1 Composição e inversa

A função $f \circ g$ ("f após g") é a *composição* de f e g, caracterizada por

- expressão $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$ e
- domínio $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

A função f é invertível $\Leftrightarrow \exists g : D_g = CD_f$ e $\forall x \in D_f, g \circ f(x) = x$

f é invertível $\Leftrightarrow$ f é injetiva

f é **estritamente** monótona $\Rightarrow$ f é invertível

- g é a *inversa* de f e denota-se por f^{-1}
- f é a inversa de f^{-1}, ou seja, $D_f = CD_{f^{-1}}$, $CD_f = D_{f^{-1}}$ e $(f^{-1})^{-1} = f$
- logo, $\forall x \in D_f, f^{-1} \circ f(x) = x$ e $\forall x \in CD_f, f \circ f^{-1}(x) = x$

Se $f \circ g$ é invertível, então $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

2 Composição e condições

Função F:	$(a, b \in D_F)$		
qualquer	$a = b$	$\Rightarrow$	$F(a) = F(b)$
crescente	$\left.\begin{matrix} a > b \\ a \geq b \end{matrix}\right\}$	$\Rightarrow$	$F(a) \geq F(b)$
decrescente	$\left.\begin{matrix} a > b \\ a \geq b \end{matrix}\right\}$	$\Rightarrow$	$F(a) \leq F(b)$
injetiva	$a = b$	$\Leftrightarrow$	$F(a) = F(b)$
estritamente crescente	$a > b$ $a \geq b$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$F(a) > F(b)$ $F(a) \geq F(b)$
estritamente decrescente	$a > b$ $a \geq b$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$F(a) < F(b)$ $F(a) \leq F(b)$

3 Composição e condições: exemplos

Aplicando a função F a ambos os membros de uma condição ...

$\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$	$F(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ **invertível**
$\frac{1}{x} < 4 \not\Rightarrow x > \frac{1}{4}$	$F(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ **não monótona (decr.)**
$\frac{1}{x^2} < 4 \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{4}$	$F(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ **estritamente decr.**
$x^2 < 4 \Leftrightarrow \lvert x \rvert < 2$	$F(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ **estritamente cr.**
$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$	$F(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ **qualquer**
$x < 2 \not\Rightarrow x^2 < 4$	$F(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ **não monótona (cr.)**

Uma consequência importante

$$F \text{ e } G \text{ (estr.) monótonas, } \begin{cases} \text{com o mesmo sentido} & \Rightarrow F \circ G \text{ (estr) cr.} \\ \text{com sentidos diferentes} & \Rightarrow F \circ G \text{ (estr) decr.} \end{cases}$$

4 Limite e derivada da composição

Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e que $\lim_{x\to b} g(x) = c$

podemos concluir que $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$ SE

- g não está definida em b ou
- g é contínua em b ou
- $f(x) \neq a$ para qualquer x "perto" de a ou ...

Regra da cadeia: sendo f diferenciável em a (no interior de D_f) e g diferenciável em $f(a)$ (no interior de D_g) então $(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)$

Esquema da demonstração:

- $h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}, & y\neq f(a) \\ g'\big(f(a)\big), & y = f(a)\end{cases}$ é contínua em $y = f(a)$
- $h\big(f(x)\big)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$, $\forall x \in D_{g\circ f}\setminus\{a\}$ (verificar!!), e se $x\to a\ldots$

5 Inversas e derivadas

1. Justifica a invertibilidade e caracteriza a inversa de:

(a) $f(x) = \arccos e^x$ (b) $g(x) = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{x}}{x-2}$ (c) $h(x) = x\cdot|x|+1$

Se f é contínua, injetiva no intervalo I, diferenciável em a (no interior de I)

$f'(a)\neq 0 \iff f^{-1}$ é diferenciável em $b = f(a)$ e $\big(f^{-1}\big)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

Assim, quando as hipóteses são satisfeitas e existe a derivada de f^{-1}, podemos escrever:

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

2. Calcula, usando a fórmula da derivada da inversa, a derivada de:

(a) $\sqrt{x}$ (b) $\ln x$ (c) $\arccos x$ (d) $\operatorname{arsenh} x = \operatorname{senh}^{-1}(x)$

6 Algumas observações

- Inequações com radicais (analisa e verifica também os casos '≤' e '≥')

$$\sqrt{A} < B \iff \begin{cases} A\geq 0 \\ B\geq 0 \\ A < B^2\end{cases} \qquad \sqrt{A} > B \iff \begin{cases} A\geq 0 \\ B < 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A > B^2 \\ B\geq 0\end{cases}$$

- Dada uma função f, $f^p(x)$ significa a) $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{p \text{ vezes}}(x)$ ou b) $\big(f(x)\big)^p$

a) usa-se raramente, mas a notação de inversa f^{-1} nasce neste contexto

b) é a notação (*atalho*) mais comum: $\operatorname{sen}^3 x = \big(\operatorname{sen}(x)\big)^3$

- Lembrete: $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ (verificar!!)
- Se f restrita a I tem inversa g, $g\circ f(x) = x, \forall x\in I$ mas $g\circ f(x)\neq x, \forall x\in D_f$

$\sqrt{x^2} = x,\ x\geq 0;$ $\sqrt{x^2} = |x|,\ x\in\mathbb{R}$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x,\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}];$ $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = ?!?,\ x\in\mathbb{R}$

7 Exercício de revisão

Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = \ln(\frac{\pi}{2} - \arccos x)$.

(a) Defina a sua inversa, apresentando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

(b) Calcule $f\left(\cos(\frac{23\pi}{12})\right)$, apresentando o resultado na sua forma mais simples.

(c) Encontre a expressão analítica da função derivada de f.

(d) Aplicando o Teorema da derivada da função inversa, calcule $\left(f^{-1}(x)\right)'$.

(e) Calcule $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{\ln x}$.

(f) Enuncie o Teorema de Lagrange. Justifique usando este teorema que

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(x) < \ln(\tfrac{\pi}{2}).$$

(Teste 1 de Cálculo I, Agr. 1, 2020/21)