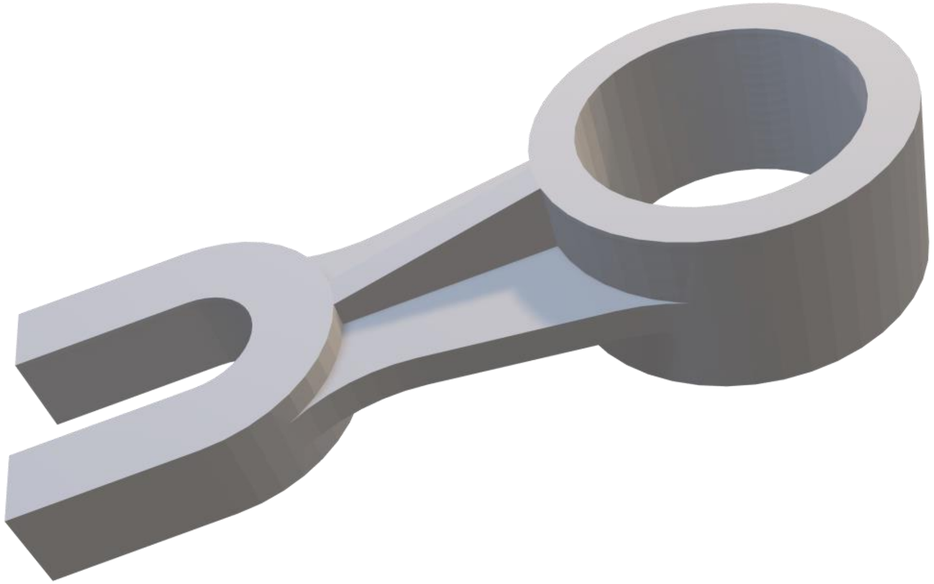
Spacecraft Dynamics & Control

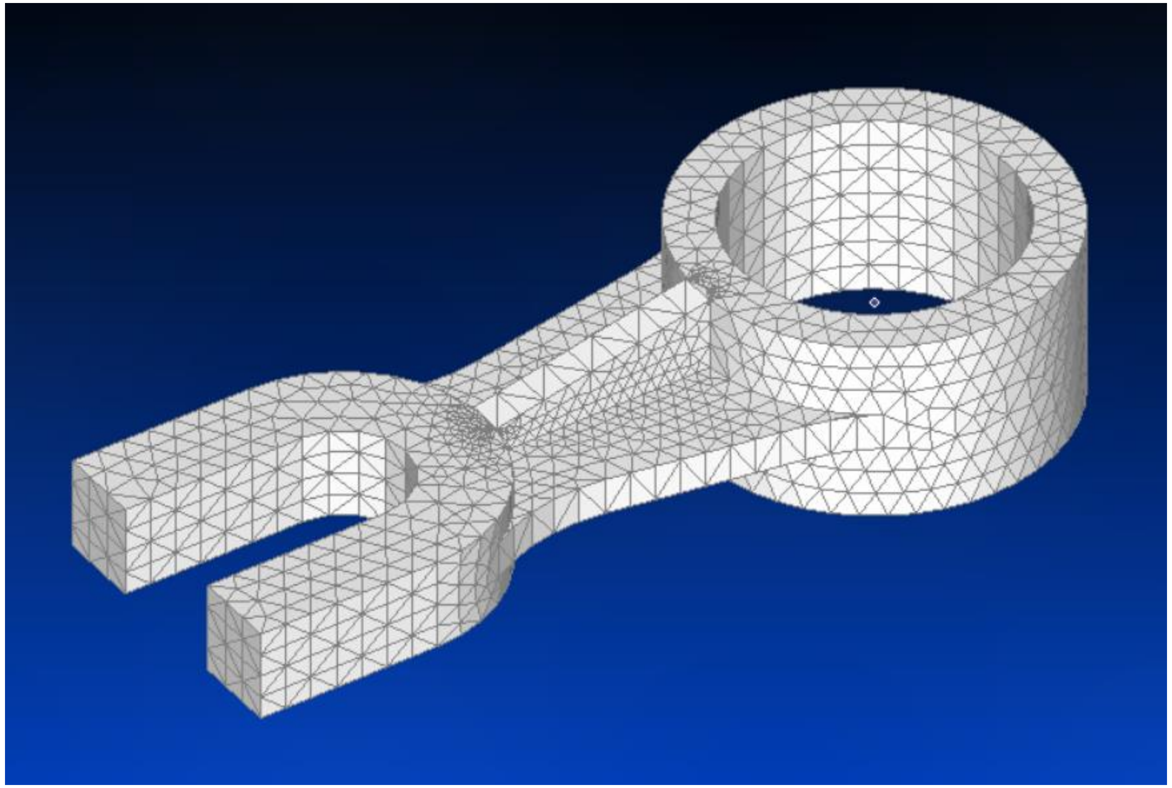
Aula 4 – Métodos numéricos
Método dos elementos finitos

2024/2025

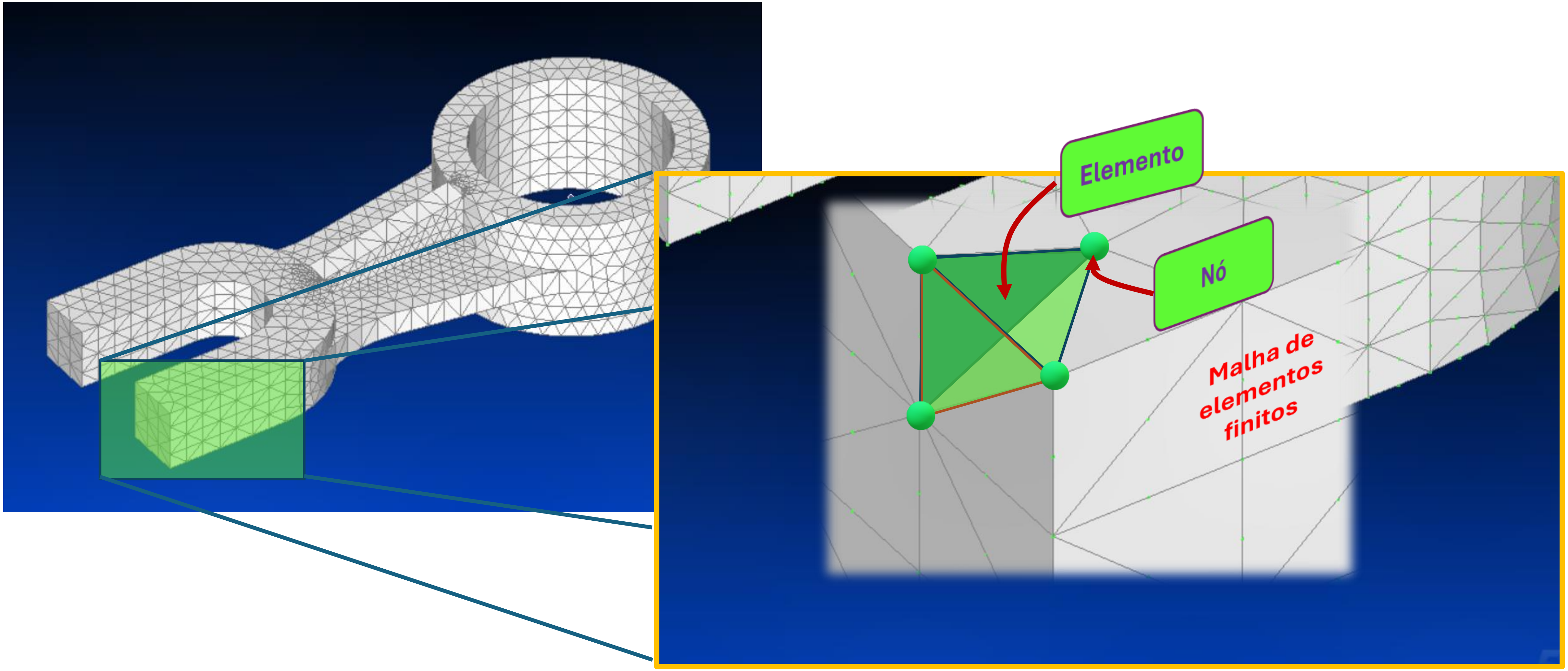
Rui Moreira

Método dos elementos finitos - fundamentos

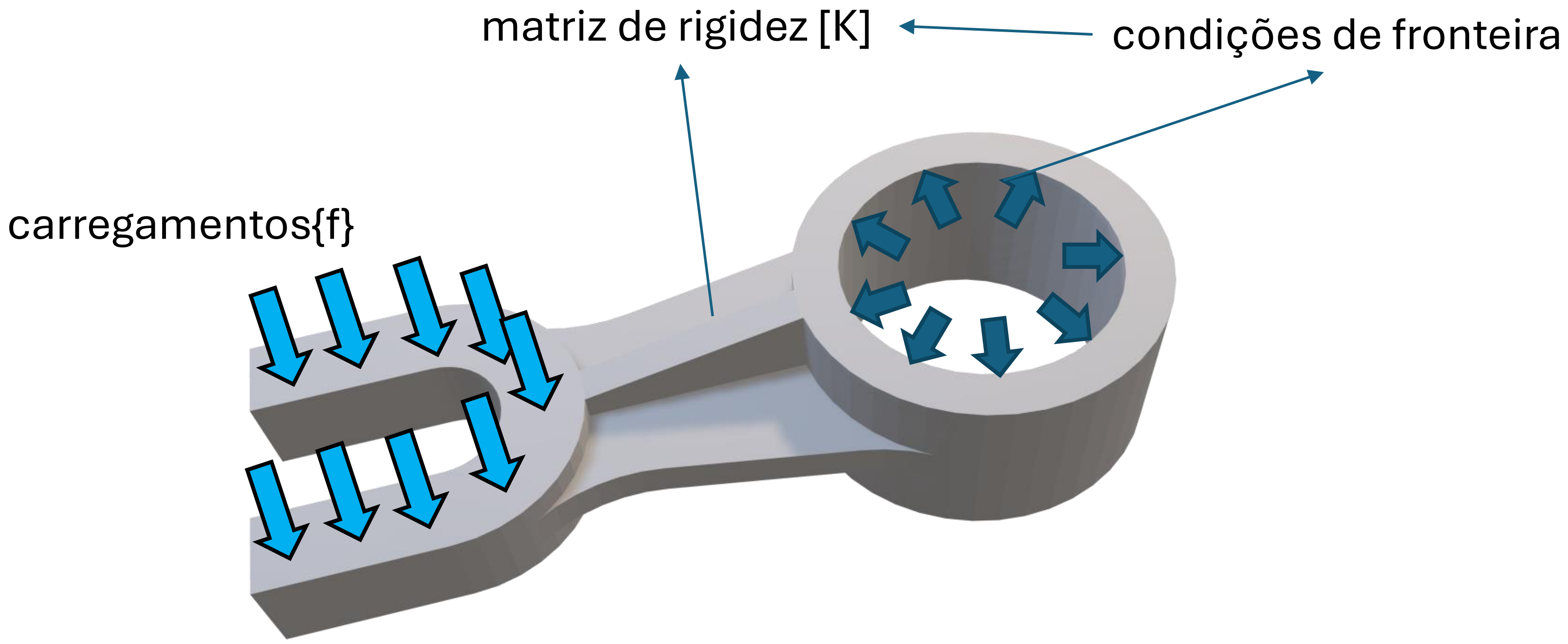




Método dos elementos finitos – elemento, nó, malha



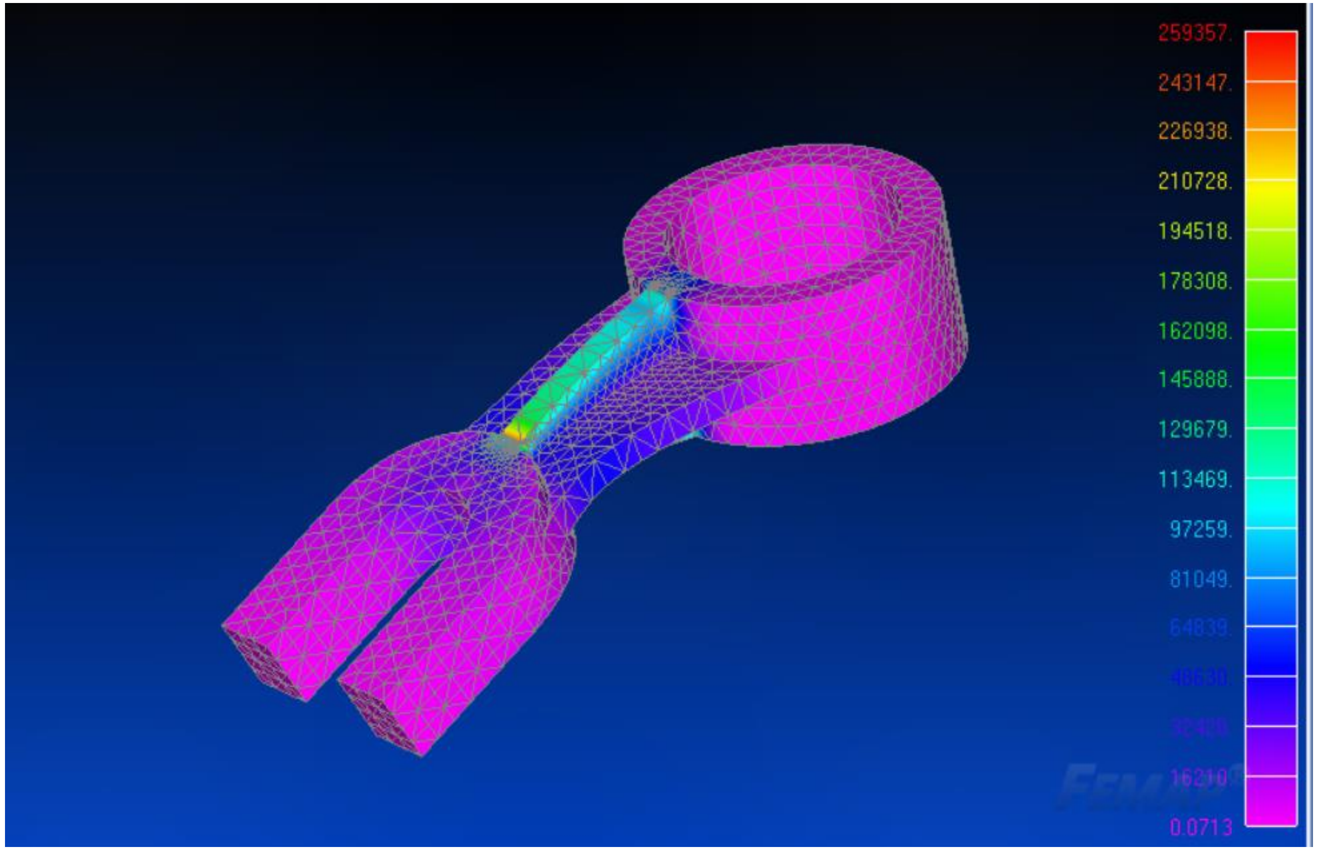
Método dos elementos finitos – problema linear elástico



Método dos elementos finitos – problema linear elástico

$$[K].\{d\} = \{f\}$$

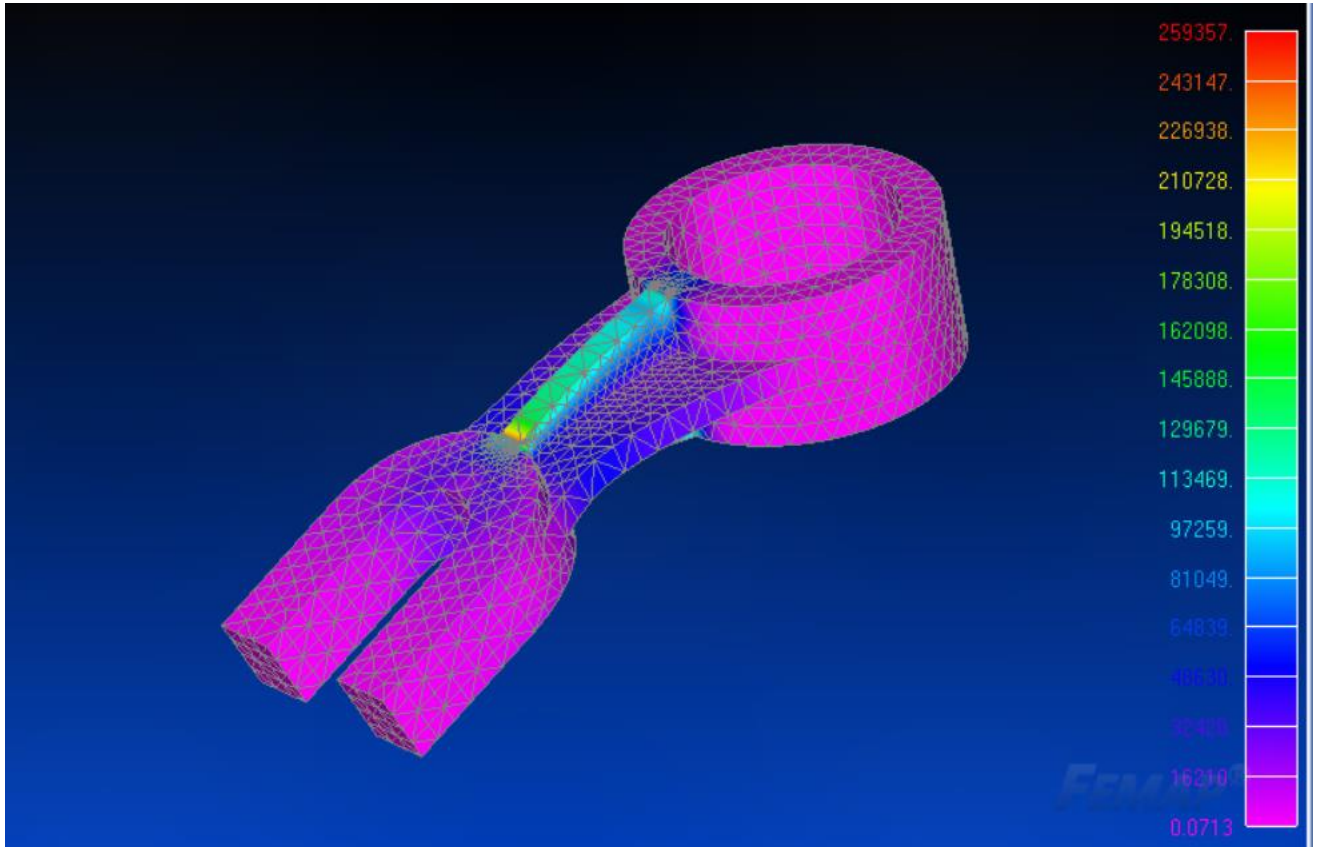
$[K]$: matriz de rigidez
$\{d\}$: vetor de deslocamentos
$\{f\}$: vetor de carregamentos



Método dos elementos finitos – problema linear elástico

$$[K].\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

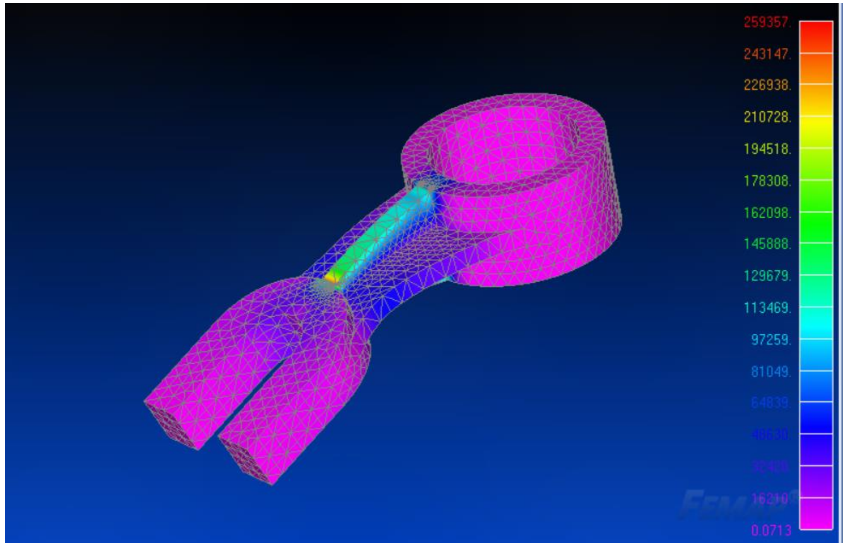
$[K]$: matriz de rigidez
$\{x(t)\}$: vetor de deslocamentos
$\{f(t)\}$: vetor de forças



Método dos elementos finitos – problema dinâmico

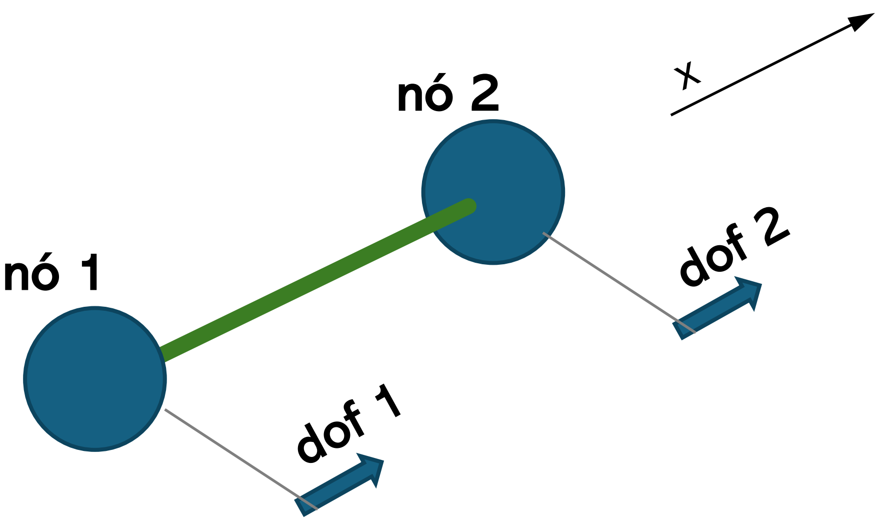
$$[M].\{\ddot{x}(t)\} + [C].\{\dot{x}(t) + [K].\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

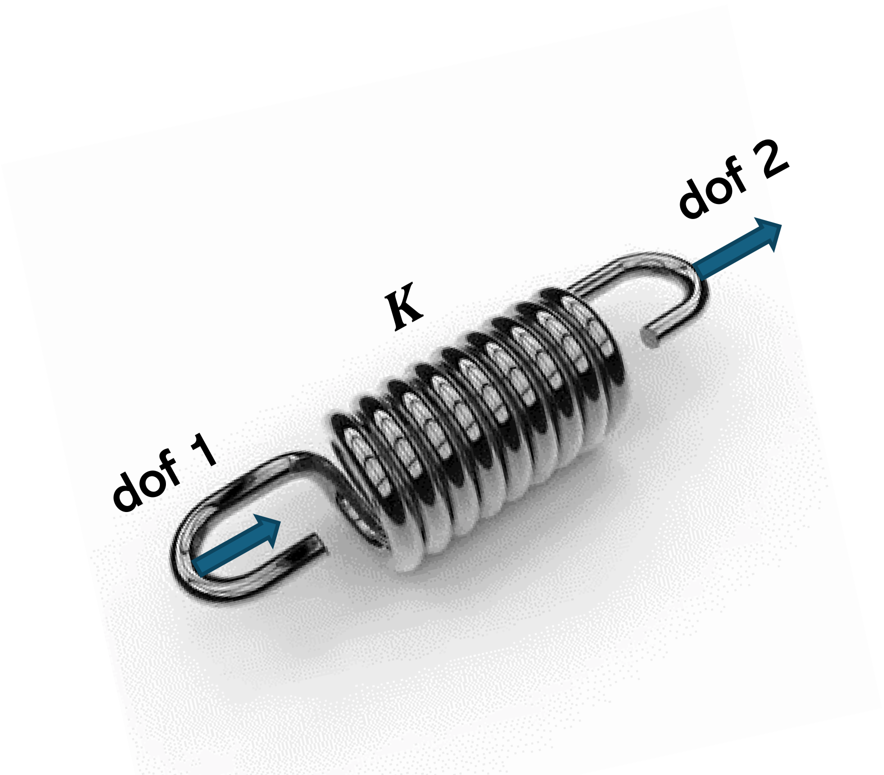
$[M]$: matriz de massa
$[C]$: matriz de amortecimento
$[K]$: matriz de rigidez
$\{\ddot{x}(t)\}$: vetor de acelerações
$\{\dot{x}(t)\}$: vetor de velocidades
$\{x(t)\}$: vetor de deslocamentos
$\{f(t)\}$: vetor de forças



Formulação de elemento: Barra (2dof)

Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)





$$K = \frac{E.A}{L}$$

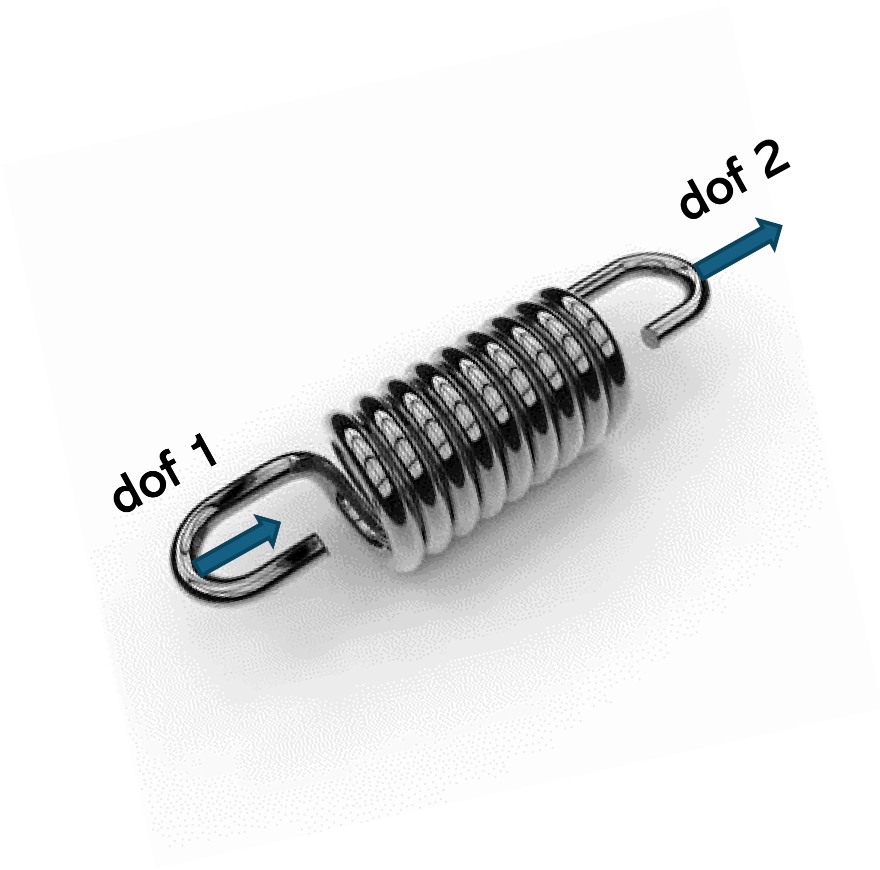
E : módulo de *Young*
A : área da secção da barra
L : comprimento da barra

Formulação de elemento: Barra (2dof)

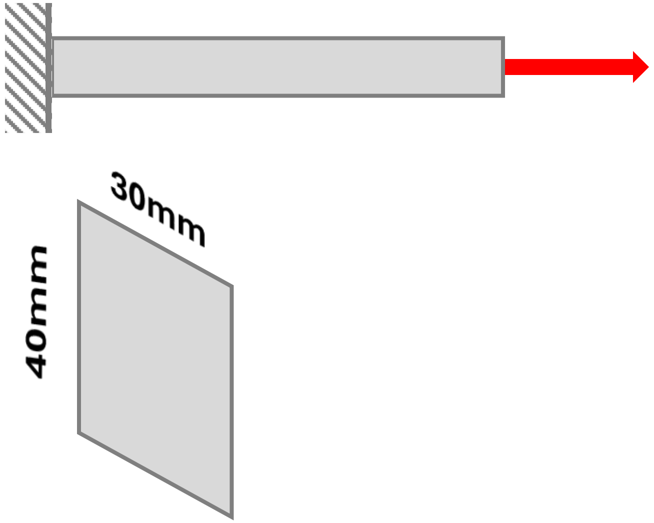
Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)

Matriz de rigidez do elemento de barra: K_{bar}

$$
K_{bar} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \textbf{dof 1} & \textbf{dof 2} \end{array} & \\
\begin{bmatrix} \mathrm{K} & -\mathrm{K} \\ -\mathrm{K} & \mathrm{K} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textbf{dof 1} \\ \textbf{dof 2} \end{array}
\end{array}
$$

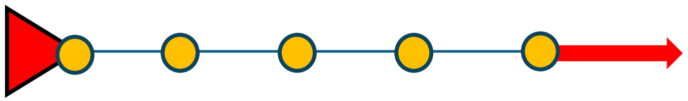


Formulação de elemento: Barra (2dof)




```
%% exemplo elemento de barra Bar2dof

%% parametros de geometria e material
L=1; %Comprimento da barra
A=0.03*0.04; % Área da secção da barra
E=70e9; %Módulo de Young do material da barra
```

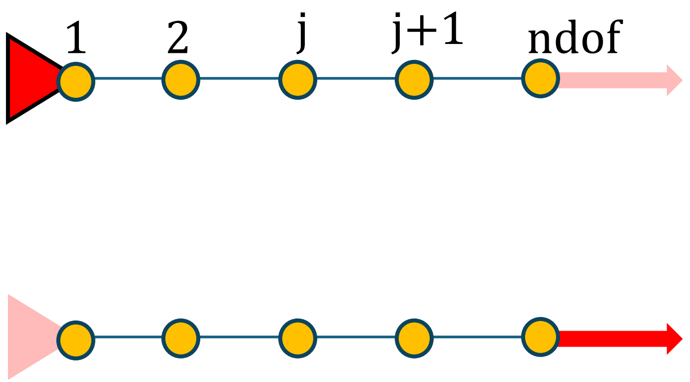
Formulação de elemento: Barra (2dof)



```
%% exemplo elemento de barra Bar2dof

%% parametros de geometria e material
L=1; %Comprimento da barra
A=0.03*0.04; % Área da secção da barra
E=70e9; %Módulo de Young do material da barra

%% inicialização de variáveis
nelem=20; % número de elementos
nnode=nelem+1; % número de nós;
ndof=nnode; número de graus de liberdade


Lel=L/nelem; %comprimento de cada elemento de barra
```

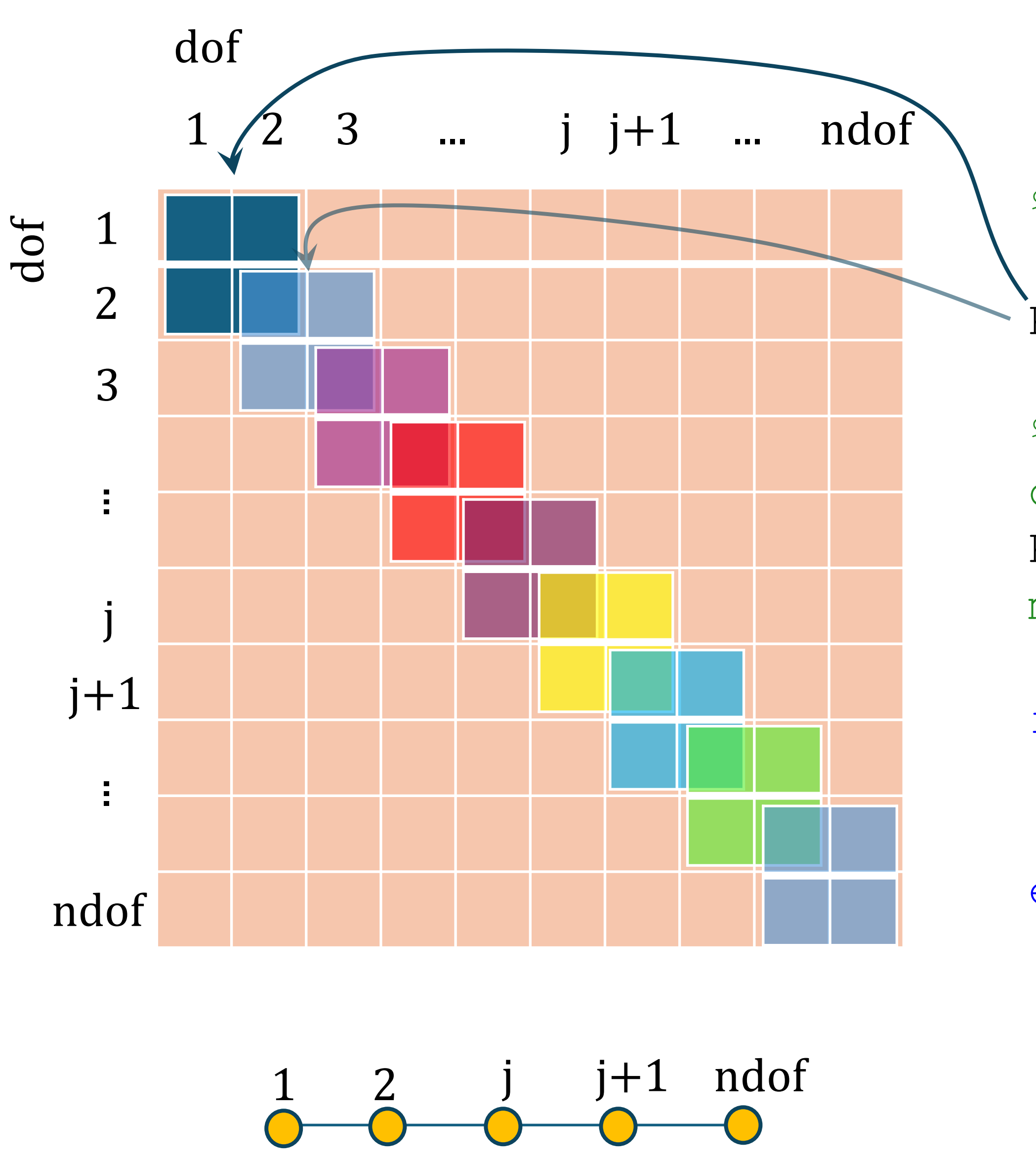
Formulação de elemento: Barra (2dof)

Condições de fronteira + Carregamentos



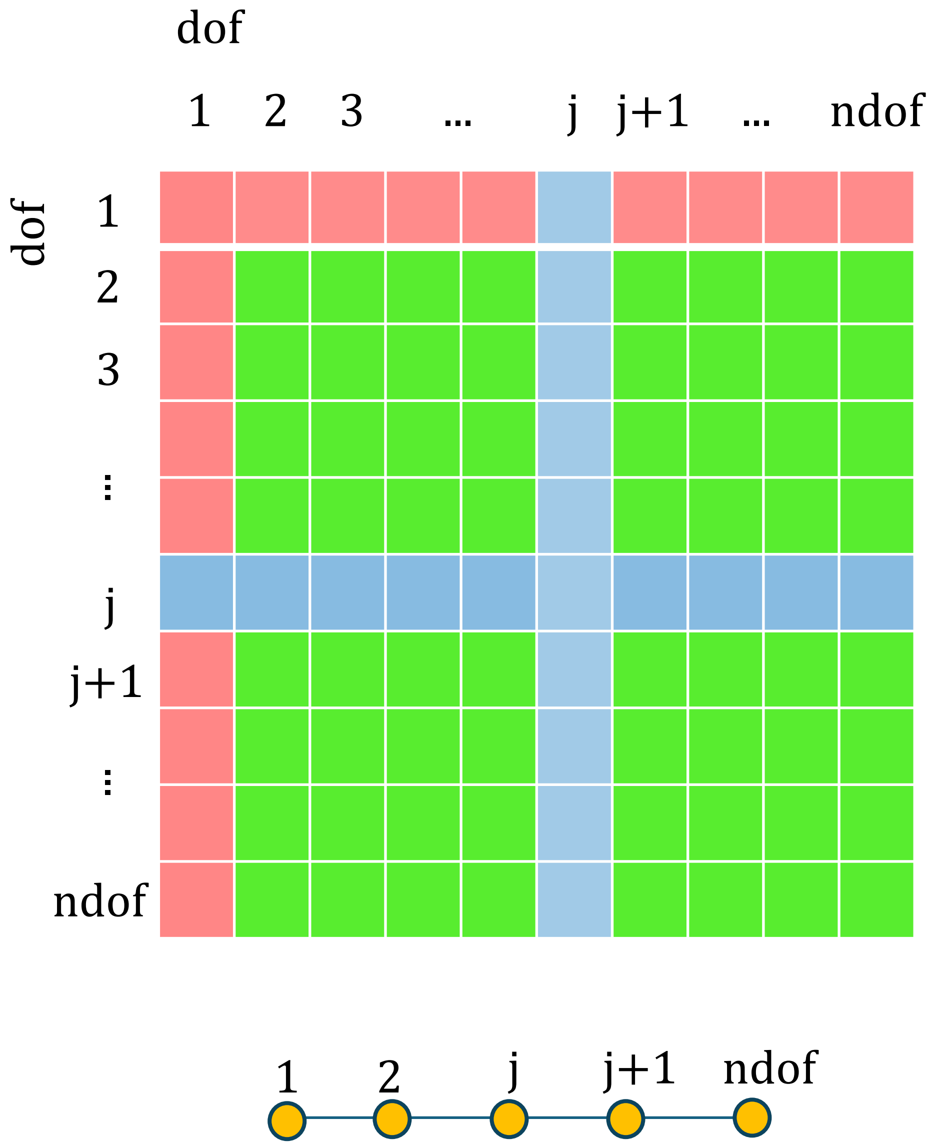

```
%% condições de fronteira e carregamentos
F=zeros(ndof,1); %inicialização do vetor de carregamento

fixed_dofs= [1];
free_dofs=setxor(1:nnode,fixed_dofs);

force_nodes=[ndof]; %Aplicação do carregamento no último nó/dof
force_val=[1000]; %valor do carregamento
F(force_nodes)=force_val;
```

Matriz de rigidez




```matlab
%% matriz de rigidez do elemento de barra

Kel=A*E/Lel*[1 -1; -1 1];

%% geração da matriz de rigidez (montagem
da matriz)
K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da
matriz de rigidez

for ielem=1:nelem
    range=[ielem ielem+1];
    K(range,range)=K(range,range)+Kel;
end
```

Condições de fronteira e resolução do sistema de equações



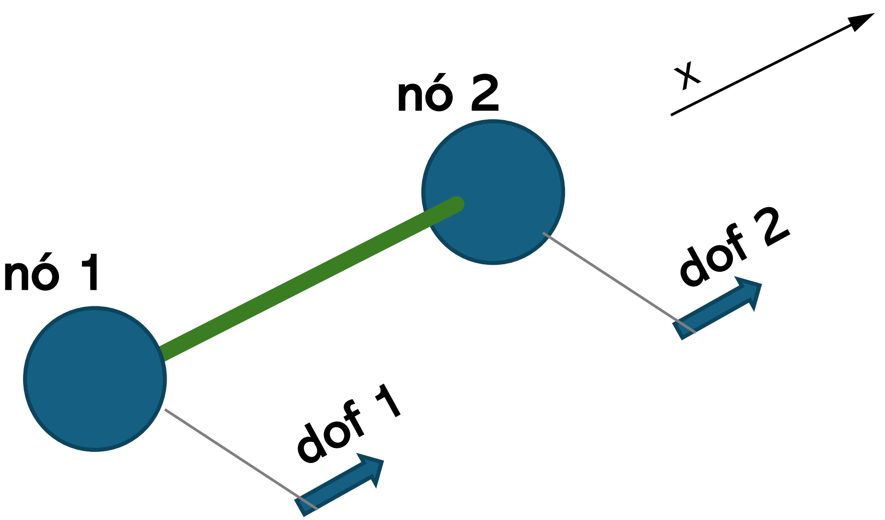

```
%% aplicação das condições de fronteira
Kp=K(free_dofs, free_dofs);
Fp=F(free_dofs,1);

%% Resolução do sistema de equações
U=zeros(ndof,1); %inicialização do vetor de resultados de deslocamentos
Up= Kp\Fp;
U(free_dofs)=Up;
```

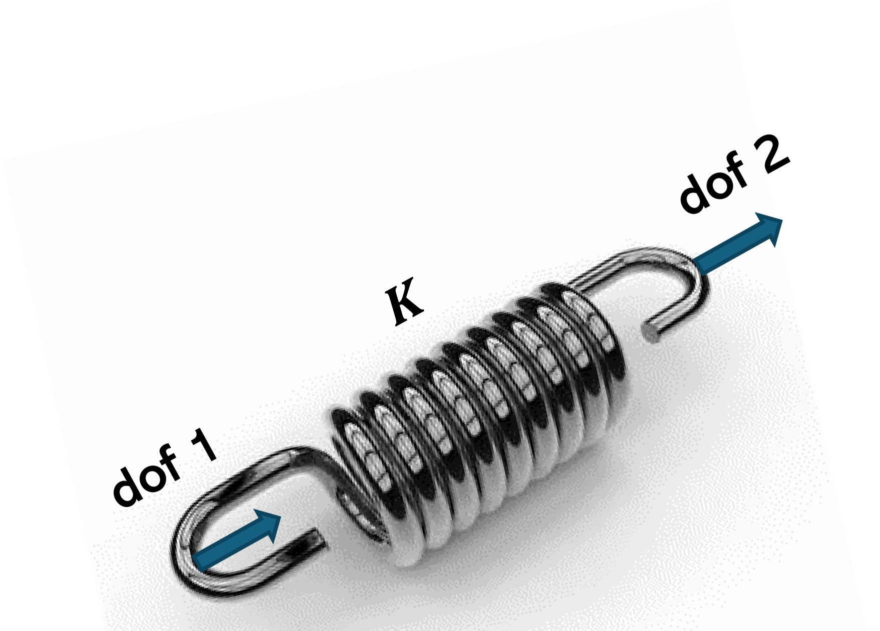
$$[K_P] \times \{U_P\} = \{F_P\}$$

aula4_FEM_bar2dof.m

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa

Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)





$$K = \frac{E.A}{L}$$

E: módulo de Young
A : área da secção da barra
L : comprimento da barra

$$M = \rho.A.L$$

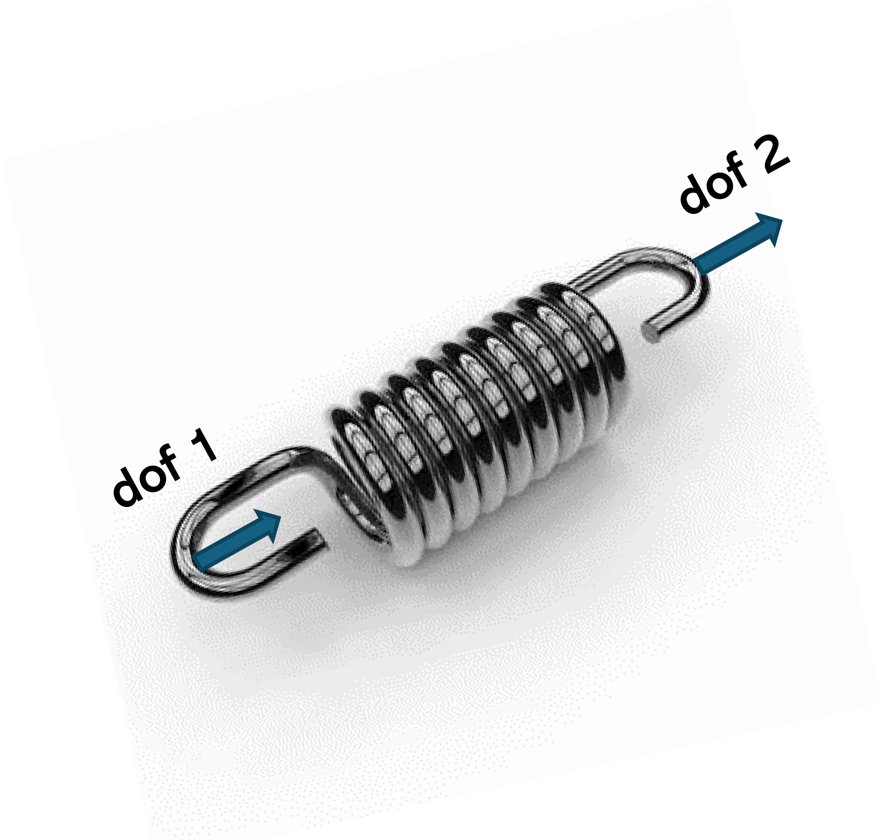
ρ: massa volúmica

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa

Elemento de barra com 2 graus de liberdade (2dof)

Matriz de rigidez do elemento de barra: K_{bar}

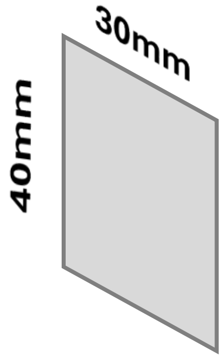
$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc}\textbf{dof 1} & \textbf{dof 2}\end{array} & \\ K_{bar} = & \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{K} & -\mathrm{K} \\ \hline -\mathrm{K} & \mathrm{K}\end{array}\right] & \begin{array}{l}\textbf{dof 1}\\ \textbf{dof 2}\end{array}\end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc}\textbf{dof 1} & \textbf{dof 2}\end{array} & \\ M_{bar} = & \left[\begin{array}{c|c} M/2 & 0 \\ \hline 0 & M/2\end{array}\right] & \begin{array}{l}\textbf{dof 1}\\ \textbf{dof 2}\end{array}\end{array}$$

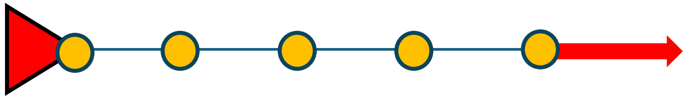
Matriz de massa diagonal (concentrada)

Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa




```
%% exemplo elemento de barra Bar2dof
% Análise modal real
% Matriz de massa

%% parametros de geometria e material
L=5; %Comprimento da barra
A=0.02*0.02; % Àrea da secção da barra
E=210e9; %Módulo de Young do material da barra
rho=7800; %Massa volúmica do material da barra %%%% <----
```

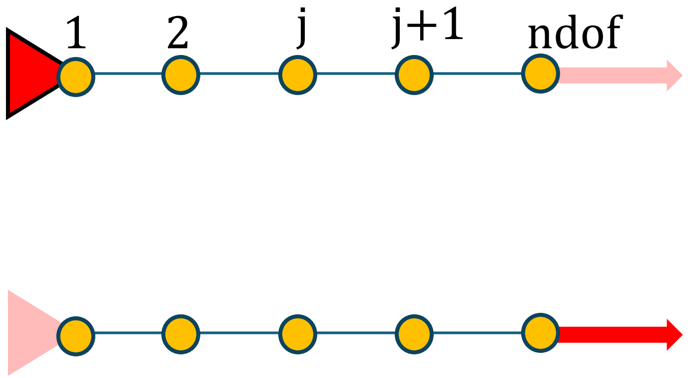
Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa



```
%% exemplo elemento de barra Bar2dof

%% parametros de geometria e material
L=1; %Comprimento da barra
A=0.03*0.04; % Àrea da secção da barra
E=70e9; %Módulo de Young do material da barra

%% inicialização de variáveis
nelem=20; % número de elementos
nnode=nelem+1; % número de nós;
ndof=nnode; número de graus de liberdade


Lel=L/nelem; %comprimento de cada elemento de barra
```

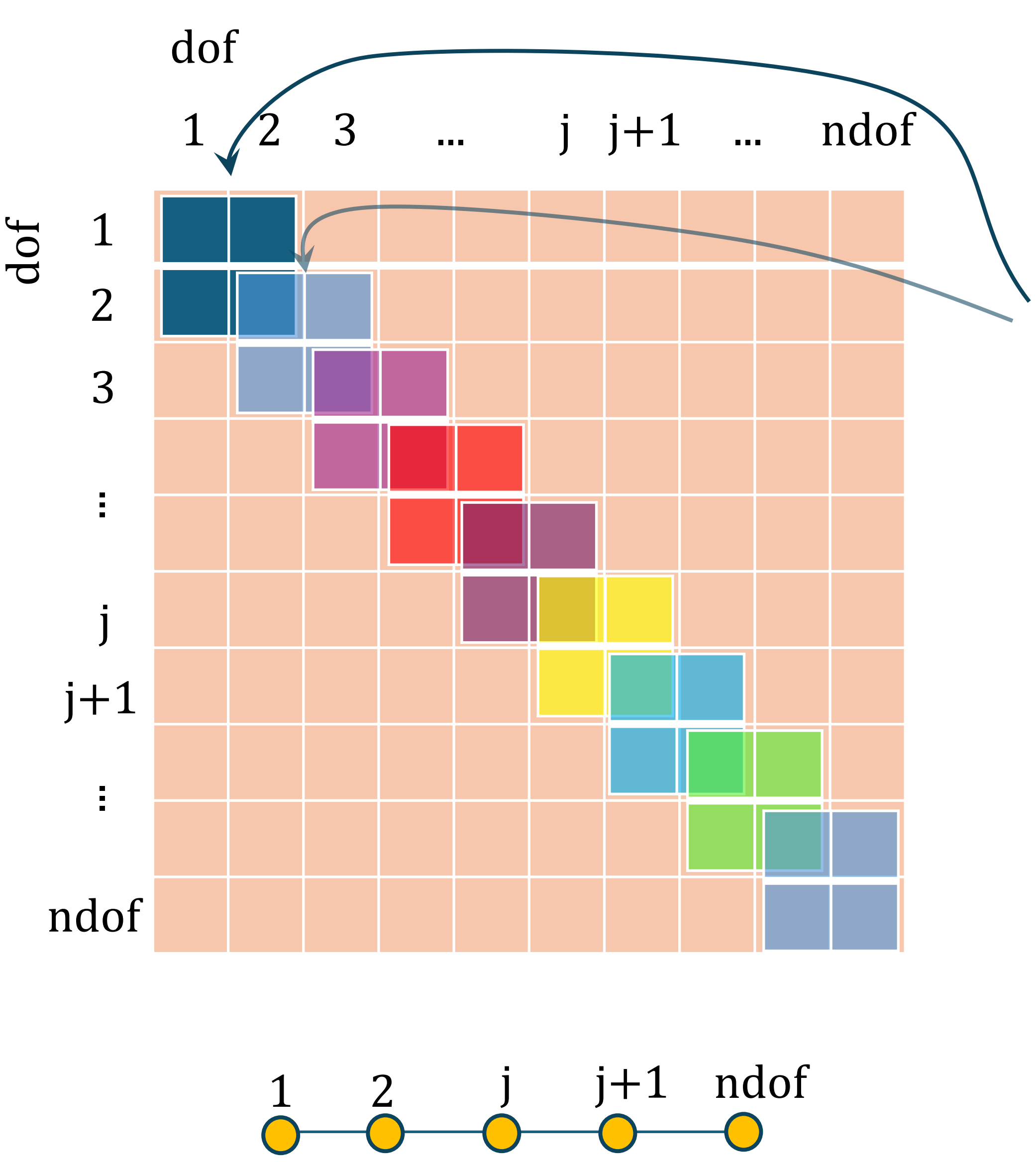
Formulação de elemento: Barra (2dof) com matriz de massa

Condições de fronteira

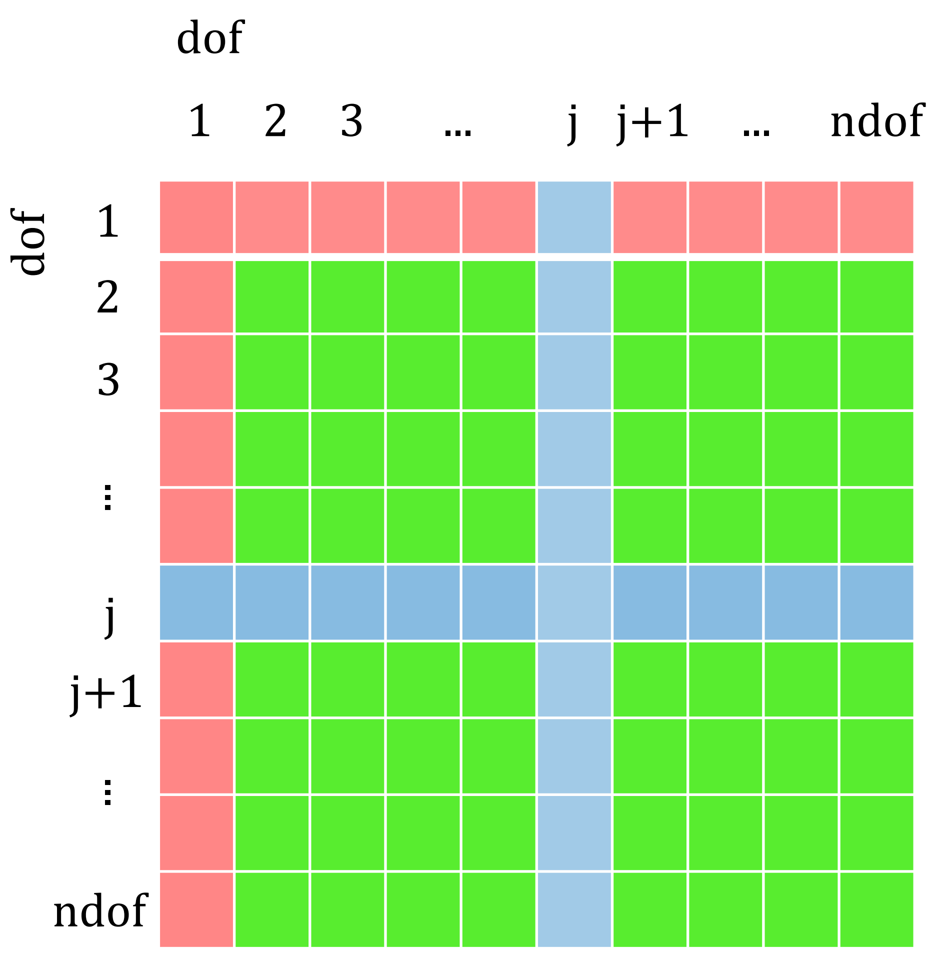


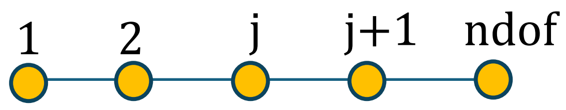

```
%% condições de fronteira
fixed_dofs= [];
free_dofs=setxor(1:nnode,fixed_dofs);
```

Matriz de massa




```
%% matriz de massa do elemento de barra
Mel=rho*L*A*[0.5 0;0 0.5]
%--------------

%% matriz de rigidez do elemento de barra
Kel=A*E/Lel*[1 -1; -1 1];

%% geração da matriz de massa e de rigidez
(montagem da matriz)
M=zeros(ndof,ndof); %inicialização da
matriz de massa
K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da
matriz de rigidez

for ielem=1:nelem
    range=[ielem ielem+1];
    M(range,range)=M(range,range)+Mel;
    K(range,range)=K(range,range)+Kel;
end
```





Condições de fronteira e resolução do problema de valores e vetores próprios

```
%% aplicação das condições de fronteira

Mp=M(free_dofs, free_dofs);
Kp=K(free_dofs, free_dofs);

%% Resolução do problema de valores e
vetores proprios

[a,b]=eig(Kp,Mp);
Wn=sqrt(diag(b));Fn=Wn/2/pi();
Phi=a;
```

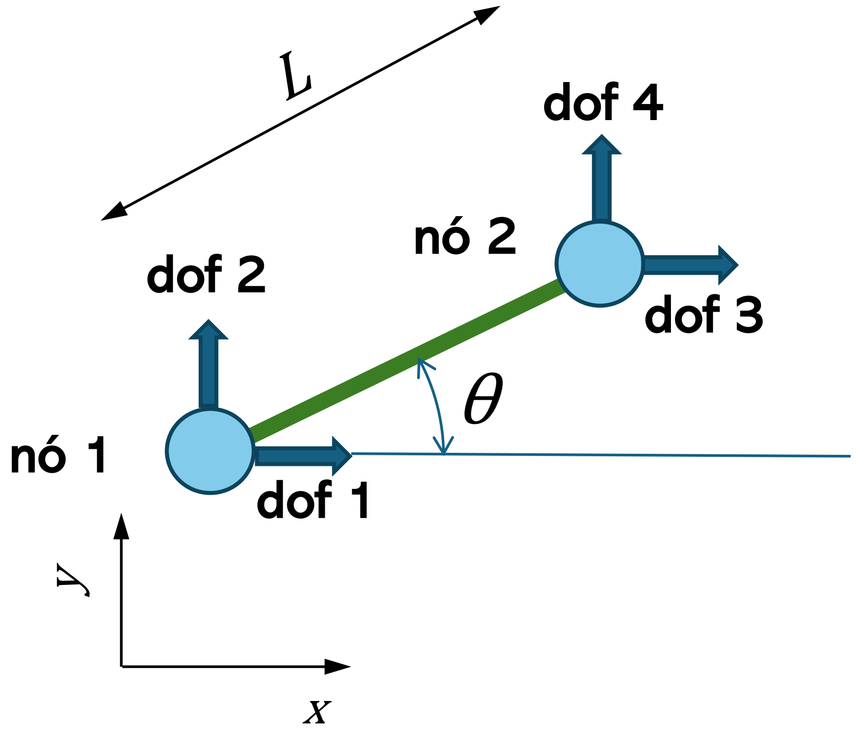
$\{\omega_n\}$: vetor de frequências naturais [rad/s]

$[\Phi]$: matriz de vetores modais

aula4_FEM_bar2dof_Dyn.m

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof)

Elemento de barra com 4 graus de liberdade (4dof)

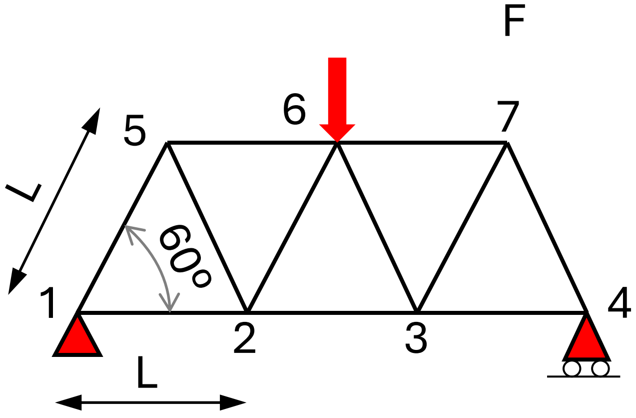


$$[K] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos(\theta)$$

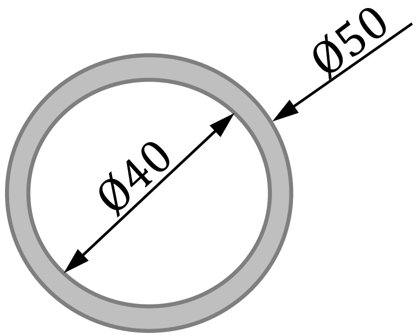
$$s = sin(\theta)$$

Parâmetros do modelo



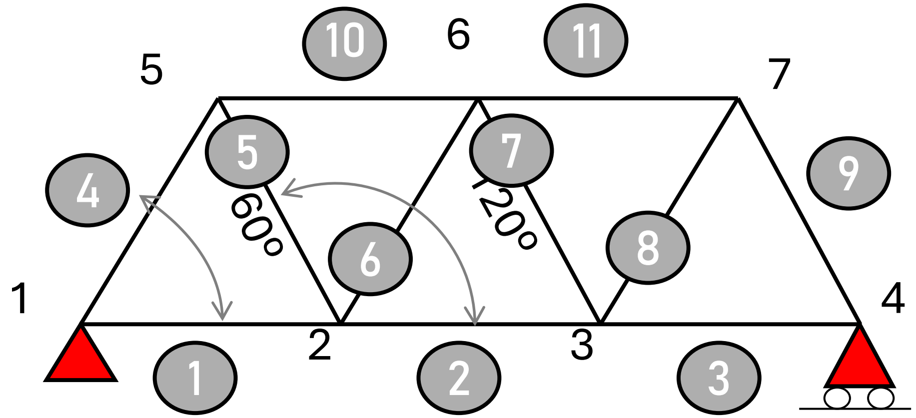
$L = 1\text{m}$
$E = 70\text{GPa}$

Secção da barra



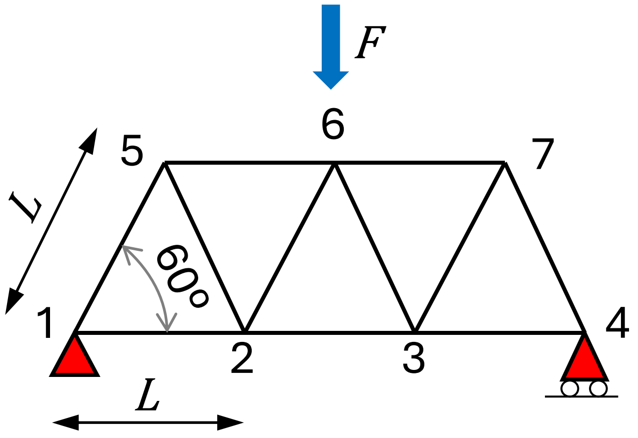

```
%% treliça 2D
%  5 _______6______7
%    /\      /\      /\
%   /  \    /  \    /  \
%  /____\/____\/____\
%1      2       3      4

%% Parâmetros do modelo de FEM
nelem=11; %número de elementos (barras) que constitui a treliça
nnode=7; %número de nós
ndof=nnode*2; %considerando 2 graus de liberdade por nó

%% Parâmetros materiais e geométricos
E=70e9; %Pa (alumínio)
Es=E*ones(nelem,1); %vetor de módulo de young das barras

A=(0.05^2-0.04^2)*pi; %área da secção das barras
As=A*ones(nelem,1); %vetor de áreas

L=1; % comprimento de cada barra (1 metro)
Ls=L*ones(nelem,1);
```

Parâmetros geométricos e ligações nodais




```
theta=[0 0 0 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 0 0]; %orientação de cada barra

%localizações dos nós
xyU=[0 0;L 0; 2*L 0; 3*L 0; L*cos(pi/3) L*sin(pi/3); L*cos(pi/3)+L L*sin(pi/3);
L*cos(pi/3)+2*L L*sin(pi/3)];

lnodal={[1 2],[2 3],[3 4],[1 5],[2 5],[2 6],[3 6],[3 7],[4 7], [5 6], [6 7]}; %pares de
nós que definem cada elemento (barra)
```

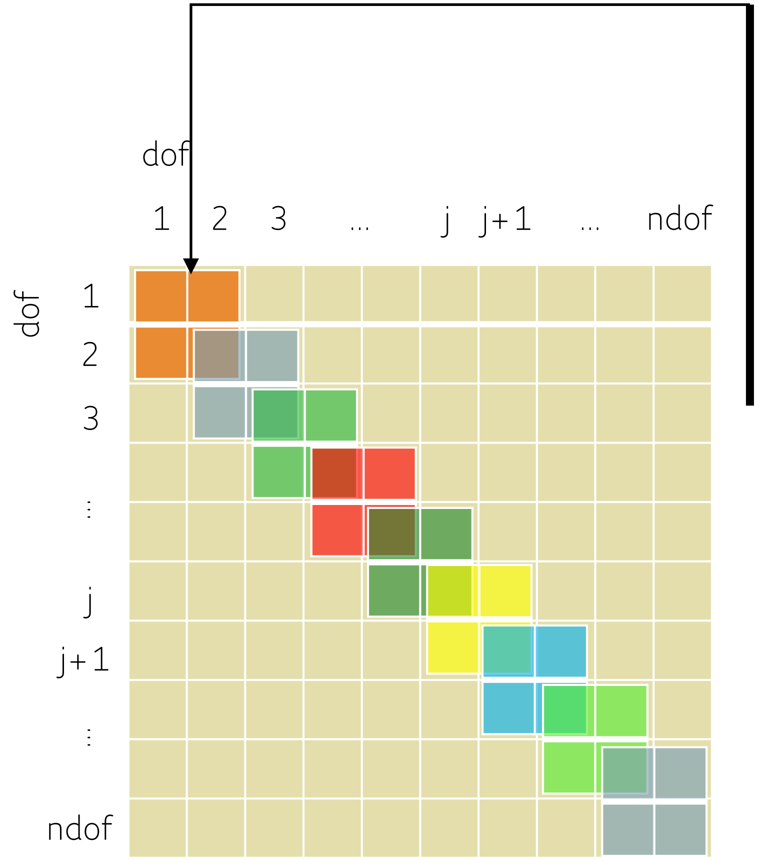
Condições de fronteira e carregamentos



{dof}=

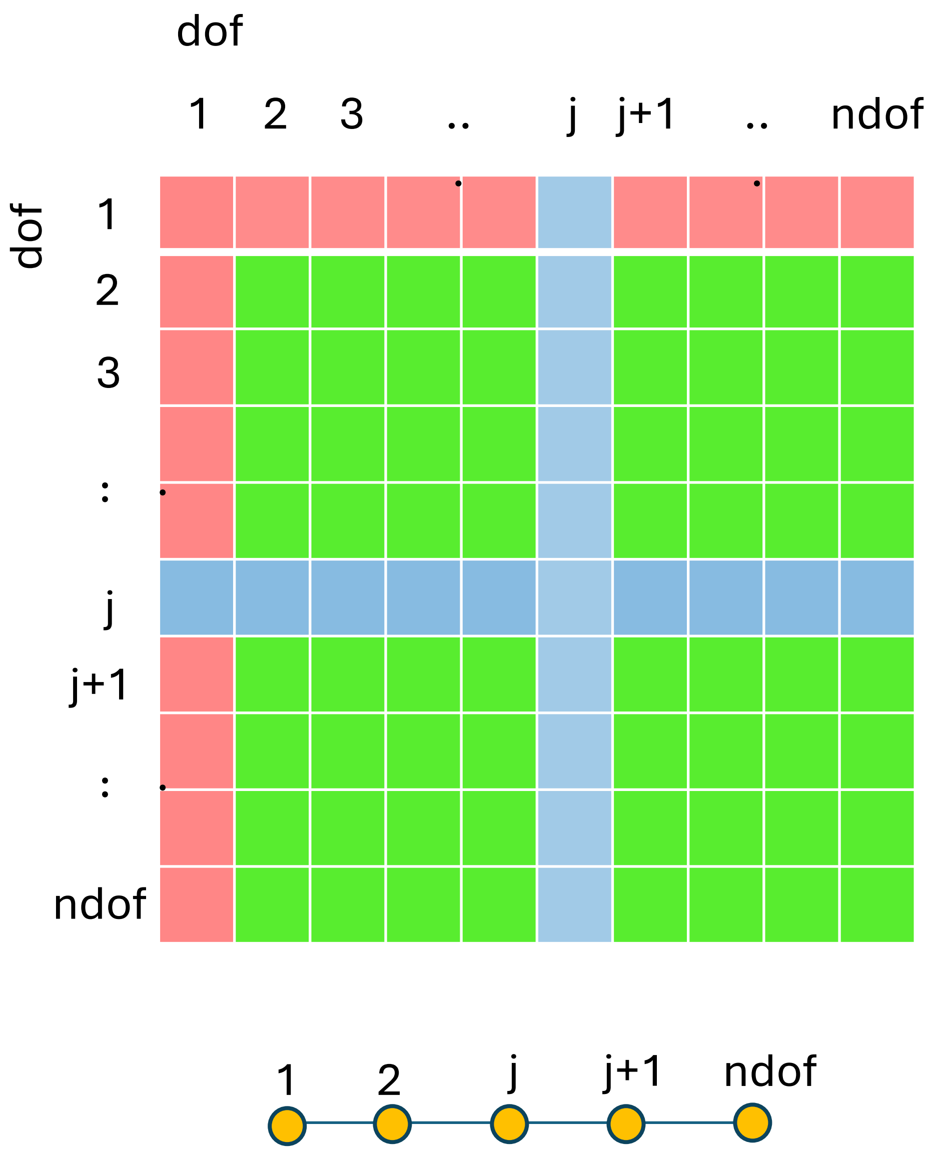
dof1	1_x
dof2	1_y
dof3	2_x
dof4	2_y
dof5	3_x
dof6	3_y
dof7	4_x
dof8	4_y
dof9	5_x
dof10	5_y
dof11	6_x
dof12	6_y
dof13	7_x
dof14	7_y

```
%% Condições de fronteira
% graus de liberdade restritos: nó1 direção
X, nó1 direção y, nó3 direção y
Rdof=[1,2,8];

% carregamento vertical de 1000N no nó 6
(corresponde ao dof 12)
Fdof=[12]; %vetor de dofs carregados
VF=[-1000]; %Vetor de cargas
```




```
%% Cálculo da Matriz de rigidez

K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da matriz de rigidez global

for ielem=1:nelem
% matriz de rigidez do elemento de barra (2dof por nó=4dof por
elemento)
Kbar= As(ielem)*Es(ielem)/Ls(ielem);

%matriz de transformação referencial barra para referencial global
c=cos(theta(ielem));s=sin(theta(ielem));c2=c^2;s2=s^2;cs=c*s;
T=[c2 cs -c2 -cs;cs s2 -cs -s2;-c2 -cs c2 cs;-cs -s2 cs s2];
Kelem=Kbar*T;

%montagem da matriz de rigidez do elemento na matriz global
no1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1° dof do 1° nó do elemento ielem
no2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1° dof do 2° nó do elemento ielem

K(no1:no1+1,no1:no1+1)=K(no1:no1+1,no1:no1+1)+Kelem(1:2,1:2);
K(no1:no1+1,no2:no2+1)=K(no1:no1+1,no2:no2+1)+Kelem(1:2,3:4);
K(no2:no2+1,no1:no1+1)=K(no2:no2+1,no1:no1+1)+Kelem(3:4,1:2);
K(no2:no2+1,no2:no2+1)=K(no2:no2+1,no2:no2+1)+Kelem(3:4,3:4);
end
```

Aplicação das condições de fronteira e resolução do sistema de equações




```
%Determinação do vetor de carregamento
F=zeros(ndof,1);
F(Fdof)=VF;

%Aplicação das condições de fronteira
free_dofs=setxor(1:ndof,Rdof); %graus de
liberdade não restritos
Kp=K(free_dofs,free_dofs);
Fp=F(free_dofs,1);


% Resolução do sistema de equações
Up=Kp\Fp;
```

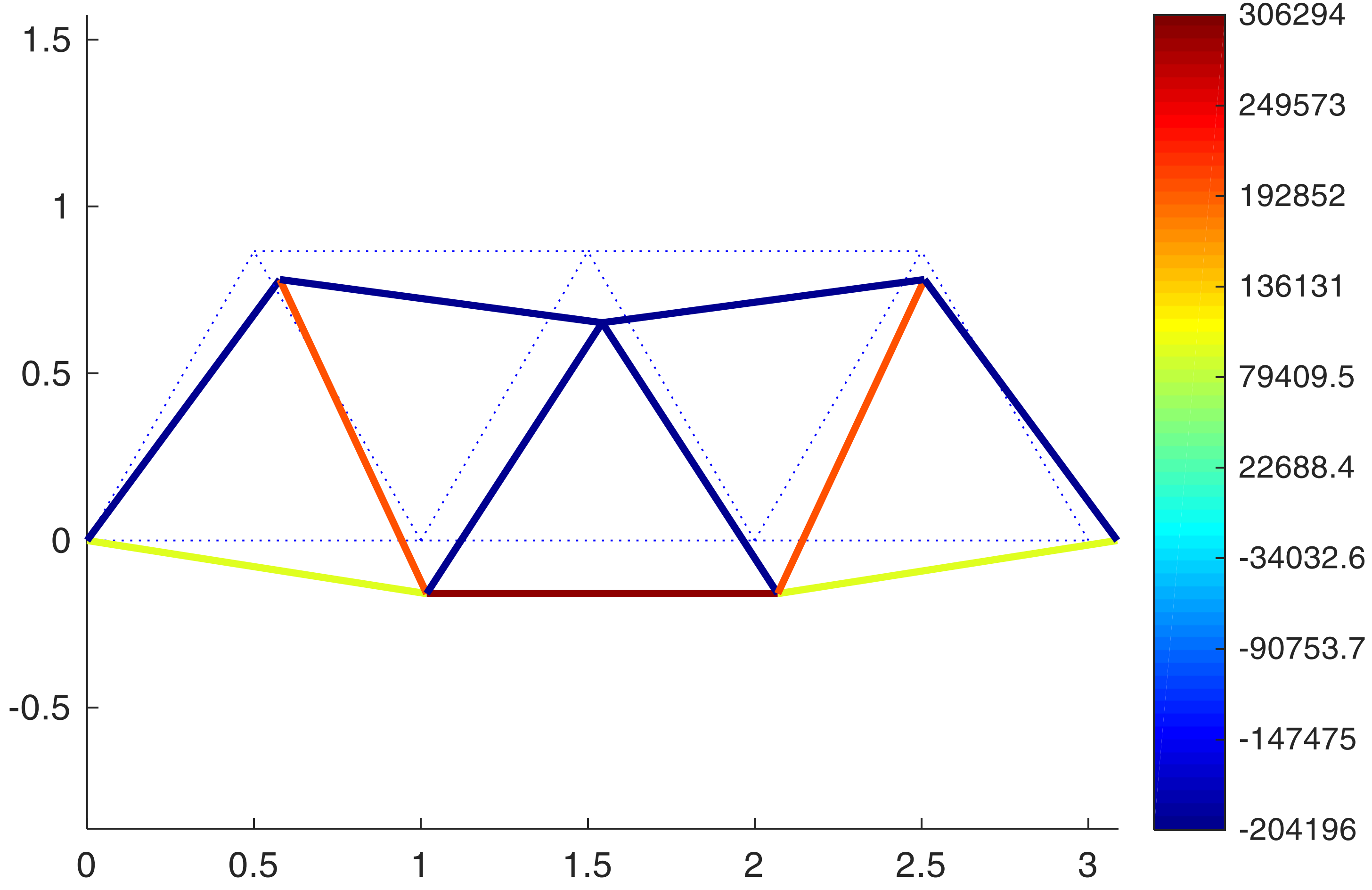
Resultados

```
U=zeros(ndof,1);
U(free_dofs)=Up;

fvector=K*U;

stress=zeros(nelem,1);
for ielem=1:nelem
   no1=lnodal{ielem}(1);%1° nó do elemento ielem
   no2=lnodal{ielem}(2); %2° nó do elemento ielem
   dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1° dof do nó 1 do elem. ielem
   dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1° dof do nó 2 do elem. ielem
T=[cos(theta(ielem)) sin(theta(ielem)) 0 0; 0 0
cos(theta(ielem)) sin(theta(ielem))];
    stress(ielem,1)=Es(ielem)/Ls(ielem)*[-
1,1]*T*[U(dof1:dof1+1);U(dof2:dof2+1)];
end
```

$$\{f\} = \frac{E.A}{L}[-c \quad -s \quad c \quad s]\{u\}$$

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L}[-c \quad -s \quad c \quad s]\{u\}$$

Pós-processamento de resultados



Aula4_FEM_truss2D.m

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof) com matriz de massa

```
%% Parâmetros do modelo de FEM
clear; clc;close all;
nelem=11; %número de elementos (barras) que constitui a treliça
nnode=7; %número de nós
ndof=nnode*2; %considerando 2 graus de liberdade por nó

%% Parâmetros materiais e geométricos
E=70e9; %Pa (alumínio)
Es=E*ones(nelem,1); %vetor de módulo de young das barras

A=(0.05^2-0.04^2)*pi; %área da secção das barras (tubo de secção circular com
diâmetro exterior 50mm e interior 40mm
As=A*ones(nelem,1); %vetor de áreas para a totalidade de barras que constituem a
treliça

L=1; % comprimento de cada barra (1 metro)
Ls=L*ones(nelem,1);

rho=2700; % massa volúmica do material
rhos=rho*ones(nelem,1);
```

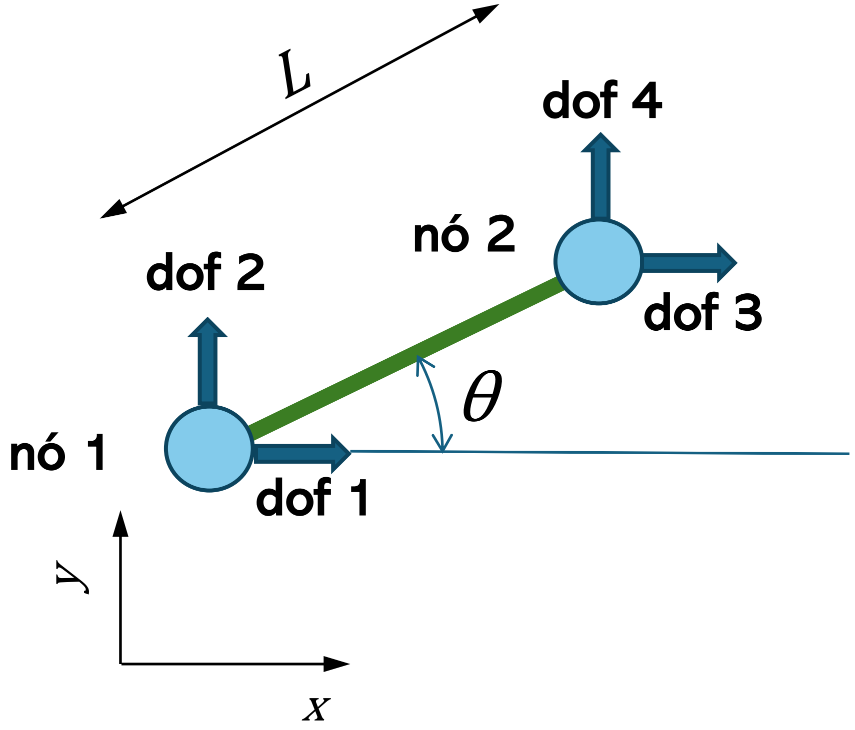
Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof) com matriz de massa

```
theta=[0 0 0 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 pi/3 2*pi/3 0 0 0 pi/2]; %orientação de cada
barra localizações dos nós
xyU=[0 0;L 0; 2*L 0; 3*L 0; L*cos(pi/3) L*sin(pi/3); L*cos(pi/3)+L
L*sin(pi/3);L*cos(pi/3)+2*L L*sin(pi/3)];

lnodal={[1 2],[2 3],[3 4],[1 5],[2 5],[2 6],[3 6],[3 7],[4 7], [5 6], [6 7]};
%pares de nós que definem cada elemento (barra)

%% Condições de fronteira
% graus de liberdade restritos: nó1 direção X, nó1 direção y, nó4 direção y
Rdof=[1,2,8];

%% Cálculo da Matriz de rigidez

M=zeros(ndof,ndof); %inicialização da matriz de rigidez global

K=zeros(ndof,ndof); %inicialização da matriz de rigidez global
```

Formulação de elemento: Barra2D/Treliça (4dof) com matriz de massa

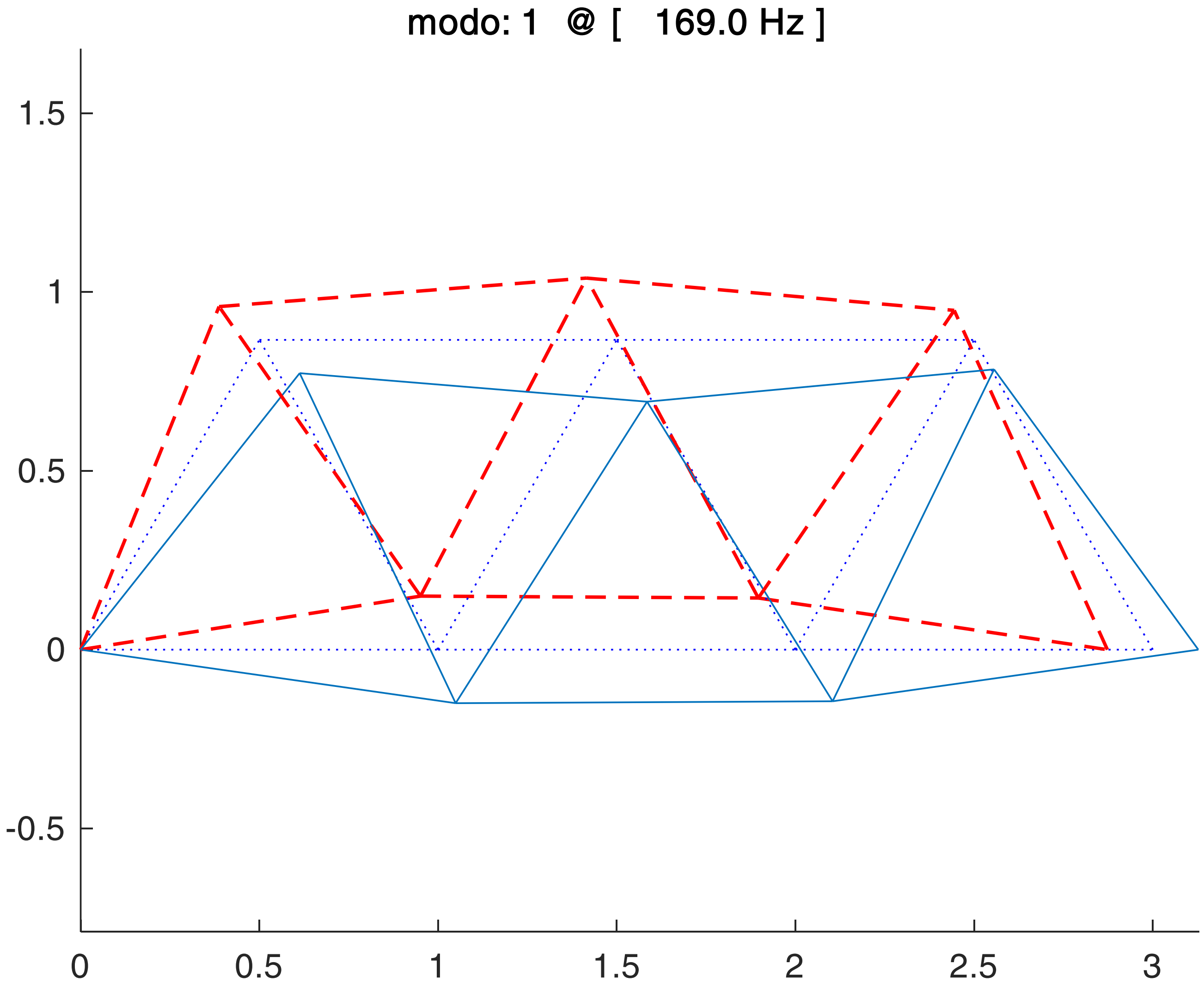
```
for ielem=1:nelem

% matriz de massa do elemento de barra
Mbar= As(ielem)*Ls(ielem)*rhos(ielem);
Melem=Mbar*0.5*eye(ndof);
```

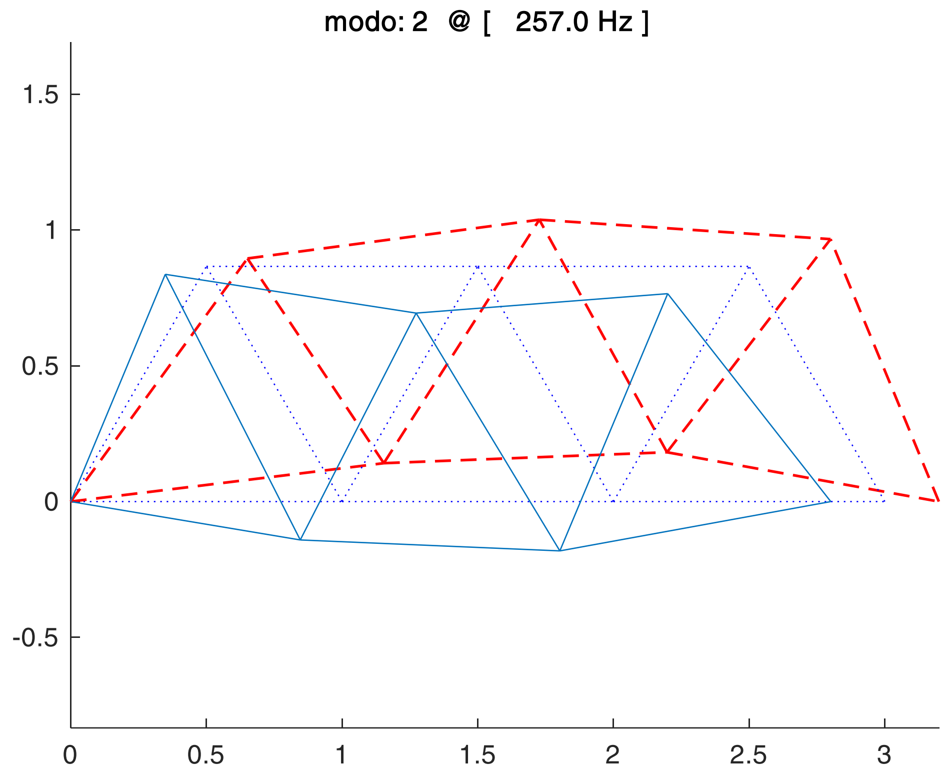
$$[M] = \frac{\rho A L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

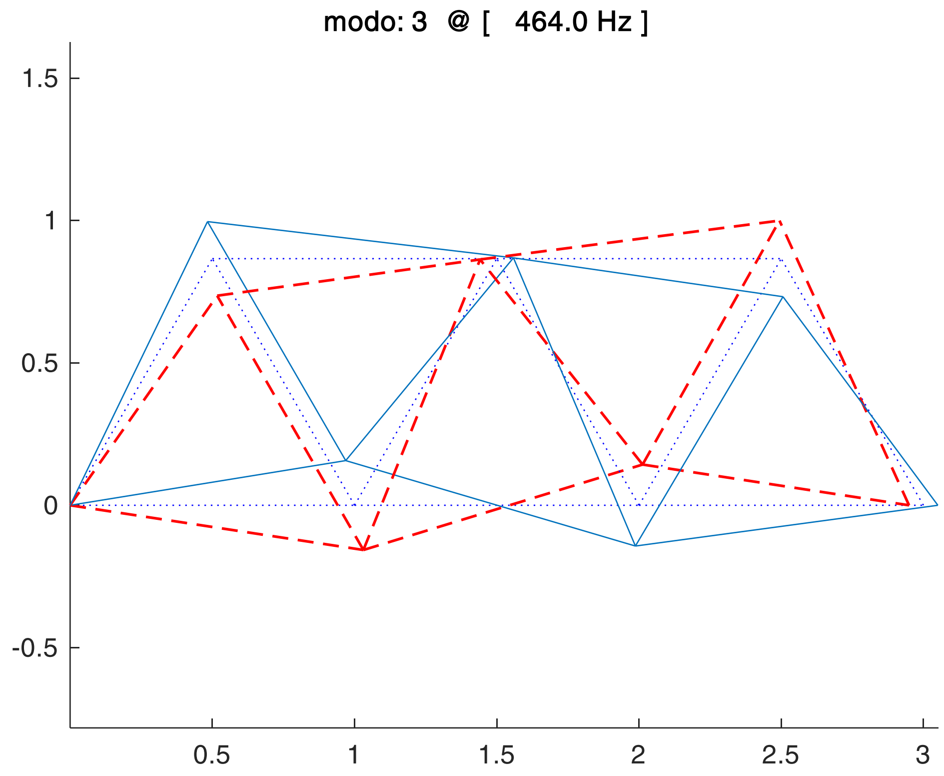


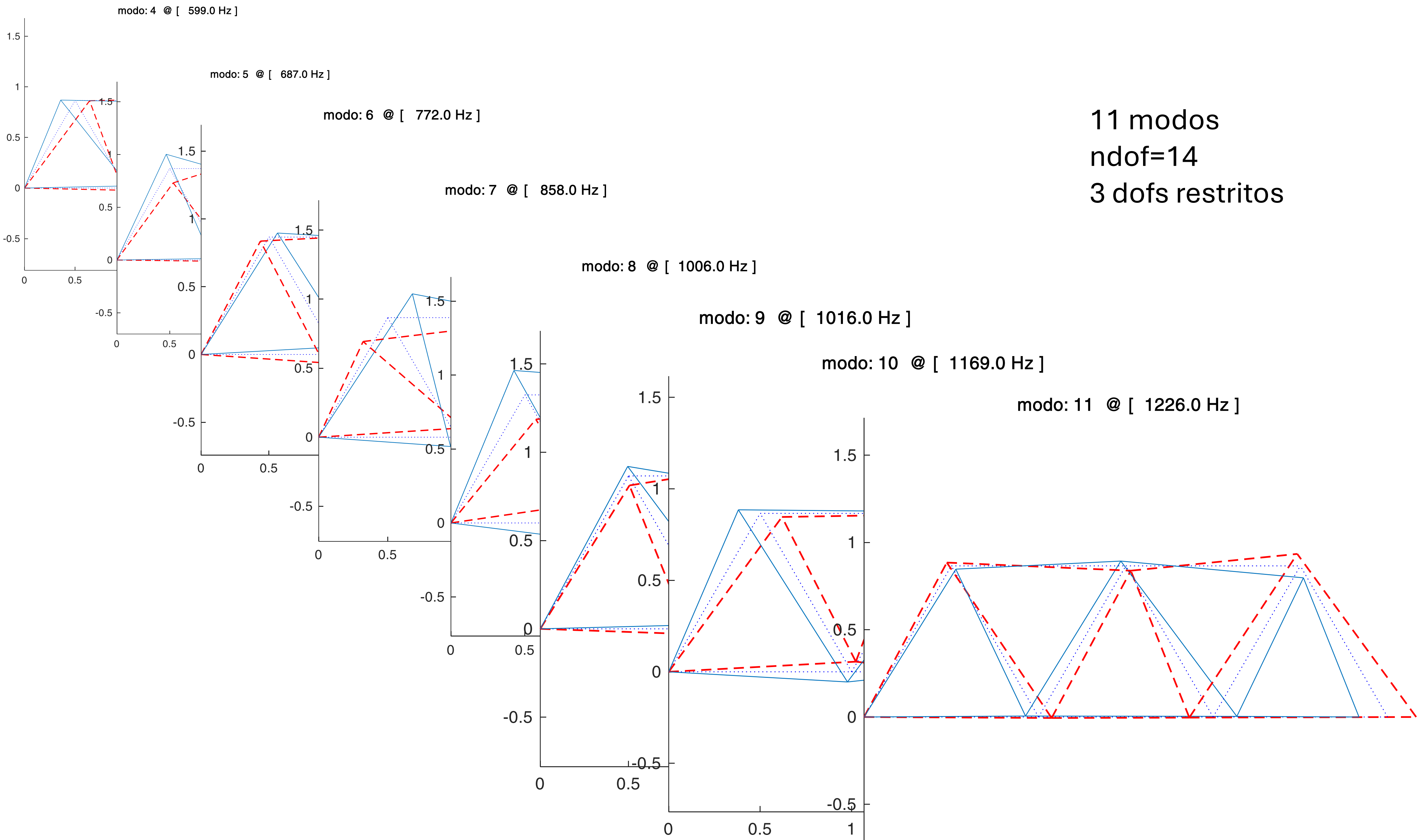

```
% matriz de rigidez do elemento de barra (2dof por nó=4dof por elemento)
Kbar= As(ielem)*Es(ielem)/Ls(ielem);

%matriz de transformação referencial barra para referencial global
c=cos(theta(ielem));s=sin(theta(ielem));c2=c^2;s2=s^2;cs=c*s;
T=[c2 cs -c2 -cs;cs s2 -cs -s2;-c2 -cs c2 cs;-cs -s2 cs s2];
Kelem=Kbar*T;
```

```
%montagem da matriz de massa e de rigidez do elemento nas matrizes globais
no1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1° dof do 1° nó do elemento ielem
no2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1° dof do 2° nó do elemento ielem

M(no1:no1+1,no1:no1+1)=M(no1:no1+1,no1:no1+1)+Melem(1:2,1:2);
M(no1:no1+1,no2:no2+1)=M(no1:no1+1,no2:no2+1)+Melem(1:2,3:4);
M(no2:no2+1,no1:no1+1)=M(no2:no2+1,no1:no1+1)+Melem(3:4,1:2);
M(no2:no2+1,no2:no2+1)=M(no2:no2+1,no2:no2+1)+Melem(3:4,3:4);

K(no1:no1+1,no1:no1+1)=K(no1:no1+1,no1:no1+1)+Kelem(1:2,1:2);
K(no1:no1+1,no2:no2+1)=K(no1:no1+1,no2:no2+1)+Kelem(1:2,3:4);
K(no2:no2+1,no1:no1+1)=K(no2:no2+1,no1:no1+1)+Kelem(3:4,1:2);
K(no2:no2+1,no2:no2+1)=K(no2:no2+1,no2:no2+1)+Kelem(3:4,3:4);
end
```


modo: 1 @ [169.0 Hz]
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


modo: 2 @ [257.0 Hz]
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


modo: 3 @ [464.0 Hz]
1.5
1
0.5
0
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3

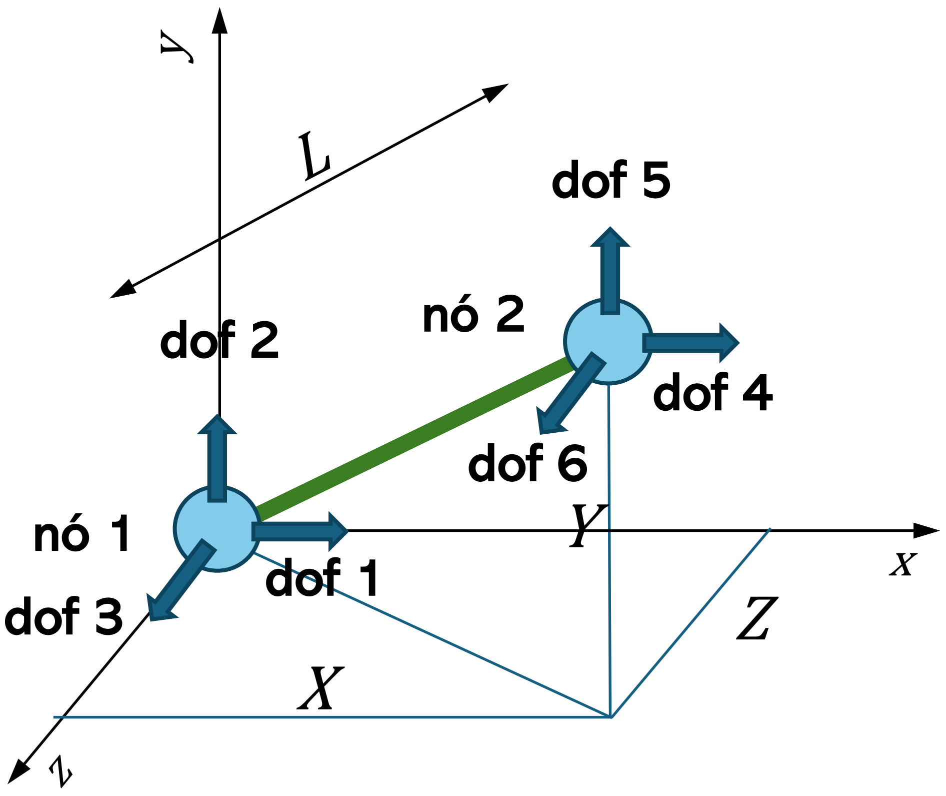


11 modos

ndof=14

3 dofs restritos

Formulação de elemento: Barra3D/Treliça (6dof)

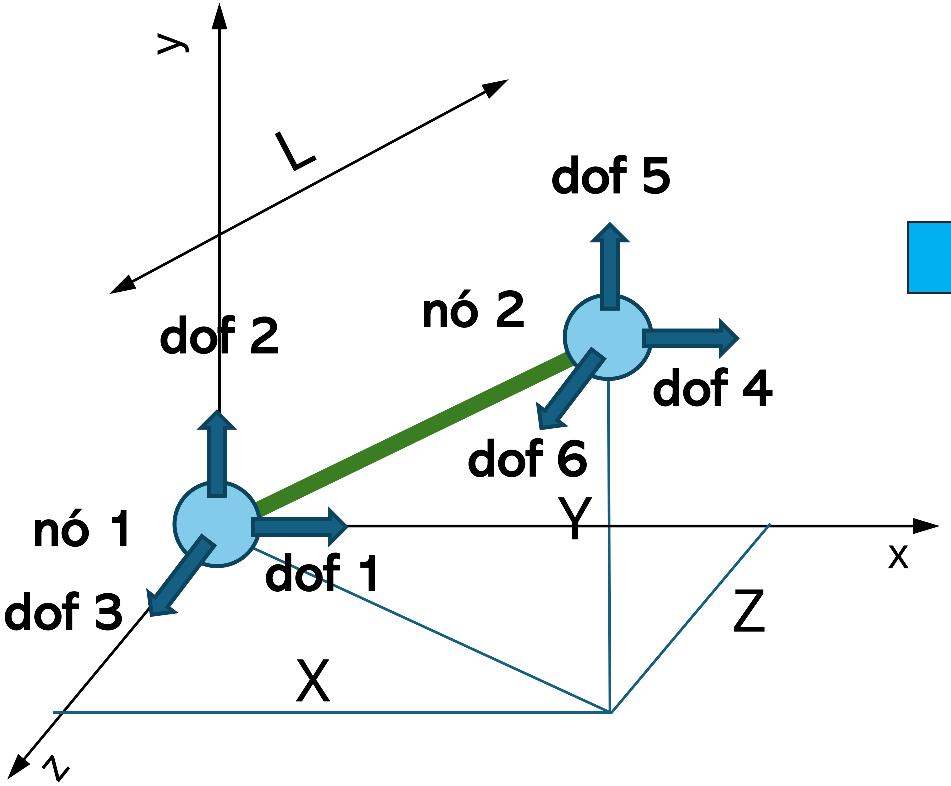


$$c_x = \frac{X}{L} \qquad c_y = \frac{Y}{L} \qquad c_z = \frac{Z}{L}$$

$$[K] = \frac{EA}{L} \times$$

$$\begin{bmatrix} c_x^2 & c_y c_x & c_z c_x & -c_x^2 & -c_y c_x & -c_z c_x \\ c_x c_y & c_y^2 & c_z c_y & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_z c_y \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_y c_x & -c_z c_x & c_x^2 & c_y c_x & c_z c_x \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_z c_y & c_x c_y & c_y^2 & c_z c_y \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix}$$

Formulação de elemento: Barra3D/Treliça (6dof)



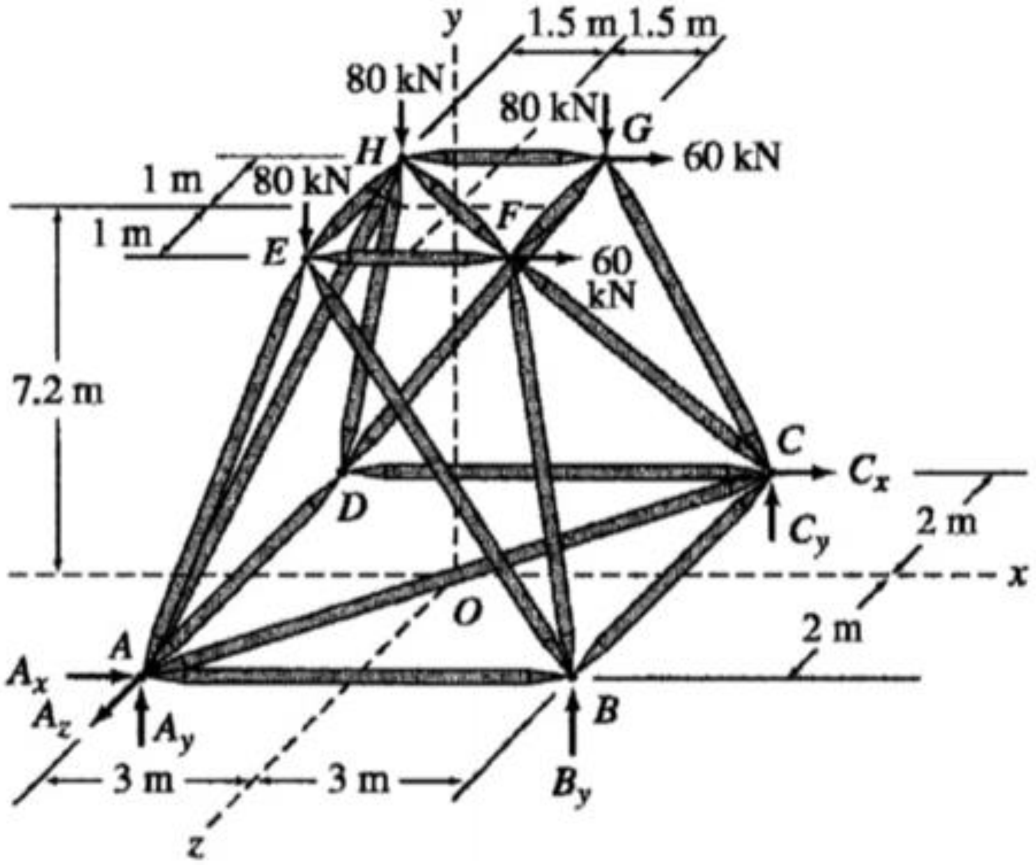
$$c_x = \frac{X}{L} \qquad c_y = \frac{Y}{L} \qquad c_z = \frac{Z}{L}$$

Força (escalar) desenvolvida no elemento

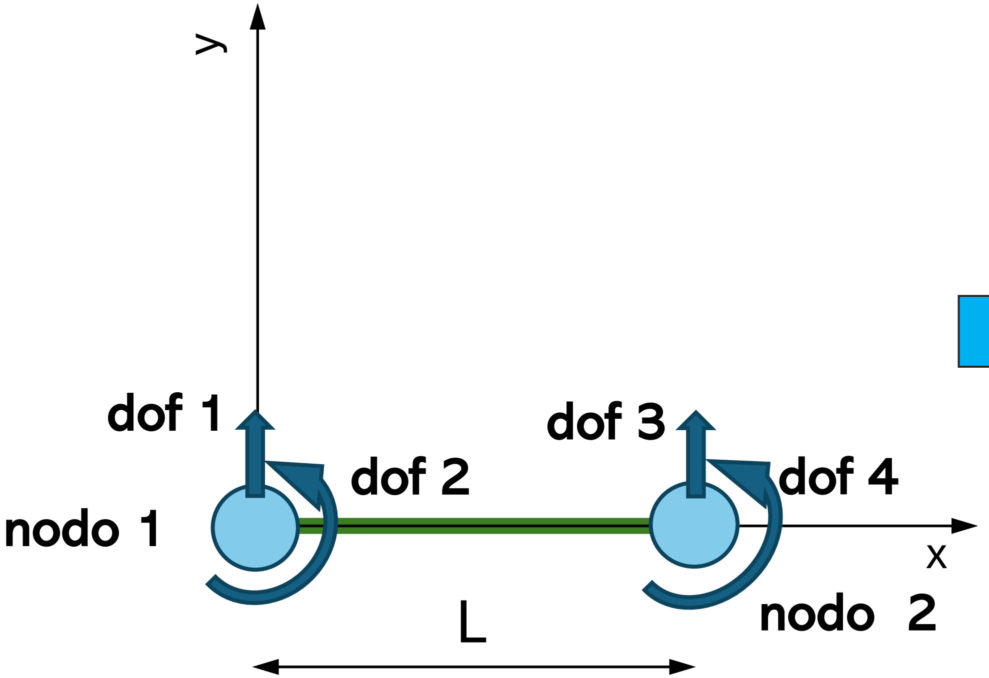
$$\mathrm{f} = \frac{EA}{L}[-c_x \quad -c_y \quad -c_z \quad c_x \quad c_y \quad c_z]\{\mathrm{U}\}$$

Formulação de elemento: Barra3D/Treliça (6dof)

$$[M] = \frac{\rho A L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

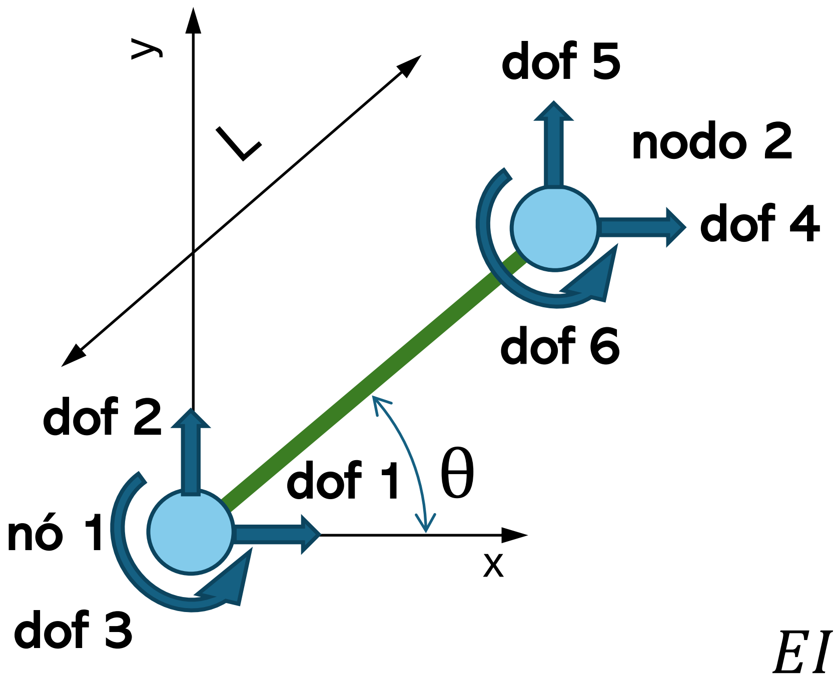


Formulação de elemento: Viga (4dofs)



$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & -2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Formulação de elemento: Viga+Barra (6dofs)



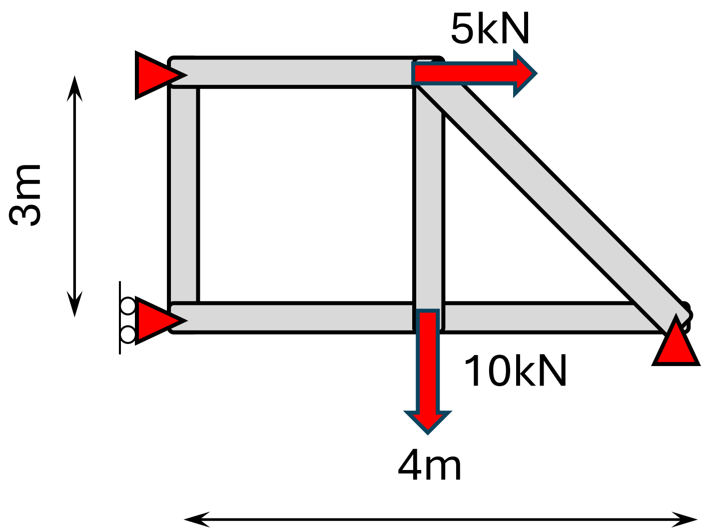
$c = \cos(\theta)$

$s = sin(\theta)$

$$[\mathrm{K}] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & 0 & -c^2 & -cs & 0 \\ cs & s^2 & 0 & -cs & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & -cs & 0 & c^2 & cs & 0 \\ -cs & -s^2 & 0 & cs & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12s^2 & -12cs & -6Ls & -12s^2 & 12cs & -6Ls \\ -12cs & 12c^2 & 6Lc & 12cs & -12c^2 & 6Lc \\ -6Ls & 6Lc & 4L^2 & 6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ -12s^2 & 12cs & 6Ls & 12s^2 & -12cs & 6Ls \\ 12cs & -12c^2 & -6Lc & -12cs & 12c^2 & -6Lc \\ -6Ls & 6Lc & -2L^2 & 6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Exercícios – viga-barra 2D

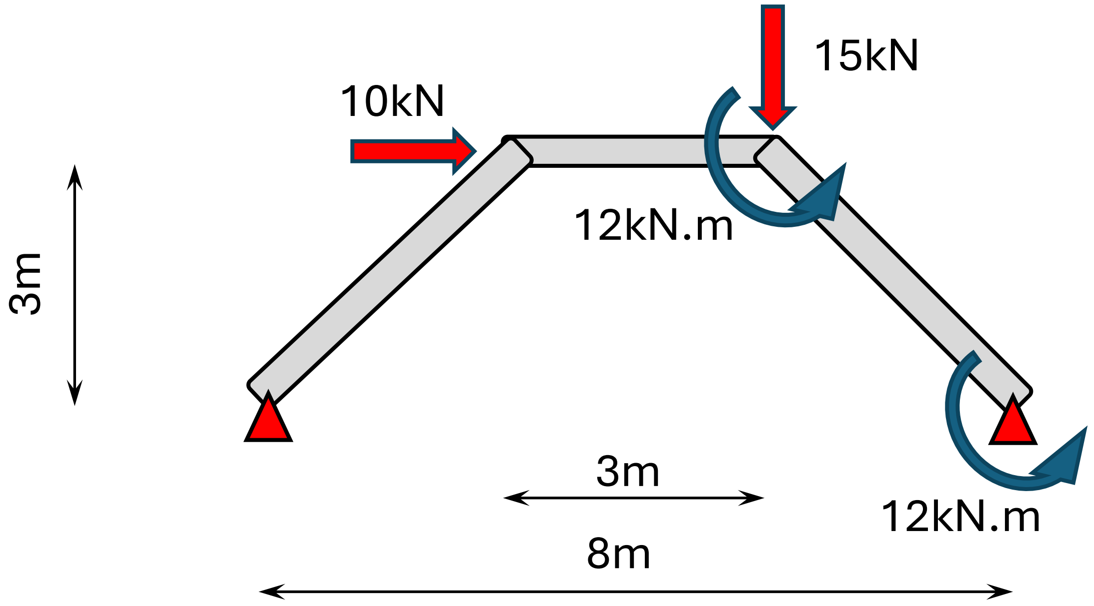


Secção circular de diâmetro 60mm

$I=\pi R^4/4$

E=200GPa

Exercícios – viga-barra 2D

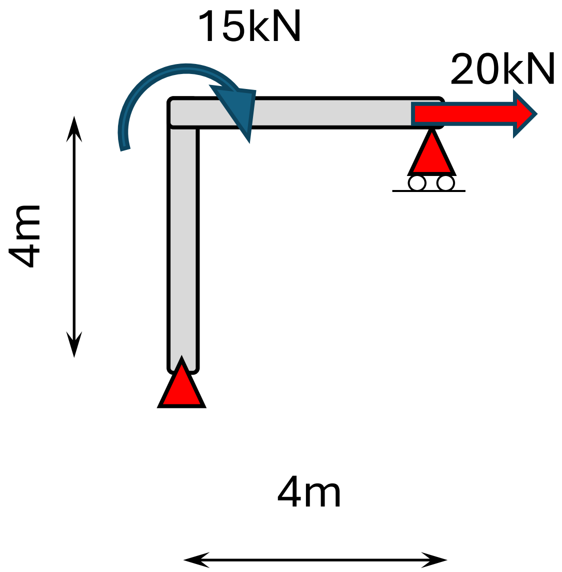


Secção tubular circular de diâmetro 60mm e espessura 5mm

$I = \pi R^4/4$

E=210GPa

Exercícios – viga-barra 2D

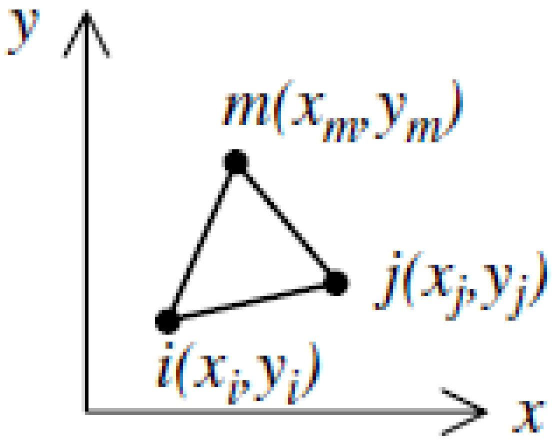


Secção retangular 40x50x5 mm

$I_{rect}=bh^3/12$

E=210GPa

Elemento plano triangular



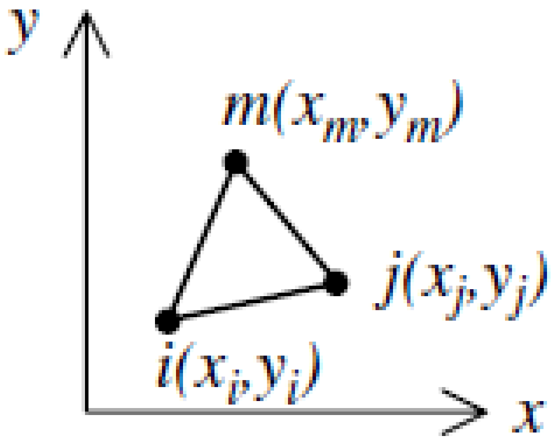
$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j)$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta_i &= y_j - y_m \\ \beta_j &= y_m - y_i \\ \beta_m &= y_i - y_j \\ \gamma_i &= x_m - x_j \\ \gamma_j &= x_i - x_m \\ \gamma_m &= x_j - x_i \end{aligned}$$

$$[k] = tA[B]^T[D][B]$$

Elemento plano triangular



- domínio de cálculo 2D

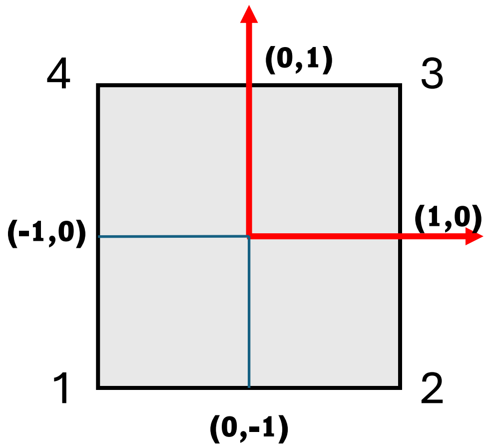
Estado plano de tensão

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Estado plano de deformação

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Elemento plano quadrilátero



$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = N_i(x,y) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

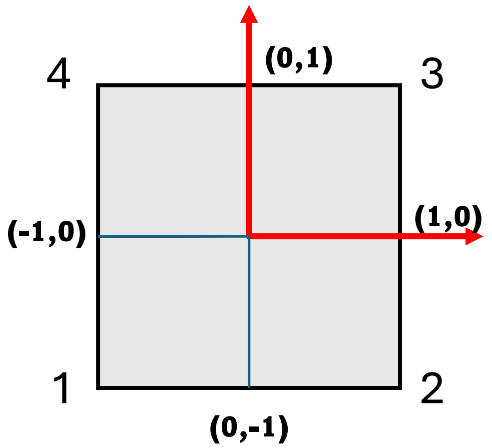
Campo de deslocamentos

$$N_i(x,y) = \frac{1}{4}(1 + a_i x)(1 + b_i y)$$

	a_i	b_i
N_1	-1	-1
N_2	1	-1
N_3	1	1
N_4	-1	1

Funções interpoladoras (de forma)

Elemento plano quadrilátero



Campo de deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = N_i(x,y) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

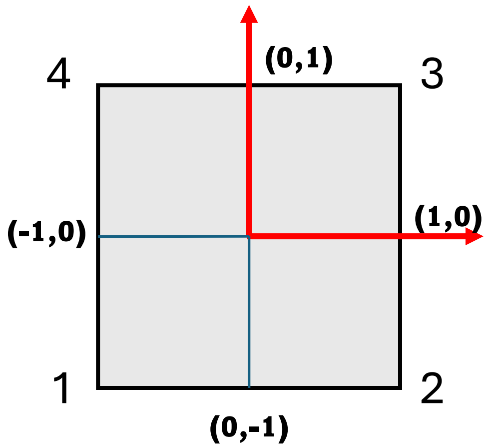
Campo de deformações

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

Matriz de deformações

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix}$$

Elemento plano quadrilátero

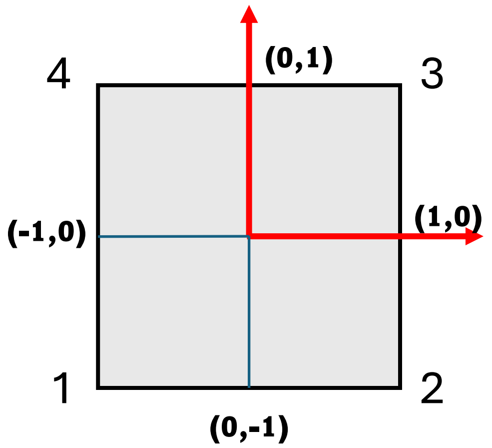


$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = N_i(x,y) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [B] N_i(x,y) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = [B(x,y)] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \Rightarrow [B(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1(x,y)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_2(x,y)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_3(x,y)}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_4(x,y)}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1(x,y)}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_2(x,y)}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_3(x,y)}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_4(x,y)}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1(x,y)}{\delta y} & \frac{\delta N_1(x,y)}{\delta x} & \frac{\delta N_2(x,y)}{\delta y} & \frac{\delta N_2(x,y)}{\delta x} & \frac{\delta N_3(x,y)}{\delta y} & \frac{\delta N_3(x,y)}{\delta x} & \frac{\delta N_4(x,y)}{\delta y} & \frac{\delta N_4(x,y)}{\delta x} \end{bmatrix}$$

Elemento plano quadrilátero



Matriz de Rigidez

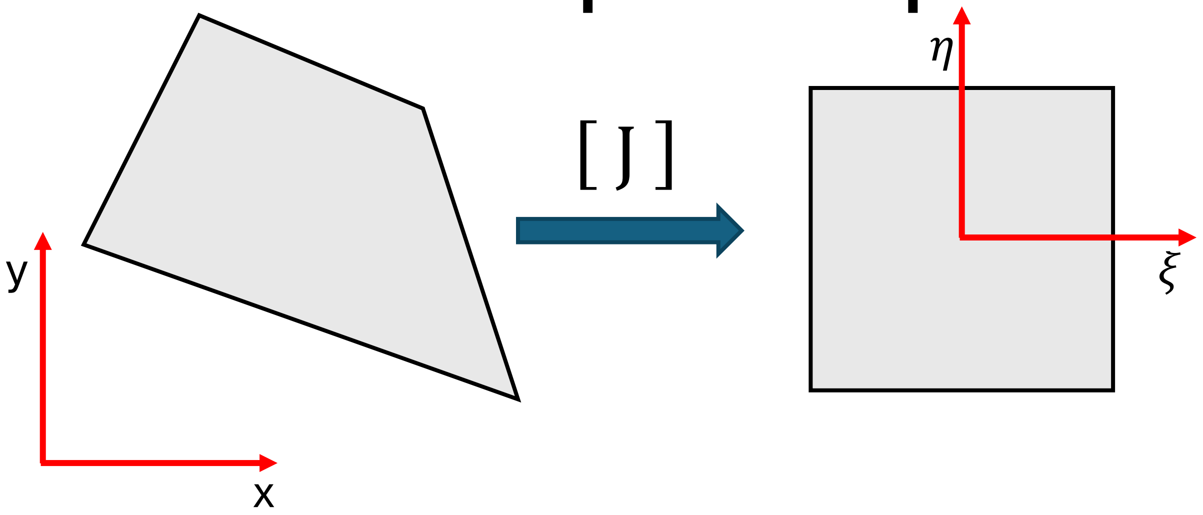
$$[K]_e = \int_A [B(x,y)]^T [D] [B(x,y)] dA$$

Integração numérica

$$[K]_e = \sum_{g=1}^{ng} w_p(g) \left[B(x_g, y_g)\right]^T [D] \left[B(x_g, y_g)\right]$$

4 pontos de gauss: $w_p = 1$ e $\left(x_g, y_g\right) = \left(\pm {}^{1}/_{\sqrt{3}}, \pm {}^{1}/_{\sqrt{3}}\right)$

Elemento plano quadrilátero



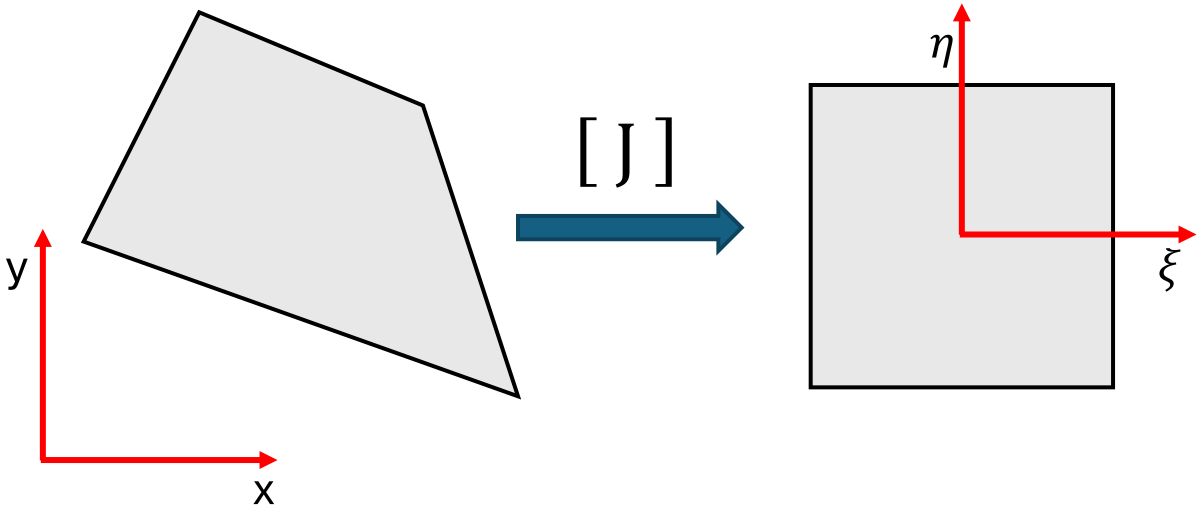
Jacobiano da transformação

$$[\,J\,] = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta \xi} & \dfrac{\delta y}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta x}{\delta \eta} & \dfrac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

$$x(\xi,\eta) = [N(\xi,\eta)]\{x_i\}$$
$$y(\xi,\eta) = [N(\xi,\eta)]\{y_i\}$$

$$[\,J\,] = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta[N(\xi,\eta)]\{x_i\}}{\delta \xi} & \dfrac{\delta[N(\xi,\eta)]\{y_i\}}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta[N(\xi,\eta)]\{x_i\}}{\delta \eta} & \dfrac{\delta[N(\xi,\eta)]\{y_i\}}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

Elemento plano quadrilátero



Jacobiano da transformação

$$[\,J\,] = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta \xi} & \dfrac{\delta y}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta x}{\delta \eta} & \dfrac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

Matriz de deformações

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\delta}{\delta y} \\ \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\delta N_i}{\delta x} \\ \dfrac{\delta N_i}{\delta y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta \xi}{\delta x} & \dfrac{\delta \eta}{\delta x} \\ \dfrac{\delta \xi}{\delta y} & \dfrac{\delta \eta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{Bmatrix} = [\,J\,]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \dfrac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{Bmatrix}$$

Acesso FEMAP instalação

- https://uapt33090-my.sharepoint.com/:f:/g/personal/rmoreira_ua_pt/El_fWsnVrqRBtQl5Ab-APtcB44diAamR8dGo-oTvcNT0lQ?e=odpKPE

- Instalar como network client

- 27001@lic-femap.ua.pt