Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO III - agrup. 4 **2022/23**

Folha 6: *integrais de linha e de superfície*

---

1. Calcule os seguintes integrais de linha relativamente ao comprimento de arco

   (a) $\int_{\mathcal{C}} y ds$, sendo $\mathcal{C}$ o segmento de recta que une $(1,1)$ a $(2,3)$.

   (b) $\int_{\mathcal{C}} (x^2+yz) ds$, sendo $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\sin(2t), \cos(2t), t), t \in [0,\pi]$.

   (c) $\int_{\mathcal{C}} xy ds$, onde $\mathcal{C}$ denota o quadrilátero de equação $|x|+|y|=4$, percorrido em sentido horário.

2. Dada uma espiral de uma mola cujo material tem densidade $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, e que possui forma de hélice cilíndrica parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, calcule

   (a) a sua massa $M := \int_{\mathcal{C}} \rho ds$;

   (b) o seu centro de massa
   $$\mathbf{P} := \left(\int_{\mathcal{C}} x\rho ds, \int_{\mathcal{C}} y\rho ds, \int_{\mathcal{C}} z\rho ds \right),$$

3. Calcule o integral de linha relativamente às curvas indicadas:

   (a) $\int_{\mathcal{C}} x dy$, com $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = (e^t, 1), t \in [0,1]$.

   (b) $\int_{\mathcal{C}} x dy - y dx$, com $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0,\pi]$.

   (c) $\int_{\mathcal{C}} (x^2-2xy) dx + (y^2-2xy) dy$, onde $\mathcal{C}$ denota a porção de curva da parábola $y = x^2$ entre os pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$.

   (d) $\int_{\mathcal{C}} yz dx + xz dy + xy dz$, com $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t), t \in [0,2\pi]$.

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ ao longo da curva $\mathcal{C}$ resultante da intersecção da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = a^2$ com o cilíndro $x^2+y^2 = ax$ (assuma a trajectória percorrida no sentido de $\mathbf{P}_0 = (a,0,0)$ para $\mathbf{P}_1 = (a/2, a/2, \sqrt{2}a/2)$ em sentido directo).

5. Para cada um dos seguintes campos de forças, verifique se este é um campo conservativo e calcule o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo da curva curva $\mathcal{C}$, sendo

   (a) $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$ e $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0,\pi]$.

   (b) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$ e C dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0,2\pi]$.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ e $\mathcal{C}$ o triângulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(-1,1,-1)$, percorrido nesta ordem.

6. Uma partícula de massa m desloca-se sobre uma curva $\mathcal{C} = \mathbf{r}([a,b])$. A força exercida, em cada instante t, sobre a partícula em $\mathcal{C}$ é dada pela segunda Lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde $t \mapsto \mathbf{a}(t)$ representa o vector aceleração da partícula. Mostre então que trabalho realizado por esta força é um campo conservativo.

7. Sendo $\mathcal{C}^+$ uma curva fechada, justifique que a circulação do campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ é nula ao longo dessa curva.

8. Determine a circulação (em sentido directo) do campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$ ao longo da fronteira do disco unitário $B_1(0)$.

9. Determine a circulação (em sentido directo) do campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ ao longo da fronteira do disco unitário $B_1(0)$.

10. Calcule a área da superfície resultante da intersecção das superfícies cilíndricas $x^2 + y^2 = 1$ com $x^2 + z^2 = 1$.

11. Calcule a área das seguintes superfícies:

    (a) a porção do parabolóide elíptico $z = x^2 + y^2$ no interior do cilíndro $x^2 + y^2 \leq 1$.

    (b) a porção da superfície $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$ condicionada a $1 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 1$.

    (c) a porção da superfície cónica $x^2 = y^2 - z^2$ compreendida entre os planos $y = 1$ e $y = 2$.

12. Calcule
$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS,$$
onde $\mathcal{S}$ é a superfície do parabolóide $z = x^2 + y^2$ no interior do cilíndro $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$.

13. Calcule o integral de superfície $\iint_{\mathcal{S}} x^2 dS$, sendo $\mathcal{S}$ a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

14. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} y dS$, sendo $\mathcal{S}$ a superfície $z = x + y^2$, com $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$.

15. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} z dS$, onde $\mathcal{S}$ é a superfćie que delimita a porção do cilíndro $x^2 + y^2 \leq 1$ compreendida entre os planos $z = x + 1$ e $z = 0$.

16. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}$ através da superfície $\mathcal{S}$, onde

    (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, y, x)$ e $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, z)$ e $\mathcal{S}$ é a fronteira da região delimitada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

(c) A temperatura $t = t(x, y, z)$ numa bola metálica é proporcional à distância do ponto ao centro da bola. Encontre fluxo do calor através da superfície esférica $\mathcal{S}$ de raio $R > 0$ e centrada no centro da bola metálica.