Integrais de superfície

1. Superfícies regulares (ou orientáveis)

Uma superfície S diz-se regular se é parametrizável por

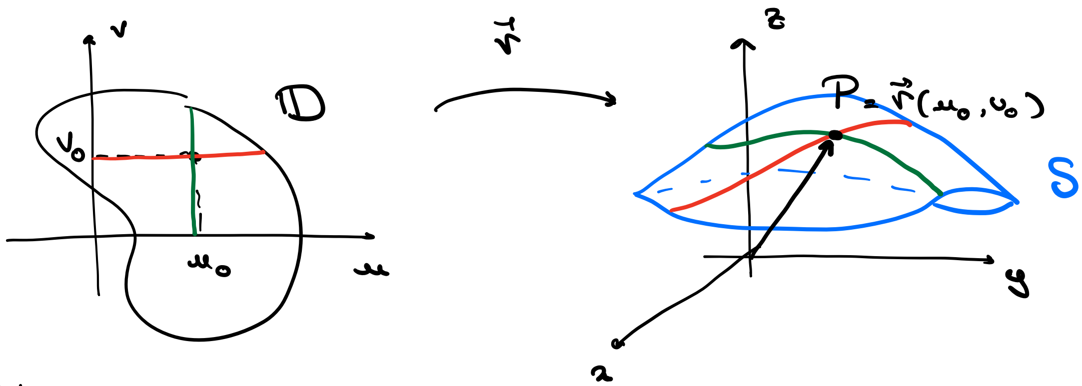
$$\vec{s} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longrightarrow \vec{s}(u,v) = \big(x(u,v) \,,\, y(u,v) \,,\, z(u,v) \big)$$

com

i) $\vec{s} \in C^1(D)$

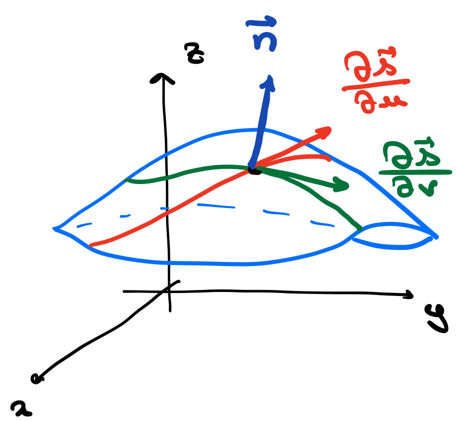
ii) $\dfrac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{s}}{\partial v} \neq \vec{0}$ em D

e a superfície S diz-se orientável.

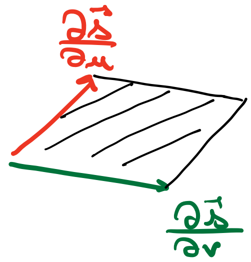


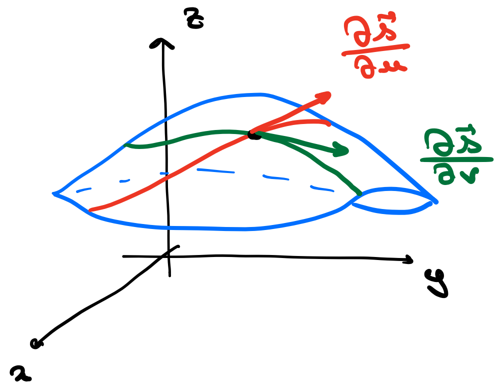
Observa-se que

i. $\dfrac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{s}}{\partial v}$ descreve um vector normal à superfície no ponto P, que estabelece a orientação da superfície S.



ii. $\left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\|$ é a área do paralelogramo de lados $\frac{\partial \vec{s}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{s}}{\partial v}$





iii) o vector $\vec{n} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v}$ determina a orientação da superfície.

2. ELEMENTO DE ÁREA

Tal permite definir elemento de área dS da superfície regular orientável $\mathcal{S}$ como

$$dS := \left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

e temos

$$\text{Área}(\mathcal{S}) := \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_{D_{u,v}} \left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

Caso particular: $\mathcal{S}$: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ (com D fechado, limitado e simplesmente conexo, e $f \in C^1(D)$)

↳ $\mathcal{S}$ admite a parametrização $\vec{s}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

↳ $dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\, dy$

$\hookrightarrow$ Área $(\mathcal{S}) := \displaystyle\iint_{\mathbb{D}} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dx\, dy$

3. INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE 1ª ESPÉCIE

Sejam

i) $\mathcal{S}$ uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\vec{s} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$;

ii) $f : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo e limitado.

Define-se integral de superfície de f sobre $\mathcal{S}$ como

$$\iint_{\mathcal{S}} f \, d\mathcal{S} := \iint_{\mathbb{D}_{u,v}} f(\vec{s}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\| du\, dv .$$

Fisicamente, é entendido como

i) área pesada (de densidade $f = f(x,y,z)$) da superfície $\mathcal{S}$;

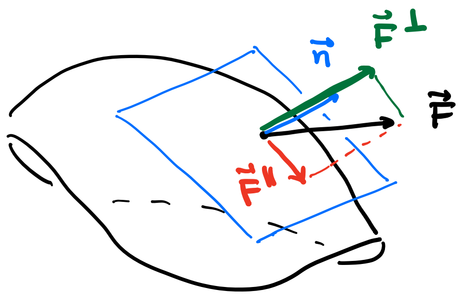
ii) sendo $f(x,y,z) \geq 0$, então $\iint_{\mathcal{S}} f \, d\mathcal{S}$ representa o volume do sólido de base $\mathcal{S}$ e altura $f(x,y,z)$.

4. INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE 2ª ESPÉCIE

Por tratamento semelhante ao caso dos integrais de linha de 2ª espécie , dado um campo vectorial $\vec{F} \in C$ sobre $\mathcal{S}$

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z) \, , \, Q(x,y,z) \, , \, R(x,y,z) \big)$$

podemos decompor $\vec{F}$ na soma de duas componentes: uma paralela à normal à superfície $\vec{F}^{\perp}$ e uma segunda, tangente à superfície $\vec{F}^{\parallel}$.



A força exercida para "atravessar" a superfície S é dada por

$$\iint_S (\pm \|\vec{F}^{\perp}\|) \, dS = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$$

onde

$$\vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \vec{F}(\vec{s}(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v}}{\cancel{\left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\|}} \cancel{\left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\|} \, du \, dv$$

$$= \vec{F}(\vec{s}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right) du \, dv$$

Chamamos a esta integral o fluxo de $\vec{F}$ através de S (integral de superfície de 2ª espécie) onde

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS := \iint_{D_{u,v}} \vec{F}(\vec{s}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right) du \, dv$$