4. Equações a Derivadas Parciais (2D)

4.1. EDP's lineares de 1^a ordem;

4.2. EDP's lineares de 2^a ordem e método de separação de variáveis;

Definições gerais

No que se segue, falaremos apenas de EDP's com duas variáveis independentes e de ordem máxima 2.

Definição 4.1.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^8$ um aberto simplesmente conexo e $F : \Omega \subset \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Chamo equação a derivadas parciais (EDP) à equação

$$F\left(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}\right) = 0, \tag{1}$$

para todo $(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^8$.

A ordem da EDP é a ordem da derivada de maior ordem presente em (1).

Definição 4.2.

A função $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se solução da EDP (1) se satisfizer a equação (1) para todo $(x, y) \in D$.

Exemplos; soluções explicítas e implicítas

- Exemplos de EDP's:
  1. $u'_x = 0$;
  2. $u'_x - u'_y = \cos(x+y)$;
  3. $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ Equação de Laplace.

- A solução u da EDP (1) diz-se na forma explicíta se pudermos escrever

$$u = u(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

e teremos a solução u da EDP (1) na forma implicíta se existir $G : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$G(x,y,u) = 0, \quad (x,y,u) \in \tilde{D} \subset \mathbb{R}^3.$$

- $u(x,y) = y^3 + 1$ é uma solução explicíta da EDP $u'_x = 0$.
Já

$$2x - y^2 u(x,y) = \sqrt{u(x,y)}$$

é uma solução implicíta da EDP $yuu'_x + u'_y = 0$.

No que se segue, consideraremos a EDP linear de 1^a ordem dada por

$$a(x,y)u'_x(x,y) + b(x,y)u'_y(x,y) = c(x,y,u(x,y)), \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

onde D é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$, e a, b, c são funções contínuas.

Definição 4.3.

Uma curva $\mathbf{r} : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, com

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

diz-se uma característica de (2) se tivermos

$$x'(t) = a\big(x(t), y(t)\big), \quad y'(t) = b\big(x(t), y(t)\big), \qquad t \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Consequências

1. De $x'(t) = a\big(x(t), y(t)\big)$ tiramos

$$dx(t) = a\big(x(t), y(t)\big)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{a} = dt.$$

Note-se que, se $a(x, y) = 0$ então $x(t) = constante$. Representamos este caso (à semelhança da convenção feita na equação reduzida da recta em 3D) por $\dfrac{dx}{0} = dt$.

Da mesma forma, obtemos $\dfrac{dy}{b} = dt$.

2. De (3) substituído em (2) vem

$$a(x, y)u'_x(x, y) + b(x, y)u'_y(x, y) = c(x, y, u)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\mathbf{r}(t)=\left(x(t),y(t)\right)} \quad u'_x\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + u'_y\big(x(t), y(t)\big)y'(t) = c\Big(x(t), y(t), u\big(x(t), y(t)\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big[u\big(x(t), y(t)\big)\Big] = c\Big(x(t), y(t), u\big(x(t), y(t)\big)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{c} = dt.$$

Solução geral

A solução geral de (2) é agora dada pela resolução do sistema

$$dt = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \\ \frac{dx}{a} = \frac{du}{c} \end{cases}$$

Exemplo: Obtenha a solução geral de $-yu'_x + xu'_y = 0$.

O sistema a resolver é

$$\begin{cases} \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \\ du = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xdx + ydy = 0 \\ u = k_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = k_2 \\ u = k_1 \end{cases}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$u(x, y) = k_1 = F(k_2) = F(x^2 + y^2),$$

onde $F = F(t)$ é uma qualquer função real de variável real de classe C^1.

No que se segue, consideraremos a EDP linear de 2^a ordem dada por

$$\underbrace{Au''_{xx} + Bu''_{xy} + Cu''_{yy}}_{\text{termos de } 2^a \text{ ordem}} + Du'_x + Eu'_x + Fu = \underbrace{G}_{\text{termo independente}}, \quad \text{em } D. \tag{4}$$

onde $A, B, C, D, E, F, G : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

A classificação das EDP's efectua-se tendo em atenção os coeficientes dos termos de segunda ordem

$$\Delta_1 := A(x,y)u''_{xx} + B(x,y)u''_{xy} + C(x,y)u''_{yy}.$$

Dado um ponto $(x_0, y_0) \in D$, a EDP (4) classificar-se-á *localmente* como

$$\begin{array}{ll} \text{hiperbólica} & \text{se } [B(x_0,y_0)]^2 - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) > 0 \\ \text{parabólica} & \text{se } [B(x_0,y_0)]^2 - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) = 0 \\ \text{elíptica} & \text{se } [B(x_0,y_0)]^2 - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) < 0 \end{array} . \tag{5}$$

Exemplos clássicos

1. Equação da onda (hiperbólica)

$$u''_{xx}(x,t) = c^2 u''_{tt}(x,t), \tag{6}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$;

2. Equação do calor (parabólica)

$$u''_{xx}(x,t) = \pm c^2 u'_t(x,t), \tag{7}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$;

3. Equação de Laplace (elíptica)

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0, \tag{8}$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Método de Fourier

Considere-se agora EDP's lineares de 2^a ordem homogéneas

$$Au''_{xx} + Bu''_{xy} + Cu''_{yy} + Du'_x + Eu'_x = 0,$$

onde $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

O método de Fourier consiste em procurar soluções para esta EDP na forma

$$u(x, y) = U(x)V(y), \tag{9}$$

onde U, V funções de classe C^2. Admitindo que

1. $U(x)V(y) \neq 0$ no domínio;
2. é possível separar a EDP em duas EDO's (uma na variável x, outra na variável y),

então as soluções da EDP inicial serão obtidas via a resolução do sistema de EDO's obtido.

Problema 4.1 (equação de onda num intervalo limitado)

Resolver

$$u''_{xx}(x,t) - c^2 u''_{tt}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \tag{10}$$

sujeita às condições iniciais ($t = 0$)

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{posição inicial} && (11) \\ u'_t(x,0) &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{velocidade inicial} && (12) \end{aligned}$$

e à condição de fronteira

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0. \tag{13}$$

Pelo método de Fourier, procure-se soluções na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Método de Fourier para a equação da onda - 2

Substituindo em (10) obtemos

$$0 = X''(x)T(t) - c^2 X(x)T''(t) = \frac{1}{X(x)T(t)}\Big[\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=k} - \underbrace{c^2\frac{T''(t)}{T(t)}}_{=k}\Big]$$

ou seja, o problema dado é equivalente a ter-se o sistema de EDO's

$$\begin{cases} X''(x) = kX(x), & x \in [0, L] \\ c^2 T''(t) = kT(t), & t \geq 0 \end{cases}, \qquad \text{para } k \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

sujeito a $X(0) = X(L) = 0$.

1. A EDO $X''(x) = kX(x),\ x \in [0, L]$, sujeita à condição $X(0) = X(L) = 0$, tem solução se e só se $k = -(\frac{\pi n}{L})^2$, dada por

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Método de Fourier para a equação da onda - 3

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ vem para a segunda equação

$$c^2 T_n''(t) = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 T_n(t), \quad t > 0$$

com solução

$$T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{cL} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{cL} t\right), \quad t > 0.$$

3. combinando (1) e (2) tem-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x) T_n(t) \\ &:= \left[\alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{cL} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{cL} t\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \end{aligned}$$

4. Pelo princípio de sobreposição de soluções, tem-se que a solução de (14) é dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{cL} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{cL} t\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right). \end{aligned}$$

Método de Fourier para a equação da onda - 4

5. Finalmente, das condições iniciais (11) e (12) resultam

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

e

$$\psi(x) = u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\pi n}{cL}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

pelo que os coeficientes α_n e β_n, são obtidos via expansão em série de Fourier das funções φ e ψ.

Lema 4.1

O problema da equação de onda num intervalo limitado $(10) - (13)$ tem solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{cL} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{cL} t\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right), \tag{15}$$

onde α_n e β_n são obtidos a partir dos coeficientes da expansão em série de Fourier das funções φ e ψ.

Método de Fourier para a equação do calor - 1

Problema 4.2 (equação do calor num intervalo limitado)

Resolver

$$u_t'(x,t) - c u_{xx}''(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \tag{16}$$

sujeita à condição inicial

$$u(x,0) \quad = \quad f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{(temperatura inicial)} \tag{17}$$

e à condição de fronteira

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{(temperatura nos extremos).} \tag{18}$$

Pelo método de Fourier, procure-se soluções na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Método de Fourier para a equação do calor - 2

O método de Fourier conduz ao sistema

$$\begin{cases} X''(x) = kX(x) \\ T'(t) = ckT(t) \end{cases}, \qquad \text{para } k \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

sujeito a $X(0) = X(L) = 0$.

1. De novo, a EDO $X''(x) = kX(x)$, $x \in [0, L]$, sujeita à condição $X(0) = X(L) = 0$, tem solução se e só se $k = -(\frac{\pi n}{L})^2$, dada por

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Para a segunda equação

$$T_n'(t) = -c\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 T_n(t)$$

vem

$$T_n(t) = \gamma_n e^{-c(\frac{\pi n}{L})^2 t}, \quad t > 0.$$

Método de Fourier para a equação do calor - 3

3. combinando (1) e (2) tem-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) := \gamma_n e^{-c(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

4. Pelo princípio de sobreposição de soluções, temos

Lema 4.2

O problema da equação do calor num intervalo limitado (16) $-$ (18) tem solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-c(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \tag{20}$$

onde γ_n são obtidos a partir dos coeficientes da expansão em série de Fourier da função f.