Integrais de Linha

No que se segue, consideram-se parametrizações regulares i.e.

$$\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

com $\vec{r} \in C^1([a,b])$ e $\vec{r}\,' = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \neq \vec{0}$

$$= (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0,0,0), \forall_t$$

1. EQUIVALÊNCIA DE PARAMETRIZAÇÕES

Dado que uma curva é imagem de ~~a~~ certa parametrização, é conveniente saber quando duas parametrizações dão origem à mesma curva, i.e, com mesma imagem mas que pode ser percorrida em sentido contrário.

Def. 1. Duas parametrizações regulares, $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\vec{r}_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^3$, dizem-se EQUIVALENTES se existir $\phi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ tal que

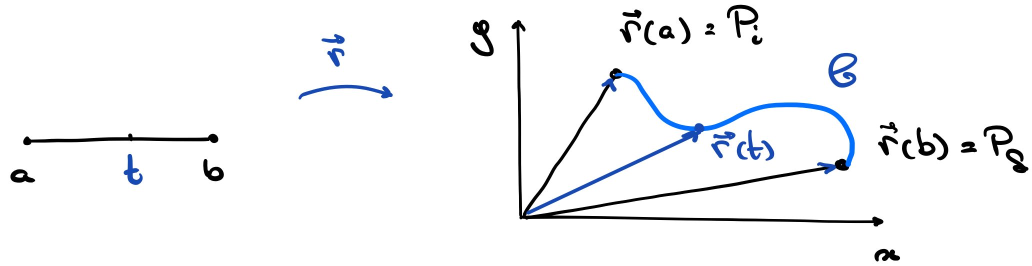
i) $\phi \in C^1([a,b])$ ii) $\phi' \neq 0$ em $]a,b[$

iii) $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2 \circ \phi(t)$, $t \in [a,b]$

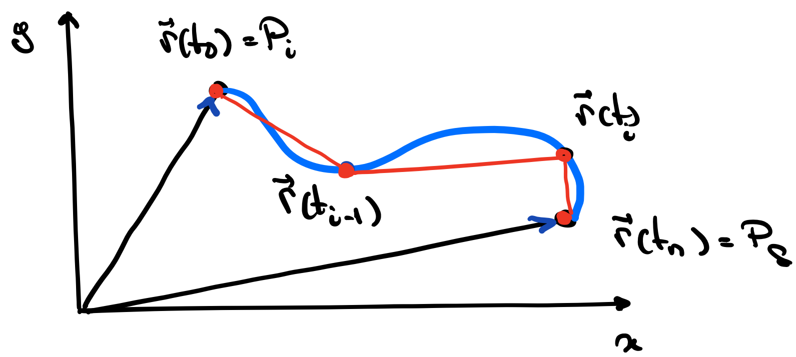
Na prática, representam a mesma curva (imagem igual) percorrida sem mudança de sentido.

2. ELEMENTO DE ARCO

Objectivo: calcular o comprimento da secção de uma curva associada a uma certa parametrização $\vec{r}(t)$.



Rectificação da curva – aproximação do comprimento $\mu(\mathcal{C})$ por soma de segmentos de recta.



$$\mu(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^{n} \| \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\vec{r}(t_{i-1}) - \vec{r}(t_i)}{t_{i-1} - t_i} \right\| |t_{i-1} - t_i|$$

Def. 2. A curva $\mathcal{C} = \vec{r}([a,b])$ diz-se RECTIFICÁVEL se existe e é finito o limite

$$\lim_{n} \sum_{i=1}^{n} \| \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \| \qquad (1)$$

com $\max |t_i - t_{i-1}| \to 0$.

NOTA: nem todas as curvas são rectificáveis.

Sendo rectificável, a expressão (1) corresponde ao integral de Riemann

$$\mu(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds := \int_a^b \underbrace{\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt}_{:= ds \ \text{elemento de arco}} \qquad (2)$$

Lema (comprimento de curva associado a parametrizações equivalentes)

Dadas duas parametrizações equivalentes da mesma curva $\mathcal{C}$, então o valor do seu comprimento $\mu(\mathcal{C})$ não se altera.

<u>Dem:</u>

A curva $\mathcal{C}$ admite duas parametrizações equivalentes.

$\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathcal{C}$, $\vec{r}_2 : [\alpha,\beta] \to \mathcal{C}$ com $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \phi$ com

$\phi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$, $\phi \in C^1$, $\phi' \neq 0$.

Então

$$\int_a^b \|\vec{r}_1\,'(t)\|\, dt = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \circ \phi) \right\| dt$$

$$= \int_a^b \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{r}_2(\phi(t)) \cdot \frac{d\phi}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_a^b \|\vec{r}_2\,'(\phi(t))\| \cdot \left| \frac{d\phi}{dt} \right| dt$$

$\tau = \phi(t)$

$d\tau = \frac{d\phi}{dt}\, dt$

$$= \int_\alpha^\beta \|\vec{r}_2\,'(\tau)\|\, d\tau$$

$\blacksquare$