Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO III - agrup. 4 **2022/23**

Folha 5: *Integração múltipla - mudança de coordenadas em integrais duplos e triplos*

---

1. Calcule

   (a) $\iint_{\mathbb{D}} xy\, dxdy$, com $\mathbb{D}$ delimitado por $0 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq x+4$;

   (b) $\iint_{\mathbb{D}} dxdy$, com $\mathbb{D}$ delimitado por $-x \leq y \leq 1-x$ e $\frac{3x-1}{2} \leq y \leq \frac{3x}{2}$;

   (c) $\iint_{\mathbb{D}} dxdy$, com $\mathbb{D}$ delimitado por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ e $a, b > 0$;

2. Use coordenadas polares para calcular

   (a) $\iint_{\mathbb{D}} x^2 y dxdy$ com $\mathbb{D}$ dado por $x^2 + y^2 \leq 25$ e $y \geq 0$.

   (b) $\iint_{\mathbb{D}} \sin(x^2+y^2) dxdy$ com $\mathbb{D}$ dado por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ e $x, y \geq 0$.

   (c) $\iint_{\mathbb{D}} e^{-x^2-y^2} dxdy$ com $\mathbb{D}$ dado por $x^2 + y^2 \leq 4$ e $x \geq 0$.

3. Descreva, em coordenadas cilíndricas,

   (a) o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$

   (b) o hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

   (c) o parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$.

4. Calcule $\iiint_{\mathbb{V}} f(x,y,z) dxdydz$, usando coordenadas cilíndricas.

   (a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$, e $\mathbb{V}$ dado por sólido interior ao cilíndro $x^2+y^2 = 4$, exterior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ e onde $x, z \geq 0$

   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$, e $\mathbb{V}$ dado por sólido interior ao cilíndro $x^2 + y^2 = 4$, exterior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$ e acima do plano $z = 0$

5. Calcule

   (a) $\int_{-2}^{2} \left[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz dz \right) dx \right] dy$

   (b) $\int_{-3}^{3} \left[\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \left(\int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz \right) dy \right] dx$

6. Descreva em coordenadas esféricas o sólido

   (a) interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e ao cilíndro $x^2 + y^2 \leq 1$.

   (b) delimitado superiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

   (c) dado por $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0$ e $xy \leq 0$.

7. Calcule $\iiint_{\mathbb{V}} (x^2 + y^2 + z^2) z dx dy dz$, onde $\mathbb{V} : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

8. Calcule o volume do toros delimitado por $R = \sin \varphi$.