Temas: Regras da Disciplina
Breve revisão de séries numéricas
Introdução das séries de potências.
- Raio, domínio e intervalo de convergência.

Revisões:

Série Geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 R^{n-1} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_0 R^n$$

R = razão
a_1 e a_0 → 1^{os} termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- convergente se $|R|<1$
- divergente caso contrário
- soma da série – $S = \lim S_n = \dfrac{a}{1-R}$ (1º termo)

Série de Dirichlet (Harmónica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- se $\alpha > 1$ converge
- caso contrário, diverge

Convergência simples e absoluta

A série é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1} |a_n|$ converge e é simplesmente convergente se a série dos módulos diverge mas a série $\sum_{n=1} a_n$ converge.

Critérios para o estudo da convergência

Critério de Comparação

majorar por convergente
minorar por divergente

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

① $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Critério de comparação por passagem ao limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

b_n: série com que comparamos e da qual sabemos a natureza

① Se $L \in \mathbb{R}^+$, as séries têm a mesma natureza

② Se $L = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

③ Se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Critério de Cauchy (raiz)

Útil com potências de índice n

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

① Se $L<1$, a série converge absolutamente

② Se $L>1$, a série diverge

③ Se $L=1$, nada se conclui por este processo

Critério de D' Alambert (quociente)

Útil com <u>fatoriais</u>

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

① Se $L<1$, a série converge absolutamente

② Se $L>1$, a série diverge

③ Se $L=1$, nada se conclui por este processo

Critério de Leibniz

Avalia convergência simples de séries alternadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

① $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② u_n é decrescente

③ $\lim u_n = 0$

Se ①, ② e ③ se verificarem então a série alternada converge simplesmente.

Séries de Potências → generalização de um polinómio

Chamamos série de potências centrada em $c \in \mathbb{R}$ a toda a série na forma:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma sucessão de números reais e cada a_n é chamado coeficiente da série.

Exemplo 1:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

1. série de potências centrada em 0
2. Coeficientes são todos 1 ($a_n = 1$)
3. Podemos também pensar na série como uma série geométrica de razão igual a x ($R = x$)

→ soma da série: $S = \dfrac{1}{1-x}$

se $|x| < 1$ → para garantir a convergência

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \,, \quad |x| < 1}$$

! Muitas funções podem ser representadas por séries.

Muito útil no cálculo de aproximações!

Outra coisa muito importante é saber quando uma série de potências converge e para que valores de x isso acontece.

Para tal estudo, vamos usar:

- Critério de D'Alembert (Quociente)
- Critério de Cauchy (Raiz)

Exemplo 2:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \longrightarrow$$

Coeficientes da Série: $a_n = \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

série de potências centrada em $c=0$

1º Passo: Análise da convergência no centro ($x=c$)

$x = c = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \rightarrow$$ absolutamente convergente

2º Passo: Análise da convergência nos restantes valores de x ($x \neq c$)

$x \neq 0$ Vamos aplicar o crit. D'Alembert:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x^{n+1} \times n!}{x^n \times (n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| x^{n+1-1} \times \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} |x| \times \frac{1}{n+1}$$

$$= |x| \times \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow$ A série é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$

Domínio de convergência: $\mathbb{R}$

Intervalo de valores de x para os quais a série converge absolutamente.

Mas será que este intervalo pode assumir qualquer formato?

Para qualquer série de potênciais apenas um destes formatos se verifica.

1. A série converge absolutamente em $\mathbb{R}$
2. A série converge absolutamente apenas para $x = c$
3. Existe um $R > 0$, chamado raio de convergência, tal que a série converge absolutamente se $|x - c| < R$

$D =]c-R; c+R[$

No caso de encontrarmos o 3 cenário, com $R \neq 0$ e $R \neq \infty$, num 3º passo iremos analisar o que acontece nos limites do intervalo.

Caso haja convergência absoluta acrescentamos ao domínio de convergência

Caso se verifique convergência simples definimos um novo intervalo, designado Intervalo de convergência

$\downarrow$

Intervalo de valores de x onde a série converge simplesmente ou absolutamente.

Exercícios

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ FT1_1c

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, x^n$$ FT1_1a

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$$ FT1_1e

4. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$$ FT1_1i

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n} (3x-2)^n$$ FT1_1j

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} (x+2)^n$$ FT1_1g

Nota: Já podem resolver FT1_Ex1

5 e 6 Desafio

Ver texto de Apoio: pág. 5-8

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

FT1_1C

$x = 0$ $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \to$$ absolutamente convergente

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x^{n+2}|(n+1)}{|x^{n+1}|(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |x^{n+2-(n+1)}| \times \cancel{\frac{n+1}{n+2}}^{1}$$

$$= |x|$$

Para haver convergência, $|x| < 1$
$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

$x = 1$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$ ⇝ série numérica alternada

série dos módulos: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Comp. passagem ao limite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ dirichlet divergente

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

$\therefore$ As séries têm a mesma natureza, logo não existe conv. absoluta

<u>Critério de Leibniz</u>: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

- $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

$$n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 1+1$$
$$\Leftrightarrow n+1 \geq 2$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$\therefore u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad \text{decrescente}$$

- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\therefore$ A série converge simplesmente.

$x = -1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$

Vimos atrás que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ é divergente então:

$$(-1) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ também diverge.}$$

$\therefore$ Dom. conv: $]-1, 1[$ Int. conv: $]-1, 1]$

② $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

FT1_1a

$x=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\,0^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow \text{conv. absolutam.}$$

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)(n+2)x^{n+1}|}{|n(n+1)x^n|}$$

$$= |x| \times \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n} = |x|$$

Para que haja convergência:

$$|x|<1 \iff -1 < x < 1$$

$x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}[n(n+1)] = +\infty \neq 0$$ Falha a cond. necessária de convergência.

$x=-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-1)^n \rightsquigarrow$$ série numérica alternada

série dos módulos: $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$

Já vimos antes que diverge

$\Rightarrow$ Não há conv. absoluta

Critério de Leibniz: Falha!

$$\lim_{n\to+\infty}[n(n+1)] = +\infty \neq 0$$

$\therefore$ Não há conv. simples em $x = -1$

Dom. conv = Int. conv = $]-1, 1[$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

FT1_1e

$x = 0$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} 0 \rightarrow$ conv. absolutamente

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} x^{n+1} \right|}{\left| \frac{n^2}{n!} x^n \right|}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 \, n!}{n^2 \, (n+1)!} |x|$$

$$= |x| \times \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 \, \cancel{n!}}{n^2 \, \cancel{(n+1)} \, \cancel{n!}}$$

$$= |x| \times \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n^2}}_{0} = |x| \times 0 = 0 < 1$$

$\therefore$ A série converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

$D = I = \mathbb{R}$

④ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$

FT1_1i

$x = 0$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 0 \rightarrow$ absolutam. convergente

$x \neq 0$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{x^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}\right|}{\left|\frac{x^{3n}}{\ln n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x^{3n+3} \cdot \ln(n)|}{|x^{3n} \cdot \ln(n+1)|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |x^3| \times \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$= |x^3| \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$= |x^3| \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1} \times (n+1)\right)}{\ln(n+1)}$$

$$= |x^3| \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(n+1)}{\ln(n+1)}$$

$$= |x^3| \times \lim_{n\to+\infty} \left[\underbrace{\cancel{\frac{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}}}_{0} + 1\right]$$

$\frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \rightarrow 0$

$\ln(n+1) \rightarrow +\infty$

$$= |x^3|$$

Para que haja convergência absoluta, pelo crit. de D'Alembert, $|x^3| < 1$

$$-1 < x^3 < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < x < 1$$

$x = 1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1^{3n}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Crit. comp. passagem ao limite:

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{0}} = +\infty$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to$ Dirichlet divergente

$l = +\infty$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ também diverge.

$x = -1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{\ln(n)} \to$ alternada

série dos módulos: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ Divergente (ver passo anterior)

Crit. Leibniz:

- $n \geq 2 \Leftrightarrow \ln(n) \geq \ln(2)$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$$\therefore u_n = \frac{1}{\ln(n)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)} - \dfrac{1}{\ln(n)}$

$$= \frac{\ln(n) - \ln(n+1)}{\ln(n+1)\ln(n)} =$$

$$= \frac{\overset{-}{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}}{\underset{+}{\ln(n+1)\ln(n)}} < 0$$

C.Aux:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{array}{r|l} n & n+1 \\ \hline -n-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Enquad. $n \geq 2$

$n+1 \geq 3$

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{n+1} < 0$$

$$\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \ln(1)$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \underbrace{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}_{\text{negativo}} < 0$$

$\therefore\ u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ é decrescente

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$

$\therefore$ Pelo Crit. de Leibniz, a série conv. simplesmente se $x = -1$

$\therefore\ D =]-1, 1[\quad I = [-1, 1[$

Bom Trabalho!

Filipa.