

Temas : Série de Taylor/MacLaurin. Exemplos.
 Funções analíticas. Representação de uma função através da série de Taylor.
 Exemplos de desenvolvimento de funções em série de Taylor/MacLaurin e resolução de exercícios

Série de Taylor / MacLaurin ($c=0$)

Em que condições podemos escrever :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$



1ª Condição :

Teorema: Sejam I um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Então :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n(f(x)) = 0$$

Condição suficiente
 para que o de cima aconteça.

2ª condição:

Teorema: Sejam I um intervalo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Se,

$$\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M , \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

Se uma destas condições se verificar e a função puder ser representada por uma série de potências, a função diz-se **analítica**.

Exemplo 1

Usa os teoremas anteriores para mostrar que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vimos na **aula 3** que:

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}_{T_0^n(e^x)} + \underbrace{\frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_0^n(e^x)}, \text{ } \theta \text{ entre } x \text{ e } 0$$

Vimos também na **aula 1** que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ é absolutamente convergente } \forall x \in \mathbb{R}$$

então, pela **cond. necessária de convergência**:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Como $R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$

fácil ver por
mud. variável

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_C^n(e^x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^\theta \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^\theta \times 0 = 0$$

Pela 1ª cond, podemos então afirmar que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Da **aula 1** vimos também que:

$$\frac{1}{1-xe} = \sum_{n=0}^{\infty} xe^n, |xe| < 1$$

Usando isto podíamos também dizer:

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \text{ se } |2x| < 1$$
$$-1 < 2x < 1$$
$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\text{se } |-x| < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < 1$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

ou

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ou

$$e^{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

• • • entre outros • • •

Será que podemos representar sen x por uma série de Potências?

Vamos encontrar $T_0^n(\sin(x))$:

$$f^{(4)}(x) = f(x) = \sin(x) \quad \xrightarrow{x=0} \quad f(0) = f^{(4)}(0) = 0 \quad \text{X}$$

$$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(\chi) = f''(\chi) = -\sin(\chi) \leadsto f''(0) = f^{(6)}(0) = 0 \quad \text{X}$$

$$f^{(7)}(x) = f'''(x) = -\cos(x) \implies f'''(0) = f^{(7)}(0) = -1$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

↑
impar

↑
começamos com
positivo

$$T_0^n(\sin(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Como $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ então, pela 2ª condição,

$$\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| < M \quad \forall x \in I \text{ and } n \in \mathbb{N}$$

\Rightarrow Podemos afirmar que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Será que podemos representar $\cos x$ por uma série de potências?

Vamos encontrar $T_0^n(\cos(x))$:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) = f(x) = \cos(x) &\xrightarrow{x=0} f(0) = f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) = f'(x) = -\sin(x) &\xrightarrow{x=0} f'(0) = f^{(5)}(0) = 0 \quad \text{X} \\ f^{(6)}(x) = f''(x) = -\cos(x) &\xrightarrow{x=0} f''(0) = f^{(6)}(0) = -1 \\ f^{(7)}(x) = f'''(x) = \sin(x) &\xrightarrow{x=0} f'''(0) = f^{(7)}(0) = 0 \quad \text{X} \end{aligned}$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$T_0^n(\cos(x)) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\text{Como } |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

$$\text{então } \exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| < M, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

\Rightarrow Podemos afirmar que:

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resumindo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exercícios

Representa em série de Potências:

$$a) f(x) = e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{n!} x^n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cálculo aux:

$$(1+(-1)^n) \begin{cases} n \text{ par} \\ n \text{ ímpar, } 0 \end{cases} \rightarrow 2$$

$$c) f(x) = \sinh(3x)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{3x} - e^{-3x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n - (-1)^n 3^n x^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n (1 - (-1)^n)}{n!}$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \cancel{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Cálculo auxiliar:

$$(1 - (-1)^n) \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ 2, & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}^{2n+1}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}}$$

$$\left| -\frac{x^2}{4} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2}{4} \right| < 1 \Leftrightarrow |x^2| < 4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-4 < x^2 < 4}_{C \cdot \text{Univ.}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$e) f(x) = 2 \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (\text{Fórmula introduzida em Cálc. 1})$$

$$f(x) = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f) f(x) = \frac{1}{1 - 3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n, \quad \text{se } |3x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$$

$-1 < 3x < 1$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$

$$g) f(x) = \frac{2}{2+x} = 2 \times \frac{1}{2+x}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n, \quad \text{se } \left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$$

$\Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < 1$
 $\Leftrightarrow -1 < \frac{x}{2} < 1$
 $\Leftrightarrow -2 < x < 2$
 $\Leftrightarrow |x| < 2$

$$\begin{aligned}
 h) \quad f(x) &= \frac{1}{x} = \frac{1}{1-1+x} = \frac{1}{1-(1-x)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n, \quad |1-x| < 1 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow -1 < 1-x < 1$
 $\Leftrightarrow -2 < -x < 0$
 $\Leftrightarrow 2 > x > 0$
 $\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Podem consultar **Texto de apoio** pág. 17-21

Exercícios extra

a) $f(x) = 2 \sin^2(x)$

b) $f(x) = \cos(x-\pi)$

c) $f(x) = \frac{x}{2-3x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{28}{(1-x)(1+x)}$

Bom Trabalho!

Filipa.