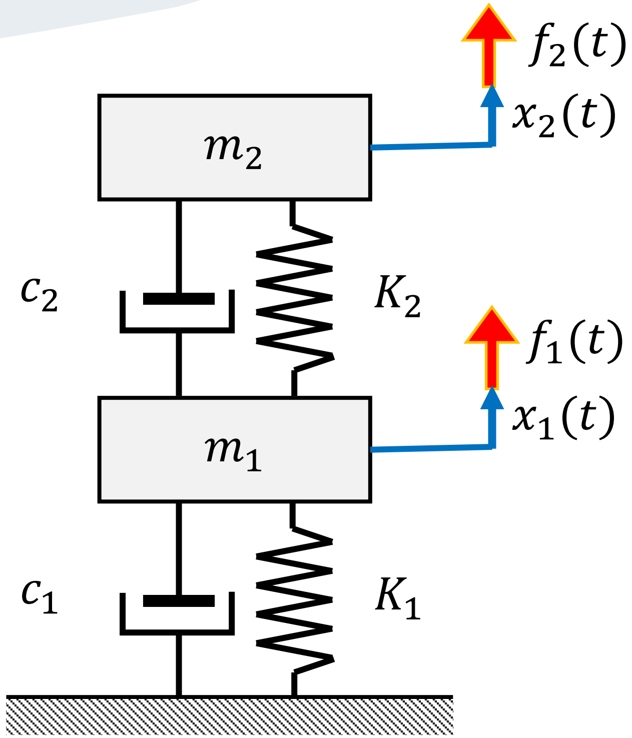
Spacecraft Dynamics & Control

Aula 2.2 – Sistemas discretos (NGDL)

2024/2025

Rui Moreira

Sistema com 2 graus de liberdade



Equação de movimento

$$m_1\ddot{x}_1(t) + c_1\dot{x}_1(t) + c_2\dot{x}_1(t) - c_2\dot{x}_2(t) + K_1x_1(t) + K_2x_1(t) - K_2x_2(t) = f_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) + c_2\dot{x}_2(t) - c_2\dot{x}_1(t) + K_2x_2(t) - K_2x_1(t) = f_2(t)$$

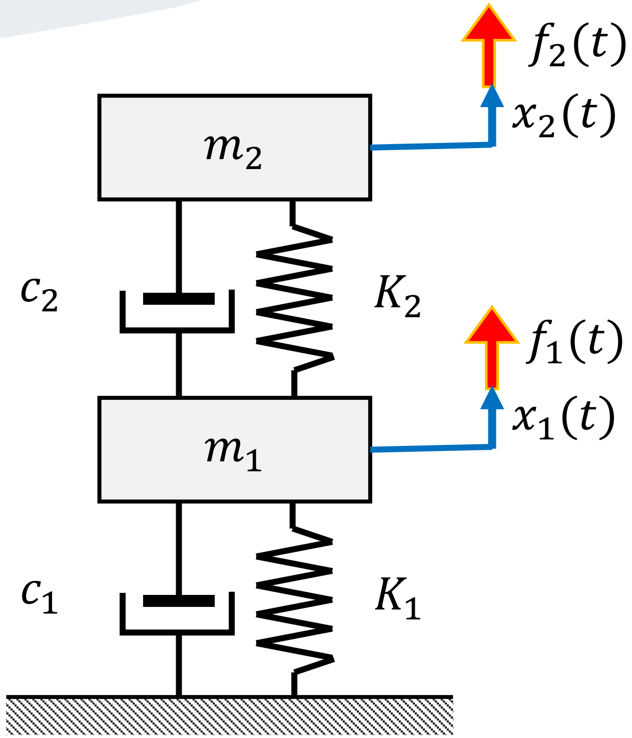
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\}$$

As matrizes $[M]$, $[C]$e $[K]$ designam-se por matriz de massa, amortecimento viscoso e rigidez, e são matrizes simétricas.

Os vetores $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$, $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ são, respetivamente, o vetor de aceleração, o vetor de velocidade, o vetor de deslocamento e o vetor de carregamento (ou excitação)

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre



$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\}=\{\cancel{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})}\}$$

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\}=\{\boldsymbol{0}\}$$

Assume-se uma resposta do tipo harmónico:

$$\{x(t)\} = \{u\}\,cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} cos(\omega t - \phi)$$

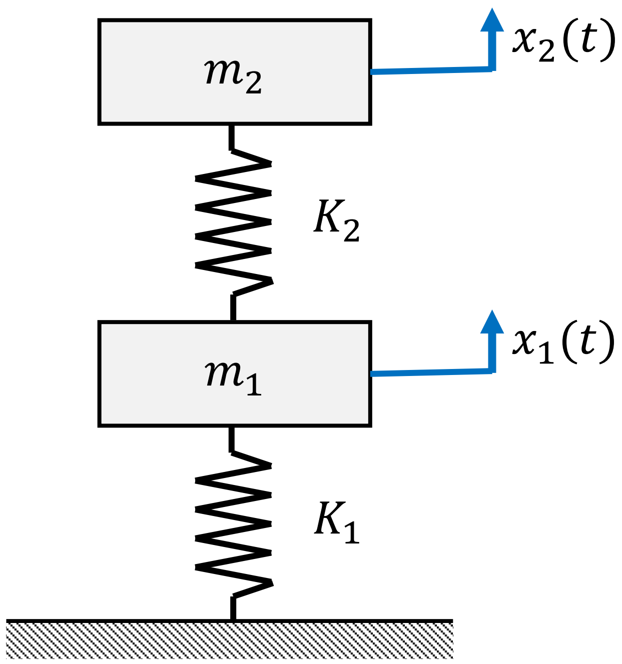
As duas massas efetuam um movimento harmónico síncrono com uma frequência ω

Substituindo na equação de movimento (sistema não amortecido):

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{u\}\cos(\omega t - \phi) = \{0\}$$

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{u\} = \{0\}$$

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre



$[-\omega^2[M] + [K]]\{u\} = \{0\}$ Sistema homogéneo

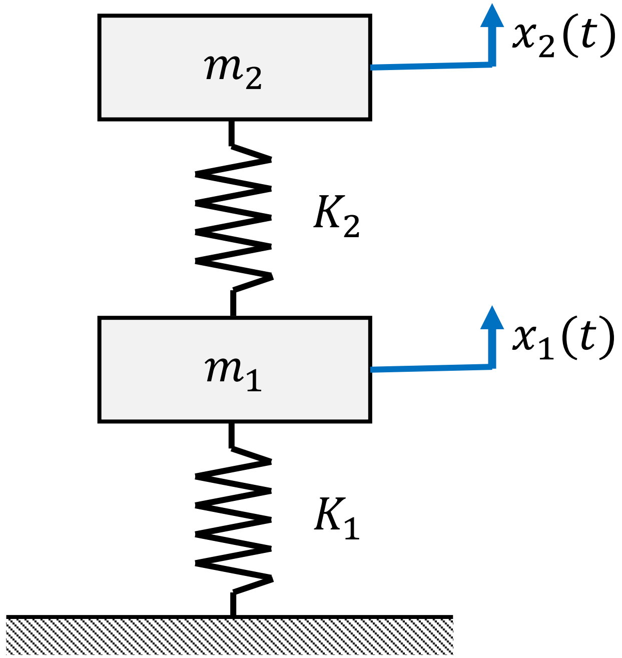
Problema caraterístico

A solução não trivial implica que o determinante da matriz do sistema homogéneo deve ser nulo.

$|-\omega^2[M] + [K]|=0$ Determinante caraterístico

Resolvendo o determinante característico obtém-se duas soluções: ω_1 e ω_2 que correspondem às frequências naturais do sistema (em [rad/s])

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre



$|-\omega^2[M] + [K]|$=0

Determinante caraterístico

ω_1

ω_2

Sistema homogéneo

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{u\} = \{0\}$$

$$[-\omega_1^2[M] + [K]]\{u_1\} = \{0\}$$

$$[-\omega_2^2[M] + [K]]\{u_2\} = \{0\}$$

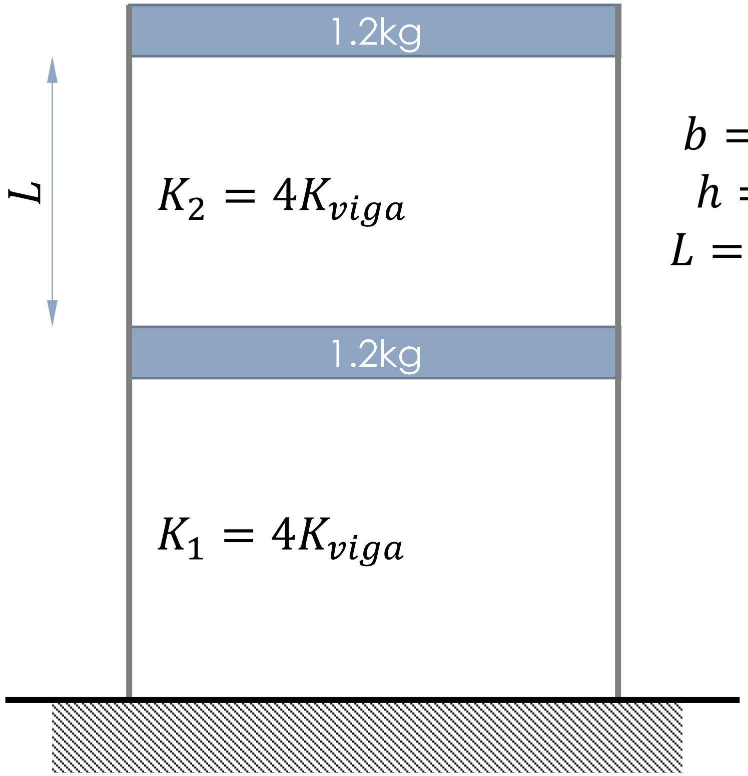
$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\{u_2\} = \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix}$$

Forma modal de vibração associada a ω_1

Forma modal de vibração associada a ω_2

Sistema com 2 graus de liberdade



$$b = 10mm$$
$$h = 2mm$$
$$L = 150mm$$

$$K_{viga} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$E = 70E9\ \ Pa$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

```
%%%% exercício Pórtico 2DOF %%%%
%%
%          ___________
%         |___m2_____|      m1=m2=1.2kg
%         |          |      K1=K2=4xKviga
%         | K2       |      Kviga=12EI/L^3
%         |__________|      E=70GPa
%         |___m1_____|      I=b*h^3/12
%         |          |      b=10mm
%         | K1       |      h=2mm
%      ___|__________|___
%      ///////////////
%%
m1=1.2; m2=m1;
b=10e-3;h=2e-3;L=0.150;
E=70e9;
I=b*h^3/12
Kviga=12*E*I/L^3
K1=4*Kviga
K2=K1;

M=[m1 0;0 m2];
K=[K1+K2 -K2; -K2 K2];

[a,b]=eig(K,M)
```

```
a =
   -0.4799   -0.7765
   -0.7765    0.4799
```

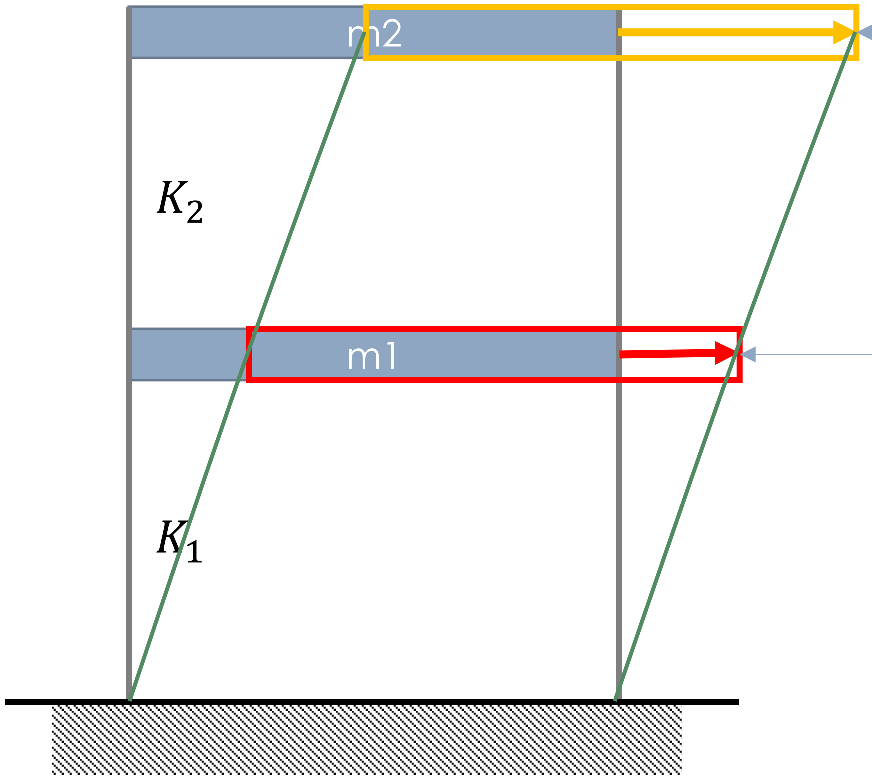
$[\Phi]$

```
b =
   1.0e+04 *
    0.2113         0
         0    1.4480
```

$\{\omega_n^2\}$

```
Phi=a
Wn=sqrt(diag(b))
Fn=Wn/2/pi
```

Sistema com 2 graus de liberdade



$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\}]$$

ω_1 ω_2

Phi =

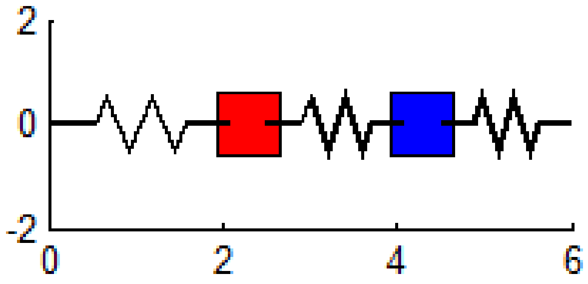
-0.4799	-0.7765
-0.7765	0.4799

Wn =

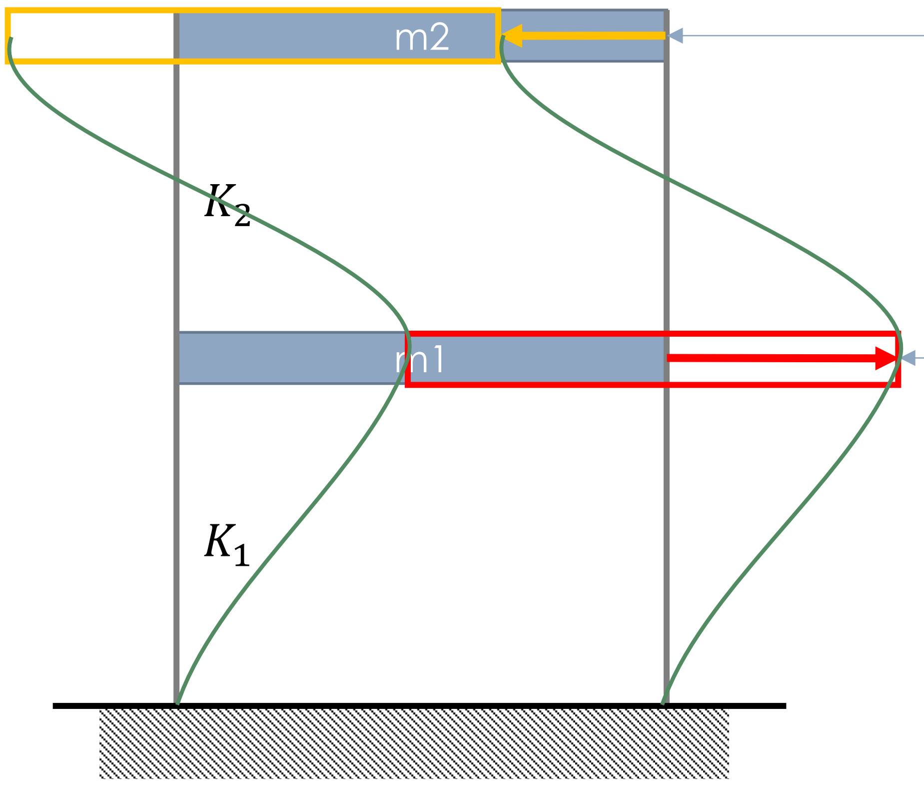
45.9631
120.3328 Rad/s

Fn =

7.3152
19.1516 Hz

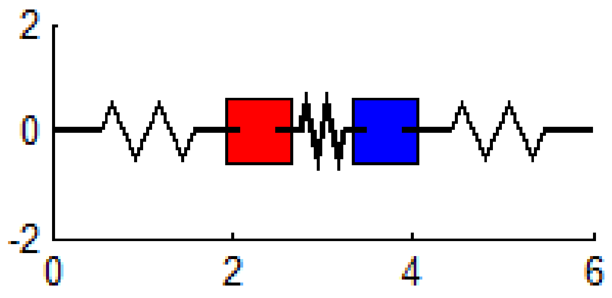


Sistema com 2 graus de liberdade



$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\}]$$

ω_1 $\boxed{\omega_2}$



Phi =

-0.4799	-0.7765
-0.7765	0.4799

Wn =

45.9631
120.3328 Rad/s

Fn =

7.3152
19.1516 Hz

Modo natural de vibração

Um modo natural é formado pela FREQUÊNCIA NATURAL ω_n
e respetivo VETOR MODAL (ou forma modal, ou forma natural de vibração) $\{\phi\}_n$

Um sistema discreto com n graus de liberdade possui n modos naturais

Um sistema contínuo possui ______ modos naturais

O primeiro modo natural, que possui a mais baixa frequência, é designado por:
MODO NATURAL FUNDAMENTAL

Sistema com 2 graus de liberdade – regime livre (Resposta natural)

Sistema 1DOF: $x(t) = C.\cos(\omega t - \phi)$

Sistema 2DOF:
$$\{x(t)\}_1 = \{u\}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$
$$\{x(t)\}_2 = \{u\}_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

A resposta do sistema é dada pela combinação:

$$\{x(t)\} = C_1.\{x(t)\}_1 + C_2.\{x(t)\}_2$$

(Nota: os modos naturais são linearmente independentes)

A resposta do sistema é obtida pela sobreposição dos dois modos de vibração multiplicados por uma constante (constante de participação)

SOBREPOSIÇÃO MODAL)

$$\{x(t)\} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1.\cos(\omega_1 t - \phi_1) \\ C_2.\cos(\omega_2 t - \phi_2) \end{Bmatrix}$$

onde C_1 , C_2, ϕ_1 e ϕ_2 são determinados pelas condições iniciais

$$\{x(t)\} = [U].g(t)$$

Normalização dos vetores modais

Os vetores modais são definidos a menos de uma constante (ou seja, apenas representam a amplitude relativa da resposta de cada grau de liberdade)

Assim, é possível normalizar esses vetores modais

Normalização de massa modal unitária

$$\{\phi\}_1^T[M]\{\phi\}_1 = 1$$

$$\{\phi\}_2^T[M]\{\phi\}_2 = 1$$

onde são os vetores modais normalizados

e são calculados segundo:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T[M]\{u\}_1}}.\{u\}_1 \qquad \{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T[M]\{u\}_2}}.\{u\}_2$$

Normalização de massa modal unitária

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \ \{\phi\}_2]$$

Matriz modal normalizada

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [\mathrm{I}] \qquad [\Phi]^T[K][\Phi] = [\Omega^2]$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_i^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

```
Phi'*M*Phi
Phi'*K*Phi
```

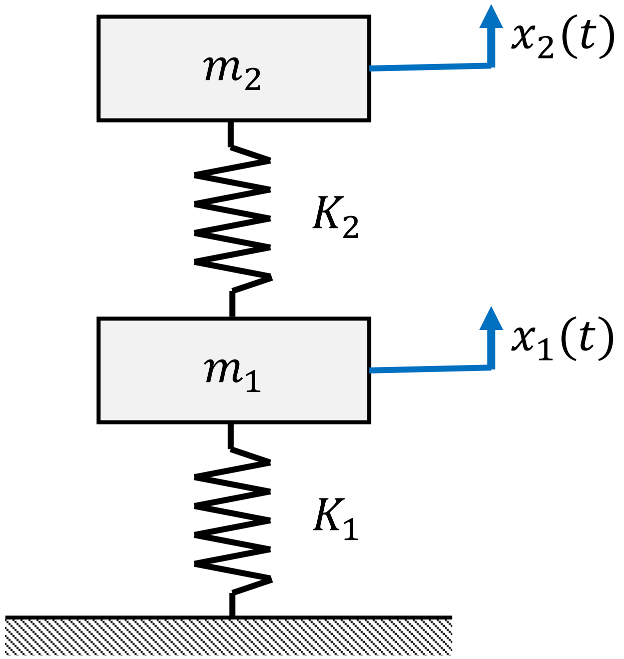
Exercícios

$m_1=m_2=1$
$K_1=K_2=1000$

$m_1=m_2=1$
$K_1=1000$
$K_2=100$

$m_1= 1$
$m_2= 2$
$K_1=K_2=1000$

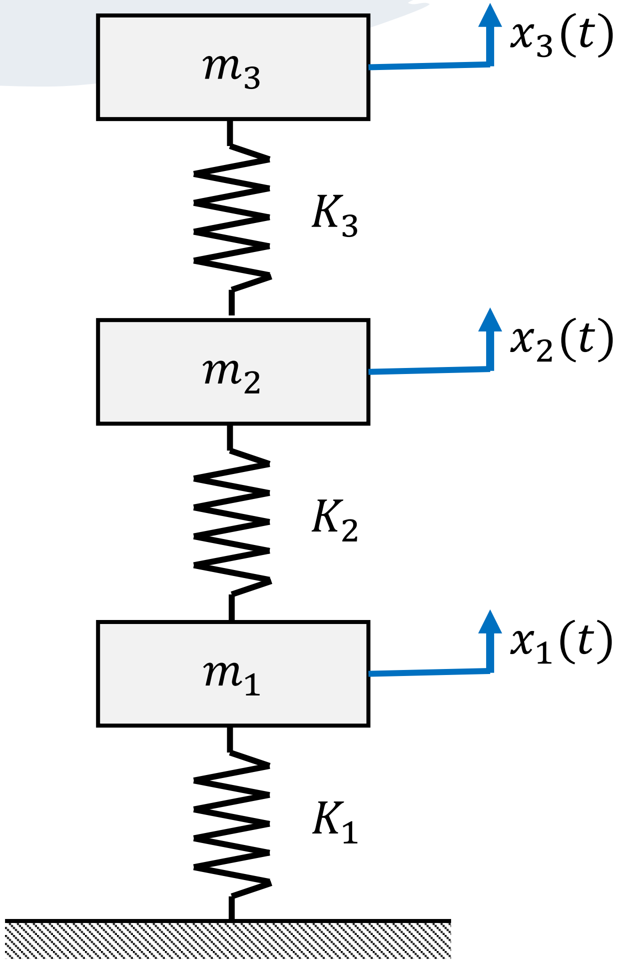
$m_1= 1$
$m_2= 1$
$K_1 = 0$
$K_2 = 1000$



$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Exercícios



$m_1 = m_2 = m_3 = 1$
$K_1 = K_2 = K_3 = 1000$

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$
$K_1 = K_3 = 1000$
$K_2 = 100000$

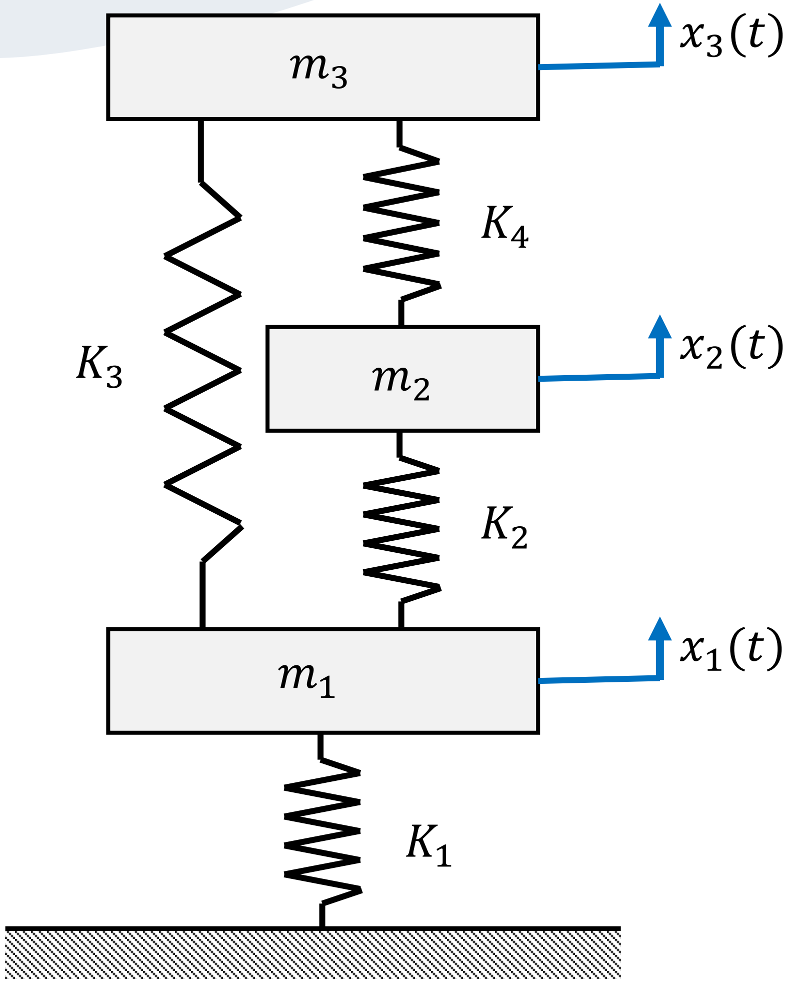
$m_1 = m_2 = m_3 = 1$
$K_1 = K_2 = 1000$
$K_3 = 100000$

$m_1 = m_3 = 1$
$m_2 = 1000$
$K_1 = K_2 = K_3 = 1000$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}$$

Exercícios



$m_1=m_2=m_3=1$
$K_1=K_2=K_3=K_4=1000$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 + K_3 & -K_2 & -K_3 \\ -K_2 & K_2 + K_4 & -K_4 \\ -K_3 & -K_4 & K_3 + K_4 \end{bmatrix}$$

Exercícios

$m_1 = m_2 = 1$
$K_{1X} = K_{2X} = K_{1Y} = K_{2Y} = 1000$

$m_1 = m_2 = 1$
$K_{1X} = K_{2X} = 1000$
$K_{1Y} = K_{2Y} = 10$

$m_1 = m_2 = 1$
$K_{1X} = K_{2X} = 10$
$K_{1Y} = K_{2Y} = 1000$