1 Conjuntos – microrevisão

- Seja $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{3\}\}$. Indique se é verdadeiro ou falso:

(a) $1 \in A$ (b) $3 \in A$ (c) $\{1\} \in A$
(d) $\{1, 2\} \in A$ (e) $\{1, 2\} \subseteq A$ (f) $\{1, 3\} \subseteq A$

- Um desafio:

Num escritório trabalham 20 pessoas: homens e mulheres, portugueses e estrangeiros.

O número de homens é igual ao número de estrangeiros e também é igual ao número de mulheres portuguesas.

Sabendo que 7 homens são estrangeiros, quantas mulheres trabalham no escritório?

2 E Ou Não – os conectivos lógicos

- "E" ($\wedge$) é como em Português: "bom E barato"
- "OU" ($\vee$) na lógica é *inclusivo*: "bom OU barato" inclúi o caso "bom E barato"
- "NÃO" ($\overline{\cdot}$) cuidado com a dupla negação: "NÃO vi NADA" $\neq$ "vi TUDO"!
- A negação de E é OU e vice-versa: NÃO "bom E barato" é "mau OU caro"

$$\overline{P \wedge Q} \longleftrightarrow \overline{P}\,\overline{\wedge}\,\overline{Q} \longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q} \quad e \quad \overline{P \vee Q} \longleftrightarrow \overline{P}\,\overline{\vee}\,\overline{Q} \longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

3 Quantificadores – universal e existencial

1. Todos os alunos tiram boas notas
   - Para todo o $x \in \{\text{estudantes}\}$, x tira boas notas . . . . $\forall x \in E, P(x)$
   - "Para todo" é parecido com "E": . . . . $\forall x \in \{1, 2, 3\}, x < 5 \;\longleftrightarrow\; 1 < 5 \wedge 2 < 5 \wedge 3 < 5$
   - A negação de 1. é: Alguns alunos tiram más notas

$$\overline{\forall x \in E, P(x)} \longleftrightarrow \overline{\forall x \in E}\;\overline{,}\;\overline{P(x)} \longleftrightarrow \exists x \in E \,:\, \overline{P(x)}$$

2. Alguns alunos tiram boas notas
   - Existe $x \in \{\text{estudantes}\}$ tal que x tira boas notas . . . . $\exists x \in E : P(x)$
   - "Existe" é parecido com "OU": . . . . $\exists x \in \{4, 5, 6\} : x < 5 \;\longleftrightarrow\; 4 < 5 \vee 5 < 5 \vee 6 < 5$
   - A negação de 2. é: Todos os alunos tiram más notas

$$\overline{\exists x \in E : P(x)} \longleftrightarrow \overline{\exists x \in E}\;\overline{:}\;\overline{P(x)} \longleftrightarrow \forall x \in E \,,\, \overline{P(x)}$$

4 Implicação

- Umas cartas especiais têm uma letra numa face e um número na outra
- Deviam ter um número par atrás de cada vogal
- Vou ver quatro cartas:

A B 1 2

- Que carta(s) tenho de virar para verificar se o maço tem defeitos? A e 1

Vogal ⇒ Par

equivalente a: Ímpar (não Par) ⇒ Consoante (não Vogal)

mas também (!) a: Consoante (não Vogal) ou Par

5 In/Equações – uma pequena divagação

1. Equações:

   (a) $3-2x=7$ (b) $x^2-x-6=0$ (c) $x-x^2=0$ (d) $x^2=4$ (e) $x(x-1)=6$

2. Inequações:

   (f) $3-2x>7$ (g) $x^2-x-6\leq 0$ (h) $x-x^2>0$ (i) $x^2\geq 4$ (j) $x(x-1)<6$

3. Inequações++:

   (k) $x(1-x)(x-2)\geq 0$ (l) $\dfrac{x(1-x)}{x-2}\geq 0$ (m) $\dfrac{1}{x}<1$

6 Teoremas, demonstrações, contraexemplos

Se $x>1$ então $x^2>x$

- Nos teoremas há, explicita ou implicitamente, um quantificador universal:

$$\forall x\in\mathbb{R}, x>1\Rightarrow x^2>x$$

- As técnicas de demonstração baseiam-se nas equivalências de:
  - ⋆ $H\Rightarrow T$ "direta": $x>1 \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; x^2>x$
  - ⋆ $\overline{T}\Rightarrow\overline{H}$ "contrapositiva": $x^2\leq x \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; x\leq 1$
  - ⋆ $\overline{H}\vee T$ "redução ao absurdo": a negação tem consequências impossíveis

$$\overline{\overline{H}\vee T} \;\leftrightarrow\; H\wedge\overline{T} \;\leftrightarrow\; x>1 \;\wedge\; x^2\leq x \;\Rightarrow\; \text{algo "absurdo"}$$

- Um *contraexemplo* prova que a recíproca $\forall x\in\mathbb{R}, x^2>x\Rightarrow x>1$ é falsa

$$\overline{\forall x\in E, T\Rightarrow H} \leftrightarrow \overline{\forall x\in E, \overline{T}\vee H} \leftrightarrow \exists x\in E: T\wedge\overline{H} \leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}: x^2>x \;\wedge\; x\leq 1$$

7 Lógica: exercícios (ou desafios?)

1. Escreve em maneira formal e demonstra o seguinte teorema:

$$n \text{ é ímpar se e só se } n^2 = 8k+1 \text{ por algum } k \in \mathbb{N}_0$$

[Sugestão: prova '⇒' e '⇐' separadamente, com técnicas diferentes]

2. Demonstra que a recíproca do teorema de Pitágoras é verdadeira

3. Determina o valor lógico das seguintes proposições:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ y \leq |x|,\\
&\text{(b)}\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y \leq |x|,\\
&\text{(c)}\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y \leq |x|,\\
&\text{(d)}\ \exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R},\ y \leq |x|.
\end{aligned}$$

[basta indicar um exemplo para o quantificador existencial da proposição, caso seja verdadeira, ou da sua negação, caso seja falsa]

8 Teorema de Lagrange e monotonia

$I \subseteq D_f$ é um intervalo de monotonia de f se

- f é contínua em I e
- f' existe e não se anula no *interior* de I (ou seja, $I \setminus \{\text{extremos}\}$)

Num intervalo de monotonia, o sinal de f' determina a monotonia de f:
f' positiva/negativa $\Rightarrow f$ estritamente crescente/decrescente

Demonstração: (vamos supor f' positiva no interior de I)

- (T. de Lagrange) $\forall a, b \in I$, com $b > a$, existe $c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- c pertence ao interior de I, logo $f'(c) > 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a)$

9 Limites notáveis, regra de Cauchy e outros truques

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

10 Exercícios: domínios e contradomínios

Determina domínio e contradomínio da função f definida por:

1. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$
2. $f(x) = 2\cos(x) - \operatorname{sen}(2x)$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
7. $f(x) = \ln(1+e^x)$
8. $f(x) = x\ln x$
9. $f(x) = xe^{-x}$
10. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

"CD: reunião dos CDs das restrições de f aos intervalos de monotonia"