Temas: Fórmula de Taylor/MacLaurin com resto integral e de Lagrange.

Vamos rever aula passada :

Exemplo 1

$T_0^5(\operatorname{sen}(x))$

$f(x) = \operatorname{sen} x = f^{(4)}(x) \rightsquigarrow f(0) = f^{(4)}(0) = 0$

$f'(x) = \cos x = f^{(5)}(x) \rightsquigarrow f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \rightsquigarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \rightsquigarrow f'''(0) = -1$

$$T_0^5(\operatorname{sen} x) = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Exemplo 2

$T_1^n(\ln(x))$

$f(1) = 0$

$\boxed{n=1}$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(1) = 1$

$\boxed{n=2}$ $f''(x) = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ $\quad f''(1) = -1$

$\boxed{n=3}$ $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(1) = 2$

$\boxed{n=4}$ $f^{(4)}(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \leadsto f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$T_1^n(\ln(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,(k-1)!}{k!}(x-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

Exemplo 3

$$T_1^3(xe^x)$$

$f(1) = 1e^1 = e$

$f'(x) = e^x + xe^x \quad f'(1) = e + e = 2e$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x \quad f''(1) = e + e + e = 3e$

$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + xe^x \quad f'''(1) = e + e + e + e = 4e$

$$T_1^3(xe^x) = e + \frac{2e}{1!}(x-1) + \frac{3e}{2!}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3$$

Fórmula de Taylor c/ Resto de Lagrange

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então $\forall x \in I \setminus \{c\}$ existe um θ entre x e c, tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\substack{\text{Polinómio de Taylor} \\ T_c^n f(x)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{\substack{\text{Resto de Lagrange} \\ R_c^n f(x)}}$$

↳ Podemos usar a fórmula de Taylor para obter uma estimativa para $f(a)$ e também uma estimativa para o erro que se comete ao fazer essa estimativa.

Se $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a,b]$ então é limitada e por isso:

$$\left| R_c^n f(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1} \right| \leq \underbrace{\frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}_{\text{Majorante do erro cometido}}$$

$$M = \sup_{\theta \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\theta) \right|$$

<u>supremo</u>: menor dos majorantes

Exemplo 4

4. Considere $f(x) = e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

Vimos na aula passada que:

$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Resto de Lagrange: $R_0^n(e^x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1}$ <u>θ entre x e 0</u>

$$R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Fórmula de MacLaurin de f:

$$f(x) = e^x = T_0^n(e^x) + R_0^n(e^x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$$

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1,0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

$x \in]-1,0[$

$$R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1} \quad , \; \theta \text{ entre } 0 \text{ e } x$$

$f^{(n+1)}(\theta)$

$\theta \in]-1,0[$ ($a = -1$, $b = 0$)

$$|R_0^n(e^x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}(0-(-1))^{n+1}$$

$$M = \sup_{\theta \in]-1,0[} |e^\theta| = e^0 = 1$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} 1^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

$T_0^n(e^x) \to$ Aproximação de $f(a)$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e^{1/2}} = e^{-1/2} \rightsquigarrow f(-1/2) \rightsquigarrow a = -1/2$$

$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \approx f(x)$$

$$R_0^n(e^x) \leq \frac{1}{(n+1)!} \rightsquigarrow \text{estimativa do erro}$$

$n = 1$ $\quad f(-1/2) \simeq 1 + \frac{(-1/2)^1}{1!} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{erro} \leq \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

n = 2 $\quad f(-1/2) \simeq 1 + \frac{(-1/2)^1}{1!} + \frac{(-1/2)^2}{2!} = \underset{\times 8}{1} - \underset{\times 4}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

$\text{ERRO} \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

n = 3 $\quad f(-1/2) \simeq \frac{3}{8} + \frac{(-1/2)^3}{3!} = \frac{5}{8} - \frac{1/8}{6} = \underset{\times 6}{\frac{5}{8}} - \frac{1}{48} = \frac{29}{48}$

$\text{ERRO} \leq \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

Exemplo 5

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

$n = 5$

centro

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(\pi) = 0$

$f^{(5)}(x) = f'(x) = \cos x \qquad f'(\pi) = -1 = f^{(5)}(\pi)$

$f^{(6)}(x) = f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(\pi) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(\pi) = 1$

$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(IV)}(\pi) = 0$

$R^5_\pi(\operatorname{sen} x) = \frac{f^{(6)}(\theta)}{6!}(x-\pi)^6 \qquad \theta$ entre x e π

$\left| R^5_\pi(\operatorname{sen} x) \right| \leq \frac{M}{6!}(b-a)^6$

Como estamos a aproximar sen(3):

$x = 3$

$\Downarrow$

$\theta \in \,]\underset{a}{3}; \underset{b}{\pi}[$

$M = \sup_{\theta \in]3,\pi[} |-\operatorname{sen}\theta| = \operatorname{sen}(3)$

$= \frac{\operatorname{sen}(3)}{6!}(\pi-3)^6 \leq \frac{(\pi-6)^6}{6!}$, pois $\operatorname{sen}(3) \in [0,1]$

2º Q

Exemplo 6

Usando o polinómio de Taylor de ordem 4 centrado em 0 de $f(x) = \ln(x+1)$, calcula uma aproximação de $\ln(1{,}5)$ e calcula uma estimativa para o erro cometido na aproximação.

$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$ $\qquad f^{(4)}(0) = -6$

$f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$

$$\ln(1{,}5) = \ln(1+\underbrace{0{,}5}_{x}) \simeq 0 + \frac{1}{1!}(0{,}5)^1 + \frac{(-1)}{2!}(0{,}5)^2 + \frac{2}{3!}(0{,}5)^3 + \frac{(-6)}{4!}(0{,}5)^4$$

$$=$$

$$\left| \underset{\boxed{x=0{,}5}}{R_0^4(\ln(1+x))} \right| = \left| \frac{\frac{24}{(1+\theta)^5}}{5!} x^5 \right| \leq \frac{M}{5!}(0{,}5-0)^5 = \frac{24}{5!} \times 0{,}5^5 \quad //$$

θ entre $\underset{a}{0}$ e $\underset{b}{0{,}5}$ $\qquad M = \sup\limits_{\theta \in [0;0{,}5]} \left| \dfrac{24}{(1+\theta)^5} \right| = 24$

Fórmula de Taylor c/ Resto Integral

Também existe

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até a ordem $(n+1)$ num intervalo I e $c \in I$. Então $\forall x \in I$ existe um θ entre x e c, tal que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{T_c^n(f(x))} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}_{R_c^n(f(x))}$$

Polinómio de Taylor de f

Resto Integral

$$\left| R_c^n f(x) \right| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \int_a^b \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leq \underbrace{\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Majorante do erro cometido}}$$

Voltando ao exemplo 6 e usando o resto integral

$$R_0^4(\ln(1+x)) = \frac{1}{n!}\int_0^{x=0,5} f^{(5)}(t)(x-t)^n dt$$

$x = 0,5$

$$\leq \frac{(0,5-0)^n}{n!}\int_0^{0,5} |f^{(5)}(t)|dt \leq M\frac{(0,5-0)^n}{n!}$$