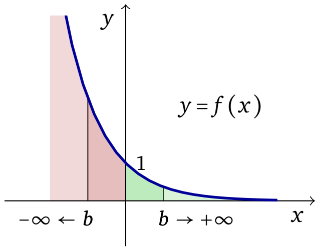
1 Limites da função integral

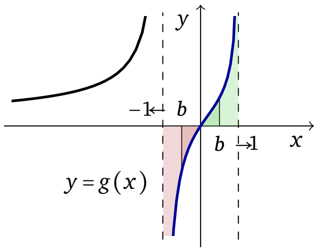
Dada $f(x) = e^{-x}$, com $x \in D_f = \mathbb{R}$, seja $F(b) = \int_0^b f(x)\,dx$

$$D_F =]-\infty, +\infty[, \quad F(b) = 1 - e^{-b}, \quad \lim_{b\to+\infty} F(b) = 1, \quad \lim_{b\to-\infty} F(b) = -\infty$$

Dada $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+x}$, com $x \in D_g =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[$, seja $G(b) = \int_0^b g(x)\,dx$

$$D_G =]-1, 1[, \quad G(b) = 2 - 2\sqrt{1-x} - \ln(1+x), \quad \lim_{b\to 1^-} G(b) = 2 - \ln 2, \quad \lim_{b\to -1^+} G(b) = +\infty$$





2 Integrais impróprios ('simples')

f integrável em qualquer subintervalo fechado de $[a, b[$ (mas não em $[a, b]$)

- $b \notin D_f$ ou
- $b = +\infty$ (integral impróprio 'simples' de 1ª espécie) ou
- há uma assíntota $x = b$ (integral impróprio 'simples' de 2ª espécie)

Em todos os casos, define-se $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$

O limite determina a *natureza* do integral: convergente ou divergente

Se o *problema* for no extremo inferior, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$

Um integral impróprio 'simples' é um limite de uma função integral:

calcula-se sempre apenas UM limite em UM dos extremos

3 Integrais impróprios ('gerais')

Em geral, um integral impróprio pode apresentar mais que um *problema*

- obtêm-se integrais impróprios *simples* dividindo o intervalo ('aditividade')
- o integral converge se e só se cada integral impróprio simples converge

Exemplo: para estudar o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+4)(x-3)^3 \ln x}\,dx$

1) determinam-se os *problemas* no intervalo de integração: $0, 1, 3, +\infty$

2) a função integranda f é integrável em qualquer $[a, b]$ subintervalo de

$$]0, \tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{2}, 1[,]1, 2], [2, 3[,]3, 5] \text{ e } [5, +\infty[\ (\tfrac{1}{2}, 2, 5 \text{ escolhidos livremente!})$$

3) analisam-se os integrais impróprios simples $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$, ...

4 Critérios de convergência

Sejam f, g e h integráveis em $[a,x]$ e $f(x)\geq 0$ e $g(x)\geq 0$ para $x\in[a,b[=I$.

Critério de comparação: se $f(x)\leq g(x)$ para $x\in I$,

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ CONV.} \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\,dx \text{ DIV.} \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \text{ DIV.}$$

Critério do limite 'simplificado' (facultativo): se $g(x)>0$ para $x\in I$,

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ e } \int_a^b g(x)\,dx \text{ têm a mesma natureza}$$

Convergência absoluta:

$$\int_a^b |h(x)|\,dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx \text{ CONV.} \quad \text{(neste caso, a conv. é 'absoluta')}$$

Se o integral de $|h|$ diverge e o de h converge, a convergência é 'simples'

Alguns integrais úteis na aplicação dos critérios:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1\\ \text{DIV.} & \text{se } \alpha\geq 1\end{cases} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1\\ \text{DIV.} & \text{se } \alpha\leq 1\end{cases}$$

5 Exemplos

Considere-se o integral de $f(x)=\frac{1}{(x+4)(x-3)^3\ln x}$ apresentado no slide 3.

- $\int_0^{\frac12} f(x)\,dx$ é CONV: g definida por $g(x)=f(x)$ em $]0,\frac12]$ e $g(0)=0$ é contínua

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^{\frac12} f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^{\frac12} g(x)\,dx=\int_0^{\frac12} g(x)\,dx\in\mathbb{R} \text{ (função integral de } g \text{ contínua)}$$

- $\int_{\frac12}^1 f(x)\,dx$ é DIV: $g(x)=\frac{1}{1-x}>0$ e $f(x)\geq 0$ para $x\in[\frac12,1[$; pelo cr. do limite,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{40} \Rightarrow \int_{\frac12}^1 f(x)\,dx \quad \text{tem a natureza de} \quad \int_{\frac12}^1 g(x)\,dx=\int_{\frac12}^1\frac{1}{1-x}\,dx \overset{(t=1-x)}{=} \int_0^{\frac12}\frac{1}{t}\,dt \quad \text{DIV}$$

- $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ é CONV: se $x\geq 5$, $0\leq x^2\leq (x+4)(x-3)^3\leq (x+4)(x-3)^3\ln x$ e, por comparação,

$$\int_5^{+\infty} f(x)\,dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x+4)(x-3)^3\ln x}\,dx\leq\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \text{ CONV}$$

6 Um integral simplesmente convergente (mas absolutamente facultativo!!)

$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge simplesmente (para $\frac{\pi}{2}$). Vamos analisar $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

Convergência: tem o valor de um integral absolutamente convergente. Por partes ...

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx \quad \text{CONV}$$

$$\text{porque } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{|\cos x|}{x^2}\,dx\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{CONV}$$

Divergência (do *módulo*): repare-se que $|\operatorname{sen} x|\geq|\operatorname{sen} x|^2=\operatorname{sen}^2 x$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx=\left[\frac{\frac12 x-\frac14\operatorname{sen}(2x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}-\frac{\frac12 x-\frac14\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{2x}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx \quad \text{DIV}$$

$$\text{porque } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}\frac{1}{2x}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx=\frac12\ln\frac{2\beta}{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,dx \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \text{"}+\infty-K\text{"}=+\infty$$

pois o integral de $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}$ converge abs. e tende para um numero real K

Logo, por comparação, o integral de $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\geq\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\geq 0$ diverge.

Desafio: verifica que $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$