1 Somas de Riemann e integrabilidade

[Usando a notação introduzida em http://calculo.wikidot.com/2-2-integrais-parte-1 ...]

A função f é integrável (à Riemann) em $[a,b] \subseteq D_f$ e $\int_a^b f(x)\,dx = I \in \mathbb{R}$ se

$$S(f,P_n,C_n) \to I, \text{ quando } n \to +\infty, \text{ desde que } \Delta(P_n) \to 0$$

sendo P_n partições de $[a,b]$ em n intervalos e C_n sequências compatíveis.

Negativamente: f não é integrável se $S(f,P_n,C_n)$ não tem limite, ou seja,

- para alguma escolha de P_n e C_n, $S(f,P_n,C_n) \to \pm\infty$ ou
- para diferentes escolhas de P_n e C_n, $S(f,P_n,C_n)$ tem limites diferentes

Contudo, se f é integrável, $S(f,P_n,C_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$ para quaisquer P_n e C_n

por exemplo, $P_n = \{x_i = a + i\frac{b-a}{n}\}$ (uniforme), sendo ξ_i um dos extremos

2 Integrabilidade: condições necessárias e suficientes

Num intervalo $[a,b] \subseteq D_f$ podemos dizer de f que ...

diferenciável $\Rightarrow$ contínua $\Rightarrow$ integrável $\Rightarrow$ limitada

não limitada $\Rightarrow$ não integrável

- limitada e não contínua num número finito de pontos $\Rightarrow$ integrável
- g integrável e $f(x) \neq g(x)$ num número finito de pontos $\Rightarrow$ integrável

  sendo $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$
- monótona $\Rightarrow$ integrável

3 Exercícios

1. Considera a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} & \text{se } x \in]0,\frac{\pi}{2}[\\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \notin]0,\frac{\pi}{2}[\end{cases}$
   (a) Mostra que f é integrável em $[-\pi,\frac{\pi}{4}]$.
   (b) Mostra que f não é integrável em $[\frac{\pi}{4},\pi]$.

2. Seja f uma função de domínio $D = [0,2]$ tal que $f(0) = 0$ e, para cada $n = 0,1,2,3,\ldots$, $f(x) = \frac{1}{2^n}$ (constante) no intervalo $]\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n}]$. Esboça o gráfico de f e, baseando-te nele:
   (a) justifica que f é integrável;
   (b) mostra que $A = \int_0^2 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$;
   (c) verifica que $\frac{1}{2}x \le f(x) \le x$ e prova que $A \in [\frac{5}{4},\frac{3}{2}]$.