

Temas: Convergência pontual e convergência uniforme de sucessões de funções. Convergência pontual / uniforme de séries de funções. Propriedades da convergência uniforme. Critério de Weierstrass para a convergência uniforme. Discussão de alguns exemplos de aplicação.

Sucessões e séries de funções

■ Sucessão Numérica: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Ex: $a_n = 3n + 1$

■ Série numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$ soma infinita dos termos gerados por uma sucessão.

■ Sucessão de funções

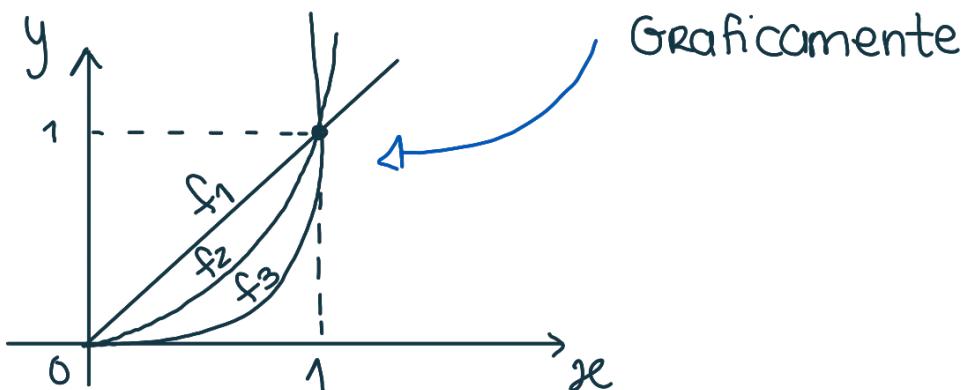
Uma sucessão $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ em que cada termo é uma função de domínio D , é designada por sucessão de funções.

Representa-se por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exemplo 1:

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : f_n(x) = x^n \quad x \in [0, 1]$$

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad \dots$$

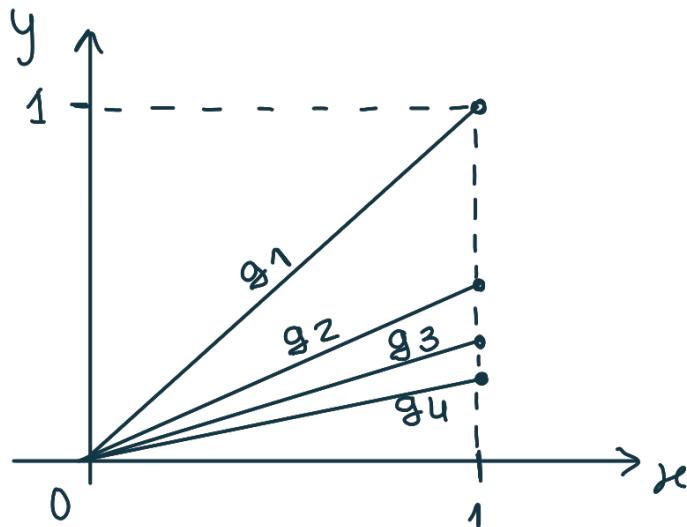


Exemplo 2:

$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} : g_n(x) = \frac{x}{n} \quad x \in [0,1]$$

$$g_1(x) = x \quad g_2(x) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x \quad g_3(x) = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x \quad \dots$$

Graficamente:



Convergência de uma sucessão de funções

Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

① $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D se

$$\forall x \in D, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Chamamos **limite pontual** de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em D .

② $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em D se:

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(ou seja, é um infinitésimo)

Exemplo 3:

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 1 & , x=1 \\ 0 & , x \in]0, 1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in [0, 1[\\ 1 & , \text{ se } x=1 \end{cases}$$

! A convergência uniforme é mais forte do que a pontual.

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = 1$$

entre 0 e 1
(ver gráfico acima)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0$ logo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente

Exemplo 4:

$$g_n(x) = \frac{x}{n} \quad x \in [0, 1]$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 0 & , x=1 \\ 0 & , x \in]0, 1[\end{cases} = 0, \forall x \in [0, 1]$$

$$\sup_{x \in D} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \rightarrow \text{infinitésimo}$$

$\therefore (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $x \in [0, 1]$

Proposição: Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f , em D , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente em D para f .

A Convergência Uniforme de uma certa sucessão de funções acarreta para a mesma **importantes propriedades**:

① f é **contínua** em $[a, b]$



② f é integrável em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_n(x) dx \right]$$

③ Se f_n tem derivadas contínuas em $[a, b]$ e a sucessão $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ conv. uniformemente em $[a, b]$ então f é diferenciável em $[a, b]$ e

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Basta que falhe uma destas prop. e já não existe convergência uniforme.

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

Exemplo 5:

$$h_n(x) = nxe(1-x^2)^n \quad x \in [0, 1]$$

$(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente?

função
contínua

$$\textcircled{1} \quad h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 0, & x=1 \\ 0, & x \in]0, 1[\end{cases} = 0$$

$$x \in]0, 1[$$

$$\begin{aligned} \lim nxe(1-x^2)^n &= \lim \frac{nxe}{(1-x^2)^n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{x}{-n(-2x)(1-x^2)^{-n-1}} \\ &= \lim \frac{1}{2xe(1-x^2)^{-n-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

∴ A prop. 1 verifica-se.

② $\int_0^1 h(x) dx = 0$ → função nula $[h(x)=0]$
logo a área é nula!

$$\int_0^1 h(x) dx \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 h_n(x) dx \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n x (1-x^2)^n dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2} \int_0^1 2x(1-x^2)^n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n}{2} \left[0 - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

∴ falha a prop. 2 logo não há conv. uniforme.

Exemplo 6:

$$\text{Seja } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) Estuda a convergência pontual em $[0,1]$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 &; x=0 \\ \frac{1}{2} &; x=1 \\ 0 &; x \in]0,1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

$x \in]0, 1[$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{0}{1} = 0$$

b) convergência uniforme em $[0, 1]$

Não há conv. uniforme em $[0, 1]$ pois f_n é contínua em $[0, 1]$ (Falta a propriedade 1)

c) convergência uniforme em $[0, \frac{1}{2}]$

$$\sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \textcircled{*}$$

função contínua em intervalo fechado tem
máximo e mínimo T. weierstrass

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^n}{1+x^n} \right)' &= \frac{n x^{n-1} (1+x^n) - x^n (n x^{n-1})}{(1+x^n)^2} \\ &= \frac{n x^{n-1} + n x^{2n-1} - n x^{2n-1}}{(1+x^n)^2} \\ &= \frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} \stackrel{+}{\oplus} \geq 0 \text{ crescente} \end{aligned}$$

↓
maior valor em $x = \frac{1}{2}$

$$\textcircled{*} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 + (\frac{1}{2})^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 + (\frac{1}{2})^n} = 0 \quad (\text{infinitésimo})$$

$\xrightarrow[0]{}$

\therefore Há conv. uniforme em $[0, \frac{1}{2}]$

Idea
semelhante
nas séries
numéricas

Séries de funções

Convergência de uma série de funções

Seja $f_n: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente se a sucessão $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das somas parciais converge pontualmente.

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente se a sucessão $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das somas parciais converge uniformemente.

A convergência pontual da série corresponde à convergência da série numérica gerada por cada valor de x .

Exemplo 7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

Convergência Pontual:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right)$$

$\xleftarrow[\text{soma dos limites}]{\text{limite da soma}}$

sucessão das somas parciais

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} K e^{-Kx} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ +\infty & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{K}{e^{Kx}} = 0$$

Pela C.n.C, se $x \leq 0$ a série diverge

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} K e^{-Kx} = +\infty \times +\infty = +\infty$$

Também podíamos usar o Crit. Cauchy

Para $x > 0$, aplicando Crit. D'Alembert:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(n+1)e^{-(n+1)x}|}{|n e^{-nx}|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} e^{-nx-x-(-nx)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} e^{-x} \\ &= e^{-x} \times 1 = e^{-x} \end{aligned}$$

Como $x > 0$: $-x < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1$

\therefore Conv. absolutamente em \mathbb{R}^+

Como a convergência da série está ligada à convergência da sucessão das somas parciais é de esperar a existência de propriedades semelhantes para as séries de funções.

Propriedades da convergência uniforme

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções contínuas em $[a, b]$. Se a série converge uniformemente em $[a, b]$, com soma S . Então:

- ① A soma S é uma função contínua em $[a, b]$
- ② A soma S é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Integração termo a termo

- ③ Se cada f_n for de classe C^1 em $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente em $[a, b]$,

então S é diferenciável em $[a, b]$ e

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad x \in [a, b]$$

Derivação termo a termo

A semelhança das sucessões se uma destas propriedades falhar, isso implica que a série não converge uniformemente em $[a, b]$.

Exemplo 8:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n} \text{ converge para } f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

que é descontínua, então não há convergência uniforme da série, pois falha a propriedade 1.

Contudo, provar a convergência uniforme de uma série de funções por definição torna-se, em geral, complicado devido à dificuldade em lidar com as somas parciais. O resultado seguinte, bastante útil na prática, fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme.

Critério de Weierstrass

Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que,

$$|f_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em D .

Termo geral da sucessão de funções é majorado pelo termo geral de uma série numérica convergente.

Exemplo 9:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

∀n ∈ N, ∀x ∈ ℝ
 série
 Dirichlet
 convergente

∴ A série de funções é uniformemente convergente em ℝ.

Exemplo 10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é uma
 série de
 Dirichlet
 convergente

∴ A série de funções é uniformemente convergente em ℝ.

Exemplo 11

Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Mostre que a série converge uniformemente em ℝ.
- (b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em ℝ.

$$a) f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$$

$$\left| f_n(x) \right| \leq \left| \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série Dirichlet convergente.

Pelo critério de Weierstrass, a série de funções é uniformemente convergente em \mathbb{R} .

b) Pelas propriedades da convergência uniforme a soma S é contínua em \mathbb{R} , uma vez que se verificou a conv. uniforme na alínea anterior.

Exemplo 12

Justifica a convergência uniforme das séries:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1+(2n+1)x^2}}, \quad x \geq 0$$

$$\left| f_n(x) \right| = \left| \frac{1}{3^n \sqrt{1+(2n+1)x^2}} \right| \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3} \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Pelo crit. de Weierstrass
a série de funções converge
uniformemente em \mathbb{R}_0^+

termo geral de uma
série geométrica convergente
 $R = \frac{1}{3} \rightsquigarrow |R| < 1$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n + nx}}, \quad x > 0$$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2^n + nx}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Pelo crit. de Weierstrass
a série de funções converge
uniformemente em \mathbb{R}_0^+ .

termo geral de uma
série geométrica convergente

$$R = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \rightsquigarrow |R| < 1$$

Texto de apoio

22-31

→ Para mais pormenores podes consultar
o texto de apoio.