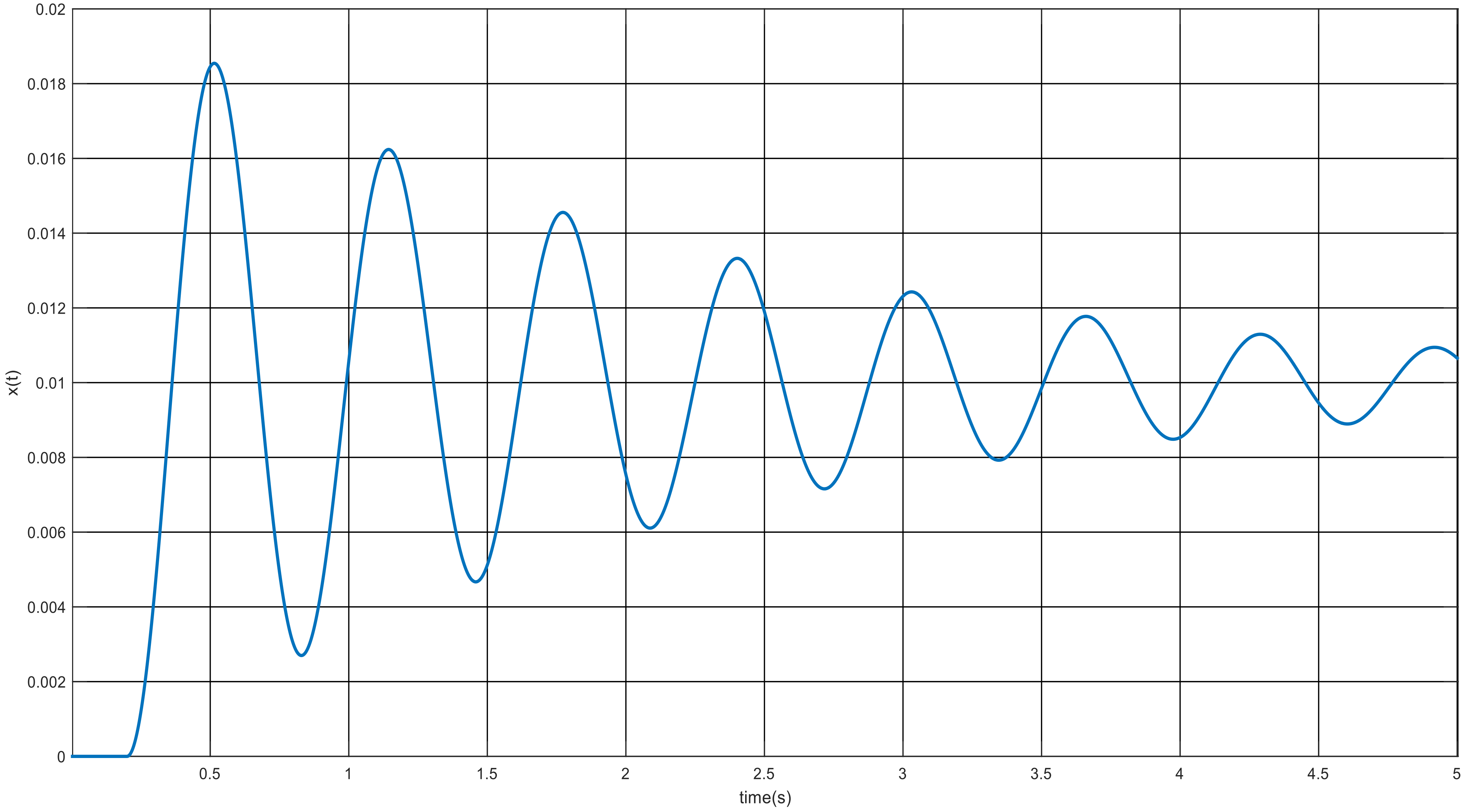
Spacecraft Dynamics & Control

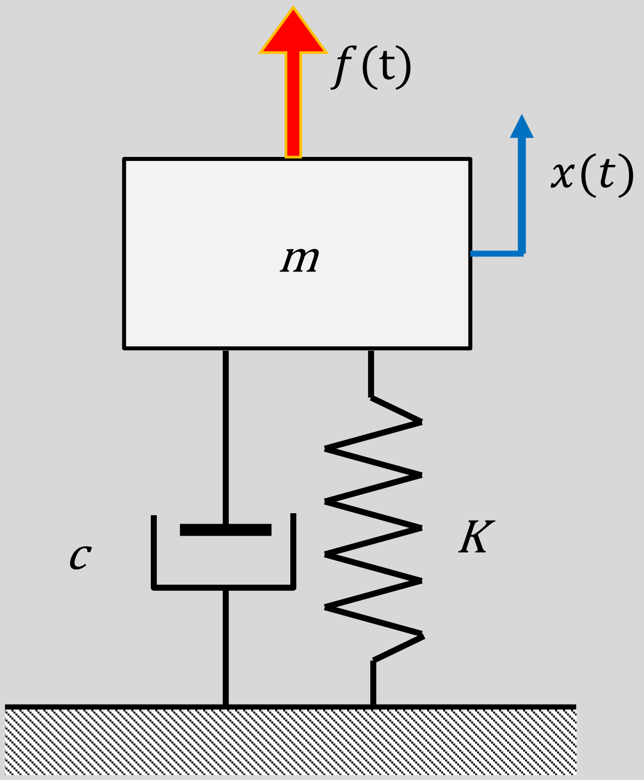
Aula 2.1 – Sistemas discretos (1GDL) - Regime forçado

2024/2025

Rui Moreira


0.02
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
x(t)
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
time(s)

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime forçado



Regime forçado:

$$\sum F \neq 0$$

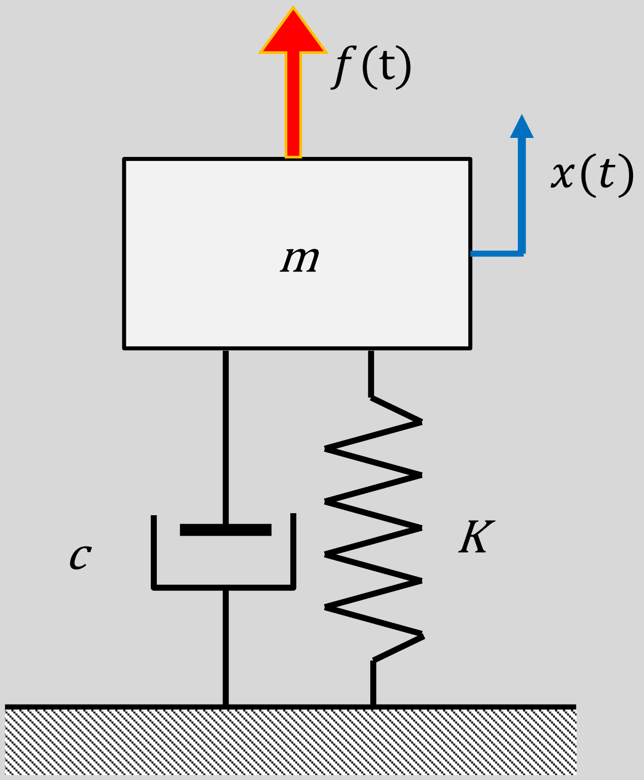
Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f(\mathrm{t})$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime forçado harmónico



Regime forçado harmónico:

$$f(t) = F\cos(\omega t)$$

Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F\cos(\omega t)$$

ω: frequência angular do carregamento harmónico (excitação harmónica)

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = Fcos(\omega t)$$

Sistema sub-amortecido

A solução da equação de movimento é do tipo:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Resposta particular (ou permanente)

Resposta homogénea (ou natural)

Resposta homogénea:
(determinada pela resposta natural do sistema)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1\cos(\omega_d t) + A_2\sin(\omega_d t))$$

Resposta particular:
(determinada pelo carregamento imposto)

$$x_p(t) = B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

Resposta particular:
(determinada pelo carregamento imposto)

$$x_p(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}_p(t) = -\omega B_1 \sin(\omega t) + \omega B_2 \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 B_1 \cos(\omega t) - \omega^2 B_2 \sin(\omega t)$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = F cos(\omega t)$$

Resposta do sistema em regime estacionário ($x_h = 0$)

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + Kx_p(t) = F cos(\omega t)$$

$$[(K - m\omega^2)B_1 + c\omega B_2] \cos(\omega t) +$$
$$[-c\omega B_1 + (K - m\omega^2)B_2] \sin(\omega t) = F cos(\omega t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

$$[(K - m\omega^2)B_1 + c\omega B_2]\cos(\omega t) + [-c\omega B_1 + (K - m\omega^2)B_2]\sin(\omega t) = F\cos(\omega t)$$

$$[(K - m\omega^2)B_1 + c\omega B_2]\cos(\omega t) = F\cos(\omega t)$$ e $$[-c\omega B_1 + (K - m\omega^2)B_2]\sin(\omega t) = 0$$

$$B_1 = F\frac{K - m\omega^2}{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$ e $$B_2 = F\frac{c\omega}{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

Assim, a resposta particular $x_p(t) = B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$ é definida por:

$$x_p(t) = X_S\frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ Razão de frequências

$X_s = \dfrac{F}{K}$ Deslocamento estático

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$ Ângulo de fase

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

$$x_p(t) = X_S \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ - Razão de frequências

$X_s = \dfrac{F}{K}$ - Deslocamento estático

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ - Ângulo de fase

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

: fator de amplificação dinâmica

Sistema sub-amortecido

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime harmónico

Sistema sub-amortecido

$$x_p(t) = X_S \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ - Razão de frequências

$X_s = \dfrac{F}{K}$ - Deslocamento estático

$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$ - Ângulo de fase

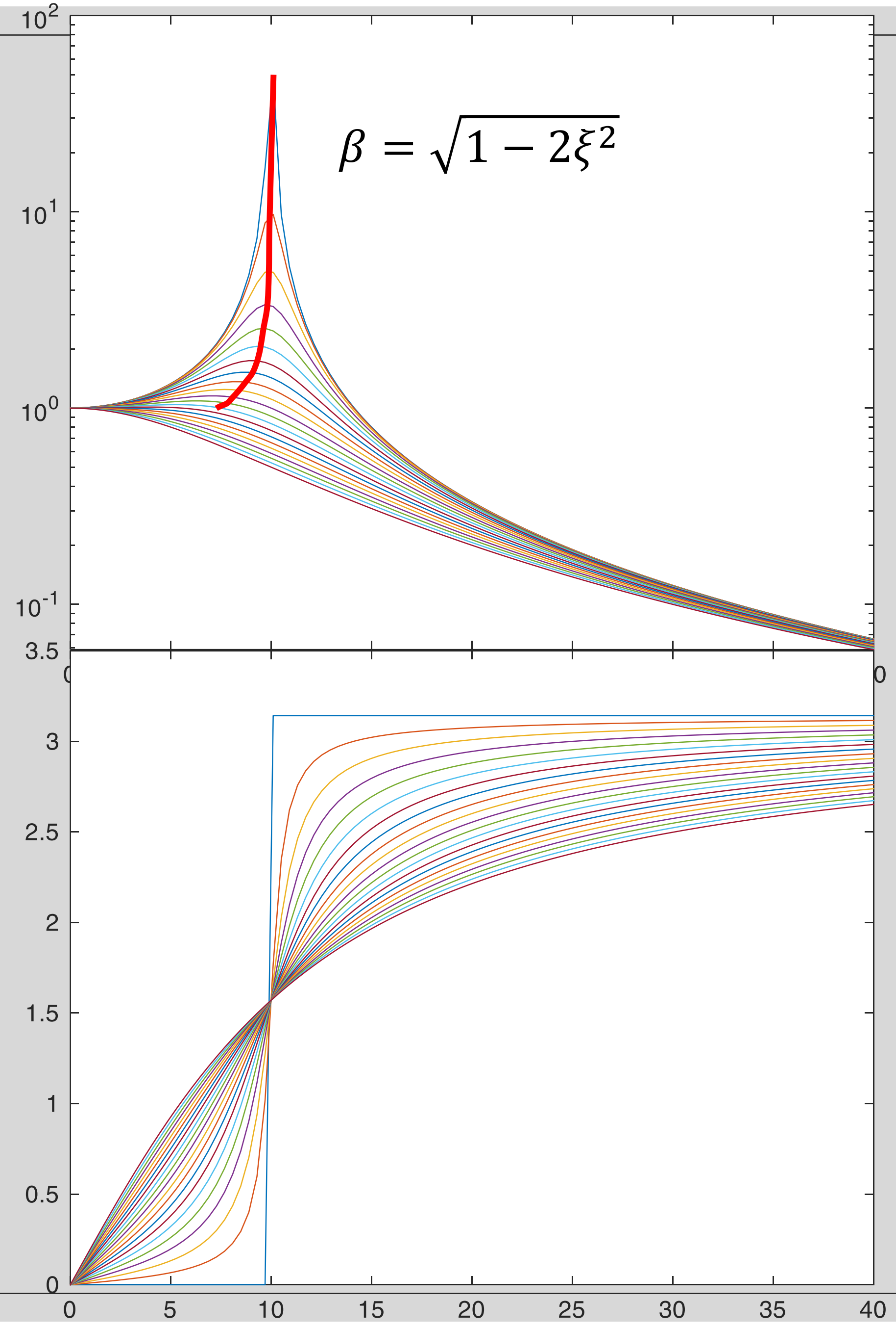
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

: fator de amplificação dinâmica

$$\mu_{MAX} \Rightarrow \min[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2] \Rightarrow \frac{\partial[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}{\partial\beta} = 0 \Rightarrow \beta = \sqrt{1-2\xi^2}$$

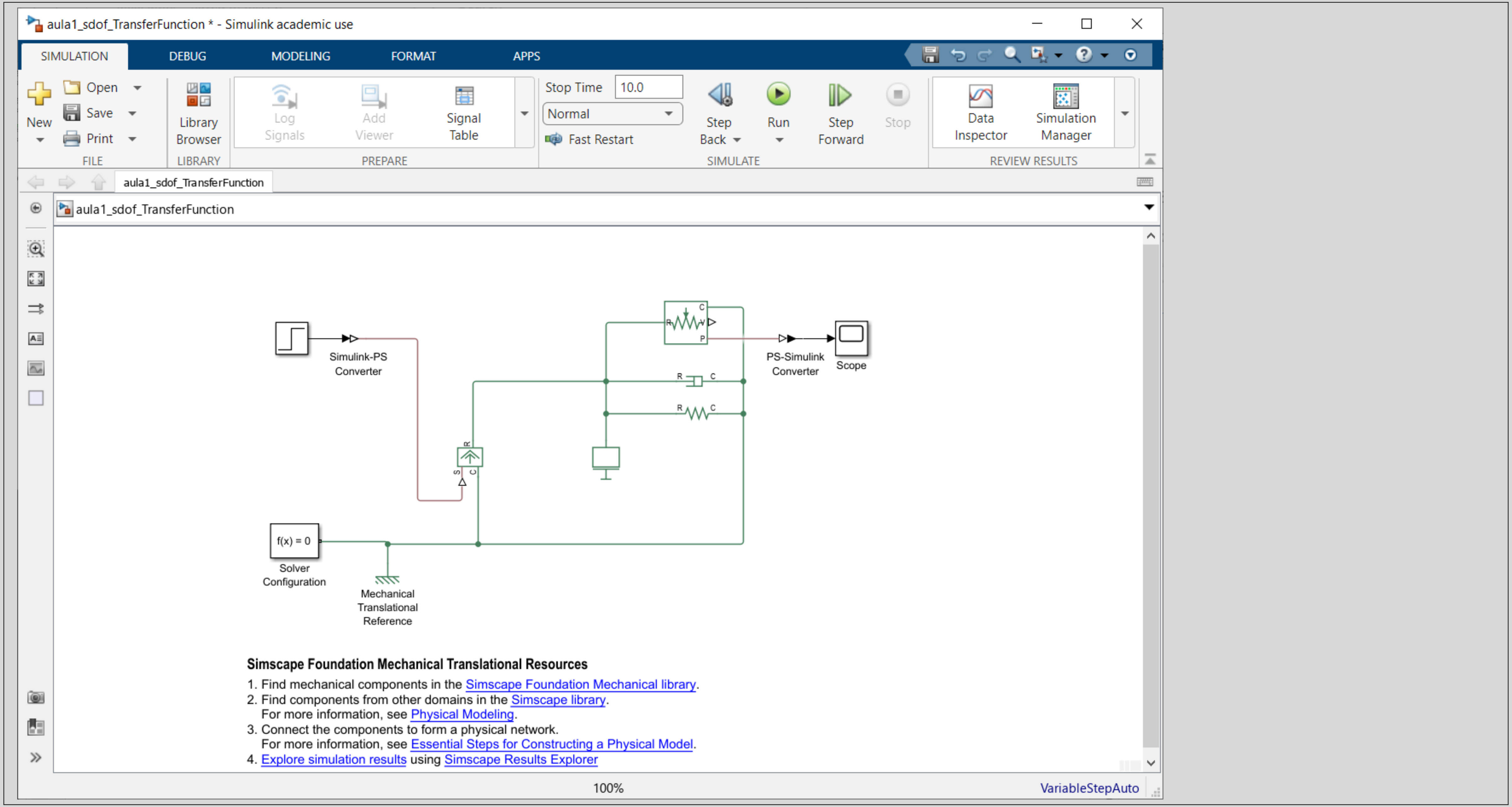
$$\mu = 1 \Rightarrow (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 = 1 \Rightarrow 1 + \beta^4 - 2\beta^2 + 4\xi^2\beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\mu = 0 \Leftarrow \beta = \infty$$




```
function [x,t] = sdof_harm_1(m,k,c,x0,v0)

%% fator de amplificacao dinamica

wn=sqrt(k/m);
cc=2*sqrt(k*m);
qsi=c/cc;
fn=wn/(2*pi);
wd=wn*sqrt(1-qsi^2);
fd=wd/(2*pi);
T=1/fd;

w=linspace(0,10000)*wn/2500;
b=w/wn;
miu=1./sqrt((1-b.^2).^2+(2*qsi.*b).^2);
phi=atan2(2*qsi.*b,(1-b.^2));

figure(1);semilogy(w,miu);hold on

figure(2);plot(w,phi);hold on
```

```
>> for c=0:20
sdof_harm_1(1,100,c,0,0)
end
```



aula1_sdof_TransferFunction * - Simulink academic use
SIMULATION
DEBUG
MODELING
FORMAT
APPS
New
Open
Save
Print
FILE
Library Browser
LIBRARY
Log Signals
Add Viewer
Signal Table
PREPARE
Stop Time
10.0
Normal
Fast Restart
Step Back
Run
Step Forward
Stop
SIMULATE
Data Inspector
Simulation Manager
REVIEW RESULTS
aula1_sdof_TransferFunction
Simulink-PS Converter
PS-Simulink Converter
Scope
f(x) = 0
Solver Configuration
Mechanical Translational Reference
Simscape Foundation Mechanical Translational Resources
1. Find mechanical components in the Simscape Foundation Mechanical library.
2. Find components from other domains in the Simscape library.
For more information, see Physical Modeling.
3. Connect the components to form a physical network.
For more information, see Essential Steps for Constructing a Physical Model.
4. Explore simulation results using Simscape Results Explorer
100%
VariableStepAuto