**Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro**

**CÁLCULO III - agrup. 4** **2022/23**

**Folha 7:** *Teoremas fundamentais: teoremas de Green, de Stokes e de Gauss*

---

1. Determine o trabalho realizado pelo campo

   (a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^4, xy)$ ao longo da fronteira do triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$.

   (b) $\mathbf{F}(x,y) = (3y + \cos(x^3), 7x + e^{y^4+1})$ ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

2. Use o Teorema de Green para calcular o trabalho efectuado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x,y) = (y + 3x, 2y - x)$$

   ao longo da elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida em sentido anti-horário.

3. Calcule o integral de linha

   (a) $\int_{\mathcal{C}} (x-y)dx + (x+y)dy$, sendo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4$

   (b) $\int_{\mathcal{C}} x^2y^2dx + xydy$, sendo $\mathcal{C}$ o arco de parábola que une $(0,0)$ a $(1,1)$, em conjunto com os segmentos de recta que unem $(0,1)$ a $(0,0)$ e $(1,1)$ a $(0,1)$.

   (c) Calcule $\int_{\mathcal{C}} (5 - xy - y^2)dx - (2xy - x^2)dy$, onde $\mathcal{C}$ é o quadrado de vértices em $(0,0), (1,0), (0,1)$ e $(1,1)$, percorrido em sentido directo.

   (d) $\int_{\mathcal{C}} \sin(y)dx + x^2\cos(y)dy$, sendo $\mathcal{C}$ o rectângulo de vértices $(0,0), (5,0), (5,2)$, e $(0,2)$.

   (e) $\int_{\mathcal{C}} (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos(y^2))dy$, sendo $\mathcal{C}$ a fronteira da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

4. Calcule

   (a) $\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, com $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xz, yz, xy\big)$ e $\mathcal{S}$ sendo a parte da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 4$ interior ao cilíndro $x^2 + y^2 = 1,\ z \geq 0$ (orientação de dentro para fora).

   (b) $\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, com $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2y\cos z, e^x \sin z, xe^y\big)$ e $\mathcal{S}$ sendo a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$ (orientação de dentro para fora).

5. Seja $\mathcal{C}$ uma curva simples fechada, $C^1$, sobre o plano $x + y + z = 1$. Mostre que o integral $\int_{\mathcal{C}} zdx - 2xdy + 3ydz$ depende apenas da área da região delimitada por $\mathcal{C}$.

6. Calcule o fluxo $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, sendo

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(z, y, x\big)$ e $\mathcal{S}$ a parte superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ (orientação de dentro para fora).

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xy, y^2+e^{xz^2}, \sin(xy)\big)$ e $\mathcal{S}$ a superfície que delimita o sólido $0 \leq z \leq 1-x^2,\ 0 \leq y \leq 2-z$ (orientação de dentro para fora).

7. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext} dS$, sendo

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(3x, xy, 2xz\big)$ e $\mathcal{S}$ a fronteira do sólido definido por $|x| \geq 1, |y| \geq 1, |z| \geq 1$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(z, y, x\big)$ e $\mathcal{S}$ dada por $x^2+y^2+z^2=16$.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x^2yz, xy^2z, xyz^2\big)$ e $\mathcal{S}$ a fronteira do sólido definido por $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$.

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x^3+y^3, y^3+z^3, z^3+x^3\big)$ e $\mathcal{S}$ dada por $x^2+y^2+z^2=1$.