Seja $\mathcal{C}$ uma curva regular, i.e. parametrizada por

$$\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{C} \ , \quad \vec{r} \in C^1([a,b]) \ \text{e} \ \vec{r}\,' \neq \vec{0}$$

1. INTEGRAIS DE LINHA DE 1ª ESPÉCIE

Dado $f : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (campo escalar) contínuo, define-se

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\, ds := \int_a^b f(\vec{r}(t))\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

Fisicamente, integral de linha de 1ª espécie corresponde a calcular um "comprimento pesado" da curva $\mathcal{C}$ (e.g. cálculo do centro de massa de fios materiais, ou áreas de superfícies de base em $\mathcal{C}$ e altura f).

2. INTEGRAIS DE LINHA DE 2ª ESPÉCIE

Dado um campo vectorial contínuo

$$\vec{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \to \vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

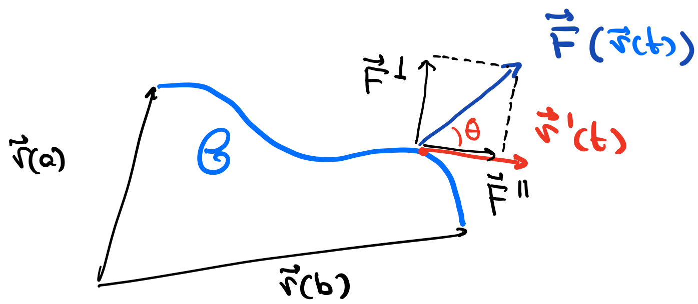
define-se

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

2.1. Interpretação física:

i)



ii) $\vec{F}^{\parallel}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \|\vec{F}(\vec{r}(t))\| \cos\theta$

donde $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ diz-se o fluxo de $\vec{F}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$, ou trabalho realizado pelo campo vectorial $\vec{F}$ para transportar uma partícula ao longo da curva.

Assim, o integral depende da orientação da curva (inversão de sinal).

Sendo a curva fechada, $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ diz-se a circulação de $\vec{F}$ com respeito à curva $\mathcal{C}$.

2.2. CAMPO CONSERVATIVO

Se o trabalho realizado por $\vec{F}$ depender apenas dos pontos inicial e final da curva, o campo diz-se conservativo.

Se existir $f \in C^1$ tal que $\vec{F} = \nabla f$ então diz-se que $\vec{F}$ é campo de gradiente e a função escalar f é o seu potencial.

(!) Se o campo $\vec{F}$ é conservativo então possui potencial f (i.e., $\vec{F} = \nabla f$). Mas haver potencial não garante que $\vec{F}$ é conservativo.

LEMA (potencial de campo conservativo)

Se f é campo escalar C^1 num aberto simplesmente convexo então o campo vectorial $\vec{F} = \nabla f$ é conservativo nesse aberto.

Ideia da prova: para qualquer curva $\mathcal{C}$ nesse domínio

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f \circ \vec{r}\right)(t)\, dt = f\circ\vec{r}(b) - f\circ\vec{r}(a). \blacksquare$$

2.3. Teorema de Green

Teorema de Green Seja $\mathbb{D}$ uma região de integração (aberto, simplesmente conexo) tal que a sua fronteira ∂D é parametrizável por uma função de classe C^1, e orientada em sentido direto.

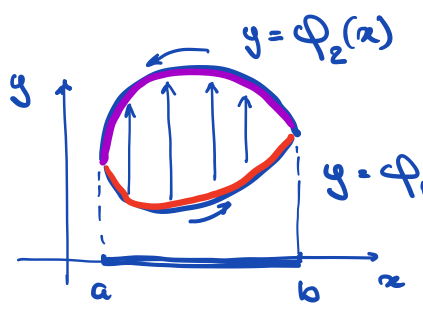
Então, dado $\vec{F} = (P, Q) \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ tem-se

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy .$$

Ideia da prova:

1º caso: $-\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$

Supor que ∂D^+ é parametrizável por união de duas curvas.



$\mathcal{C}_2^+$: $\vec{r}_2(x) = \left(x, \varphi_2(x)\right)$, $b \leq x \leq a$

$\mathcal{C}_1^+$: $\vec{r}_1(x) = \left(x, \varphi_1(x)\right)$, $a \leq x \leq b$

Então

$$-\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy \right] dx$$

$$= -\int_a^b \left[P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \right] dx$$

$$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))\, dx$$

$$= \int_{\mathcal{C}_1^+} P\, dx - \int_{\mathcal{C}_2^-} P\, dx := \int_{\partial \mathbb{D}^+} P\, dx$$

Analogamente, $\displaystyle\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dy = \int_{\partial \mathbb{D}^+} Q\, dy$. $\blacksquare$