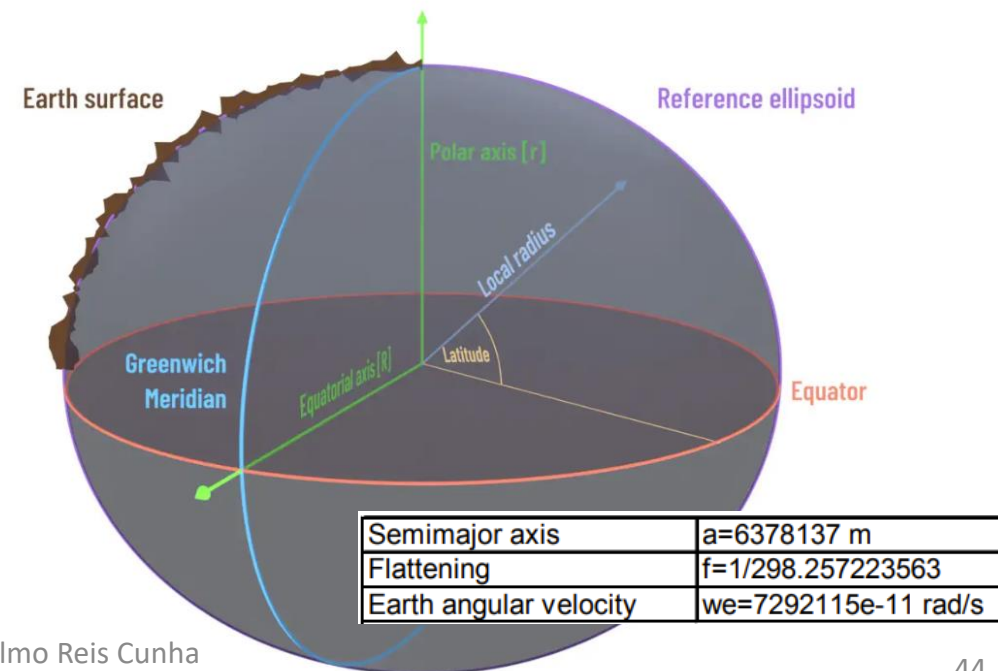
O Sistema GALILEO – Sistema Coordenado de Referência

O sistema de coordenadas é o GTRF (*Galileo Terrestrial Reference Frame*), que é muito próximo ao ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*). As diferenças são muito reduzidas.

A referência temporal usada é o GST (*Galileo System Time*) que é igual ao TAI (*International Atomic Time*) mais 19 segundos.

As mensagens enviadas pelos satélites GALILEO contêm parâmetros para converter o tempo facilmente para UTC e para o tempo GPS.

Para garantir a referência temporal (e redundância) cada satélite carrega 4 relógios (2 atômicos de rubídio, e 2 PHM (*Passive Hydrogen Maser*)).



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GALILEO – Sinais

O sistema GALILEO apostou na modulação de códigos, modulando sinais para medição da distância, de navegação e, também, de apoio a outros diversos serviços, em várias portadoras.

São enviadas quatro portadoras por satélite:

Parâmetros	E1-I	E1-Q	E5a	E5b	E6-I	E6-Q
Frequência (MHz)	1575.42	1575.42	1176.45	1207.14	1278.75	1278.75
Modulação	CBOC	BOCcos	AltBOC	AltBOC	BPSK	BOCcos

BOC – *Binary Offset Carrier modulation*

Inicialmente, algumas frequências a usar seriam muito próximas das usadas pelo GPS, tendo decorrido negociações com os EUA para que fossem deslocadas.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema GALILEO – Técnicas de Posicionamento

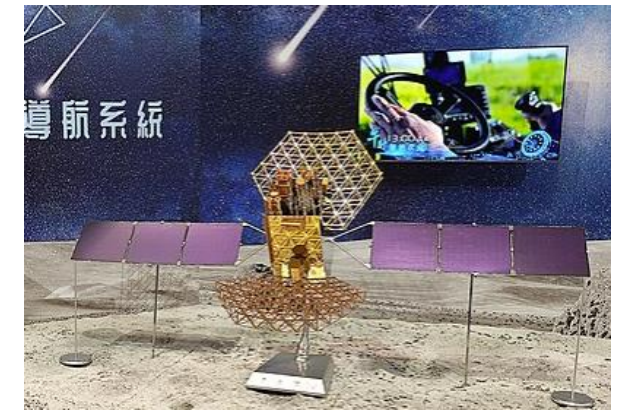
As técnicas de posicionamento vistas para o sistema GPS são igualmente aplicáveis ao sistema GALILEO.

De igual forma, o recetor estima as distâncias a cada satélite, cujas coordenadas são emitidas pelos satélites, sendo essas estimativas perturbadas pelos mesmos fatores (erro de relógio do recetor e dos satélites, propagação na ionosfera e troposfera, etc.).

Os recetores da Rede Nacional de Estações Permanentes GNSS estão também preparados para receber e registar os sinais recebidos pelos satélites do sistema GALILEO.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema BeiDou (BDS) – Introdução



O sistema BeiDou, também referido por BDS – *BeiDou Navigation Satellite System*, é operado pela República Popular da China, tendo o arranque oficial deste sistema sido em 1994.

O primeiro satélite BeiDou foi lançado em 2000, tendo o sistema entrado em operação experimental em 2010 (com 6 satélites), e em 2023 apresentava 24 satélites em órbitas MEO (*Medium Earth Orbit*), 3 satélites em órbitas IGSO (*Inclined Geosynchronous Orbits*), e 3 satélites em órbitas GEO (*Geostationary Orbits*).

O facto de apresentar satélites em órbitas geoestacionárias visa providenciar cobertura permanente e serviços específicos em determinadas regiões do planeta.

Sistemas de Posicionamento por Satélite

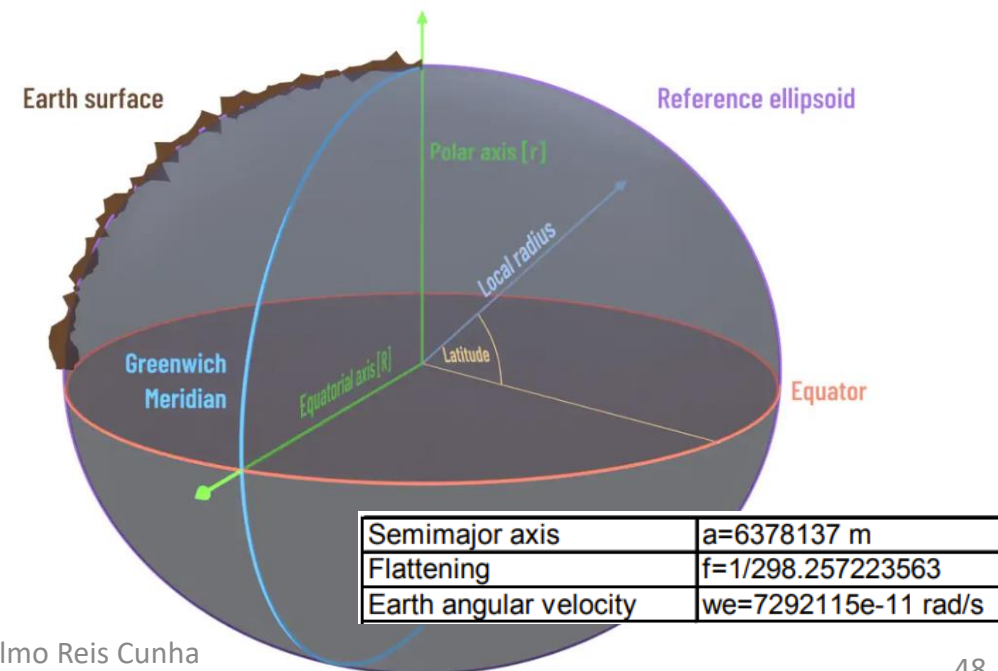
O Sistema BeiDou – Sistema Coordenado de Referência

O sistema de coordenadas é o CGCS2000 (*China Geodetic Coordinate System 2000*), que é muito próximo ao ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*). As diferenças são muito reduzidas.

A referência temporal usada é o BDT (*BeiDou Time*) que segue o tempo UTC a menos dos *leap seconds*, pois não os considera.

Também considera um offset constante relativamente ao UTC pois fixou o seu início em 01 de Janeiro de 2006.

Para garantir a referência temporal cada satélite carrega relógios atômico ou PHM (*Passive Hydrogen Maser*).



Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema BeiDou – Sinais

O sistema BeiDou também apostou na modulação de códigos, modulando sinais para medição da distância, de navegação e, também, de apoio a outros diversos serviços, em várias portadoras.

São enviadas quatro portadoras por satélite:

Parâmetros	B1C/B1I/B1A	B2a/B2b	B3I/B3Q/B3A	Bs
Frequência (MHz)	1575.42	1191.79	1268.52	2492.02
Modulação	BOC/BPSK	AltBOC	BOC/BPSK	Experimental

BOC – Binary Offset Carrier modulation

Sistemas de Posicionamento por Satélite

O Sistema BeiDou – Técnicas de Posicionamento

As técnicas de posicionamento vistas para o sistema GPS são igualmente aplicáveis ao sistema BeiDou.

De igual forma, o recetor estima as distâncias a cada satélite, cujas coordenadas são emitidas pelos satélites, sendo essas estimativas perturbadas pelos mesmos fatores (erro de relógio do recetor e dos satélites, propagação na ionosfera e troposfera, etc.).

No momento (Out/2024), uma grande parte dos recetores da Rede Nacional de Estações Permanentes GNSS estão também preparados para receber e registar os sinais recebidos pelos satélites do sistema BeiDou.

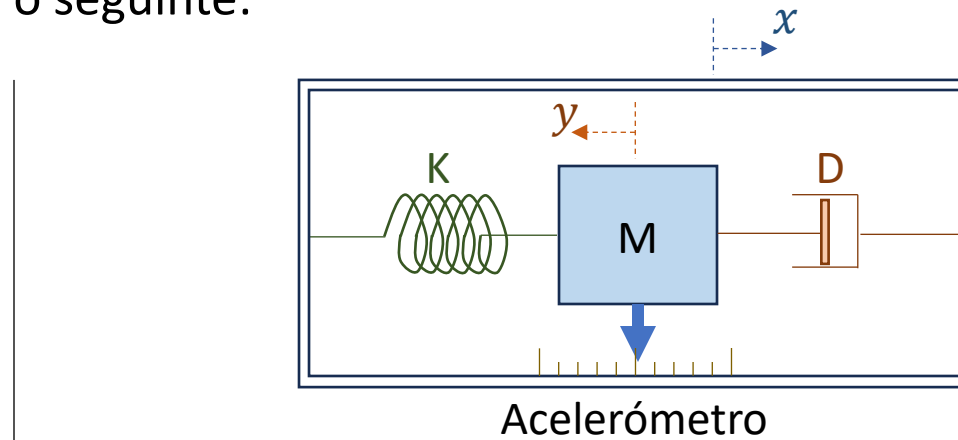
Índice

- Introdução
- Sistemas de posicionamento por satélite
- **Sistemas inerciais de navegação**
- Integração de sistemas inerciais com sistemas de posicionamento por satélite

Sistemas Inerciais

Sensores – o Acelerómetro

Independentemente da forma como um acelerómetro é implementado, o seu princípio de funcionamento é o seguinte:



D - Coeficiente de atrito dinâmico

K - Coeficiente de elasticidade

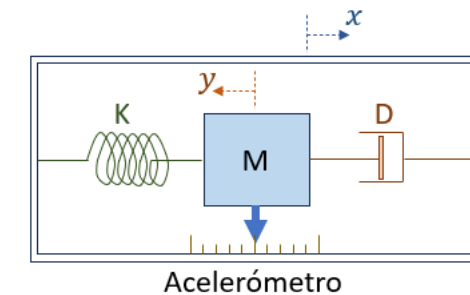
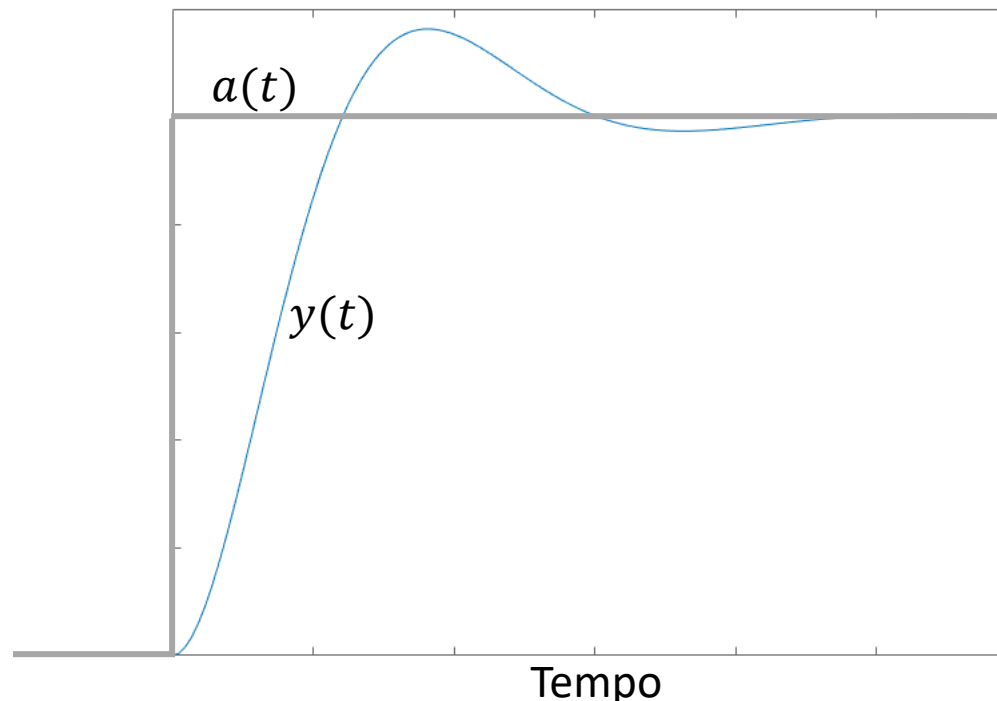
M - Massa do corpo

$$\ddot{y}(t) + \frac{D}{M}\dot{y}(t) + \frac{K}{M}y(t) = a(t) \quad \text{com} \quad a(t) = \ddot{x}(t)$$

Sistemas Inerciais

Sensores – o Acelerómetro

A medida de aceleração proporcionada pelo acelerómetro não é instantaneamente obtida pelo sensor. Há um período transitório desde que a aceleração se altera até que o acelerómetro mede essa aceleração sofrida.



Sistemas Inerciais

Sensores – o Acelerómetro

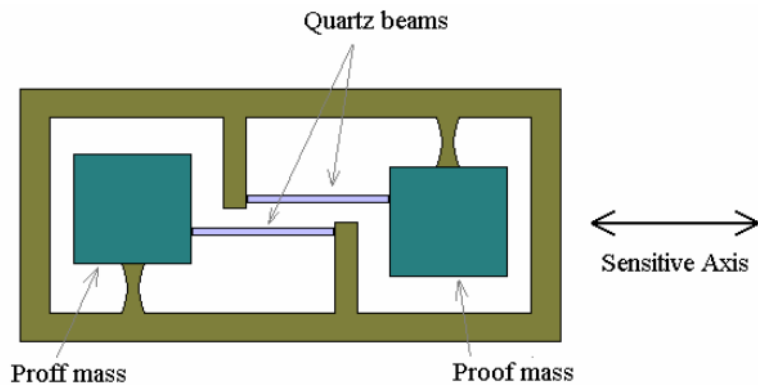
Os acelerómetros mecânicos sofrem, também, de várias fontes de erro (que conduzem, depois, a desvios na estimativa de posição):

- **Fixed Bias**: Valor medido quando a aceleração a que é submetido é nula.
- **Scale Factor Error**: Erro na proporcionalidade entre medida e aceleração aplicada.
- **Cross-Coupling Error**: Sensibilidade da medida a acelerações sofridas em direções ortogonais.
- **Vibro-Pendulus Error**: Deve-se a movimentos vibratórios rotativos da massa de teste (*proof mass*).
- **Temperature Dependent Errors**: Quando a temperatura influencia a medida da aceleração.
- **Switch-on to Switch-on Variations**: Offsets que apresentam valores aleatórios quando o sensor é ativado.
- **In-run Errors**: Desvios entre aceleração e medida que vão variando aleatoriamente com o tempo.
- **Random Bias**: offset que apresenta ligeiros desvios ao longo do tempo.

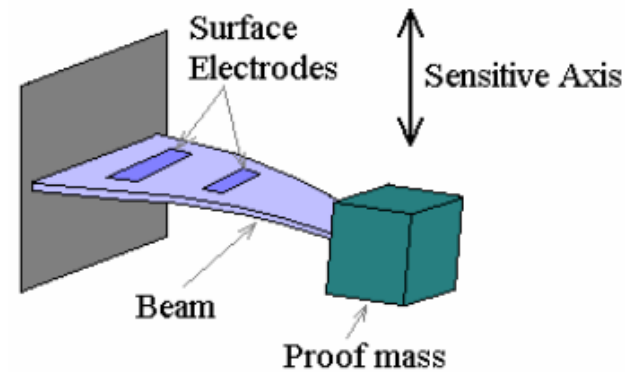
Sistemas Inerciais

Sensores – o Acelerómetro

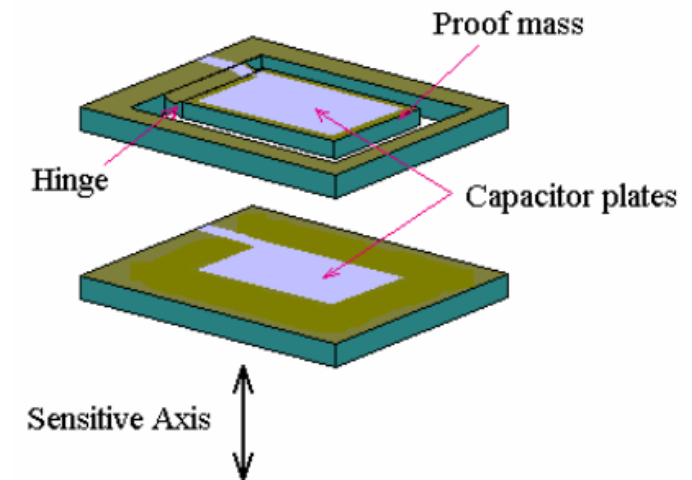
Algumas tecnologias de implementação de acelerómetros:



Quartz-based Vibrating Accelerometer



Surface Acoustic Wave Accelerometer



Silicon Accelerometer

Sistemas Inerciais

Sensores – o Giroscópio

O giroscópio mede a aceleração angular (ou a variação da velocidade angular) em torno de um eixo específico (*sensitive axis*).

Os erros que afetam as medidas dos giroscópios são idênticos aos listados anteriormente para os acelerómetros (adaptados ao movimento angular).

Um problema relevante na implementação dos giroscópios é o do alinhamento do seu eixo de sensibilidade com a direção relativamente à qual se pretende medir o movimento angular. Os **problemas de alinhamento** afetam, também, a instalação dos acelerómetros.

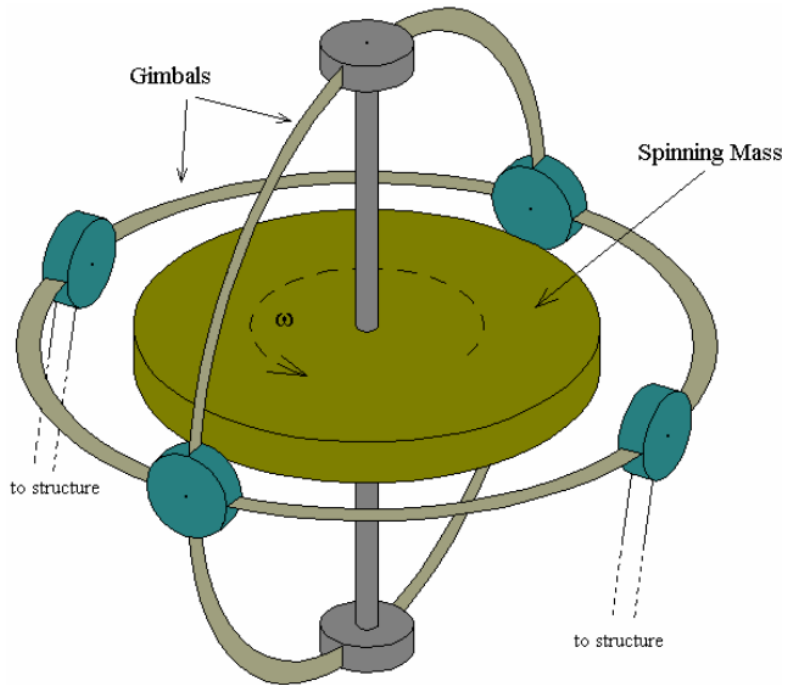
Existem várias tecnologias de implementação de giroscópios, sendo estas normalmente divididas em três grupos:

- Giroscópios Mecânicos
- Giroscópios Óticos
- Giroscópios por Vibração

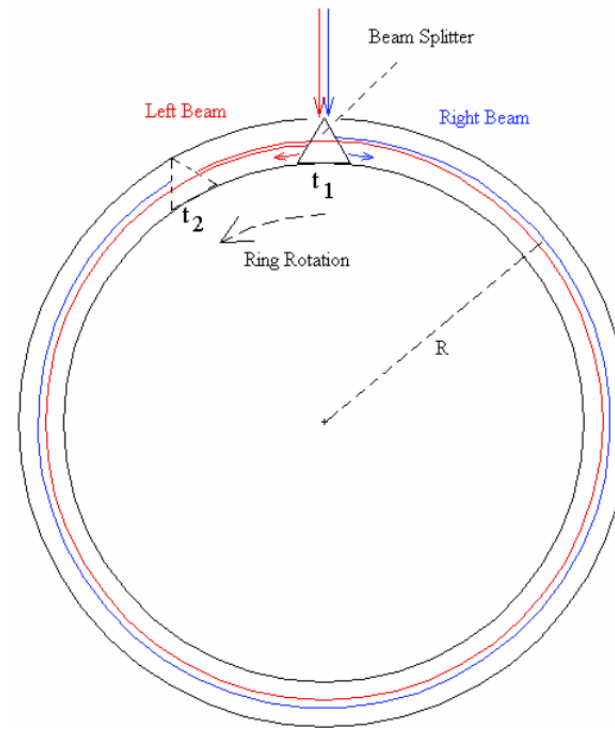
Sistemas Inerciais

Sensores – o Giroscópio

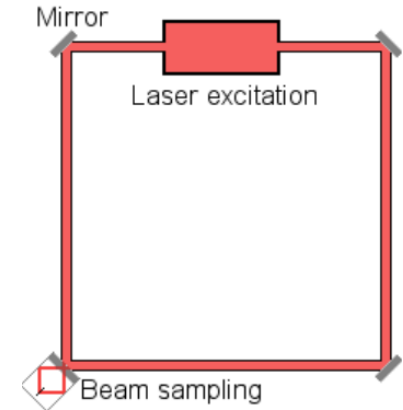
Exemplos de diferentes implementações de giroscópios:



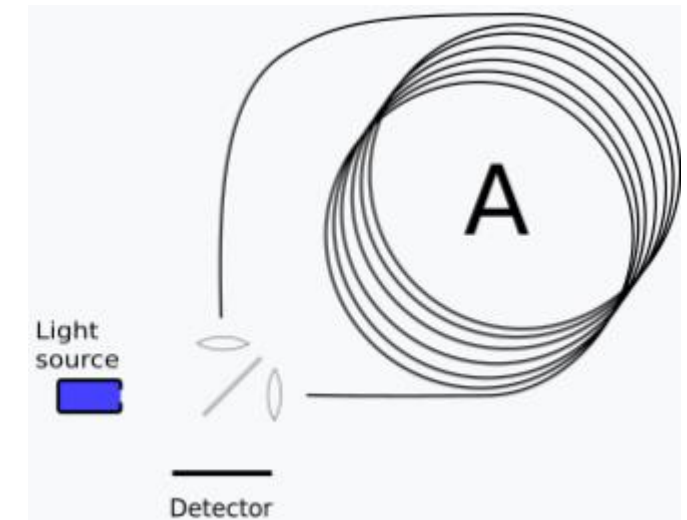
Mechanical gyro with stabilization platform



Principle of operation of optical gyros



Ring Laser Gyro (RLG)



Fiber Optic Gyro (FOG)

Sistemas Inerciais

IMU (*Inertial Measurement Unit*)

Os sistemas inerciais medem diretamente a aceleração sofrida por um corpo (veículo) através de um conjunto de sensores.

A aceleração associada ao movimento de translação é medida por **Acelerómetros**.

A aceleração associada ao movimento de rotação é medida por **Giroscópios**.



Acelerómetro

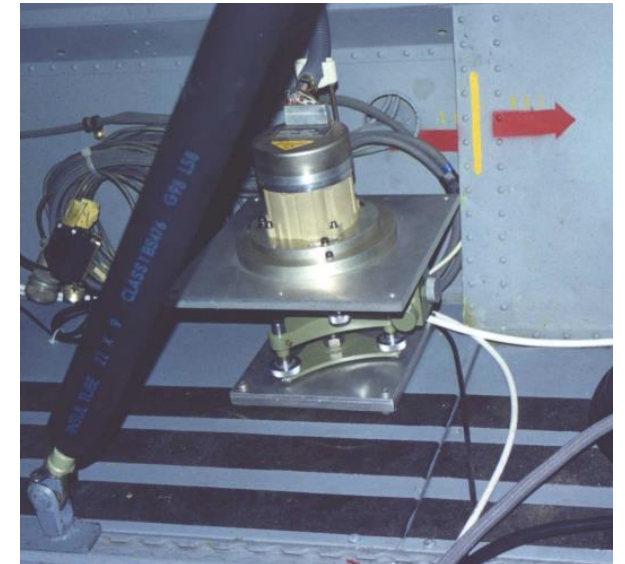
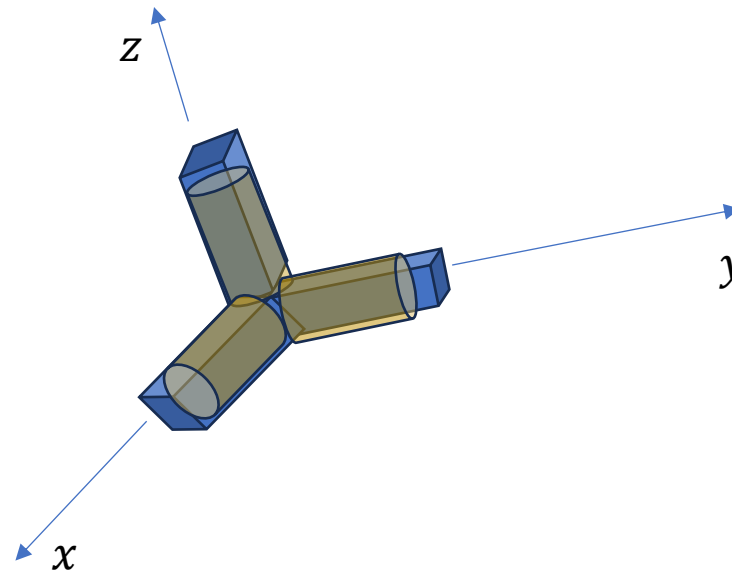
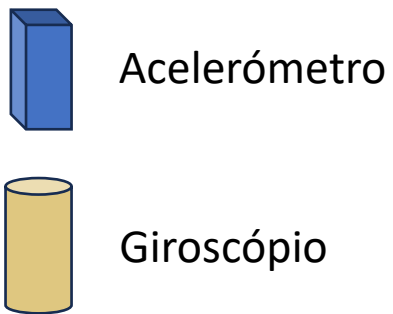


Giroscópio

Sistemas Inerciais

IMU - Arquitetura

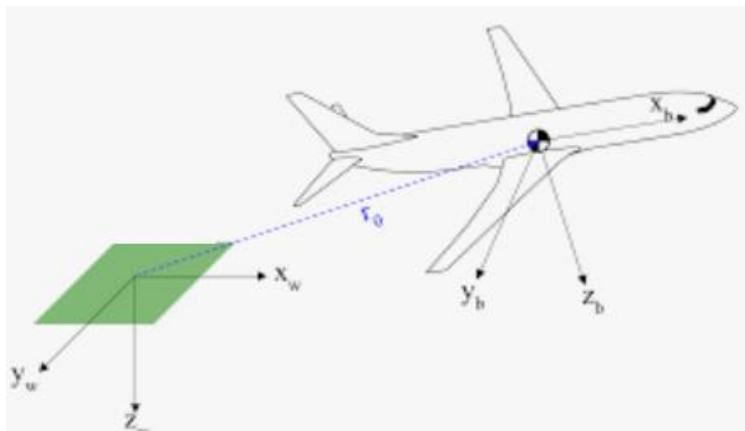
Os sistemas inerciais de navegação (INS – *Inertial Navigation Systems*) são constituídos por um núcleo de sensores (três pares acelerómetro-giroscópio), o IMU (*Inertial Measurement Unit*), que proporciona (com uma frequência de amostragem elevada, tipicamente da ordem das dezenas ou centenas de medidas por segundo) medidas de aceleração linear e angular ao longo de três eixos ortogonais entre si.



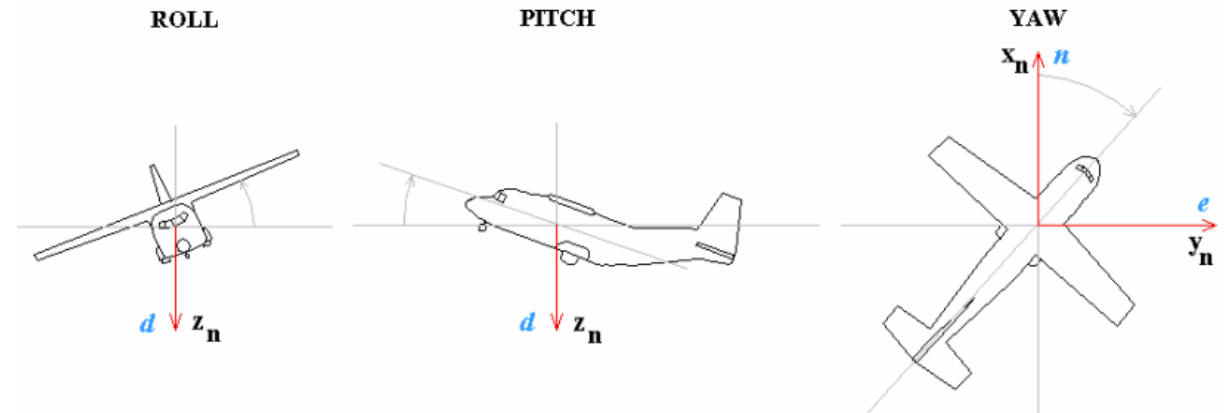
Sistemas Inerciais

IMU - Arquitetura

As medidas produzidas pelo IMU são processadas em tempo real por algoritmos de processamento de sinal dedicados (e complexos) por forma a traduzir as acelerações medidas em posição e atitude do veículo ao qual o INS se encontra acoplado.



Determinação da Posição



Determinação da Atitude

Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

Os resultados de posição gerados pelos sistemas inerciais são sempre relativos a uma posição inicial (que não pode ser determinada pelo próprio sistema). Ou seja, o INS não descobre por si só onde se encontra no instante em que é iniciado – esta informação tem que lhe ser fornecida. O INS é, assim, classificado como um sistema de *dead reckoning*.

Para descrever o princípio de funcionamento dos sistemas inerciais, considere-se inicialmente o problema de posicionamento a uma dimensão (1D), baseado na medida de aceleração proporcionada por um acelerómetro linear (assumido, para já, como um sensor ideal).



Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

A determinação da posição, $x(t)$, a partir das medidas de aceleração, $a(t)$, do acelerómetro é efetuada, naturalmente, através da dupla integração ao longo do tempo (como já foi visto, esta operação é efetuada, no domínio do tempo discreto, através de uma aproximação):

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \int_0^\tau a(\sigma) d\sigma d\tau$$

Nota: Assumiu-se $x(0) = 0$.



$$\text{Modelo: } \ddot{x}(t) = a(t)$$

Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

Nos sistemas reais existe sempre a presença de ruído, assim como de pequenos desvios do comportamento ideal dos sensores (*offsets*, *drifts*, variação com a temperatura, ...). Assumindo que estas perturbações, $d(t)$, se manifestam aditivamente às medidas do sensor, observar-se-ia o seguinte resultado:

$$x(t) = \int_0^t \int_0^\tau (a(\sigma) + d(\sigma)) d\sigma d\tau$$

Esta dupla integração, ao longo de muito tempo, das perturbações da medida conduz a um desvio sucessivo da posição do veículo, relativamente à sua trajetória real.

Este constitui o principal problema associado aos sistemas de navegação baseados em sensores inerciais.

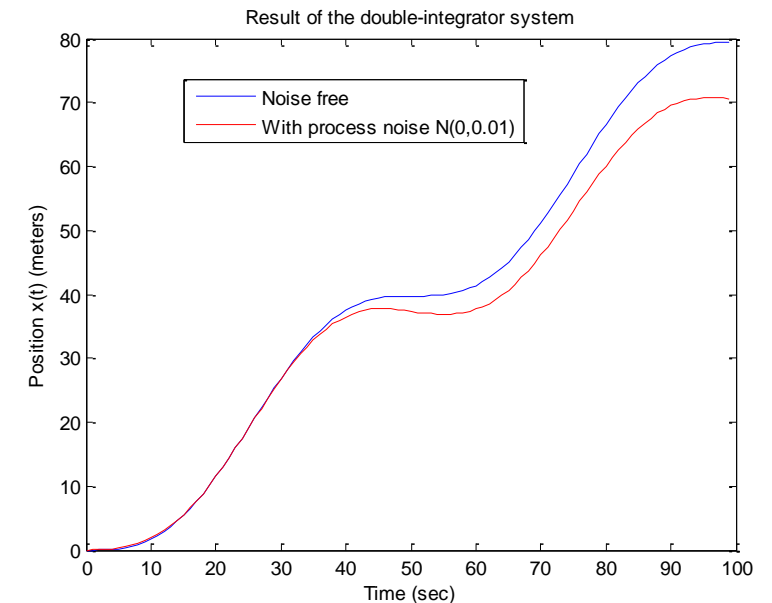
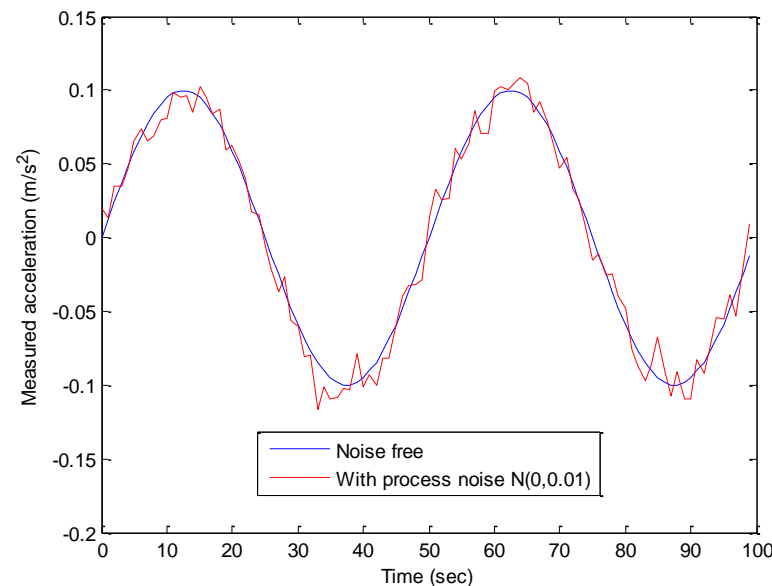
Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

Para ilustrar, considere-se o exemplo de posicionamento 1D modelado em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Ba(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

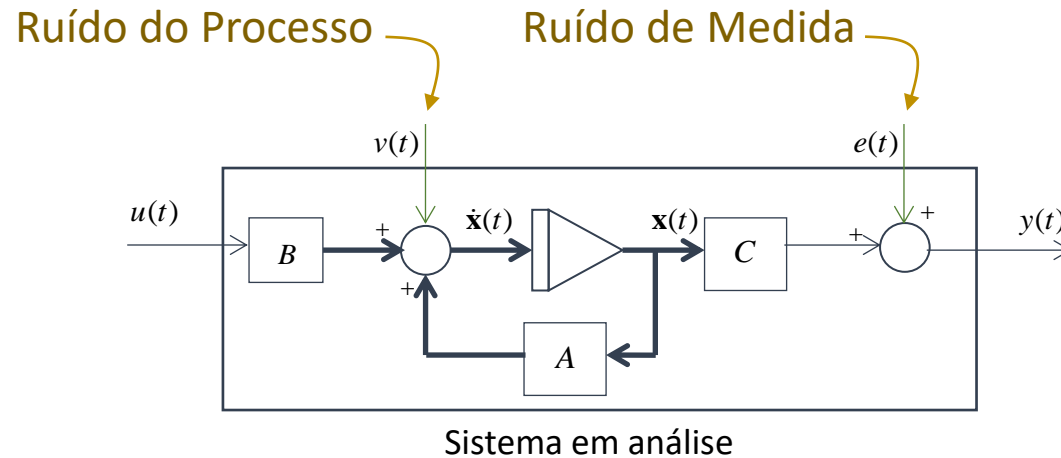
Submetendo o veículo a uma aceleração sinusoidal de 0.1 m/s^2 , e assumindo que o acelerómetro produz medidas perturbadas com ruído branco gaussiano de média nula e desvio padrão igual a 0.01 m/s^2 :



Sistemas Inerciais

IMU - Modelação das Fontes de Ruído

Usualmente, consideram-se duas fontes de ruído genéricas: ruído do processo e ruído de medida. Estas podem ser modeladas através da representação do sistema em espaço de estados:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + e(t) \end{cases}$$

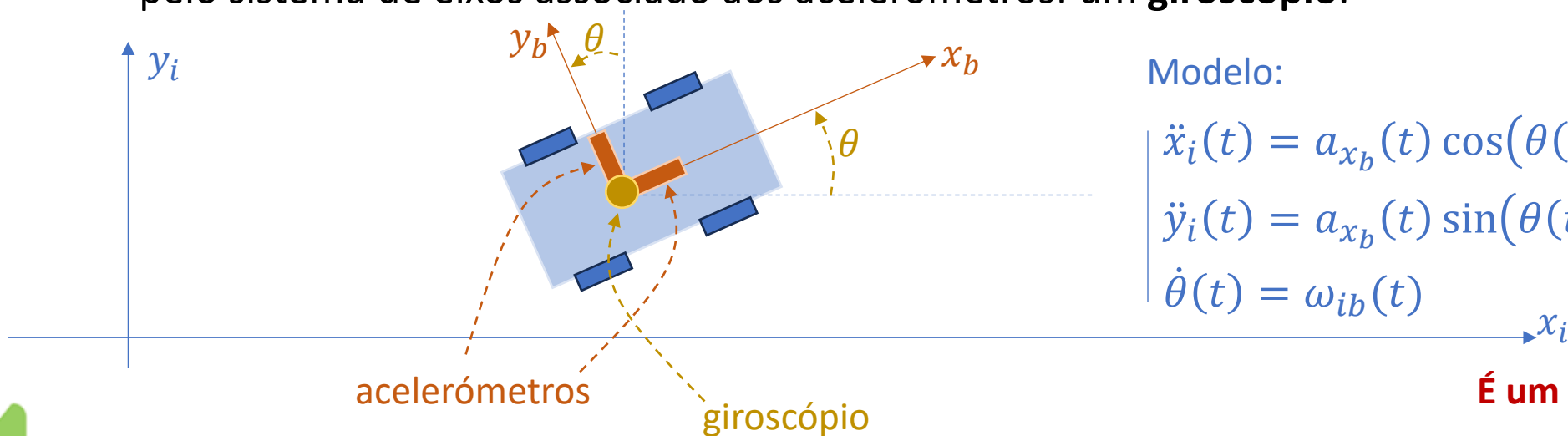
O ruído de medida pressupõe a existência de uma forma alternativa de observação da saída do modelo (através de outros sensores, por exemplo), observações essas que apresentam ruído.

Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

Estendendo ao plano o exemplo do posicionamento de um veículo, com base agora em dois acelerómetros dispostos perpendicularmente, torna-se necessário saber, também, qual a orientação que estes sensores vão adquirindo ao longo do movimento do veículo (i.e., as direções segundo as quais são medidas as acelerações lineares).

Para tal, torna-se necessário adicionar um terceiro sensor que meça a aceleração angular sofrida pelo sistema de eixos associado aos acelerómetros: um **giroscópio**.



Modelo:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i(t) &= a_{x_b}(t) \cos(\theta(t)) - a_{y_b}(t) \sin(\theta(t)) \\ \ddot{y}_i(t) &= a_{x_b}(t) \sin(\theta(t)) + a_{y_b}(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega_{ib}(t)\end{aligned}$$

É um problema não linear!

Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

A forma usual de se resolver este modelo é considerar a linearização destas equações não lineares em torno do ponto considerado como atual:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{u}}(t)) + \dots$$

onde $\hat{\cdot}$ representa a estimativa atual para a variável considerada.

Logo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \approx \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \Delta \mathbf{x}(t) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \Delta \mathbf{u}(t) \rightarrow$$
$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t)$$

O erro é modelado por um modelo de espaço de estados linear!

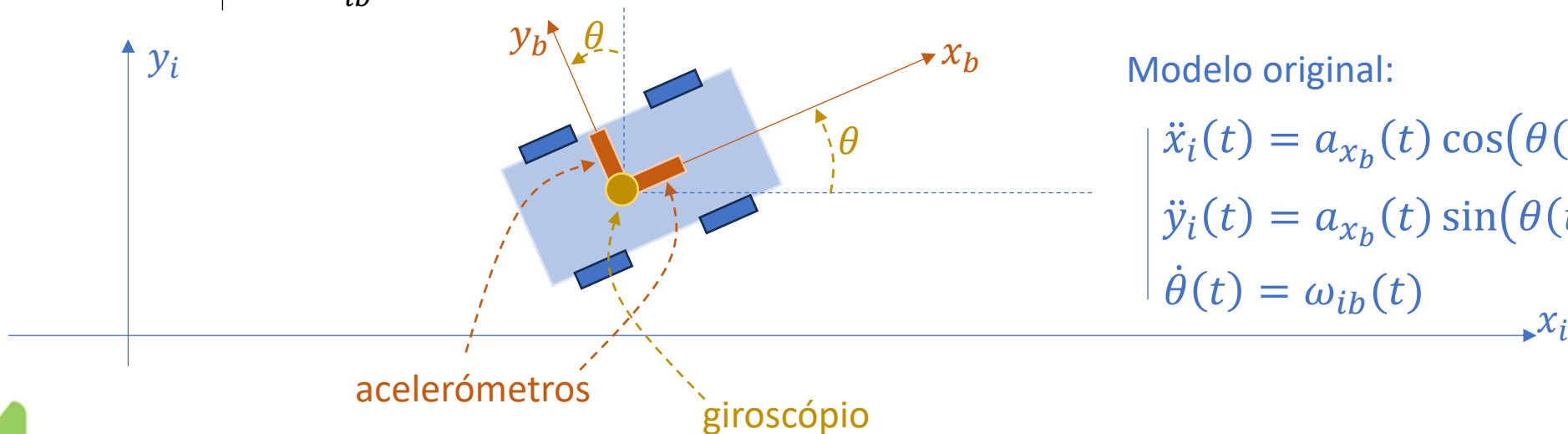
Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

O modelo de propagação dos erros ficaria, assim:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_{x_i} \\ \dot{v}_{x_i} = a_{x_b} \cos(\theta) - a_{y_b} \sin(\theta) \\ \dot{y}_i = v_{y_i} \\ \dot{v}_{y_i} = a_{x_b} \sin(\theta) + a_{y_b} \cos(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega_{ib} \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_i \\ v_{x_i} \\ y_i \\ v_{y_i} \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_{x_b} \\ \Delta a_{y_b} \\ \Delta \omega_{ib} \end{bmatrix}$$



Modelo original:

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) = a_{x_b}(t) \cos(\theta(t)) - a_{y_b}(t) \sin(\theta(t)) \\ \ddot{y}_i(t) = a_{x_b}(t) \sin(\theta(t)) + a_{y_b}(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) = \omega_{ib}(t) \end{cases}$$

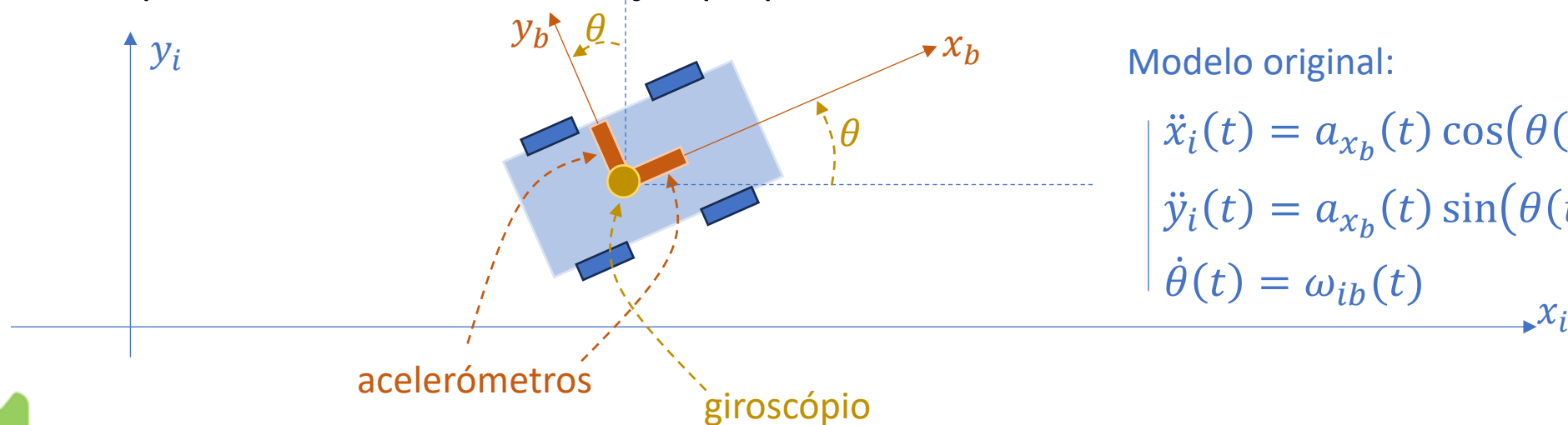
Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

Os erros associados aos sensores (acelerómetros e giroscópio) afetam o cálculo da posição em ambas as coordenadas.

Os erros de offset (*biases*) nas medidas geradas pelos acelerómetros propagam-se para erros de posicionamento com evolução proporcional a t^2 .

Os erros de offset (*biases*) nas medidas geradas pelo giroscópio propagam-se para erros de posicionamento com evolução proporcional a t^3 .



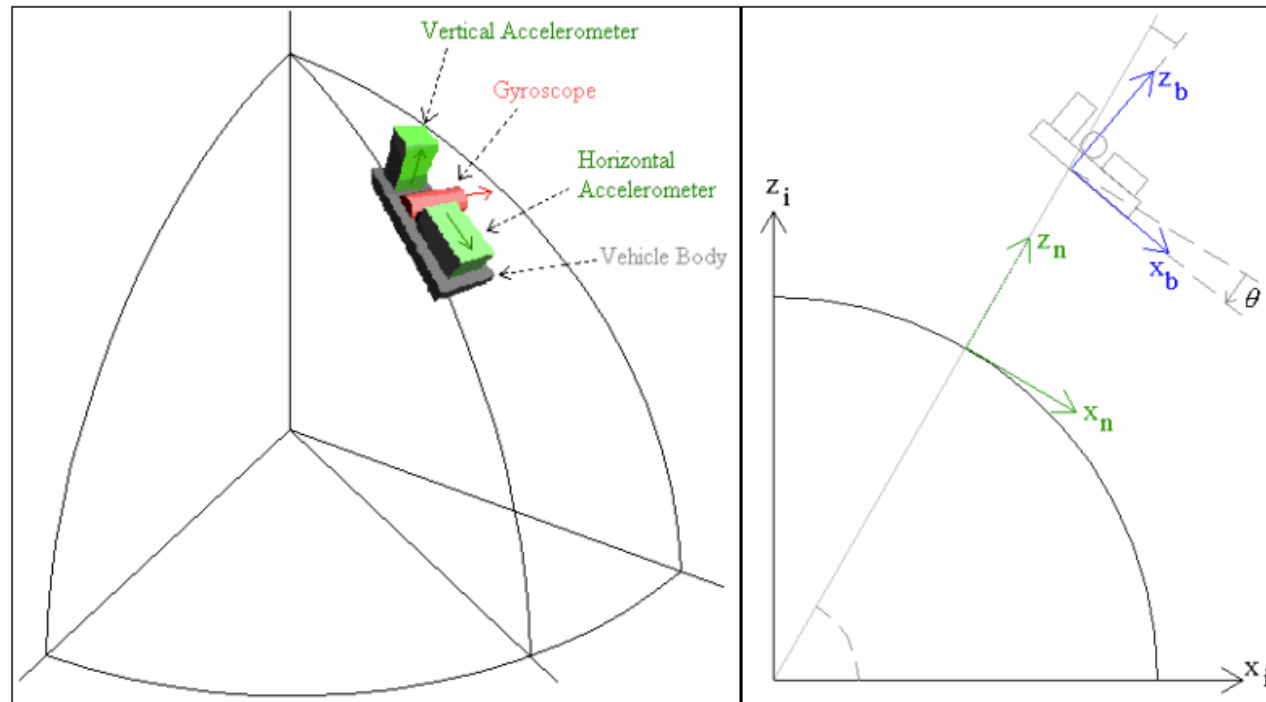
Modelo original:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i(t) &= a_{x_b}(t) \cos(\theta(t)) - a_{y_b}(t) \sin(\theta(t)) \\ \ddot{y}_i(t) &= a_{x_b}(t) \sin(\theta(t)) + a_{y_b}(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega_{ib}(t)\end{aligned}$$

Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (exemplo 2D ao longo da superfície terrestre)

Considerando o movimento ao longo da superfície terrestre (ou perto desta), torna-se necessário incluir mais um referencial (referencial local, ou referencial de navegação), assim como se tem que incluir a aceleração gravítica (que é sentida pelos acelerómetros).



(x_b, z_b) - body frame
 (x_n, z_n) - navigation (local) frame
 (x_i, z_i) - inertial frame

Para se compensar a aceleração gravítica torna-se necessário modelá-la, uma vez que esta não apresenta um valor constante em toda a superfície da Terra, e também varia com a latitude e da altitude.

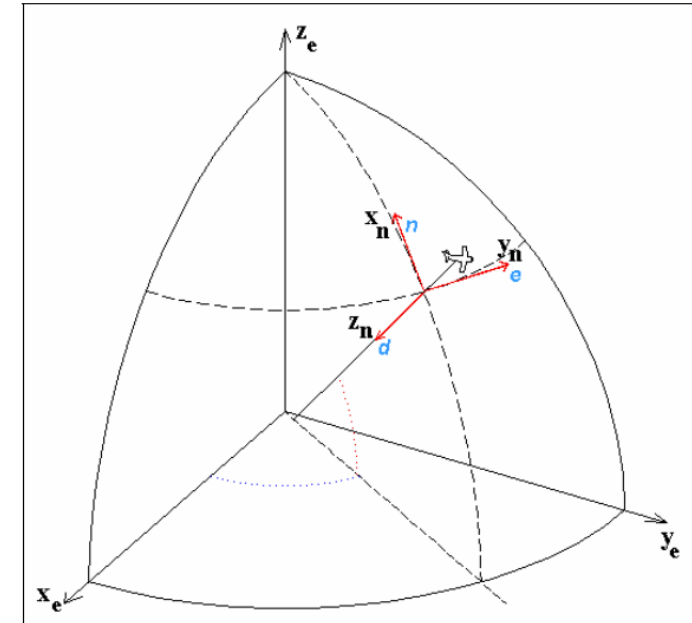
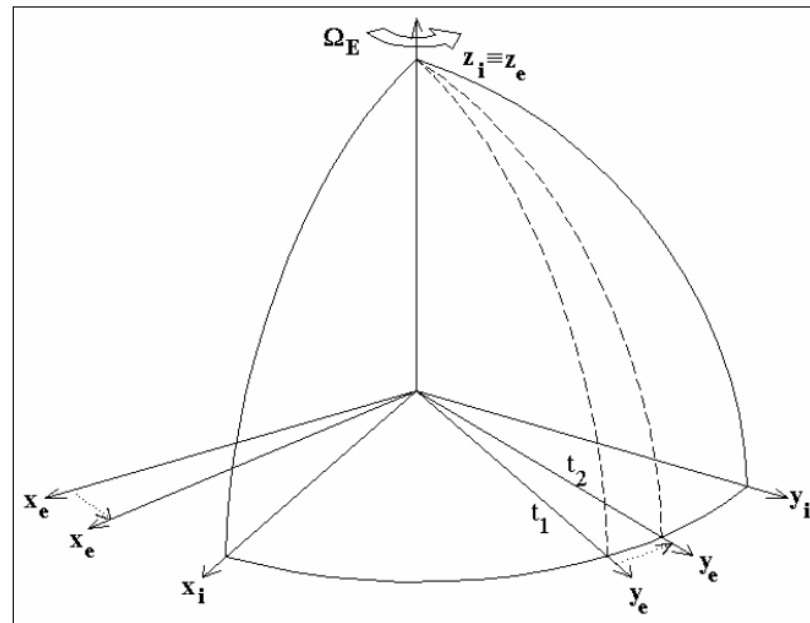
Sistemas Inerciais

IMU - Princípio de operação (posicionamento 3D na superfície terrestre)

Finalmente, para o caso do posicionamento 3D junto à superfície terrestre, não só cada referencial adquire uma terceira coordenada, como é necessário adicionar mais um referencial (o referencial terrestre) uma vez que o movimento de rotação da Terra tem que ser incluído. O sensor inercial tem, agora, que incluir três acelerómetros e três giroscópios.

(x_e, y_e, z_e) - Earth frame

Trata-se de um referencial ECEF
(Earth Centered – Earth Fixed).



Sistemas Inerciais

IMU – Processamento dos Dados

Uma vez que os sensores (acelerómetros e giroscópios) apresentam diferentes perturbações, cada qual com um comportamento estatístico específico, o processamento das medidas produzidas por esses sensores (para determinação da posição e orientação do veículo ao qual o IMU está acoplado) considera, usualmente, modelos para essas perturbações.

A ferramenta comumente usada para esse efeito é o **Filtro de Kalman**.

Uma vez que os dados dos sensores são medidos em instantes de tempo específicos (são amostrados), com um período de amostragem constante, a implementação que se considera para o Filtro de Kalman é a do domínio de tempo discreto.

Sistemas Inerciais

IMU – Processamento dos Dados – Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman é um estimador de estado (i.e., visa estimar o estado do sistema num determinado momento) que assume um modelo linear (de espaço de estados) para o processo dinâmico de evolução do estado do sistema, processo esse que sofre de sinais de perturbação de dois tipos:

- Erro de Processo ($v(k)$);
 - Erro de Medida ($e(k)$).
- $$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) + v(k) \\ y(k) = C\mathbf{x}(k) + e(k) \end{cases}$$

O Filtro de Kalman foi concebido com as seguintes assunções:

- Existe um modelo (de espaço de estados) que prevê a evolução das variáveis de estado ao longo do tempo, cujos valores se pretende estimar com a menor incerteza possível;
- Sabe-se que essa evolução do estado do sistema é perturbada por fenómenos estocásticos (representados pelo sinal $v(k)$), que se assumem ter distribuição Gaussiana de média nula;
- Em cada instante de amostragem tem-se acesso à medida do sinal de saída do processo, $v(k)$, medida essa que tem ruído de medida, $e(k)$, também Gaussiano de média nula.

Sistemas Inerciais

IMU – Processamento dos Dados – Filtro de Kalman

O princípio de operação do Filtro de Kalman pode ser descrito por:

- Assuma-se que imediatamente antes do instante de amostragem t_k se obtém uma estimativa do vetor de estado para esse instante: $\hat{\mathbf{x}}_-(k)$;
- Quando, nesse instante, se adquire a medida do sinal de saída, $y(k)$, essa nova informação será certamente útil para afinar o valor da estimativa anterior do vetor de estado, sendo esta dada por uma combinação linear:

$$\hat{\mathbf{x}}_+(k) = K'_k \hat{\mathbf{x}}_-(k) + K_k y(k)$$

onde K'_k e K_k são matrizes de pesos (que são atualizadas em cada instante de amostragem).

- Como $y(k) = C\mathbf{x}(k) + e(k)$, verifica-se que: $\hat{\mathbf{x}}_+(k) = [I - K_k C] \hat{\mathbf{x}}_-(k) + K_k y(k)$
- O Filtro de Kalman determina, então, a forma de cálculo da **Matriz do Ganho de Kalman**, K_k .

Sistemas Inerciais

IMU – Processamento dos Dados – Filtro de Kalman

- A **Matriz do Ganho de Kalman**, K_k , é determinada por:

$$K_k = P_{k,-} C^T [C P_{k,-} C^T + R_k]^{-1}$$

onde

$$P_{k,-} = E\{(\hat{\mathbf{x}}_-(k) - \mathbf{x}(k))(\hat{\mathbf{x}}_-(k) - \mathbf{x}(k))^T\}$$

Matriz de covariância do erro da pré-estimativa do vetor de estado.

$$R_k = E\{e(k)e(k)^T\}$$

Matriz de covariância associada ao erro de medida.

O princípio de operação do Filtro de Kalman pode ser, então, colocado na forma de um algoritmo de implementação sistematizada.

Sistemas Inerciais

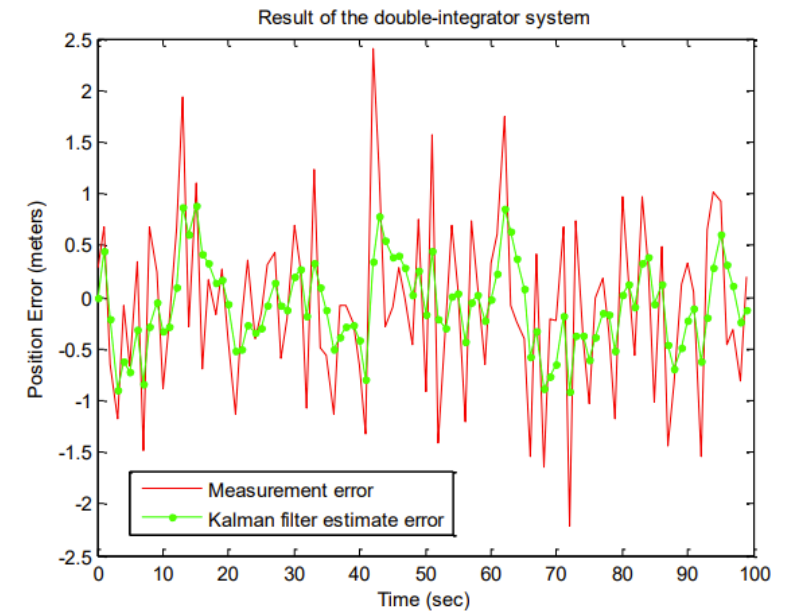
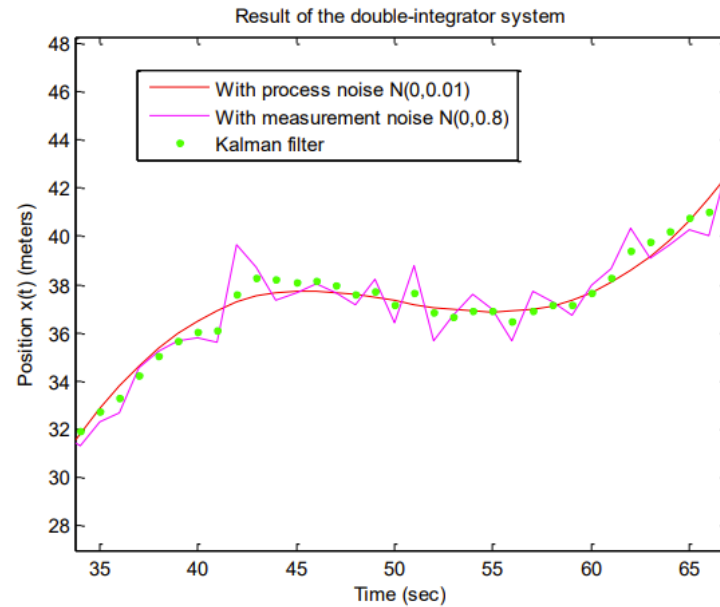
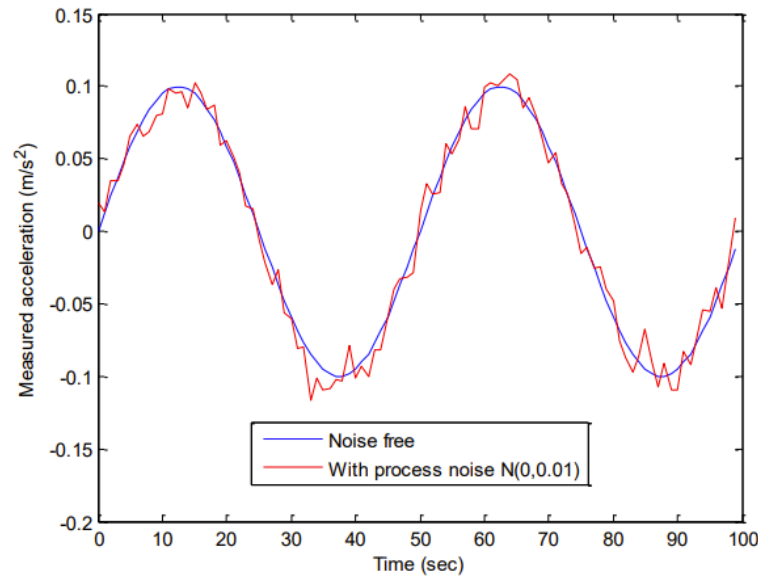
IMU – Processamento dos Dados – Filtro de Kalman: O Algoritmo

1. Seja um processo definido pelo modelo:
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) + v(k) \\ y(k) = C \mathbf{x}(k) + e(k) \end{cases} \quad \text{com: } \begin{cases} v(k) \sim N(0, Q_k) \\ e(k) \sim N(0, R_k) \end{cases}$$
2. Considerem-se as condições iniciais:
$$E\{\mathbf{x}(0)\} = \hat{\mathbf{x}}(0) \quad ; \quad E\left\{(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0))(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0))^T\right\} = P_o \quad ; \quad E\{v(i)e(j)^T\} = 0, \forall i,j$$
3. Em cada instante de amostragem, k , calcule-se a estimativa prévia do vetor de estado e da sua incerteza (covariância do erro):
$$\mathbf{x}_-(k) = \Phi \mathbf{x}(k-1) + \Gamma u(k-1) \quad ; \quad P_{k,-} = \Phi P_{k-1,+} \Phi^T + Q_{k-1}$$
4. Nesse instante, calcule-se a Matriz do Ganho de Kalman:
$$K_k = P_{k,-} C^T [C P_{k,-} C^T + R_k]^{-1}$$
5. Atualize-se a estimativa do vetor de estado, e da covariância do seu erro, para o instante k :
$$\hat{\mathbf{x}}_+(k) = \hat{\mathbf{x}}_-(k) + K_k [y(k) - C \hat{\mathbf{x}}_-(k)] \quad ; \quad P_{k,+} = [I - K_k C] P_{k,-}$$

Sistemas Inerciais

IMU – Processamento dos Dados – Filtro de Kalman: Exemplo

Exemplo da aplicação de um Filtro de Kalman ao sistema constituído por um duplo integrador (slide 64):



Sistemas Inerciais

IMU – Processamento dos Dados – Filtro de Kalman: Calibração e Extensão

A qualidade dos resultados obtidos com o Filtro de Kalman depende da definição do modelo de evolução dos erros (do estado), e das covariâncias estimadas para os erros de processo e medida.

Mais ainda, a assunção de que os erros de processo e medida seguem uma distribuição normal pode não ser verdadeira, deteriorando as estimativas do Filtro de Kalman.

Quando os erros de processo/medida não seguem uma distribuição normal, torna-se necessário reformular o modelo para que estes possam ser descritos às custas de variáveis aleatórias de distribuição normal.

Por exemplo, acelerómetros e giroscópios sofrem de erros de processo com características de *random walk*, e uma vez que *random walk* pode ser modelado pela integração de ruído gaussiano, adiciona-se um novo estado ao modelo representativo da evolução *random walk* desse erro de processo.

Índice

- Introdução
- Sistemas de posicionamento por satélite
- Sistemas inerciais de navegação
- Integração de sistemas inerciais com sistemas de posicionamento por satélite

Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Introdução

Os sistemas de navegação por satélite e os sistemas inerciais apresentam características bastante distintas.

O posicionamento por sinais enviados por satélites tem, por um lado, a desvantagem de depender de elementos externos ao veículo cuja posição se pretende calcular. Este facto torna o processo suscetível a interferências externas, propositadas ou não, podendo comprometer significativamente a possibilidade de ser calculada alguma posição, ou de as posições calculadas apresentarem error significativos.

Tal vulnerabilidade é um fator determinante para que este não processo de posicionamento possa não ser o recomendado em aplicações críticas ou que envolvam risco para humanos (como é o caso da aviação civil).

Por outro lado, na ausência de interferência as posições calculadas através de sinais de satélite não vão sofrendo deriva (*drift*) ao longo do tempo, e geram a posição em coordenadas absolutas.

Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Introdução

O posicionamento baseado em sistemas inerciais, contrariamente aos sistemas GNSS, requer apenas o uso de equipamento colocado no interior do próprio veículo, não estando sujeito a interferências provenientes do exterior do veículo.

As posições do veículo são simplesmente geradas a partir do movimento sentido pelos seus sensores (acelerómetros e giroscópios), relativamente ao referencial inercial.

Por outro lado, estes sistemas apenas conseguem estimar a forma como vai variando a posição (e orientação) do veículo relativamente ao ponto em que este se encontrava quando iniciou a medir as acelerações sentidas, pelo que não determina posições em coordenadas absolutas (a menos que sejam especificadas as coordenadas absolutas do ponto de partida do veículo).

É por esta razão que os pilotos de aeronaves, momentos antes das descolagem, necessitam de introduzir (no sistema de navegação da aeronave) as coordenadas do aeroporto onde se situam, e a orientação do avião.

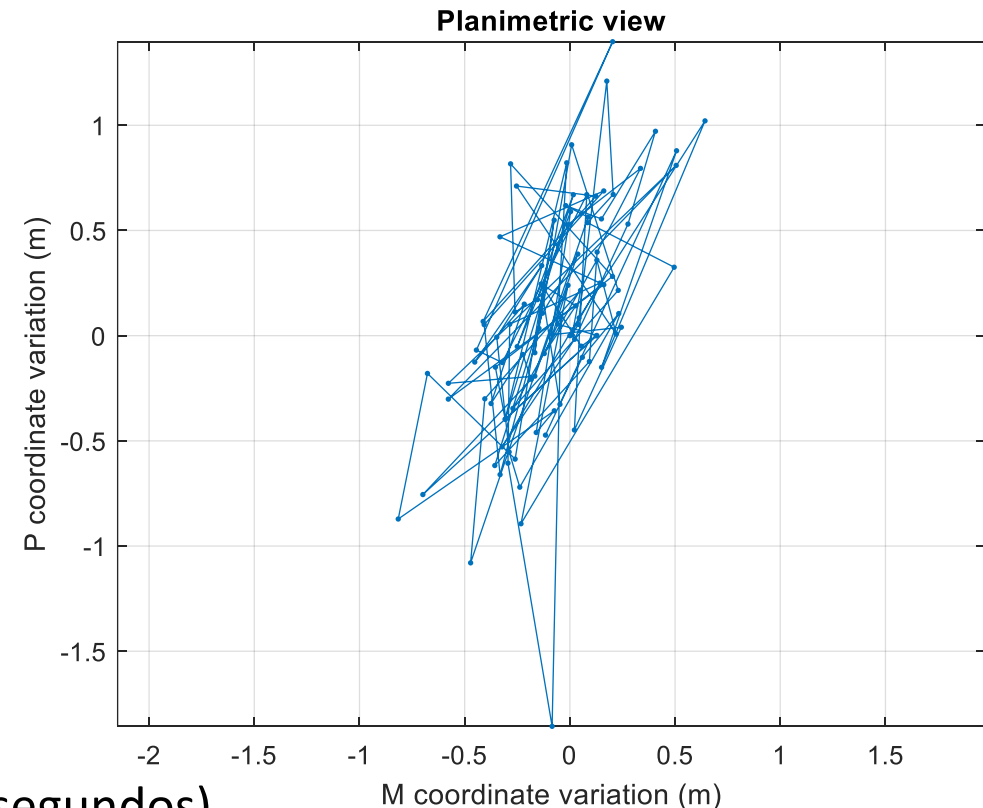
Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Introdução

Um outro aspeto da complementaridade dos dois tipos de sistema de navegação prende-se com as características do erro de posicionamento.

No caso dos sistemas GNSS, as posições calculadas diretamente das medidas registadas pelos recetores (i.e., sem utilização de técnicas que imponham um determinado modelo dinâmico do recetor) apresentam, em cada cálculo de posições consecutivas, um erro aleatório em torno da verdadeira posição, sendo esse erro bastante descorrelacionado dos erros das posições anteriores.

A figura mostra o desvio da posição planimétrica de um recetor fixo, calculadas em 100 épocas consecutivas (100 segundos).



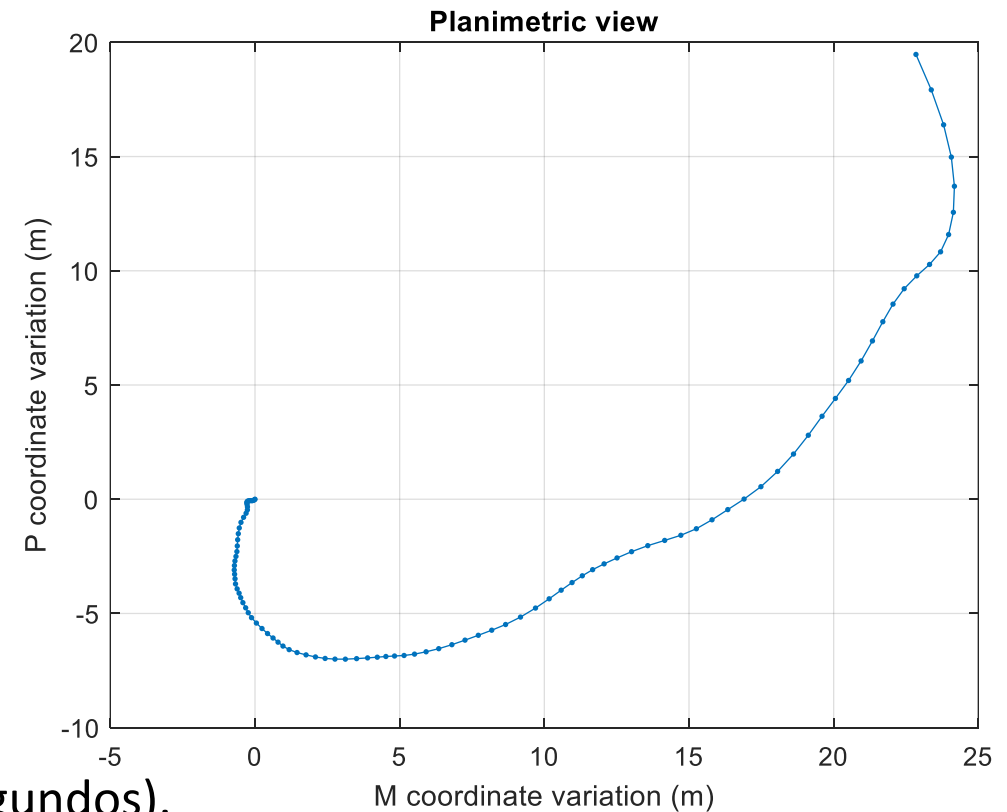
Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Introdução

Um outro aspeto da complementaridade dos dois tipos de sistema de navegação prende-se com as características do erro de posicionamento.

Nos sistemas inerciais a evolução do erro de posicionamento ao longo de épocas consecutivas apresenta uma variação muito mais suave que a das posições por GNSS. A característica predominante é a deriva (*drift*) que essas posições apresentam.

A figura mostra o desvio da posição planimétrica de um IMU fixo, calculadas em 100 épocas consecutivas (100 segundos).



Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Introdução

Também a cadência a que as medidas são geradas nos dois tipos de sistemas de navegação são significativamente distintas, o que também contribui para a complementaridade dos dois sistemas.

Os recetores GNSS determinam as suas medidas (pseudo-distâncias, medidas de fase e Doppler) tipicamente a cadências de 1 a 10 medidas por segundo (este parâmetro é usualmente configurável pelo utilizador, não sendo usual frequências de medição acima das 10 medidas por segundo).

Já os sensores IMU apresentam taxas de amostragem dos seus sensores bastante superiores, sendo usuais os valores de 100 a 400 medidas por segundo (parâmetro, também, configurável pelo utilizador).

Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Processamento Integrado GNSS+IMU

As aplicações que requerem uma elevada precisão de posicionamento e determinação da atitude de veículos que apresentam comportamentos dinâmicos significativos requerem usualmente a utilização conjunta de sensores GNSS e IMU, devido às suas características complementares (vistas anteriormente).

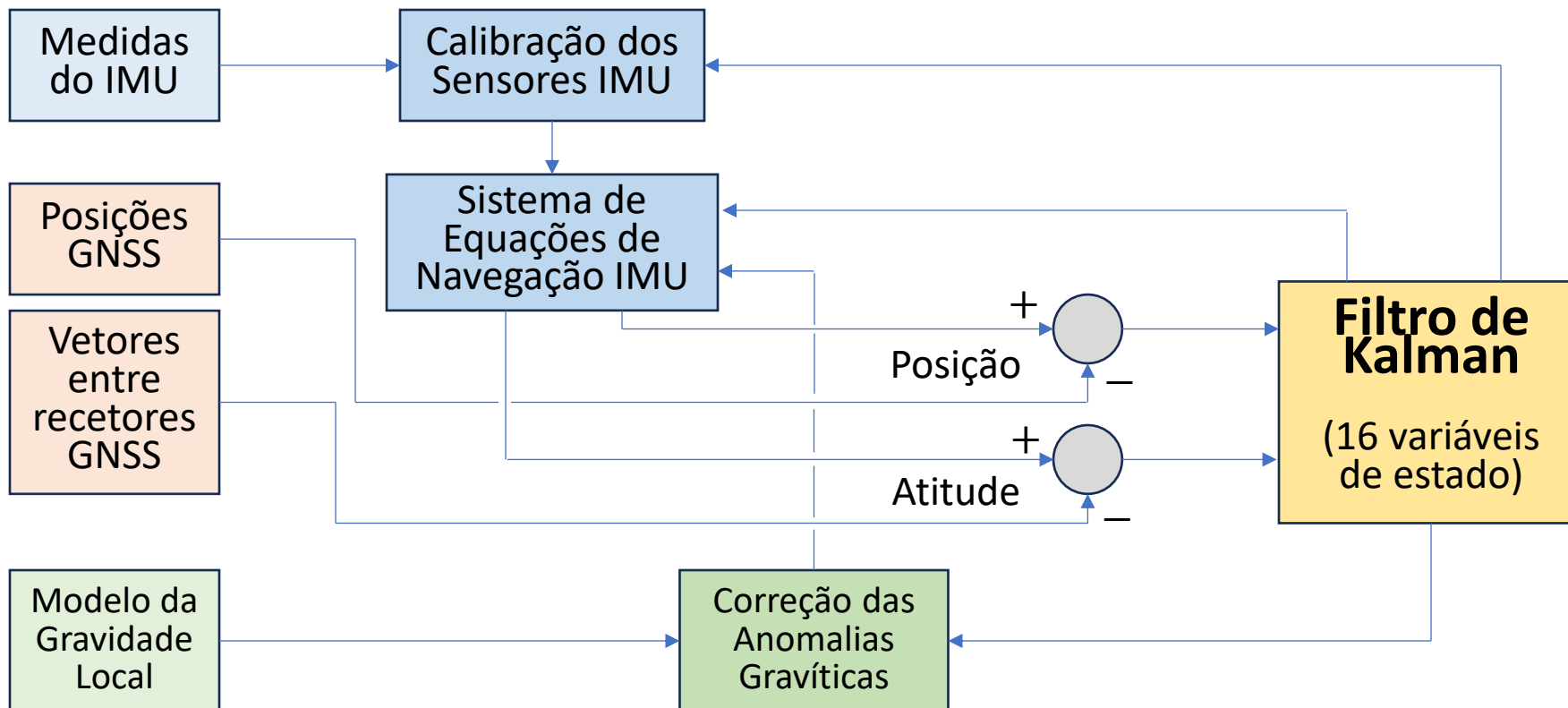
O processo usual de juntar os dados dos dois sensores para o cálculo da posição e atitude do veículo é, novamente, o **Filtro de Kalman**.

Ambos os sistemas produzem uma estimativa (com um erro associado e estatisticamente caracterizável) do resultado de navegação, sendo ambas, então, adequadamente pesadas (sendo os pesos relacionados com as propriedades estatísticas dos erros) para produzir a solução com a menor incerteza possível.

Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Processamento Integrado GNSS+IMU

O esquema usual de implementação desta integração GNSS+IMU para aplicações 3D é:



Variáveis de Estado:

- Erro de posição (3)
- Erro de velocidade (3)
- Erro de atitude (3)
- Desvio do offset dos acelerómetros (3)
- Desvio do offset dos giroscópios (3)
- Desvio da aceleração gravítica (1)

Integração de Diferentes Sistemas de Navegação

Processamento Integrado GNSS+IMU

Outras implementações podem ser consideradas, dependendo dos objetivos pretendidos.

Por exemplo, pode-se usar a suavidade da evolução das soluções/medidas IMU para se detetar transições súbitas que ocorrem nas medidas GNSS que por vezes surgem devido a fenómenos de *multipath*, ou de ruído eletromagnético elevado, em que as PLLs dos recetores perdem momentaneamente o seguimento (*lock*) das medidas de fase das portadoras (este acontecimento denomina-se de *cycle-slip*).

