3. integrais de linha e de superfície

3.1. Integrais de linha e de superfície;

3.2. Teoremas de Green, de Stokes e de Gauss;

Elemento de arco

Definição 3.1.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva regular em $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$ (i.e. $\mathbf{r} \in C^1([a, b])$ e $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$). Chama-se elemento de arco ao diferencial

$$ds := \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{1}$$

- Nestas condições, temos

$$comp(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds := \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \tag{2}$$

Equivalência de parametrizações

- Duas parametrizações regulares $\mathbf{r}_1(t) = \big(x(t), y(t)\big), t \in [a, b]$ e $\mathbf{r}_2(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau)\big), \tau \in [\alpha, \beta]$ de uma mesma curva $\mathcal{C}$ dizem-se equivalentes se $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_1\big(\phi(\tau)\big) = \mathbf{r}_2(\tau)$, com $\phi \in C^1$ e $\phi(\tau) \neq 0, \forall \tau$.

Exemplo: As parametrizações regulares $\mathbf{r}_1(t) = (t, t),\ \ t \in [0, 2]$, e $\mathbf{r}_2(\tau) = (2 - 2\tau, 2 - 2\tau), \tau \in [0, 1]$, são equivalentes pois representam a mesma curva (segmento de recta que une $(0, 0)$ a $(2, 2)$), e temos

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_1(2 - 2\tau) = \mathbf{r}_1 \circ \phi(\tau) = \mathbf{r}_2(\tau),$$

onde $\phi : [0, 1] \to [0, 2]$, $\tau \mapsto \phi(\tau) = 2 - 2\tau$ é C^1 e $\phi'(\tau) \neq 0$.

Independência relativamente às parametrizações

Lema 3.1.

Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ parametrizações regulares equivalentes da mesma curva $\mathcal{C}$. Então o valor de (2) não se altera, i.e.

$$\int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\|dt = \int_\alpha^\beta \|\mathbf{r}_2'(\tau)\|d\tau.$$

Prova: Sendo equivalentes, temos $\mathbf{r}_1 \circ \phi(\tau) = \mathbf{r}_2(\tau)$, donde

$$\int_\alpha^\beta \|\mathbf{r}_2'(\tau)\|d\tau = \int_\alpha^\beta \left\|\frac{d}{d\tau}(\mathbf{r}_1 \circ \phi)(\tau)\right\| d\tau = \int_\alpha^\beta \left\|\mathbf{r}_1'\left(\phi(\tau)\right)\phi'(\tau)\right\| d\tau$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\|\mathbf{r}_1'\left(\phi(\tau)\right)\right\| |\phi'(\tau)|d\tau = \int_a^b \|\mathbf{r}_1'(t)\|dt := comp(\mathcal{C}). \qquad \blacksquare$$

Integral de linha de 1ª espécie

Definição 3.2. (integral de linha de 1ª espécie)

Sejam $\mathcal{C}$ uma curva regular em $\mathbb{R}^2$, parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a, b]$, e $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo.
Define-se o integral de linha do campo escalar f relativamente à curva $\mathcal{C}$ como

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt, \tag{3}$$

na condição do integral no segundo membro existir.

Exemplo: Para $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$, temos

$$\int_{\mathcal{C}} e^{\sqrt{x}} ds := \int_0^1 f(t^2, 1)\ \|(2t, 0)\|\,dt = \int_0^1 2te^t\,dt = 2.$$

Integrais de linha de 1ª espécie são aplicados em problemas de mecânica, envolvendo distribuição de massa numa dada curva.

Integral de linha de 2^a espécie

Definição 3.3. (integral de linha de 2^a espécie)

Sejam $\mathcal{C}$ uma curva regular em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $t \in [a, b]$, e $\mathbf{F} = (P, Q, R) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial contínuo.
Define-se o integral de linha do campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ relativamente à curva $\mathcal{C}$ como

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{4}$$

Exemplo: Para o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 0, z^2)$, calcule-se $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathcal{C}$ é parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \Big(\mathbf{F}(t, t^2, t^3)\Big) \cdot (1, 2t, 3t^2)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^3, 0, t^6) \cdot (1, 2t, 3t^2)\, dt = \int_0^1 (t^3 + 0 + 3t^8)\, dt = \frac{7}{12}.$$

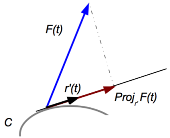
De (4) resulta

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))]\cdot\mathbf{r}'(t)dt &= \underbrace{[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))]\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\right)}\underbrace{\|\mathbf{r}'(t)\|dt} \\
&= \qquad \pm\|Proj_{\mathbf{r}'}\mathbf{F}\| \qquad\qquad ds,
\end{aligned}
$$

i.e., $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ representa (a menos de sinal) a *norma da projecção do campo vectorial* $\mathbf{F}$ *sobre o vector velocidade* $\mathbf{r}'$*, por comprimento de arco*.

Em consequência,

- o integral (4) representa o *trabalho realizado pelo campo vectorial* $\mathbf{F}$ *para deslocar uma partícula ao longo da curva* $\mathcal{C}$ *parametrizada por* $\mathbf{r}$, e diz-se o *fluxo de* $\mathbf{F}$ *ao longo de* $\mathcal{C}$.



- e o sinal do integral (4) depende do sentido em que a curva é percorrida.

Campos conservativos

Se a curva $\mathcal{C}$ é fechada, o integral diz-se a circulação de **F** com respeito a $\mathcal{C}$.

Se o trabalho realizado por **F** depender apenas dos pontos inicial e final, o campo **F** diz-se *conservativo*.

Lema 3.2. (Potencial de campo conservativo)

Dado um campo escalar f, de classe C^1 num aberto simplesmente conexo (sem buracos), o campo vectorial $\mathbf{F} := \nabla f$ é conservativo aí, e f diz-se o *potencial associado a* **F**.

Prova: Sejam A, B dois quaisquer pontos desse domínio.
Porque o domínio é simplesmente conexo, podem ser unidos por uma curva regular $\mathcal{C}$ contida no domínio. Seja $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização para a curva Então

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b (f \circ \mathbf{r})'(t)dt$$
$$= f \circ \mathbf{r}(b) - f \circ \mathbf{r}(a) = f(B) - f(A),$$

ou seja, o campo $\mathbf{F} = \nabla f$ é conservativo. ∎

Elemento de área

Definição 3.4.

Seja $\mathcal{S}$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ (i.e. $\mathbf{s} \in C^1(\mathbb{D})$ e $\partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s} \neq \mathbf{0}$). Chama-se elemento de área ao diferencial

$$dS := \|\partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s}\| du dv. \tag{5}$$

- O vector $\mathbf{n} = \partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s} \neq \vec{0}$ é ortogonal à superfície $\mathcal{S}$ e $\|\partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s}\|$ representa a área do paralelogramo de lados $\partial_u \mathbf{s} du$ e $\partial_v \mathbf{s} dv$. Então

$$area(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} dS := \iint_{\mathbb{D}} \|\partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s}\| du dv. \tag{6}$$

- No caso particular em que a superfície é dada na forma explícita $z = f(x,y)$, com $f \in C^1(\mathbb{D}_{x,y})$, então a superfície é parametrizada como

$$(x,y) \mapsto \mathbf{s}(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big),$$

e o vector ortogonal à superfície em cada ponto é dado por $\mathbf{n} = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)$, com

$$\iint_{\mathcal{S}} dS := \iint_{\mathbb{D}_{x,y}} \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}\, dx dy.$$

Exemplo

Exemplo: Calcule-se a área da superfície $\mathcal{S}$ definida por $z = x^2 + y^2 \leq 1$.

Uma parametrização para $\mathcal{S}$ é $(x, y) \mapsto \mathbf{s}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, onde $(x, y) \in \mathbb{D} : x^2 + y^2 \leq 1$. Então

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{\mathbb{D}} \|\partial_x \mathbf{s} \times \partial_y \mathbf{s}\| \, dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dxdy$$

Passando a coordenadas polares obtemos

$$\iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4\rho^2 + 1} \, \rho \, d\rho d\theta = \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{5} - 1 \right).$$

Definição 3.5 (Integral de superfície de 1^a espécie)

Sejam $\mathcal{S}$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, e f um campo escalar contínuo e limitado sobre essa superfície $\mathcal{S}$. Define-se o integral de superfície de f sobre $\mathcal{S}$ como

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS := \iint_{\mathbb{D}_{u,v}} f(\mathbf{s}(u,v))\|\partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s}\| \, dudv. \tag{7}$$

Interpretação física: o integral de superfície $\iint_S f(x,y,z)dS$ é entendido como

- uma área pesada, de densidade f, sobre a superfície $\mathcal{S}$,

ou, alternativamente,

- um volume do sólido com base na superfície $\mathcal{S}$ e altura f (se $f \geq 0$).

Integrais de superfície de campos vectoriais

Definição 3.6 (Integral de superfície de 2^a espécie)

Sejam $\mathcal{S}$ uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, parametrizada por $\mathbf{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, e $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ um campo vectorial contínuo e limitado sobre essa superfície $\mathcal{S}$. Define-se o integral de superfície de **F** sobre $\mathcal{S}$, ou *fluxo de* **F** *através da superfície* $\mathcal{S}$, como sendo o integral

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \quad := \quad \iint_{\mathbb{D}} \mathbf{F}(\mathbf{s}(u,v)) \cdot (\partial_u \mathbf{s} \times \partial_v \mathbf{s})\ dudv. \tag{8}$$

- A escolha do vector ortonormal $\hat{\mathbf{n}}$ determina o *sentido* em que se atravessa $\mathcal{S}$;
- o vector força **F** decompõe-se na soma de $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\|} + \mathbf{F}_{\perp}$, onde $\mathbf{F}_{\|}$ é paralelo à superfície $\mathcal{S}$ e $\mathbf{F}_{\perp}$ é ortogonal a $\mathcal{S}$. Assim,

$$\mathbf{F} \cdot \hat{n} = \big(\mathbf{F}_{\|} + \mathbf{F}_{\perp}\big) \cdot \hat{n} = \mathbf{F}_{\perp} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \text{e} \quad \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

  calcula o total da componente do campo de forças **F** que atravessa a superfície $\mathcal{S}$, ou seja, o *fluxo de* **F** *através de* $\mathcal{S}$.

Integrais de superfície de campos vectoriais - continuação

Por vezes, é vantajoso escrever $\hat{\mathbf{n}}_{ext} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (sendo estes os ângulos efectuados pelo vector posição com a parte positiva de cada eixo, resp.) e considerar (8) nas formas

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext} dS &= \iint_{\partial\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS \qquad (9) \\ &= \iint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \qquad (10) \end{aligned}$$

Teorema de Green

Seja $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região de integração tal que a fronteira $\mathcal{C} = \partial\mathbb{D}$ é parametrizável por uma função de classe C^1, e orientada em sentido directo. Dado um campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q)$ de classe $C^1(\overline{\mathbb{D}})$, então

$$\int_{\partial\mathbb{D}^+} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbb{D}} (\partial_x Q - \partial_y P)\, dxdy.$$

Exemplo: para o cálculo da circulação (em sentido directo) do campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ com respeito à fronteira do quadrado $\mathbb{D} := [-1, 1]^2$ temos que estamos nas condições do Teorema de Green ($\mathbf{F} \in C^1([-1, 1]^2)$ *e a fronteira de* $\mathbb{D}$ *é parametrizável, em sentido directo, por leis de classe* C^1). Então

$$\int_{\partial\mathbb{D}^+} (x^2 - y^2)dx + (-2xy)dy = \iint_{\mathbb{D}} \left[\partial_x(-2xy) - \partial_y(x^2 - y^2)\right] dxdy = 0.$$

Teorema de Stokes

Seja $\mathcal{S}$ uma superfície de classe C^2 e tal que a sua fronteira, $\partial\mathcal{S}$, é de classe C^1 e orientada em sentido directo.
Dado um campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ de classe C^1 em $\mathcal{S}$, então

$$\int_{\partial\mathcal{S}^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}\, dS.$$

Note-se que $\nabla \times \mathbf{F} := \operatorname{rot} \mathbf{F}$, denota o *rotacional* do campo vectorial $\mathbf{F}$.
Assim, o teorema estabelece que o rotacional do campo é dado pelo trabalho realizado pelo campo relativamente à curva orientada $\partial\mathcal{S}^+$ sobre a qual assenta a superfície $\mathcal{S}$.

Teorema de Gauss

Teorema da Divergência de Gauss

Seja Ω um domínio fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\Omega$ parametrizada por uma lei de classe C^1. Considere-se um campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ de classe C^1 em $\overline{\Omega}$.
Então

$$\iiint_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{F}) dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext} dS. \tag{11}$$

O teorema estabelece que a divergência de $\mathbf{F}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R,$$

no sólido Ω é igual ao fluxo de $\mathbf{F}$ que se escoa para o exterior da superfície $\partial\Omega$.

Corolário

Se o campo vectorial é um campo de gradientes, então (11) traduz-se por

$$\iiint_\Omega \Delta f \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext} dS.$$