

Spacecraft Dynamics & Control

Aula 3.1 – Sistemas discretos (NGDL)
Regime forçado harmônico

2024/2025
Rui Moreira

Sistema com 2 graus de liberdade – Regime forçado (excitação harmónica)

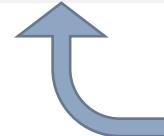
A equação de movimento é definida por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad \text{onde} \quad \{f(t)\} = \{F\}e^{j\omega t}$$

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

A resposta é também do tipo harmónico:

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\}e^{j\omega t}$$



Vetor complexo
(amplitude e fase do
movimento estacionário
do sistema)

Sistema com 2 graus de liberdade - Regime forçado (excitação harmónica)

A resposta é também do tipo harmónico:

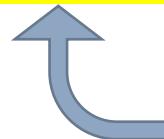
$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\}e^{j\omega t}$$

Substituindo na equação de movimento:

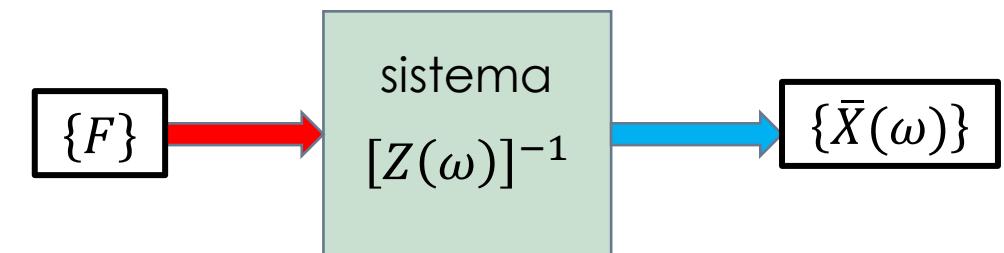
$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad \text{vem}$$

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$[Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$



Inverso da função de transferência



$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1} \cdot \{F\}$$

Sistema com 2 graus de liberdade - Regime forçado (excitação harmónica)

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1} \cdot \{F\}$$

$$\{\bar{X}(\omega)\}$$

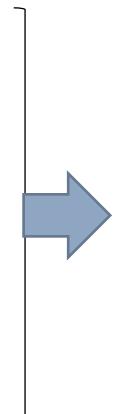
É um vetor complexo cujo módulo determina a amplitude da resposta e o argumento determina o ângulo de fase (desfasamento) entre a resposta e a excitação.

$$[Z(\omega)] = [-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$



$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} + K_{11} & -\omega^2 m_{12} + j\omega c_{12} + K_{12} \\ -\omega^2 m_{21} + j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} + K_{22} \end{bmatrix}$$

Sistema com 2 graus de liberdade - Regime forçado (excitação harmónica)

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} + K_{11} & -\omega^2 m_{12} + j\omega c_{12} + K_{12} \\ -\omega^2 m_{21} + j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} + K_{22} \end{bmatrix}$$

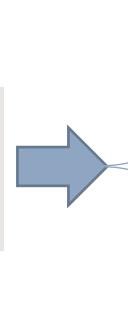
$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

A função de transferência $[Z(\omega)]^{-1}$, que define a resposta do sistema $\{\bar{X}(\omega)\}$ em função da excitação $\{F\}$,

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1} \cdot \{F\}$$

é dada por:

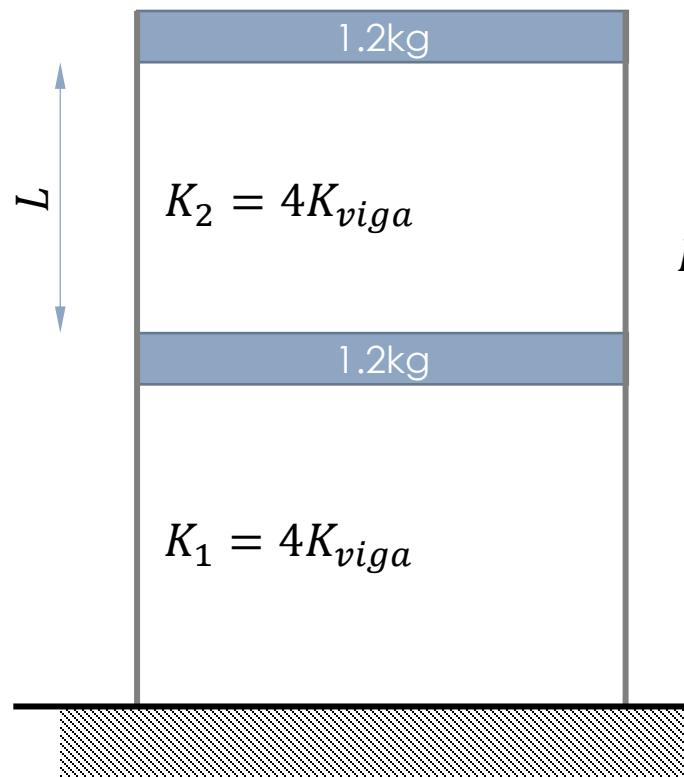
$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{1}{\det[Z(\omega)]} \begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{12}(\omega) \\ -Z_{21}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix}$$



$$\{\bar{X}_1(\omega)\} = \frac{Z_{22}F_1 - Z_{12}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

$$\{\bar{X}_2(\omega)\} = \frac{-Z_{21}F_1 + Z_{11}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

Sistema com 2 graus de liberdade - exemplo



$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9 \text{ Pa}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\begin{aligned}b &= 10\text{mm} \\h &= 2\text{mm} \\L &= 150\text{mm}\end{aligned}$$

Considerar:

$$[C] = \alpha[K]$$

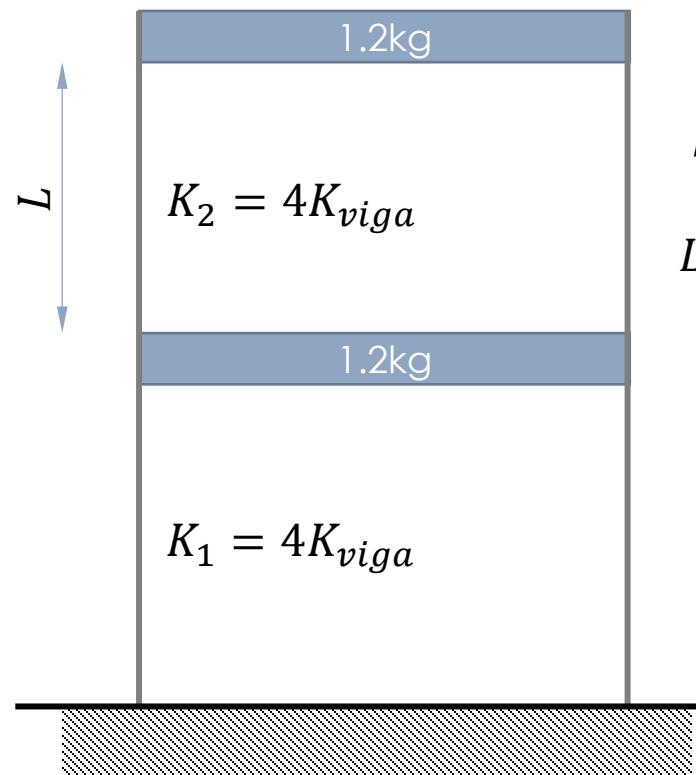
$$\alpha = 0.0001 \rightarrow 0.01$$

- Determinar frequências naturais do sistema
- Determinar matriz função de transferência
- Representar funções de transferência
- Determinar resposta para:

$$F_1 = F \cos(\omega t)$$

$$F_2 = 0$$

Sistema com 2 graus de liberdade -exemplo



$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9 \text{ Pa}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\begin{aligned} b &= 10\text{mm} \\ h &= 2\text{mm} \\ L &= 150\text{mm} \end{aligned}$$

%%% exercício Pórtico 2DOF %%%

%%

%

%

%

%

%

%

%

%

%

%

%

%

%

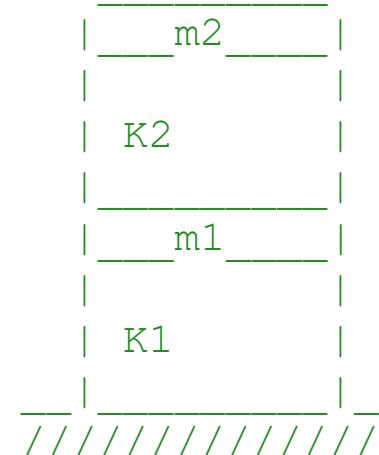
%

%

%

%

%



$$m_1 = m_2 = 1.2\text{kg}$$

$$K_1 = K_2 = 4 \times K_{viga}$$

$$K_{viga} = 12EI/L^3$$

$$E = 70\text{GPa}$$

$$I = b \cdot h^3 / 12$$

$$b = 10\text{mm}$$

$$h = 2\text{mm}$$

$$a = [\Phi]$$

$$-0.4799 \quad -0.7765$$

$$-0.7765 \quad 0.4799$$

$$b = \{\omega_n^2\}$$

$$1.0e+06 *$$

$$1.0563 \quad 0$$

$$0 \quad 7.2400$$

$$m_1 = 1.2; \quad m_2 = m_1;$$

$$b = 10e-3; \quad h = 2e-3; \quad L = 0.150;$$

$$E = 70e9;$$

$$I = b \cdot h^3 / 12$$

$$K_{viga} = 12 \cdot E \cdot I / L^3$$

$$K_1 = 4 \cdot K_{viga}$$

$$K_2 = K_1;$$

$$M = [m_1 \ 0; 0 \ m_2];$$

$$K = [K_1 + K_2 \ -K_2; \ -K_2 \ K_2];$$

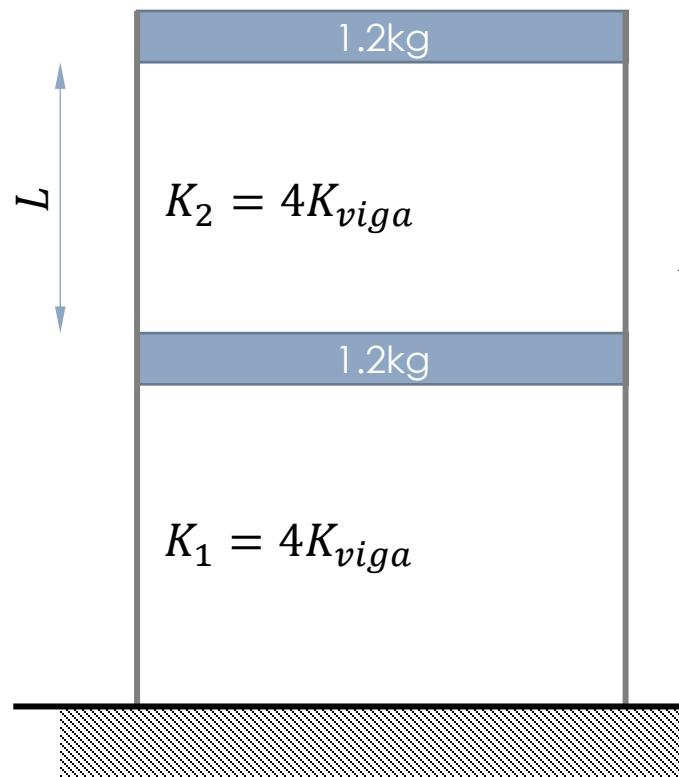
$$[a, b] = \text{eig}(K, M)$$

$$\Phi = a$$

$$W_n = \text{sqrt}(\text{diag}(b))$$

$$F_n = W_n / 2 / \pi$$

Sistema com 2 graus de liberdade -exemplo



$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9 \text{ Pa}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

%%% exercício Pórtico 2DOF %%%

%%

	m2	m1=m2=1.2kg
	K2	K1=K2=4xKviga
		Kviga=12EI/L^3
	m1	E=70GPa
	K1	I=b*h^3/12
		b=10mm
		h=2mm

%%

```
m1=1.2; m2=m1;
b=10e-3;h=2e-3;L=0.150;
E=70e9; I=b*h^3/12;
Kviga=12*E*I/L^3;
K1=4*Kviga; K2=K1;
```

```
M=[m1 0;0 m2];
K=[K1+K2 -K2; -K2 K2];
```

```
[a,b]=eig(K,M);
```

```
Phi=a
Wn=sqrt(diag(b))
Fn=Wn/2/pi
```

```
disp(['Frequênci natural fundamental w1 (f1): ',num2str(Wn(1)), ' rad/s
      (' ,num2str(Fn(1)), ' Hz)']);
disp(['Vetor modal para w1: ',num2str(Phi(1,1)), ' dof1 e ', num2str(Phi(2,1)), '
      dof 2.']);

disp(['2a Frequênci natural w2 (f2): ',num2str(Wn(2)), ' rad/s
      (' ,num2str(Fn(2)), ' Hz)']);
disp(['Vetor modal para w2: ',num2str(Phi(1,2)), ' dof1 e ', num2str(Phi(2,2)), '
      dof 2.']);
```

Sistema com 2 graus de liberdade - exemplo

Considerar: $[C] = \alpha[K]$ $\alpha = 0.0001 \rightarrow 0.01$

Determinar matriz da função de transferência

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$\downarrow [Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

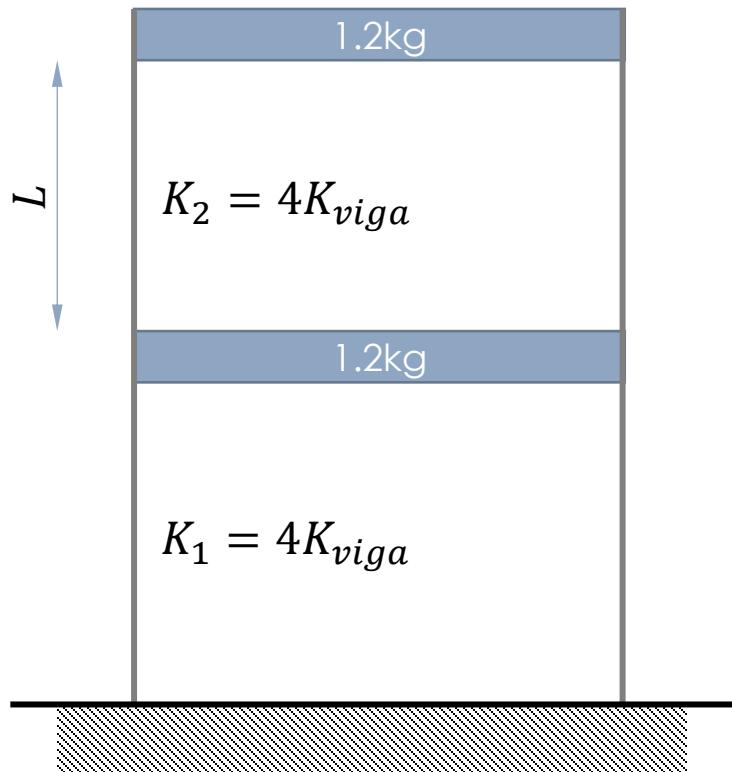
$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} + K_{11} & -\omega^2 m_{12} + j\omega c_{12} + K_{12} \\ -\omega^2 m_{21} + j\omega c_{21} + K_{21} & -\omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} + K_{22} \end{bmatrix}$$

```

alpha=1e-6; %amortecimento
C=K*alpha; %matriz de amortecimento [C]=alpha*[K]
% [M] a(t)+[C] v(t)+[K] x(t)=f(t)

w=linspace(0,2*Wn(2),1000); %vetor de frequências 0 2*Wn2, 1000 valores
f=w/2/pi; %Hz
for i=1:length(w)
    Z11(i)=-w(i)^2*M(1,1)+1i*w(i)*C(1,1)+K(1,1); %-w^2*m11+jw*c11+k11
    Z12(i)=1i*w(i)*C(1,2)+K(1,2); %-w^2*m12+jw*c12+k12
    Z21(i)=1i*w(i)*C(2,1)+K(2,1); %-w^2*m21+jw*c21+k21
    Z22(i)=-w(i)^2*M(2,2)+1i*w(i)*C(2,2)+K(2,2); %-w^2*m22+jw*c22+k22
    Det(i)=Z11(i)*Z22(i)-Z12(i)*Z21(i); %determinante da matriz Z
end

```



$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9 \text{ Pa}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Sistema com 2 graus de liberdade - exemplo

Determinar a resposta do sistema, no domínio da frequência

$$[Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\} \quad \longrightarrow \quad \{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1} \cdot \{F\}$$

Consideremos: $\{F(\omega)\} = \{F_1 \ F_2\}^T$

$$\begin{aligned} F_1 &= F \cos(\omega t) \\ F_2 &= 0 \end{aligned}$$

```
alpha=1e-6; %amortecimento
C=K*alpha; %matriz de amortecimento [C]=alpha*[K]
% [M]a(t)+[C]v(t)+[K]x(t)=f(t)
F=1;

w=linspace(0,2*wN(2),1000); %vetor de frequências 0 2*wN2, 1000 valores
f=w/2/pi; %Hz
for i=1:length(w)
    Z11(i)=-w(i)^2*M(1,1)+1i*w(i)*C(1,1)+K(1,1); %-w^2*m11+jw*c11+k11
    Z12(i)=1i*w(i)*C(1,2)+K(1,2); %-w^2*m12+jw*c12+k12
    Z21(i)=1i*w(i)*C(2,1)+K(2,1); %-w^2*m21+jw*c21+k21
    Z22(i)=-w(i)^2*M(2,2)+1i*w(i)*C(2,2)+K(2,2); %-w^2*m22+jw*c22+k22
    Det(i)=Z11(i)*Z22(i)-Z12(i)*Z21(i); %determinante da matriz Z
    X1(i)=Z22(i)/Det(i)*F;
    X2(i)=-Z21(i)/Det(i)*F;
end
```

$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{1}{\det[Z(\omega)]} \begin{bmatrix} Z_{22}(\omega) & -Z_{12}(\omega) \\ -Z_{21}(\omega) & Z_{11}(\omega) \end{bmatrix}$$

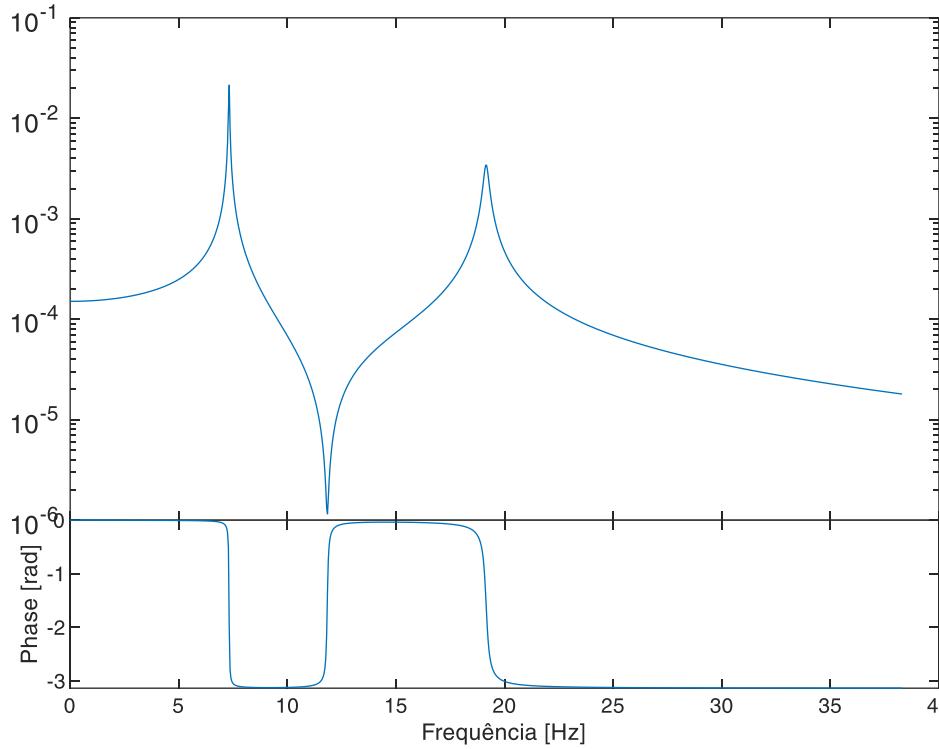
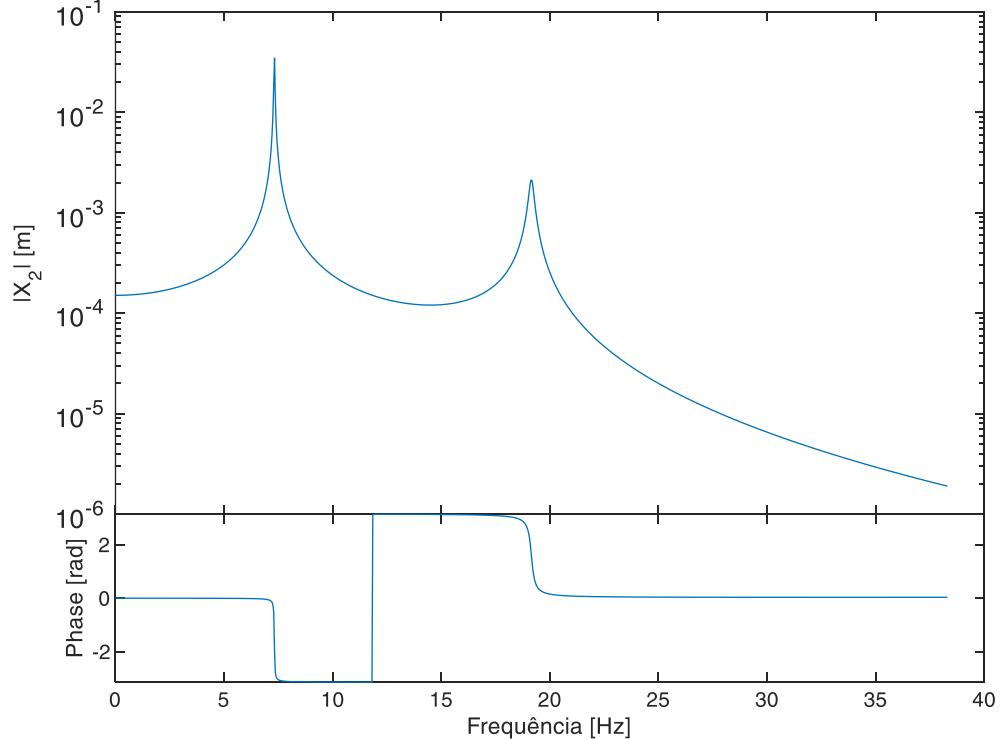
$$\{\bar{X}_1(\omega)\} = \frac{Z_{22}F_1 - Z_{12}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

$$\{\bar{X}_2(\omega)\} = \frac{-Z_{21}F_1 + Z_{11}F_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

```

figure(1);
sf1=subplot(2,1,1);semilogy(f,abs(X1));
sf2=subplot(2,1,2);plot(f,angle(X1));
set(sf1,'Position',[0.13,0.3, 0.775, 0.6]);
set(sf2,'Position',[0.13,0.1, 0.775, 0.2]);
set(get(sf2,'XLabel'),'String','Frequênci [Hz]');
set(get(sf1,'YLabel'),'String','|X_1| [m]');
set(get(sf2,'YLabel'),'String','Phase [rad]');
fh=get(get(sf2,'Ylabel'),'FontSize');
set(get(sf1,'YLabel'),'FontSize',fh);
set(sf1,'XTicklabel',{});

```



```

figure(2);
sf3=subplot(2,1,1);semilogy(f,abs(X2));
sf4=subplot(2,1,2);plot(f,angle(X2));
set(sf3,'Position',[0.13,0.3, 0.775, 0.6]);
set(sf4,'Position',[0.13,0.1, 0.775, 0.2]);
set(get(sf4,'XLabel'),'String','Frequênci [Hz]');
set(get(sf3,'YLabel'),'String','|X_2| [m]');
set(get(sf4,'YLabel'),'String','Phase [rad]');
fh=get(get(sf4,'Ylabel'),'FontSize');
set(get(sf3,'YLabel'),'FontSize',fh);
set(sf3,'XTicklabel',{});

```

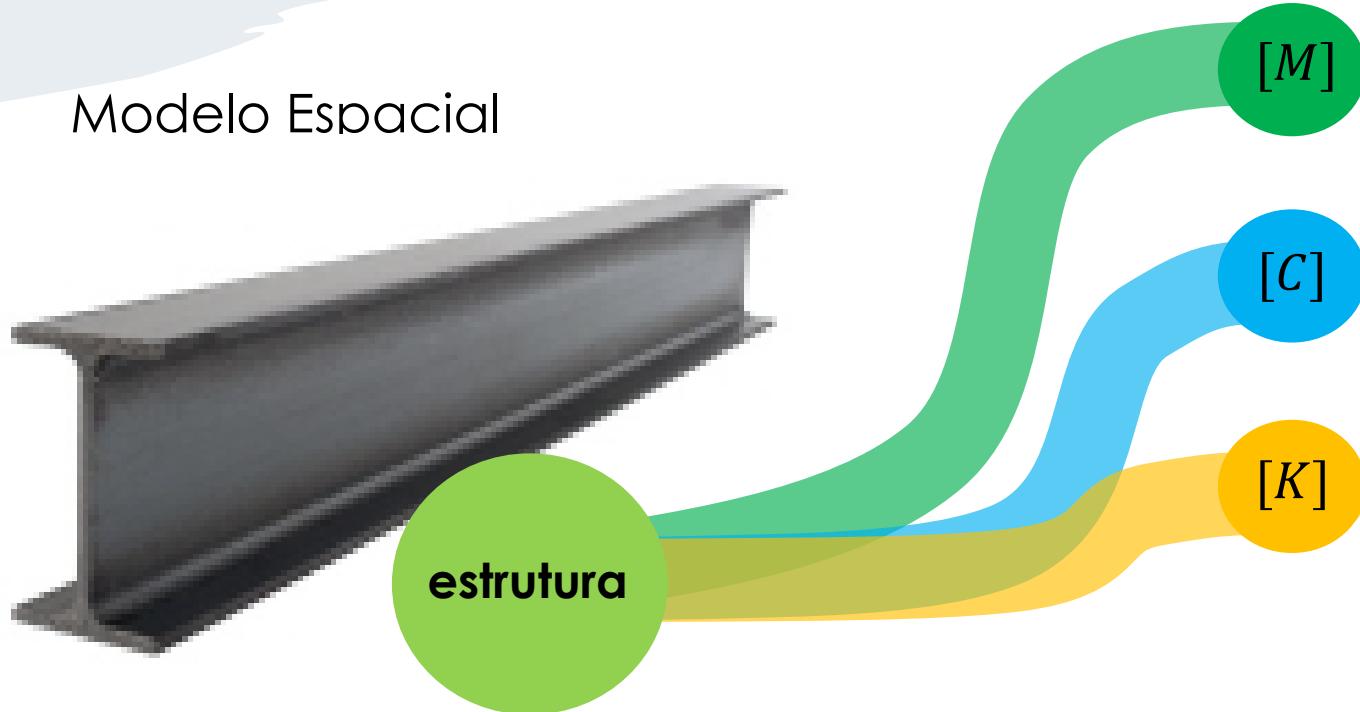
Spacecraft Dynamics & Control

Aula 3.2 – Modelos de representação

2024/2025
Rui Moreira

Modelos de representação de um sistema dinâmico

Modelo Espacial



Eq. Movimento no domínio do tempo

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Eq. Movimento no domínio da frequência

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

Modelos de representação de um sistema dinâmico

Modelo Modal

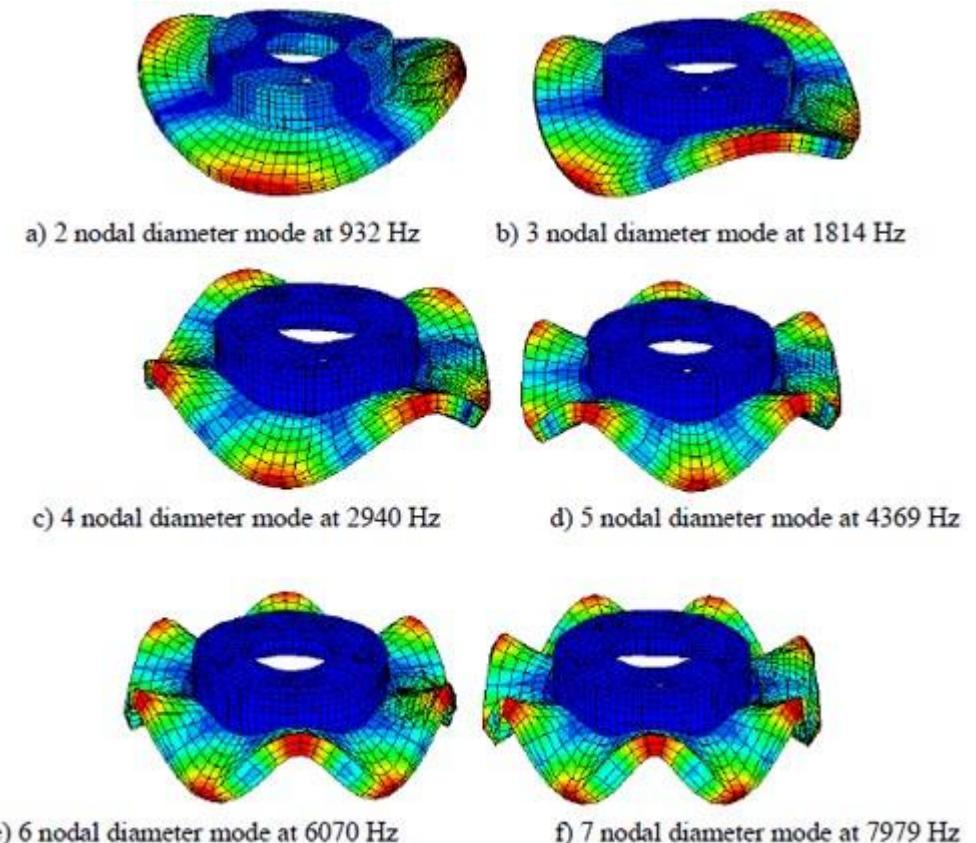
O sistema é representado por:

Vetor de frequências naturais:

$$\{\Omega\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

Matriz de vetores modais:

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}]$$



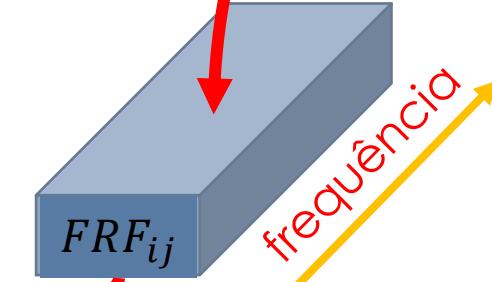
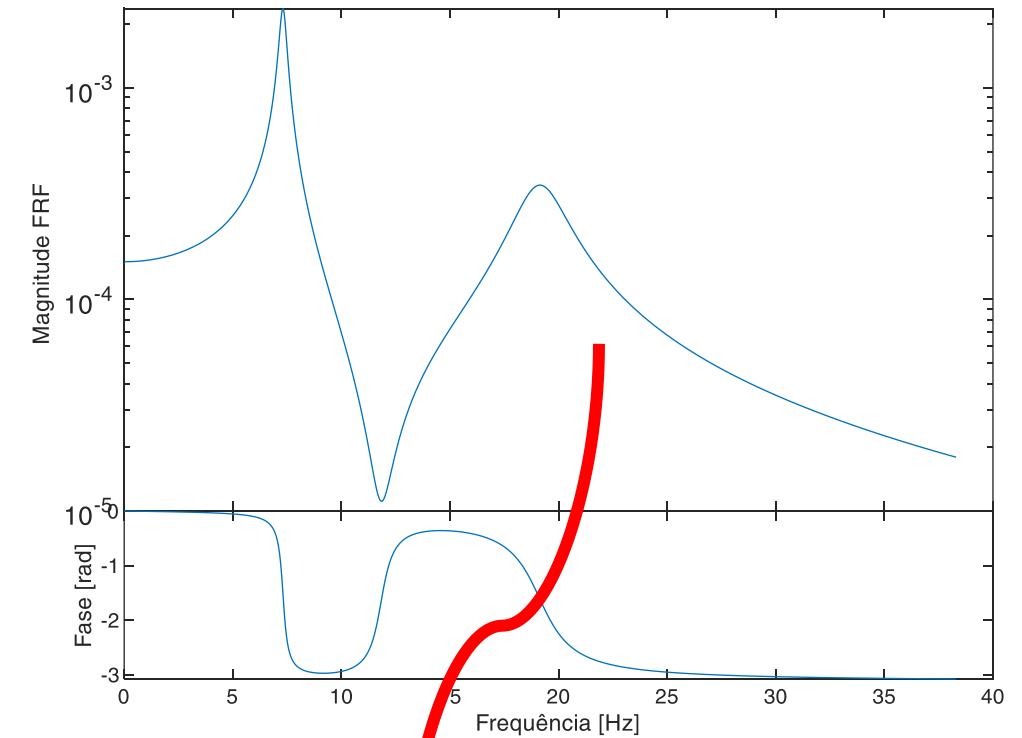
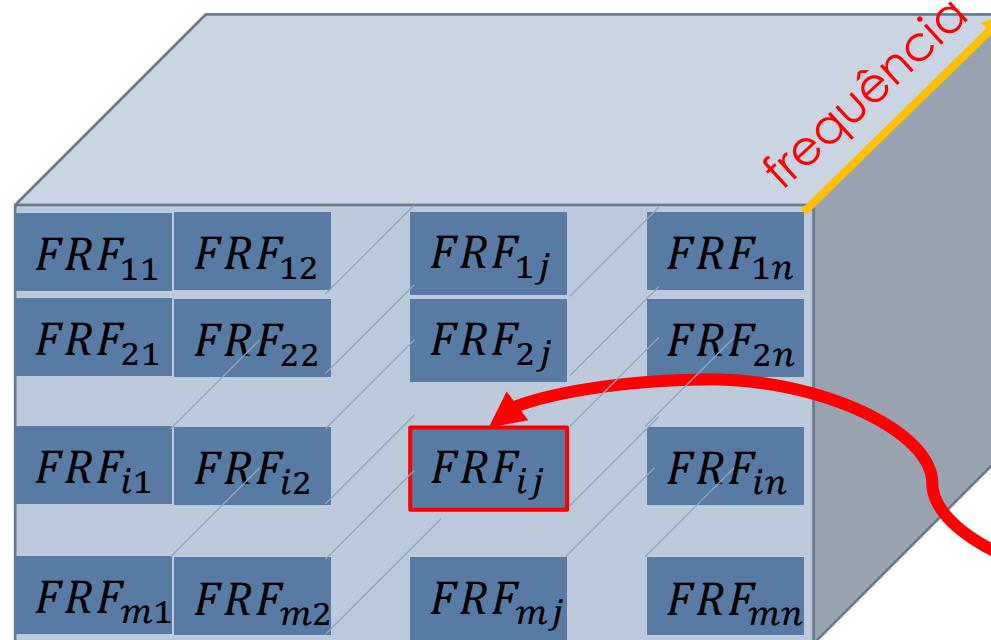
Modelos de representação de um sistema dinâmico

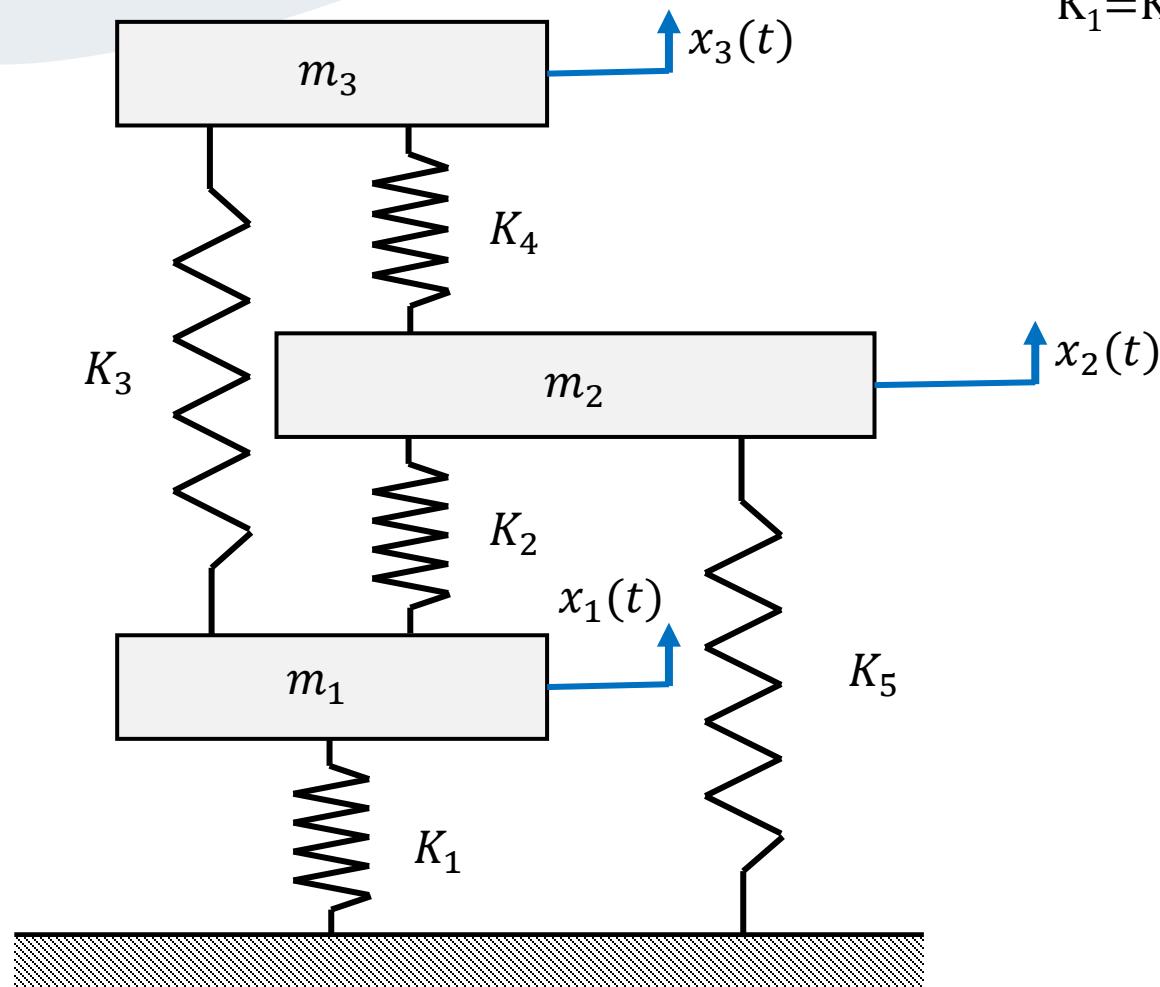
Modelo de Resposta

O sistema é representado por:

Matriz de vetores
de resposta em frequência:

$$\{\text{FRF}_{ij}(\omega)\}$$





$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = 1000$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_4 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

Modelo Espacial

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & -c_2 & -c_3 \\ -c_2 & c_2 + c_4 + c_5 & -c_4 \\ -c_3 & -c_4 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}$$

Modelo Modal

$$[-\omega^2[M] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{0\}$$

$$[-\omega^2[M] + [K]] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \cdot \cos(\omega t - \phi) = \{0\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 + K_5 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

Solução não trivial $\rightarrow |-\omega^2[M] + [K]| = 0$ Determinante característico



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: frequências naturais do sistema

(determinado pelos valores próprios do problema de valores e vetores próprios)

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{Bmatrix}$$

forma modal para ω_1

$$\{u_2\} = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{Bmatrix}$$

forma modal para ω_2

$$\{u_3\} = \begin{Bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{Bmatrix}$$

forma modal para ω_3

(determinado pelos vetores próprios do problema de valores e vetores próprios)

Modelo Modal

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: frequências naturais do sistema

$$\{u_1\} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

$[U] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \{u_3\}]$ Matriz de vetores modais

forma modal para ω_1

$$\{u_2\} = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}$$

$[\Phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \{\phi_3\}]$ Matriz de vetores modais normalizados
a massa modal unitária

forma modal para ω_2

$$\{u_3\} = \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}$$

forma modal para ω_3

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1$$

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} = \omega_i^2$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = 0, \quad i \neq j$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega^2]$$

```
% Modelo espacial: [M] , [C] , [K]
m1=1; m2=1;m3=1;
K1=1000;K2=1000;K3=1000;K4=1000;K5=2000;

M= [m1  0  0 ;
      0  m2  0 ;
      0  0  m3] ;

K= [K1+K2+K3 -K2 -K3 ;
     -K2 K2+K3+K5 -K4 ;
     -K3 -K4 K3+K4] ;

alpha=1e-2; %factor de amortecimento
C=K*alpha; %matriz de amortecimento [C]=alpha*[K] (proporcional)

%% Modelo modal (real- considera C=0)
[a,b]=eig(K,M); % Resolução do problema de valores e vetores próprios

Phi=a; % matriz de vetores modais [adimensional relativa]
Wn=sqrt(diag(b)); % vetor de frequências naturais [rad/s]
Fn=Wn/2/pi; % vetor de frequências naturais [Hz]
```

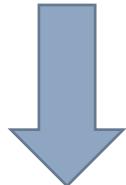
```
%output de resultados
disp(['Frequênci a natural fundamental w1 (f1): ',num2str(Wn(1)), ' rad/s
      (' ,num2str(Fn(1)), ' Hz)]) ;
disp(['Vetor modal para w1: ',num2str(Phi(1,1)), ' [dof1] e ',
      num2str(Phi(2,1)), ' [dof2] e ',num2str(Phi(3,1)), ' [dof3].']) ;

disp(['2a Frequênci a natural w2 (f2): ',num2str(Wn(2)), ' rad/s
      (' ,num2str(Fn(2)), ' Hz)]) ;
disp(['Vetor modal para w2: ',num2str(Phi(1,2)), ' [dof1] e ',
      num2str(Phi(2,2)), ' [dof2] e ', num2str(Phi(3,2)), ' [dof3].']) ;

disp(['3a Frequênci a natural w3 (f3): ',num2str(Wn(3)), ' rad/s
      (' ,num2str(Fn(3)), ' Hz)]) ;
disp(['Vetor modal para w3: ',num2str(Phi(1,3)), ' [dof1] e ',
      num2str(Phi(2,3)), ' [dof2] e ', num2str(Phi(3,3)), ' [dof3].']) ;
```

Modelo de Resposta

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$



$$[Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

Considerando solicitação e resposta harmónicas

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{j\omega t}$$

$$\{x(t)\} = \{\bar{X}(\omega)\}e^{j\omega t}$$

Vetor complexo
(amplitude e fase do
movimento estacionário
do sistema)

A resposta do sistema pode ser determinada por:

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [Z(\omega)]^{-1} \cdot \{F\}$$

$[Z(\omega)]^{-1}$ - função de transferência

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [H(\omega)] \cdot \{F\}$$

$[H(\omega)]$ - Matriz de funções de resposta em frequência

Modelo de Resposta

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [H(\omega)].\{F\}$$

[$H(\omega)$] - Matriz de funções de resposta em frequência

$$\frac{\{\bar{X}(\omega)\}}{\{F\}} = [\alpha(\omega)]$$

Deslocabilidade
ou Recetância

$$\frac{\{F\}}{\{\bar{X}(\omega)\}} = [\mathbf{K}(\omega)]$$

Rigidez dinâmica

$$\frac{\{\bar{V}(\omega)\}}{\{F\}} = [Y(\omega)] = j\omega[\alpha(\omega)]$$

Mobilidade

$$\frac{\{F\}}{\{\bar{V}(\omega)\}} = [I(\omega)]$$

Impedância
mecânica

$$\frac{\{\bar{A}(\omega)\}}{\{F\}} = [A(\omega)] = -\omega^2[\alpha(\omega)]$$

Acelerância

$$\frac{\{F\}}{\{\bar{A}(\omega)\}} = [M(\omega)]$$

Massa aparente

Modelo de representação – conversão de modelos

Modelo Espacial → Modelo Modal

Extração de valores e vetores próprios

Modelo Modal → Modelo Espacial

Sistema indeterminado

Modelo Espacial → Modelo de Resposta

Análise direta em frequência

Modelo de Resposta → Modelo Espacial

Sistema indeterminado

Modelo de Resposta → Modelo Modal

Identificação Modal

Modelo Modal → Modelo de Resposta

Sintetização Modal

Modelo Espacial → Modelo de resposta

$$[-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$[Z(\omega)] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F\}$$

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [H(\omega)].\{F\}$$

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$$

[$H(\omega)$] - Matriz de funções
de resposta em frequência

Análise direta em frequência

$$\omega: \omega_i \rightarrow \omega_f$$

$$\curvearrowright [Z(\omega)] = [-\omega^2[M] + j\omega[C] + [K]]$$

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$$

```

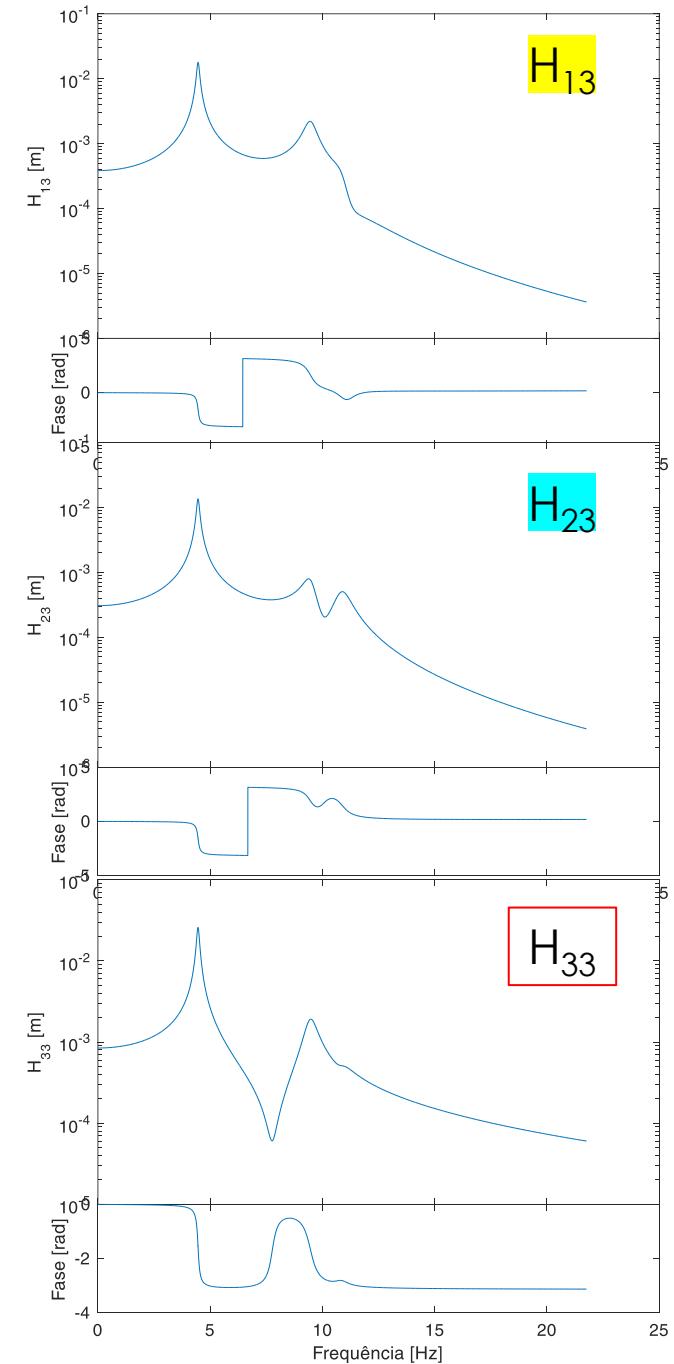
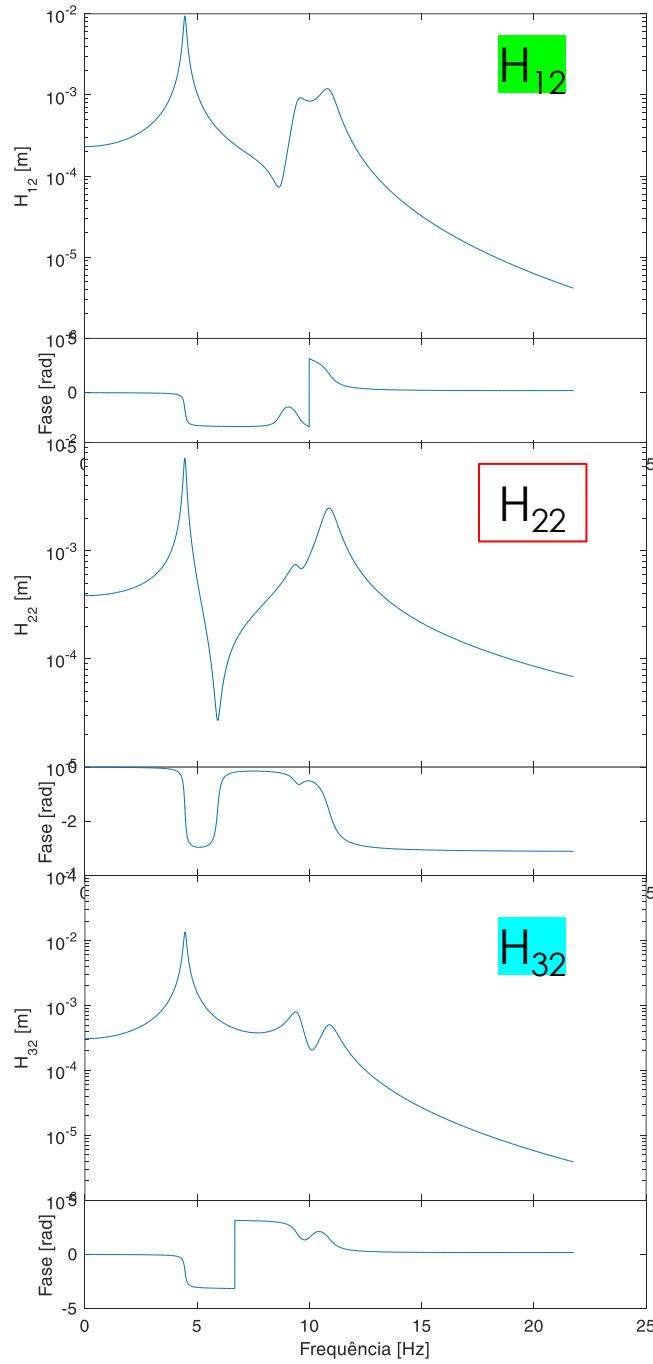
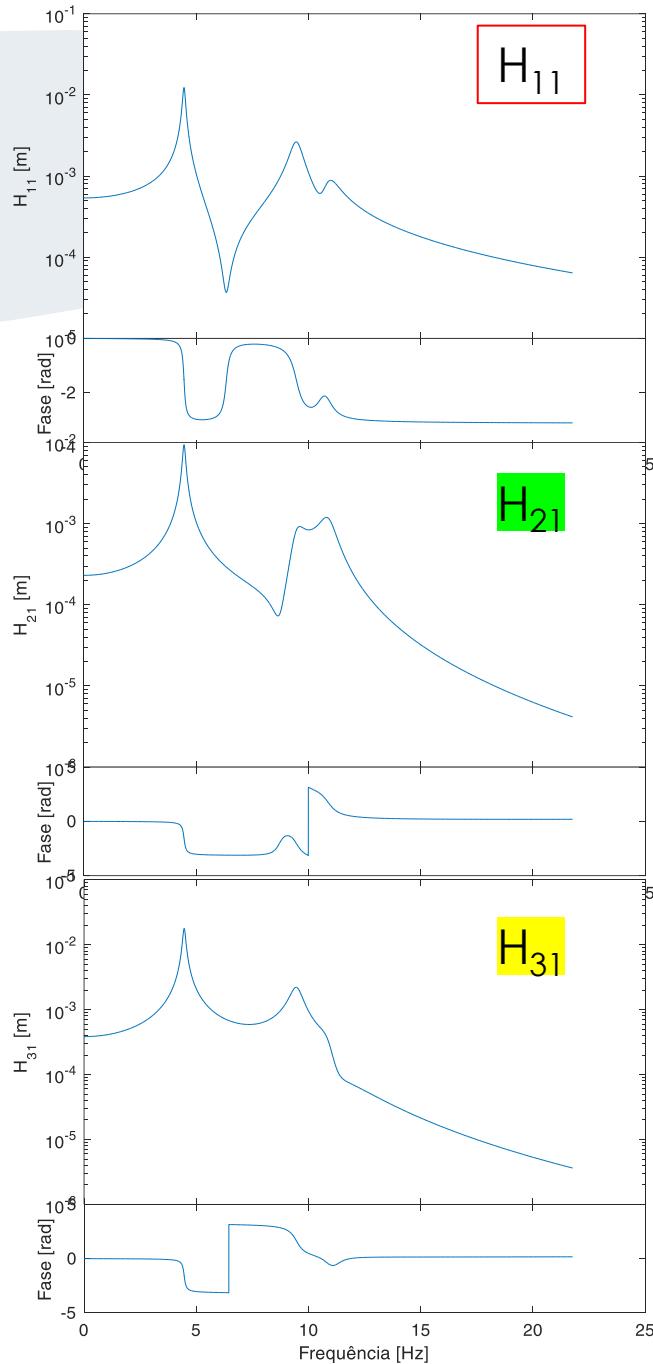
%% Modelo de resposta gerado pelo modelo espacial
% [M] , [C] , [K] --> H_jk(omega)

f=linspace(0,2*Fn(3),10000); %vetor de frequências 0 2*Fn3, 10000 valores
w=2*pi()*f;w2=w.^2;

for i=1:length(f)
    wi=w(i); wi2=w2(i);
    Zw=(-wi2*M+li*wi*C+K); % matriz da inversa da função de transferência
    iZw=Zw^-1; % matriz da função de transferência
    H(1:3,1:3,i)=iZw; % matriz das funções de resposta em frequência
end

%output de resultados
for j=1:3
    for k=1:3
        figure(3*(j-1)+k);
        frf(:)=H(j,k,:);
        sf1=subplot(2,1,1);semilogy(f,abs(frf));
        sf2=subplot(2,1,2);plot(f,angle(frf));
        set(sf1,'Position',[0.13,0.3, 0.775, 0.6]);
        set(sf2,'Position',[0.13,0.1, 0.775, 0.2]);
        frfname=['H_',num2str(j), '_',num2str(k), ' [m]'];
        set(get(sf2,'XLabel'),'String','Frequência [Hz]');
        set(get(sf1,'YLabel'),'String',frfname);
        set(get(sf2,'YLabel'),'String','Fase [rad]');
        fh=get(get(sf2,'Ylabel'),'FontSize');
        set(get(sf1,'YLabel'),'FontSize',fh);
        set(sf1,'XTicklabel',{});
    end;
end;

```



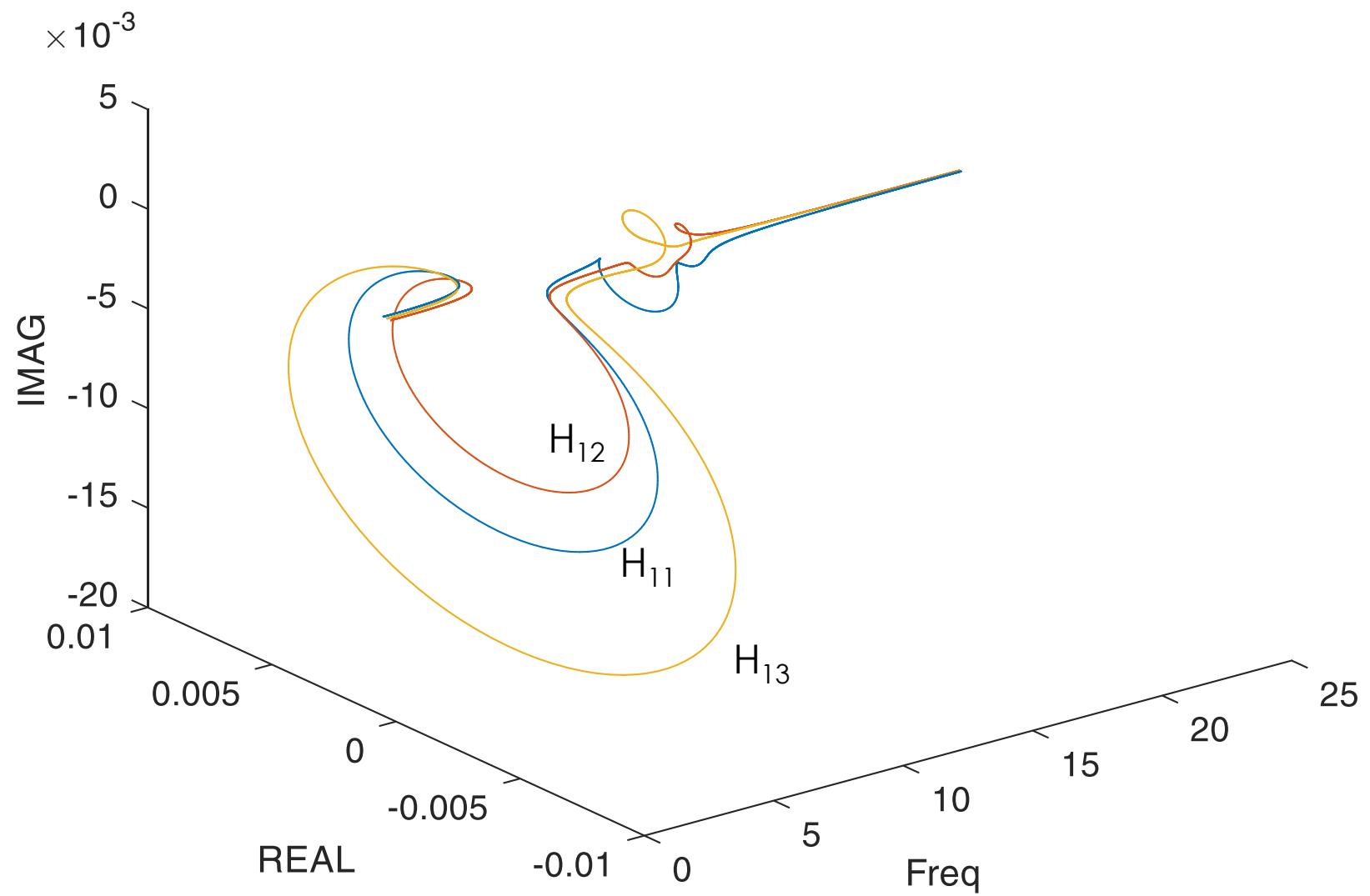
```
% representação 3D da Função de Resposta em Frequência

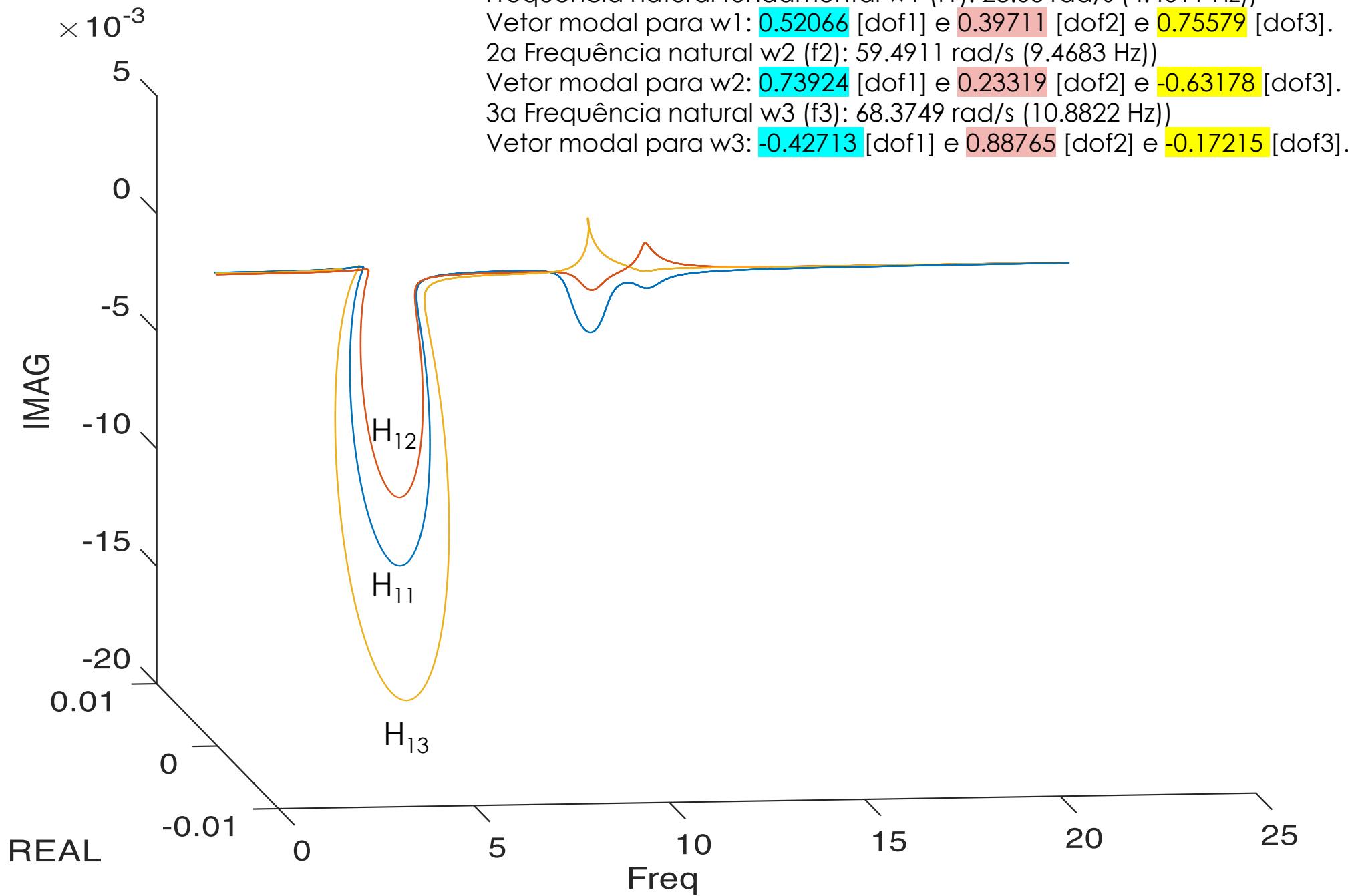
figure(10);frf1(:)=H(1,1,:);
plot3(f,real(frf1),imag(frf1)); ylabel('REAL'),zlabel('IMAG'), xlabel('Freq')

figure(11);frf2(:)=H(1,2,:);frf3(:)=H(1,3,:);
plot3(f,real(frf1),imag(frf1),f,real(frf2),imag(frf2),f,real(frf3),imag(frf3));
ylabel('REAL'),zlabel('IMAG'), xlabel('Freq')

% Sobreposição de funções

figure(12); plot(real(frf1),imag(frf1),real(frf2),imag(frf2),real(frf3),imag(frf3));
xlabel('REAL');ylabel('IMAG');axis equal;
```





Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[-\omega^2[M] + [K]] \cdot \{\bar{X}(\omega)\} = \{F(\omega)\}$$

$$\{\bar{X}(\omega)\} = [\alpha(\omega)] \cdot \{F(\omega)\}$$

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = [[K] - \omega^2[M]]$$

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T [[K] - \omega^2[M]] [\Phi] = [\Phi]^T [K] [\Phi] - \omega^2 [\Phi]^T [M] [\Phi]$$

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

A matriz $[\alpha_{ij}(\omega)]$ é simétrica
Princípio da Reciprocidade

$$\alpha_{jk}(\omega) = \alpha_{kj}(\omega)$$

Modelo Modal → Modelo de resposta

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \omega_r^2 - \omega^2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha_{jk}(\omega)\} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r C_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad \xleftarrow{\text{Constante modal}}$$

Exemplo:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_{11}(\omega)\} &= \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{31}}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \{\alpha_{12}(\omega)\} &= \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{32}}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ \{\alpha_{13}(\omega)\} &= \sum_{r=1}^3 \frac{\phi_{jr} \cdot \phi_{rk}}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\phi_{11} \cdot \phi_{13}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{23}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{13} \cdot \phi_{33}}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

```

%% Modelo de resposta gerado pelo modelo modal real
% {omega_r}, [Phi]--> Alpha_jk(omega)

f=linspace(0,2*Fn(3),10000); %vetor de frequências 0 2*Fn3, 10000 valores
w=2*pi()*f;w2=w.^2;

for j=1:3
    for k=1:3
        frf=0;
        for r=1:3
            wr=Wn(r);
            frf=frf+ Phi(j,r)*Phi(r,k)./(wr.^2-w.^2);
        end
        Alpha(j,k,:)=frf;
    end
end

```

```

%output de resultados
for j=1:3
    for k=1:3
        figure(12+3*(j-1)+k);
        frf(:)=Alpha(j,k,:);
        sf1=subplot(2,1,1);semilogy(f,abs(frf));
        sf2=subplot(2,1,2);plot(f,angle(frf));
        set(sf1,'Position',[0.13,0.3, 0.775, 0.6]);
        set(sf2,'Position',[0.13,0.1, 0.775, 0.2]);
        frfname=['H_',num2str(j),'_',num2str(k),' [m]'];
        set(get(sf2,'XLabel'),'String','Frequência [Hz]');
        set(get(sf1,'YLabel'),'String',frfname);
        set(get(sf2,'YLabel'),'String','Fase [rad]');
        fh=get(get(sf2,'Ylabel'),'FontSize');
        set(get(sf1,'YLabel'),'FontSize',fh);
        set(sf1,'XTicklabel',{});
    end;
end;

```

