Introdução ao controlo ativo de vibrações

Controlo de vibrações

- O **controlo de vibrações** é uma técnica utilizada para **reduzir, minimizar ou até eliminar** os efeitos indesejados das vibrações em estruturas, máquinas ou equipamentos.

- O controlo das vibrações envolve o estudo das características das vibrações, como a frequência e amplitude.

- São desenvolvidas estratégias para reduzir ou controlar as vibrações com técnicas denominadas de **passivas, ativas e semiativas**

Controlo de vibrações

- **Técnicas passivas:**
  - São os métodos mais simples e amplamente utilizados.
  - Envolvem a adição de massa, rigidez ou elementos de amortecimento à estrutura ou à fonte de vibração, sem exigir qualquer energia externa ou realimentação.
  - Exemplos: isolamento de base, amortecedores de massa ajustados, amortecedores viscosos e rolamentos de borracha.
- **Técnicas ativas:**
  - São métodos mais avançados e complexos.
  - Envolvem a aplicação de uma forças ou deslocamentos controlados à estrutura ou à fonte de vibração, usando sensores, atuadores e controladores, para reduzir, minimizar ou até neutralizar a vibração.
  - Exemplos: amortecedores de massa ativos, amortecedores de massa sintonizados ativos e sistemas de isolamento ativos de vibração.
- **Técnicas semiativas:**
  - São métodos híbridos que combinam as vantagens das técnicas passivas e ativas.
  - Envolvem a modificação das propriedades dos elementos passivos, como rigidez ou amortecimento, em resposta à vibração, usando atuadores e controladores de baixa potência.
  - Exemplos: amortecedores de massa sintonizados semiativos, amortecedores de rigidez variável semiativos e amortecedores magnetorreológicos.

Controlo ativo de vibrações (AVC)

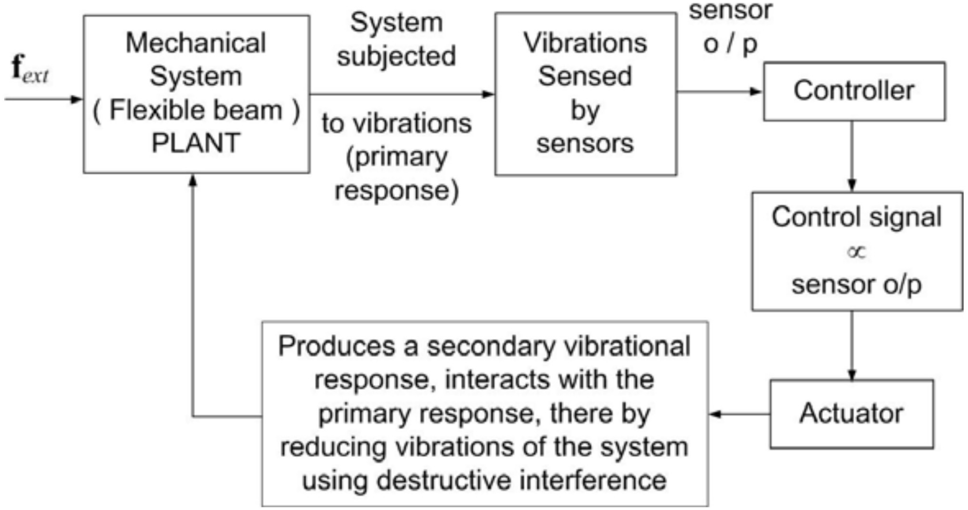
- O objetivo do **controlo ativo das vibrações** é reduzir a vibração de um sistema mecânico através da modificação da resposta estrutural do sistema, de forma automática

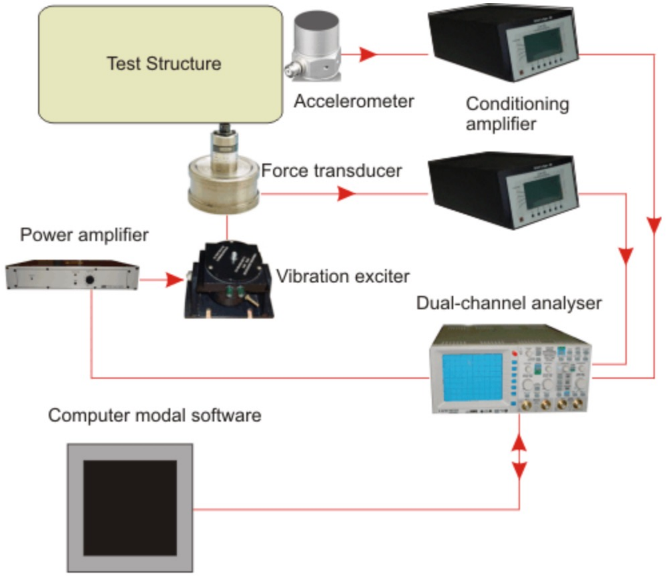
- Um sistema de controlo ativo das vibrações pode assumir muitas formas, mas os componentes importantes de qualquer sistema desse tipo são:
  - um sensor ou sensores (para detetar a vibração),
  - um controlador eletrónico (para manipular adequadamente os sinais dos sensores)
  - e atuador(es) (que influencia(m) a resposta mecânica do sistema)

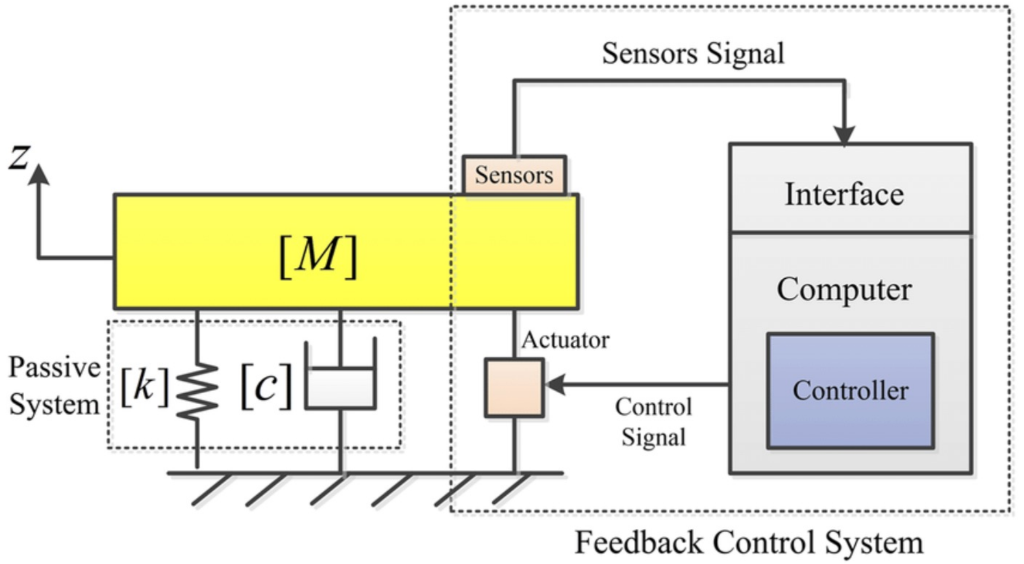
- Os atuadores totalmente activos são capazes de fornecer energia ao sistema. São exemplos os agitadores electromagnéticos, as cerâmicas e películas piezoeléctricas, os dispositivos magnetostrictivos e eletro-hidráulicos

Controlo ativo de vibrações

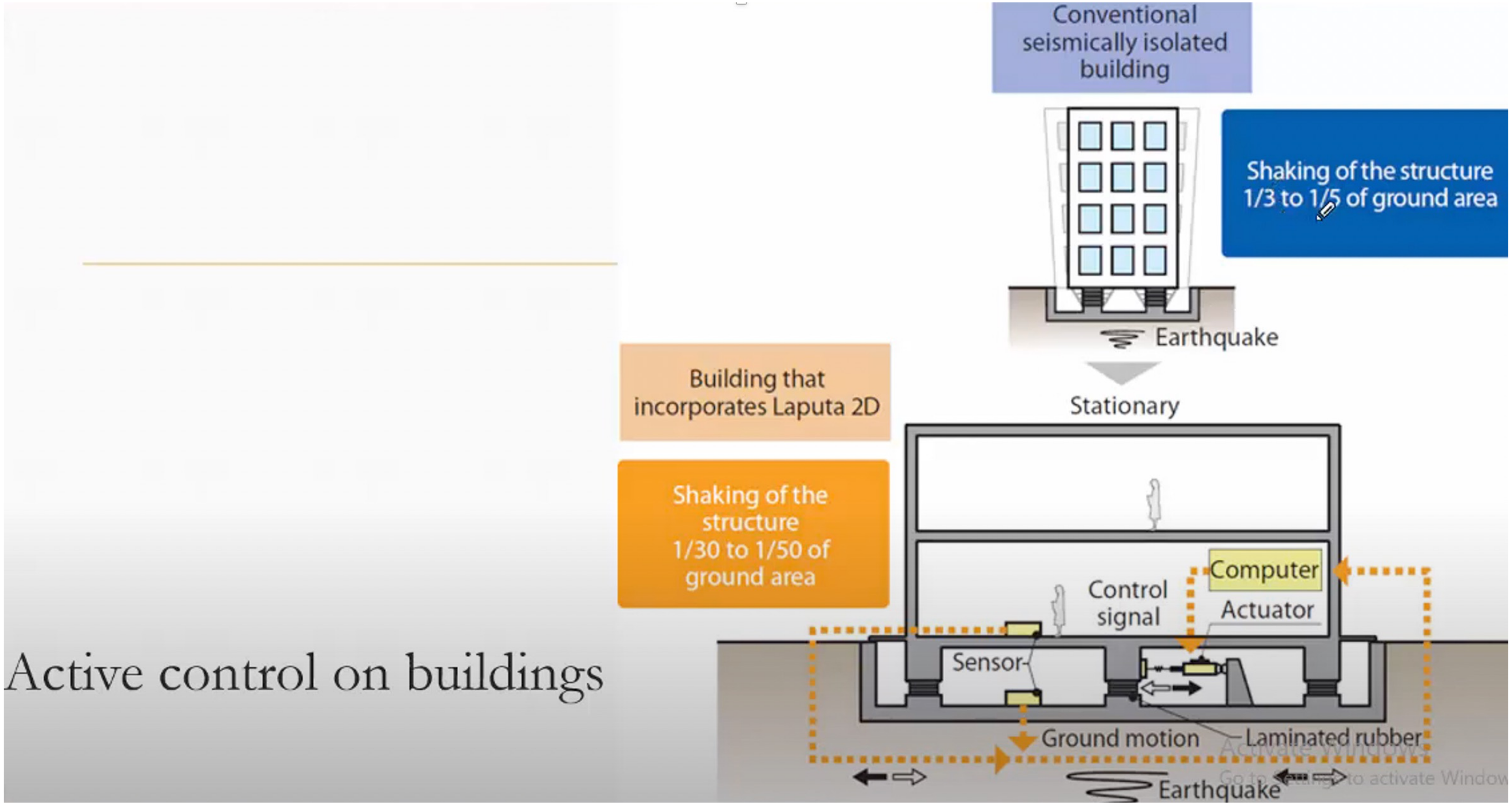
- Qualquer sistema AVC é composto por uma instalacão. um atuador, um sensor e um controlador







Controlo Ativo de vibrações



Controlo ativo de vibrações

- Exemplos:

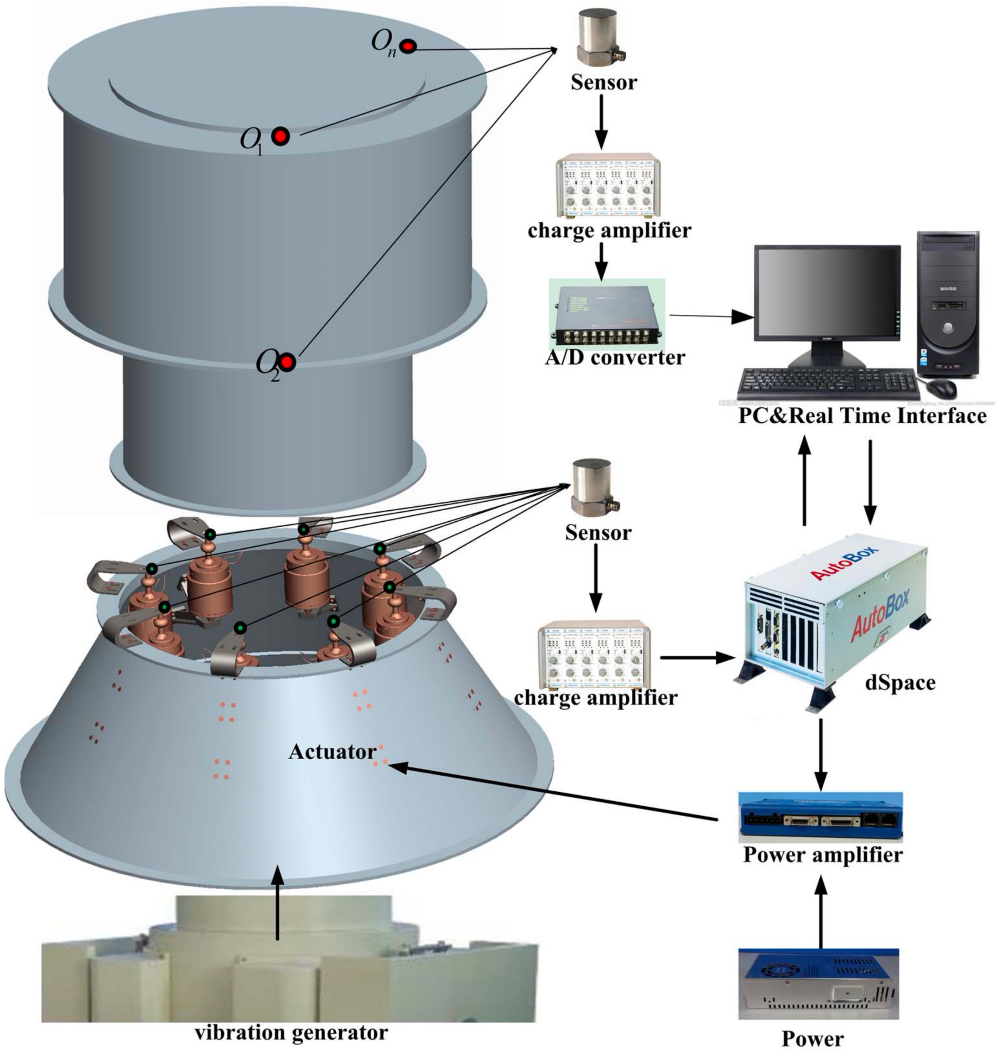


Fig. 8. Active vibration control schematic of the WSVI system. (Image by Jie Tang.)

Whole-Spacecraft Vibration Isolator

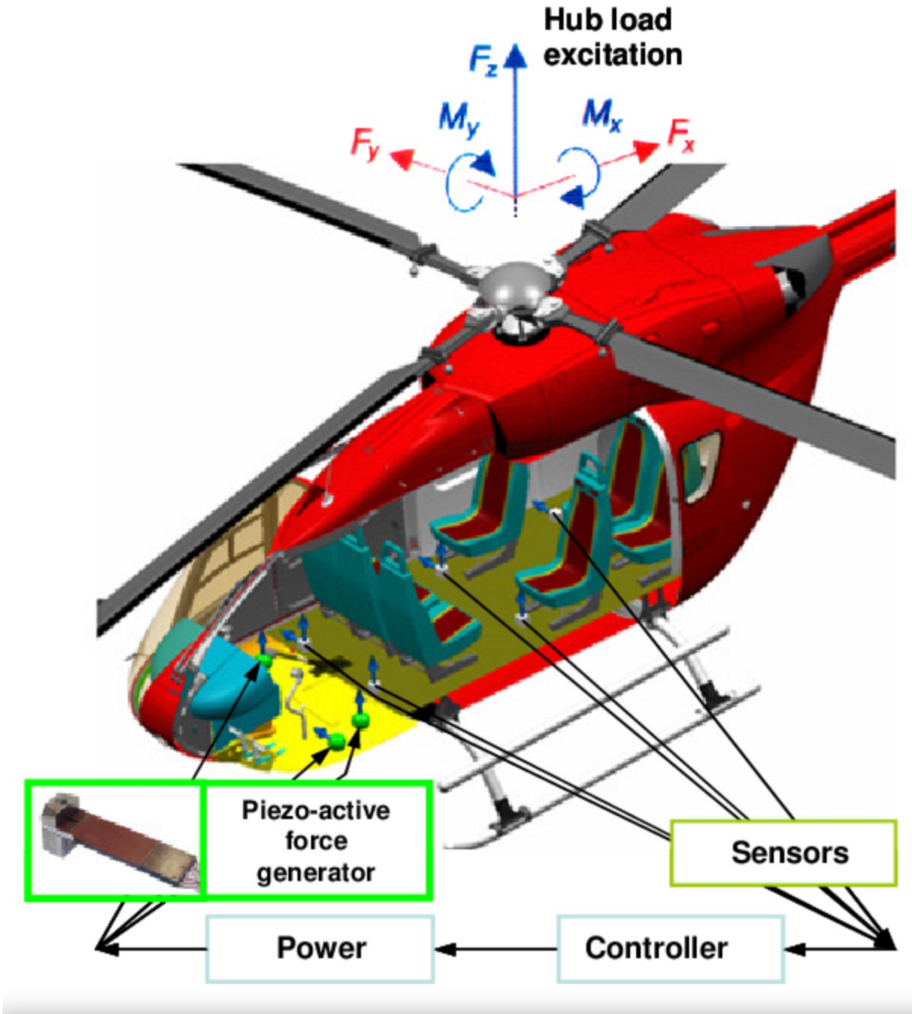


Fig. 7: Piezo-AVCS concept

Published in 2008

PIEZO ACTIVE VIBRATION AND NOISE CONTROL IN HELICOPTERS

Controlo Ativo de vibrações

- Necessidade de AVC para ISS
  - A frequência modal fundamental do ISS é de cerca de 8 Hz e o amortecimento estrutural correspondente é de apenas 0,358%. Um caso clássico de sistema de corpo flexível com amortecimento muito baixo!
  - Este fraco amortecimento, na ausência de ar, pode provocar uma vibração contínua da estrutura, que pode resultar numa falha por fadiga.
  - A utilização de amortecedores passivos acarreta uma grande penalização em termos de peso - por conseguinte, o **controlo ativo das vibrações** é a única solução viável nestes casos.

International Space Station (ISS)

Controlo Ativo de vibrações

- Problemas com o AVC
  - O sistema de controlo ativo adiciona energia ao sistema vibratório **=>** pode também criar instabilidade devido a sensores errados e desfasamento de fase na atuação.
  - Os sistemas ativos são em geral dispendiosos, uma vez que envolvem a instalação de microprocessadores, sistemas de aquisição de dados, sensores, atuadores, condicionadores de sinal e amplificadores de potência.
  - Os sistemas ativos funcionam eficientemente dentro de uma banda de frequência finita. Se o sistema vibratório for excitado para além dessa gama, pode amplificar a perturbação.

Controlo Ativo de vibrações

- Efeito de transbordamento (*Spillover*): O maior problema do AVC
  - Muitos dos sistemas vibratórios são essencialmente flexíveis, por natureza, e devem ser modelados como sistemas contínuos.
  - A atuação e a deteção, no entanto, são tradicionalmente pontuais na natureza - a deteção utilizando acelerómetros ou a atuação utilizando excitadores pontuais.
  - Este número finito de atuadores e sensores não pode controlar todos os modos de vibração de um sistema contínuo de dimensão infinita.
  - Os modos não modelados podem sempre ser excitados pelo sistema de atuação finito.
  - Embora a vibração possa ser controlada na largura de banda pretendida a energia de atuação pode passar para os modos não modelados, provocando ressonância.
  - Este problema pode ser resolvido através da **utilização de sensores e atuadores distribuídos.**

Controlo Ativo de vibrações

- O AVC é implementado, de uma forma geral, utilizando diferentes sistemas de controlo:
  - Controlador de vibração de entrada única e saída única (SISO),
  - Controlador de vibrações de entrada múltipla e saída múltipla (MIMO) baseado no espaço de estados e
  - Controlo de vibrações distribuído.

Controlo Ativo de vibrações

SISO Control

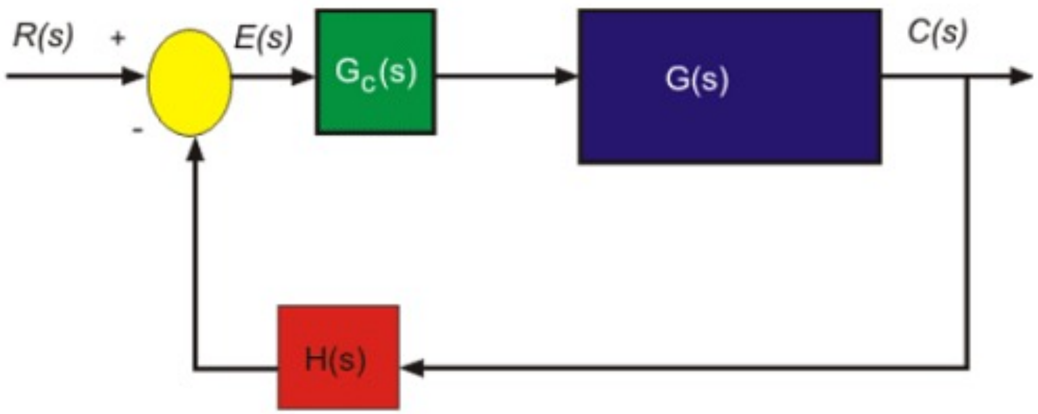
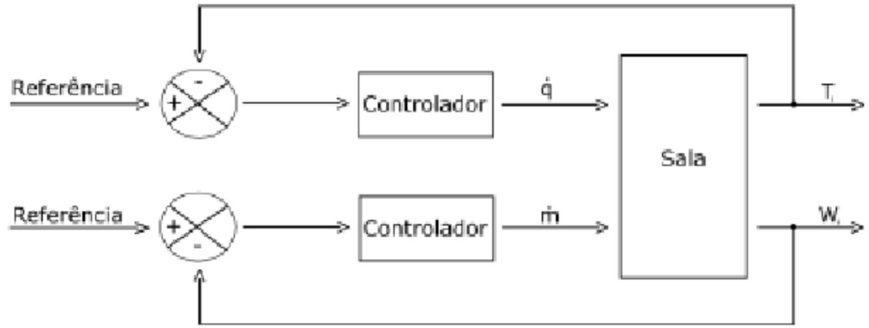


Figure 22.6: SISO control

- Um sistema de controlo clássico típico em que ***G(s)*** representa a função de transferência de um sistema vibratório de um único grau de liberdade, ***H(s)*** a função de transferência de um sensor e ***G_c(s)*** a função de transferência do controlador + atuador.
- Este tipo de sistema funciona bem quando o sistema vibratório pode ser representado como vários sistemas vibratórios de um grau de liberdade (SDOF) desacoplados

Controlo Ativo de vibrações

- Controlo MIMO
  - Para um sistema acoplado multi DOF, a equação de movimento é representada como uma equação matricial de movimento no domínio do tempo.
  - Toda a análise é efetuada diretamente no domínio do tempo para reduzir o esforço computacional em tempo real. Isto também é conhecido como "**Análise do espaço de estados**"
  - O controlador é também representado sob a forma matricial e **o desempenho do sistema é previsto através da análise das matrizes da planta em malha aberta e fechada**.



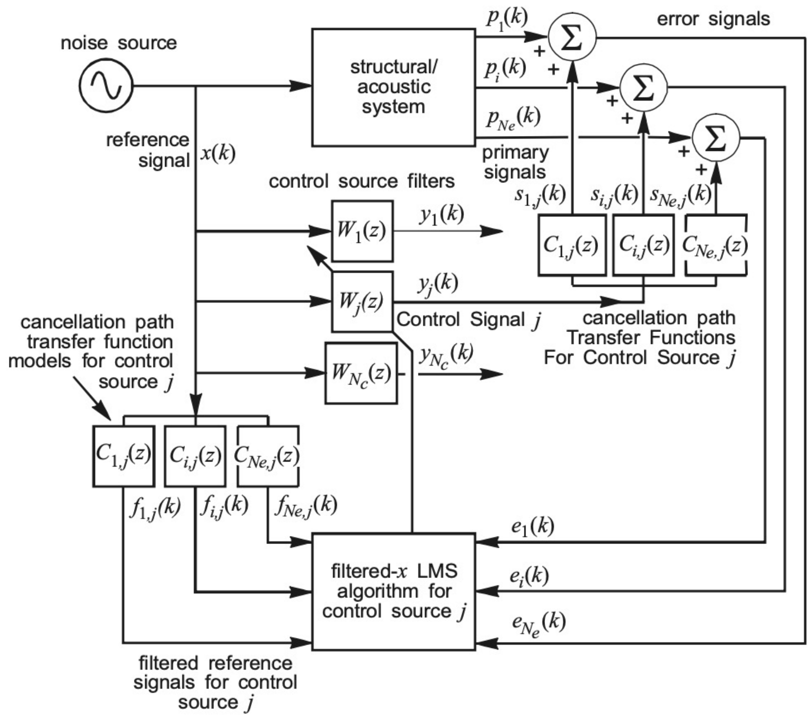


Figure 6.44 Block diagram of an adaptive MIMO feedforward active control system.

Controlo Ativo de vibrações

- Controlo distribuído (não abordado)
  - O modelo MIMO pode desencadear problemas de *spillover*, como já foi referido. Isto acontece sobretudo no caso do controlo de um sistema de corpo flexível.
  - Uma forma de evitar este problema é representar a equação de movimento que rege o sistema sob a **forma de equação diferencial parcial** (sem decomposição espacial e temporal). Assim, evita-se o erro devido ao truncamento do modelo.
  - Mais uma vez, para a estabilidade deste sistema, é necessária uma **força de controlo contínua distribuída** por todo o sistema. A utilização de um atuador distribuído baseado em materiais inteligentes pode resolver este problema.
  - A dificuldade surge quando o controlador é implementado no sistema real. **Um controlador "continuamente distribuído" é muito difícil de obter em tempo real**. Na prática, é utilizado um controlador discretamente distribuído aproximado. **Esses sistemas têm, de facto, uma aplicabilidade limitada**

Controlo Ativo de vibrações

- A implementação de sistemas de controlo activo é particularmente interessante em:
  - estruturas flexíveis que apresentem uma dinâmica onde vários modos de vibração podem contribuir significativamente para a resposta estrutural
  - ou
  - quando os parâmetros modais do sistema variam substancialmente ao longo do tempo. Nestes casos, os dispositivos activos têm a capacidade de se sintonizar para a dinâmica do sistema, suplantando a falta de adaptabilidade que caracteriza os sistemas passivos.

- Modelação e controlo de sistemas dinâmicos: revisão de conceitos

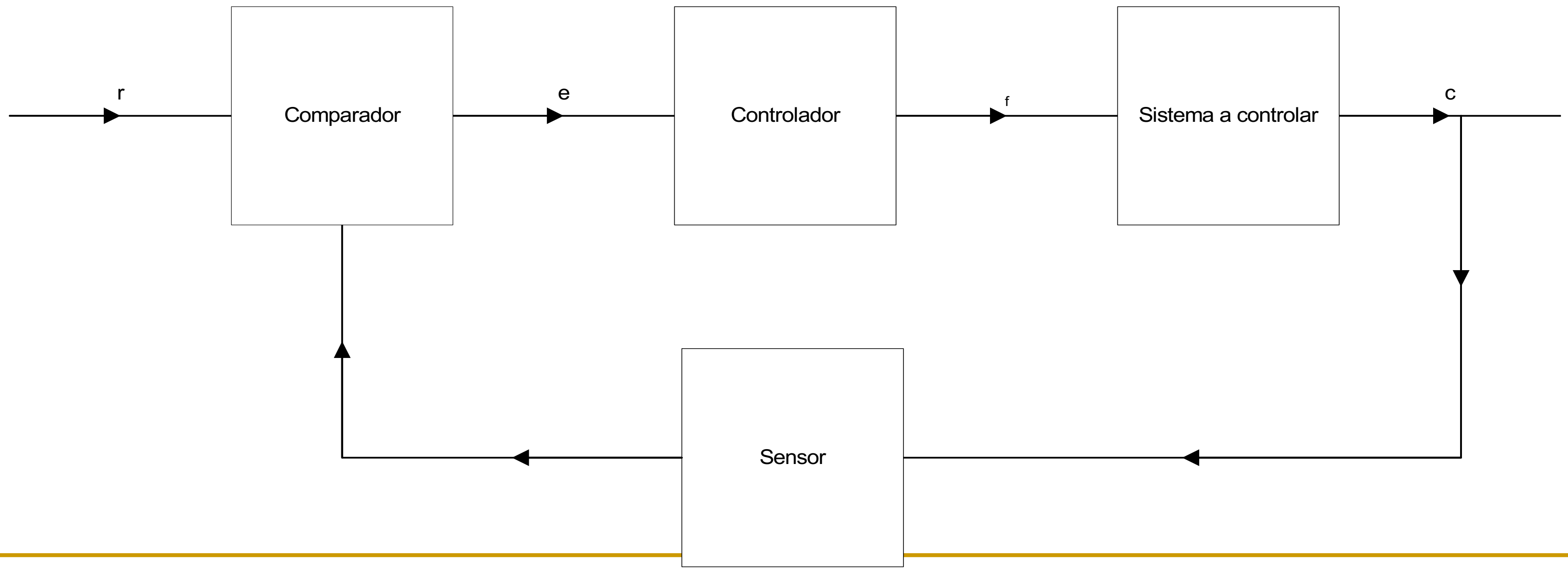
O problema do controlo (revisão)

- Em geral, um sistema ou processo físico deve ser controlado através de uma operação em malha fechada tendo em conta um conjunto de critérios:

1. Rejeição a distúrbios
2. Erros em regime estacionário.
3. Características da resposta transitória.
4. Sensibilidade às mudanças de parâmetros da planta.

O problema do controlo

- A resolução do problema envolve:
  1. Escolha de sensores para medição da saída.
  2. Escolha dos atuadores para atuar sobre a planta.
  3. Desenvolvimento de equações (modelos), dos atuadores e dos sensores.
  4. Projeto do controlador baseado nos modelos desenvolvidos e critérios de controlo.
  5. Avaliar o projeto analiticamente, por simulação e, finalmente, pelo teste do sistema físico.
  6. Se os testes não forem satisfatórios, repetir estas etapas.



O problema do controlo

- Na prática, por vezes, os sistemas de controlo são implementados recorrendo a controladores padrão, sendo os seus parâmetros determinados experimentalmente seguindo passo a passo um procedimento específico com o sistema físico.
- Nestes casos não se desenvolve nenhum modelo matemático.
- Este procedimento funciona “bem”, mas só em alguns sistemas.
- **Noutros... o modelo é imprescindível!**

O problema do controlo: O MODELO

- Um modelo é uma representação da realidade

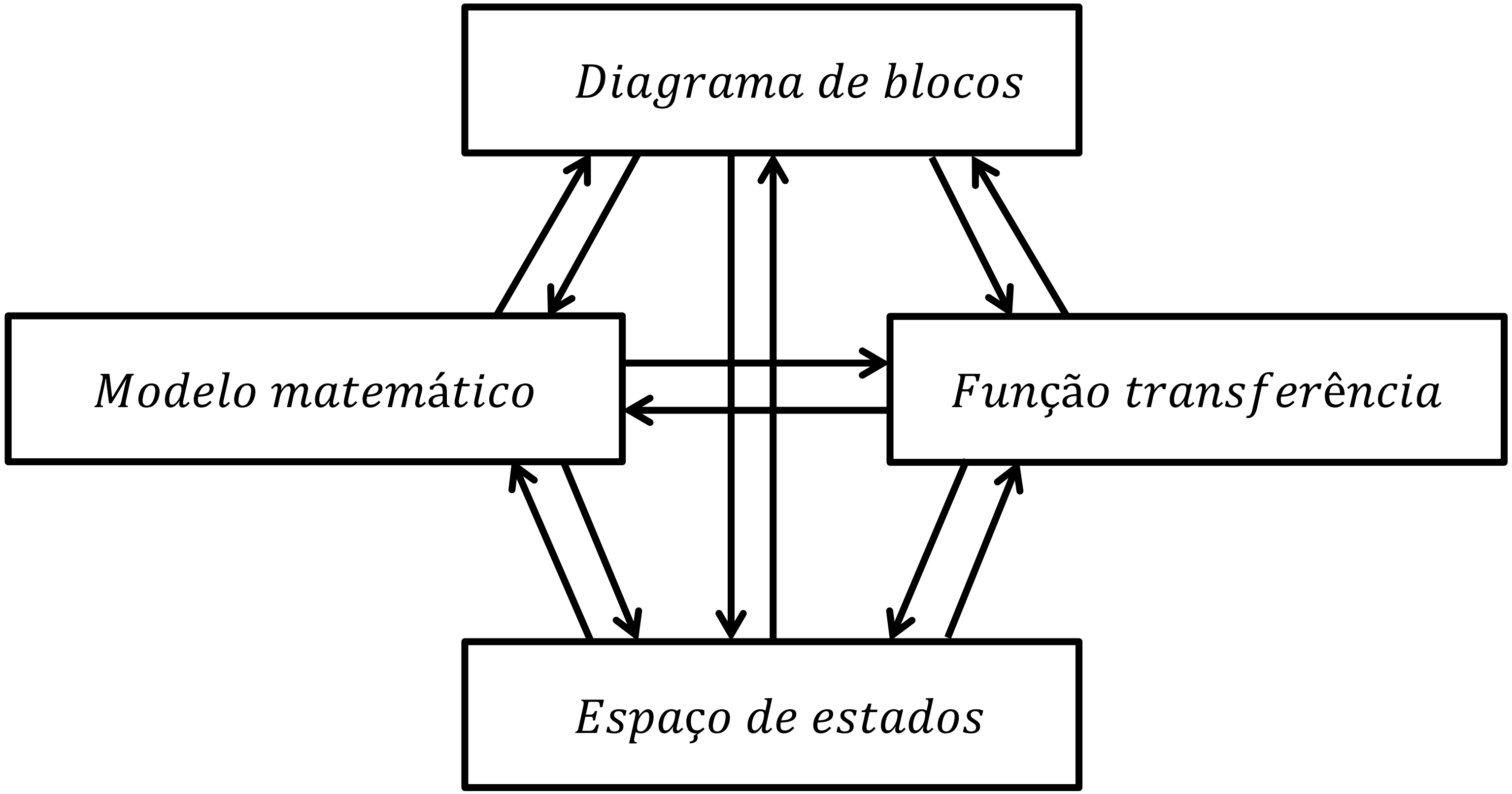
- Sendo uma representação idealizada de uma situação real, um modelo matemático pode ser definido como uma formulação ou equação que expressa as características essenciais de um sistema físico ou processo, em termos matemáticos.

Modelos de sistemas físicos

- Definição:
  - “O modelo matemático de um sistema é definido como um conjunto de equações usado para representar o sistema físico” (dicionário IEEE)
- Nenhum modelo matemático de um sistema físico é totalmente exato... Podemos melhorar o desempenho de um modelo aumentando a complexidade das suas equações, porém, haverá sempre limitações que podem ou não ser importantes numa certa abordagem...
- Não obstante, a utilidade dos modelos é incontornável no ato de prever, calcular e otimizar, e são a forma de “instruir” os controladores a levarem a cabo a tarefa ou o processo.

Representações

- **Representação 1:** Modelo matemático
- **Representação 2:** Função de transferência
- **Representação 3:** Diagrama de blocos
- **Representação 4:** Espaço de estados



Representação de sistemas lineares

Modelos Matemáticos

Modelo matemático: Sistemas de equações diferenciais lineares de ordem n

Sistemas lineares e invariantes no tempo (SLIT): SISO, MISO, SIMO, MIMO

- SISO não homogéneos: quando excitados por entradas externas

$$a_m \frac{d^m c(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} c(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 c(t) = r(t)$$

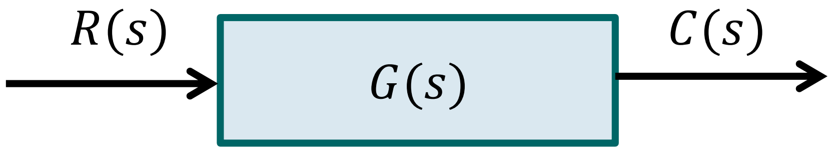
- SISO homogéneos: quando não têm excitação externa (apenas excitados pelas condições iniciais)

$$a_m \frac{d^m c(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} c(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 c(t) = 0$$

r(t) – entrada; *c(t)* – saída; a_i – coeficientes constantes

Representação de sistemas lineares

Função de transferência



Função de transferência: $G(s)$

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[c(t)]}{\mathcal{L}[r(t)]} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

Polos: $-p_1, -p_2, \ \ldots, \ -p_n$
Zeros: $-z_1, -z_2, \ \ldots, \ -z_m$

Caracterização da $\boldsymbol{G(s)}$: pelos seus pólos e zeros

$\boldsymbol{G(s)}$ **é uma representação:** expressa a equação diferencial que relaciona $r(t)$ com $c(t)$
Identificação de $G(s)$: excitar o sistema de $r(t)$ e analisar $c(t)$

$G(s)$ é uma representação entrada-saída do SLIT: descreve completamente o SLIT

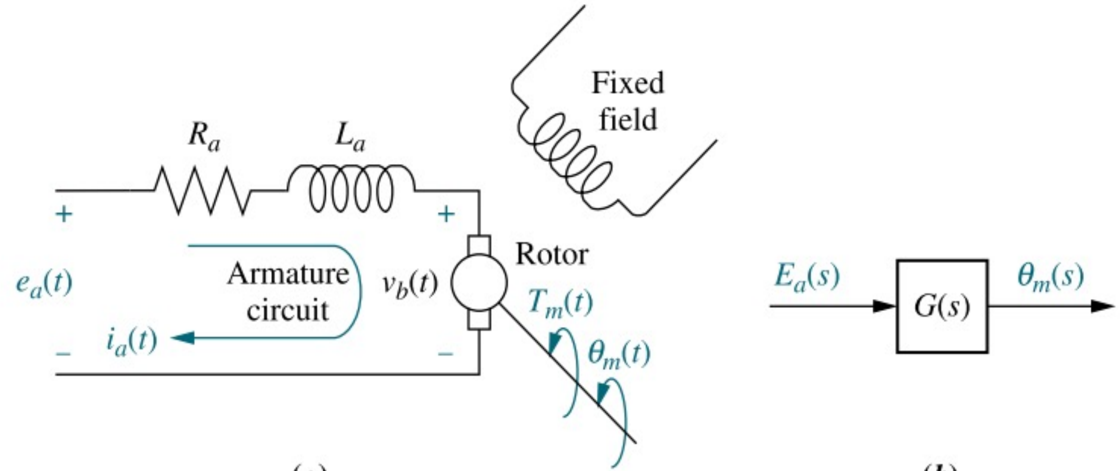
$G(s)$ não depende de $r(t)$ nem de $c(t)$

Definição de $\boldsymbol{G(s)}$: válida para condições iniciais a zero

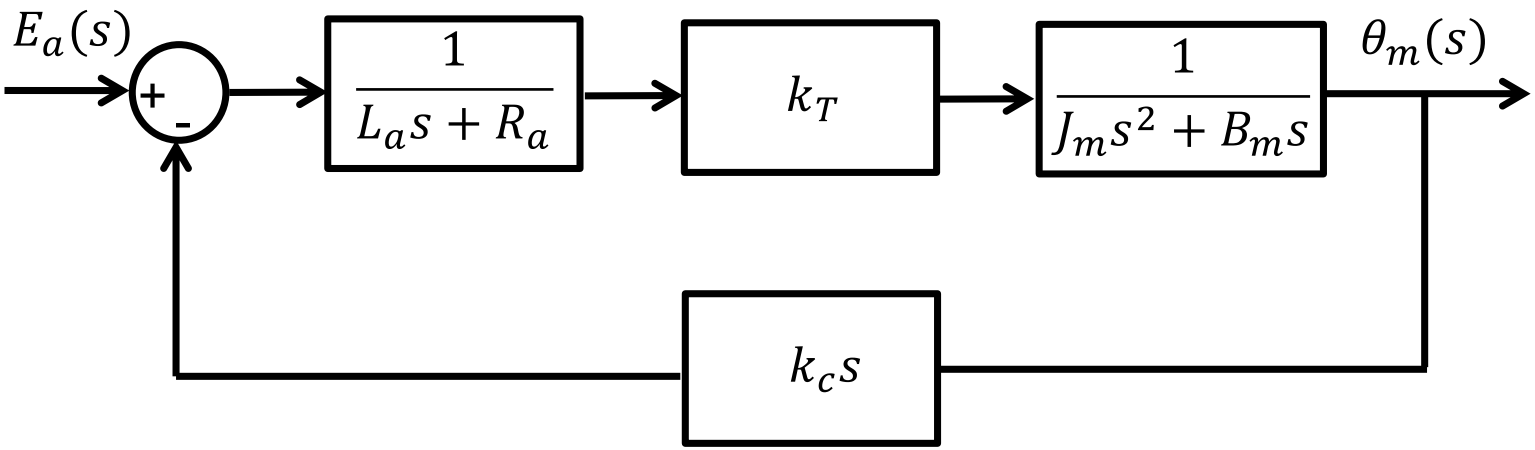
Representação de sistemas lineares

Diagrama de blocos

Diagrama de blocos: conjunto de blocos, interligados entre si, que representam sistemas físicos



(a) (b)

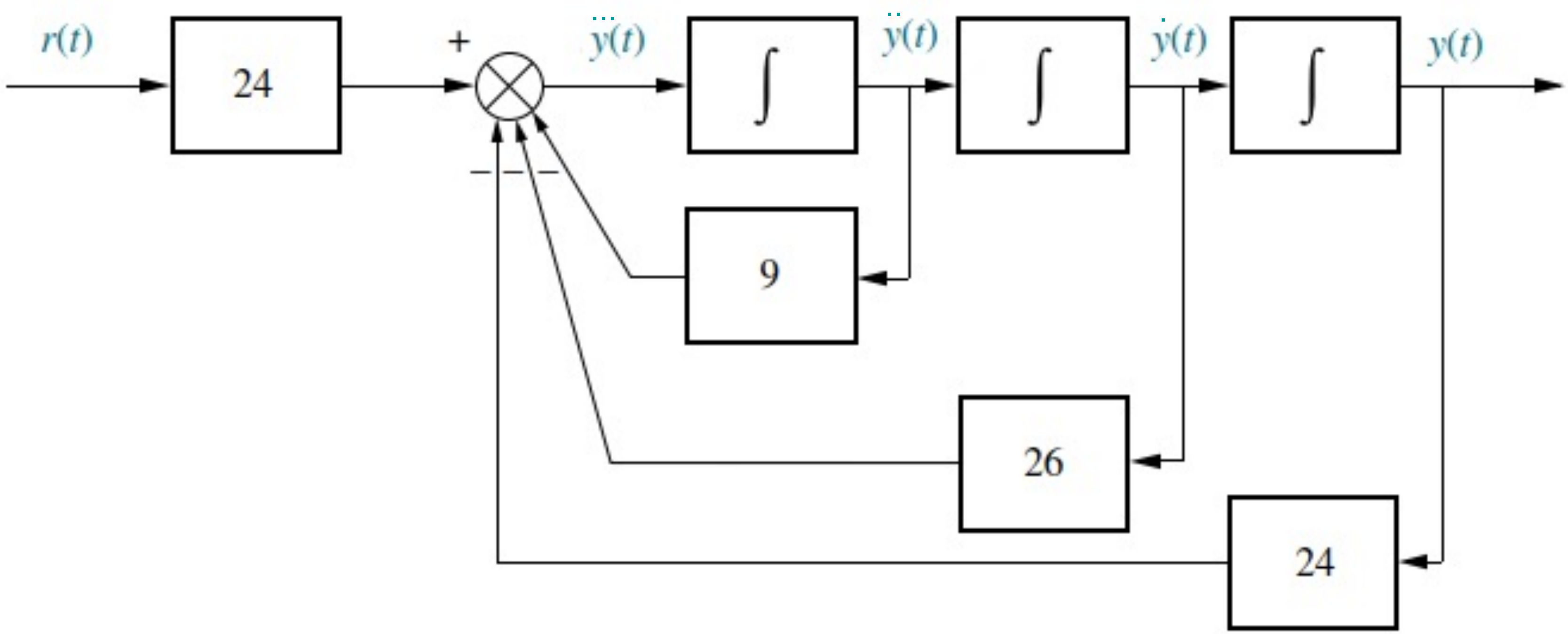


Representação de sistemas lineares

Diagrama de blocos

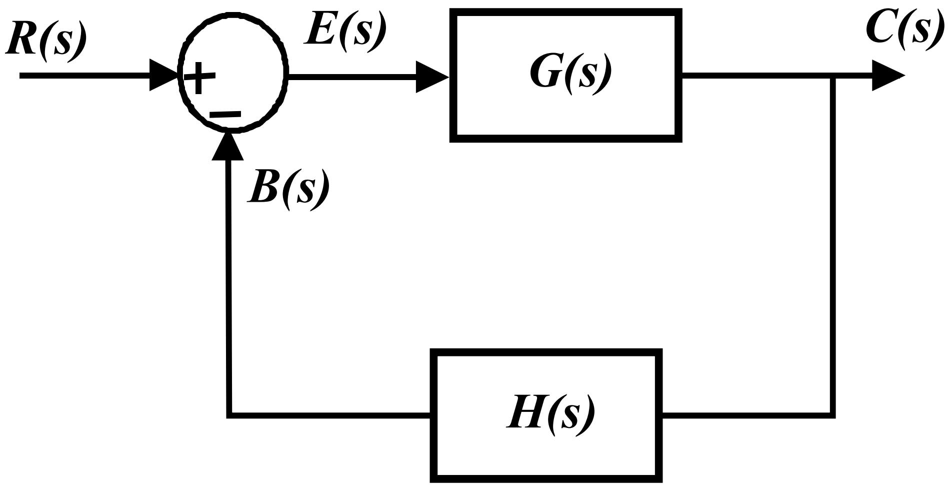
Diagrama de blocos a partir da equação diferencial: $\dddot{y} + 9\ddot{y} + 26\dot{y} + 24y = 24r$

$$\dddot{y} + 9\ddot{y} + 26\dot{y} + 24y = 24r \Leftrightarrow \dddot{y} = -9\ddot{y} - 26\dot{y} - 24y + 24r$$



Representação de sistemas lineares

A figura representa um sistema em malha fechada com realimentação negativa



Sistema de controlo realimentado com uma só malha

Designações usuais dos sinais:

R(*s*) – entrada de referência
B(*s*) – sinal de realimentação
E(*s*) – sinal de erro
C(*s*) – sinal de saída ou variável controlada
G(*s*) – elementos de controlo e sistema controlado
H(*s*) – elementos de realimentação

Representação de sistemas lineares

Espaço de Estados

Tipo de representação: matemática

Permite esclarecer dinâmicas não detetáveis pela função de transferência
(por exemplo: a dinâmica do sistema para condições iniciais não nulas)

Definição de estado de um sistema: conjunto mínimo de $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ que permite caracterizar completamente o comportamento do sistema para $t \geq t_0, \forall t \geq 0$

Definição de vetor de estado: vetor coluna $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

Definição de variáveis de estado: cada elemento de $\boldsymbol{x}(t)$, i.e., $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$

- Devem ser linearmente independentes
- Tipicamente o número mínimo de variáveis de estado iguala a ordem da ODE
  (igual à ordem do denominador das funções de transferência)

Definição de espaço de estados em sistemas SLIT: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$

Representação de sistemas lineares

Espaço de Estados

Equação de estado: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{B} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

Equação da saída: $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{D} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

Dimensão das matrizes: $A \equiv [n{\times}n]$; $B \equiv [n{\times}m]$; $C \equiv [p{\times}n]$; $D \equiv [p{\times}m]$

O sistema $\boldsymbol{S}$ fica completamente definido com: $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}$

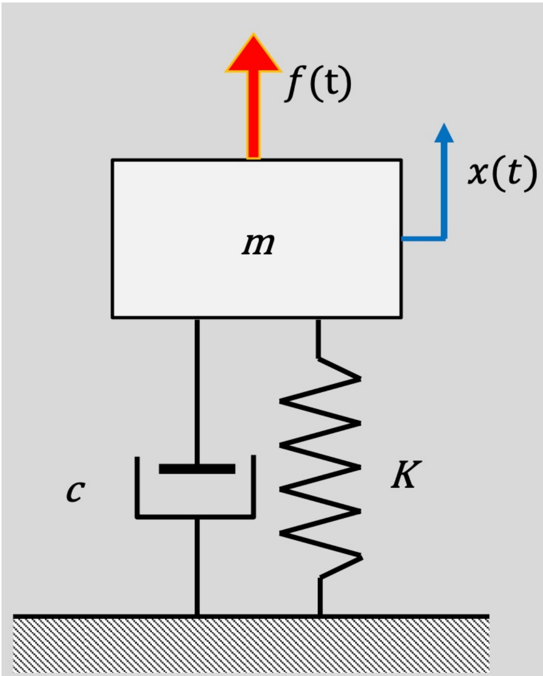
O conhecimento de $\boldsymbol{x}(t_1)$ e $\boldsymbol{u}(t_1), \forall t_1 \geq 0$, é suficiente para determinar t_2
- O estado no instante t_1, $\boldsymbol{x}(t_1)$, condensa a informação relevante para t $\leq t_1$

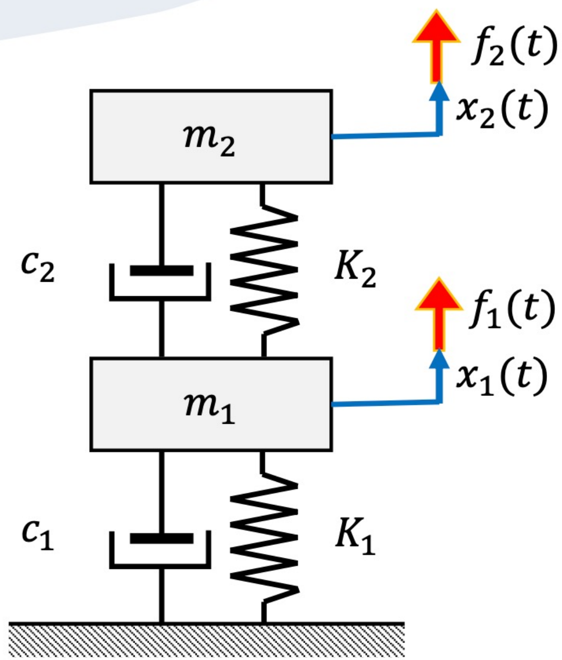
A - Matriz de sistema; **B -** Matriz de entrada; **C -** Matriz de saída; **D –** matriz de alimentação direta

Nota: **os polos da função de transferência são os valores próprios da matriz de sistema A**

Exemplo prático

- Revisão de conceitos com exemplos
  - Modelação de sistemas de 1ª e 2ª ordem
  - Representação de sistemas de 1ª e 2ª ordem
    - Equações dinâmicas
    - Função de transferência
    - Diagrama de blocos
    - Espaço de estados
  - Implementação em Matlab/Simulink/Simscape
  - Simulação dos sistemas de 1ª e 2ª ordem e verificação de modos de vibração





Exemplo prático

1. Os modelos de um "quarto de veículo" são muito comuns na análise de suspensões, pois são simples e capturam muitas das características importantes do modelo completo. A figura 1 mostra um modelo de uma suspensão ativa (¼ de carro) com um actuador hidráulico ligado em paralelo com um conjunto passivo mola/amortecedor. O modelo simplificado, muitas vezes usado para modelação, pode ver-se na figura 2.

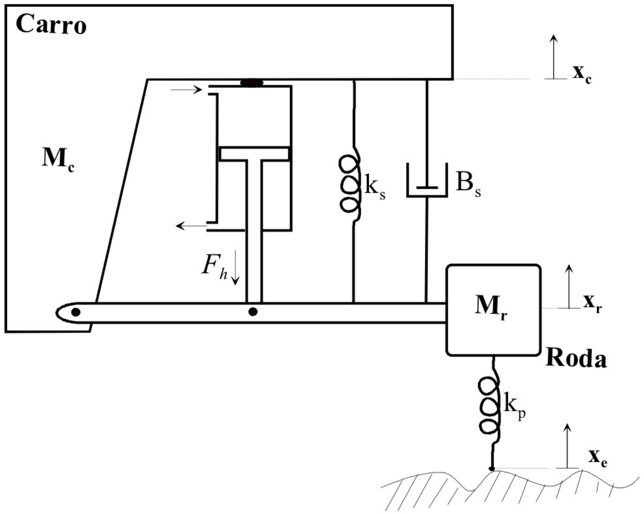


Figura 1 - Modelo de uma suspensão ativa (¼ de carro) com actuador hidráulico ligado em paralelo com um conjunto passivo mola/amortecedor

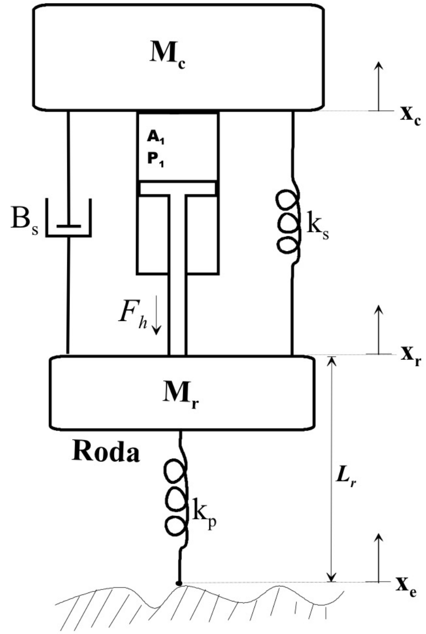


Figura 2 - Modelo simplificado da suspensão activa

M_c representa a massa de ¼ de carro mais a massa do corpo do cilindro, M_r representa a massa do conjunto roda, pneu, êmbolo e haste do cilindro, K_s é a rigidez da suspensão, B_s é o coeficiente de amortecimento da suspensão e K_p representa a rigidez do pneu. A variável x_e é o deslocamento vertical da estrada e representa as possíveis oscilações na estrada. A posição da roda é x_r e a posição do carro é x_c. O cilindro pode aplicar uma força $F_h = P_1 x A_1$

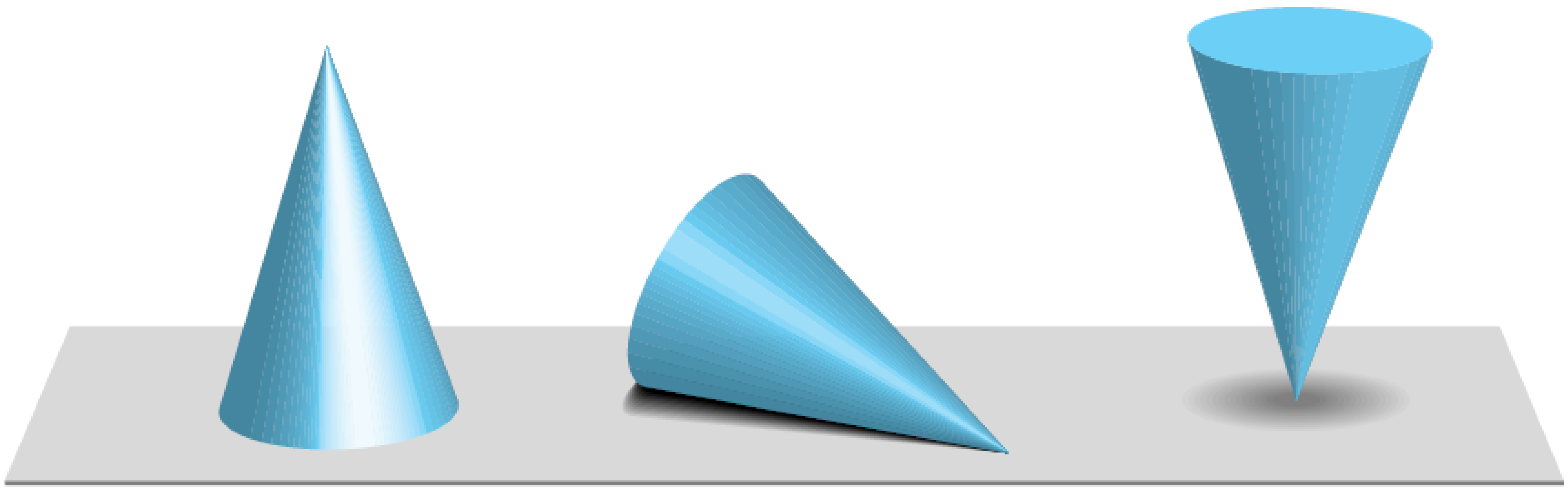
a) Recorrendo, por exemplo, ao diagrama de corpo livre descreva as equações dinâmicas para o sistema supondo este válido para pequenos movimentos em torno dos valores de equilíbrio (despreze também os efeitos da gravidade) .

b) Estabeleça o espaço de estados considerando as equações da alínea a) e em que as entradas do sistema são a pressão na câmara 1 do cilindro (P_1) e a posição da estrada x_e. Considere a saída do sistema $y=x_c-x_r$

Estabilidade de sistemas dinâmicos

- Uma característica fundamental associada à resposta de um sistema é a estabilidade.
- Se um sistema não for estável não faz sentido falar de resposta transitória ou de erros em regime estacionário.

- **Exemplo**: Um cone apoiado na base tem um equilíbrio estável, apoiado numa das suas geratrizes tem um equilíbrio indiferente/neutro mas um cone apoiado pelo vértice tem um equilíbrio instável.



Estabilidade, Estabilidade Marginal e Instabilidade

- A resposta de um sistema é composta por uma resposta forçada e uma resposta natural

$$y(t) = y_f(t) + y_n(t)$$

- Um **sistema é estável** se a resposta a uma entrada limitada em amplitude for também limitada. Isto é, a sua resposta natural tende para zero quando $t \to \infty$

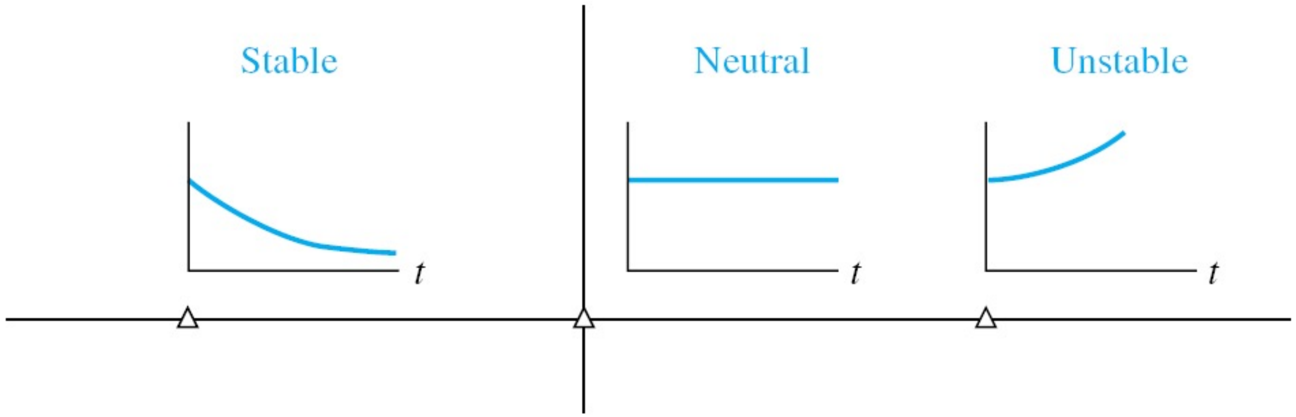
- Um **sistema é marginalmente estável** se nem aumenta nem diminui de forma monótona, isto é, permanece constante ou oscila.

- Um **sistema é instável** se a resposta a uma entrada limitada em amplitude for ilimitada. Isto é, a sua resposta natural tende para ∞ quando $t \to \infty$.

- **Fisicamente, um sistema instável cuja resposta natural cresça sem limites pode danificá-lo**. Muitas vezes os sistemas são projetados com limites físicos para evitar danos maiores.

Como determinar se um sistema é instável

- Considere-se as definições de estabilidade baseadas na resposta natural. Recordando o estudo da resposta do efeito dos polos no lado esquerdo do eixo imaginário conclui-se que as respostas naturais podem ser decaimentos exponenciais ou sinusoides amortecidas.
- Pode-se concluir que:
  - Os **sistemas estáveis** têm as funções de transferência com polos do lado esquerdo do eixo imaginário.
  - Os **sistemas marginalmente estáveis** tem as funções de transferência com polos de multiplicidade 1 no eixo imaginário e os restantes no lado esquerdo
  - Os **sistemas instáveis** tem as funções de transferência com pelo menos um polo no lado direito do eixo imaginário



Determinação se um sistema em malha fechada é estável

- Averiguar os zeros da sua equação característica (polos da função de transferência)

$$\Delta(s) = 0$$

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

  - Em teoria, o processo pode ser complicado para equações características de grau elevado ou quando se variam os seus coeficientes.
  - É importante determinar os valores admissíveis dos coeficientes da equação característica para que o sistema seja estável.
- Existem vários métodos que permitem avaliar a estabilidade do sistema sem ter que se resolver a equação característica:
  - no domínio *s (Laplace)*
  - no domínio da frequência *(jω)*
  - no domínio do tempo

Processos comuns de avaliar a estabilidade

- **Critério de Routh-Hurwitz**
  - Método algébrico baseado nas raízes da equação característica
- **Método do lugar das raizes**
  - Método gráfico que descreve a trajectória das raizes da equação característica quando varia um parâmetro do sistema
- **Diagramas de Bode**
  - Traçados de variação de amplitude e fase da FT em malha aberta
- **Critério de Nyquist**
  - Procedimento gráfico para determinar a estabilidade de malha fechada a partir da resposta em frequência de malha aberta.

O problema do controlo em malha fechada

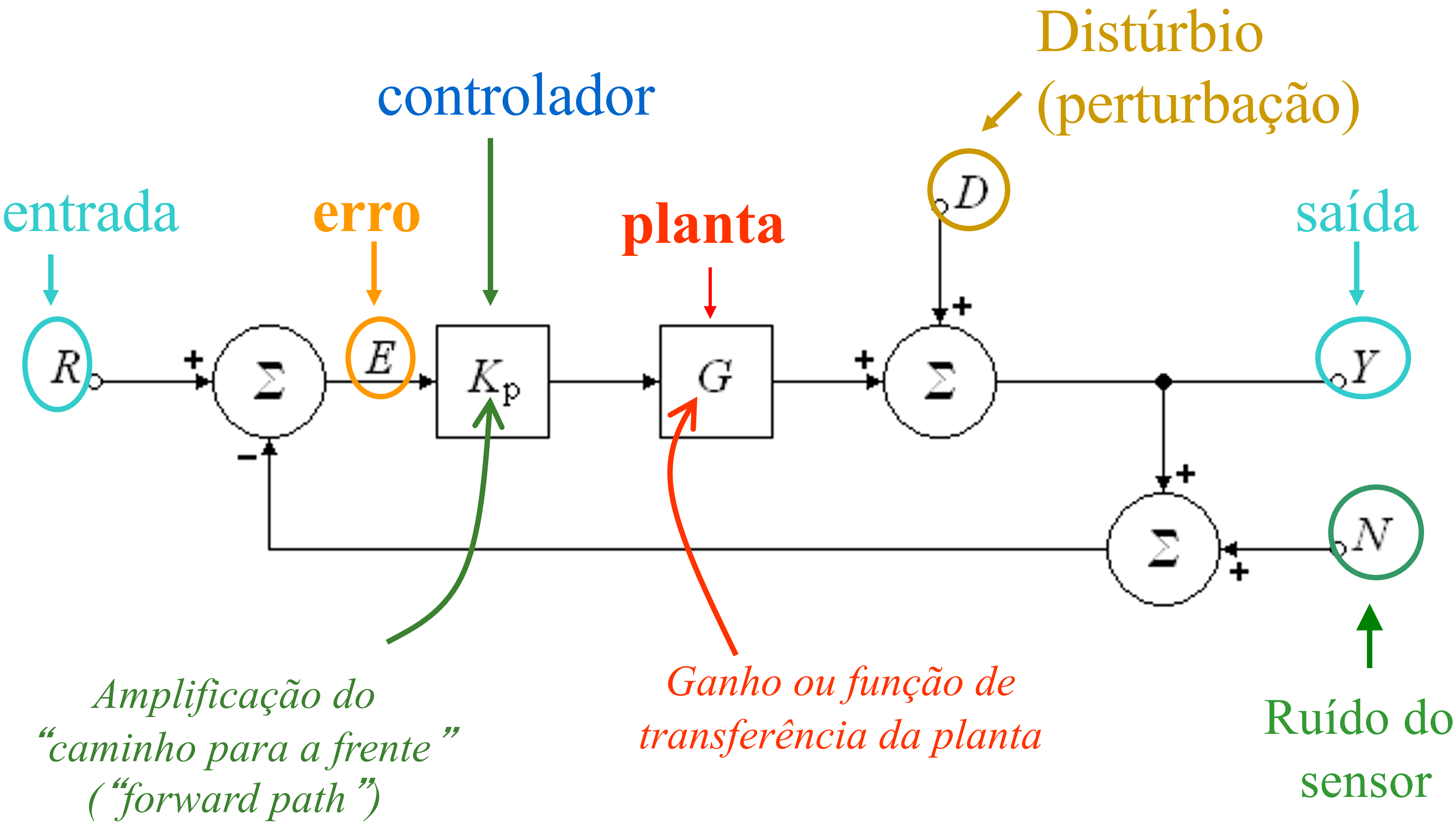
O Controlo de um processo dinâmico começa com:

- um **modelo**,

&

- uma **descrição do que "é exigido" ao sistema**.

Diagrama de blocos



Exemplos de especificações de controlo

- ***Estabilidade do sistema em malha fechada***

- As ***propriedades dinâmicas*** *tais como o tempo de subida e a sobre-elevação (“overshoot”)* na resposta a um degrau (tanto no sinal de referência como na entrada de disturbância).

- A ***sensibilidade*** do sistema a ***variações nos parâmetros do modelo***

- O ***erro em regime estacionário admissível*** a uma entrada contante ou a um distúrbio constante.

- O ***erro de seguimento de trajetória*** a uma entrada polinomial *(tal como uma rampa ou entradas polinomiais de ordem mais elevada)*

Os controladores clássicos de três-termos

O algoritmo PID

- O ***algoritmo PID*** é o mais popular e o mais usado para um controlador com realimentação. É um algoritmo robusto e de fácil compreensão e que pode fornecer *excelentes desempenhos,* apesar da variação das características dinâmicas do processo.

- Como o nome sugere, o algoritmo **PID** consiste em ***três modos básicos***:
  - o modo ***Proporcional***,
  - o modo ***Integral***,
  - o modo ***Derivativo***.

Controlador PID

- No domínio do tempo:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Ganho proporcional   Ganho integral   Ganho derivativo

- No domínio s, o controlador PID pode ser representado como:

$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s)$$

O controlo P, PI ou PID

- Quando se utiliza o algoritmo PID, é necessário decidir quais os modos a usar (P, I ou D) e então ***especificar os parâmetros (ou especificações) para cada modo usado***.

- Genericamente, são usados quatro algoritmos básicos que são as diversas combinações de componentes:
  - ***P, PI, PD ou PID***.

Exemplo prático

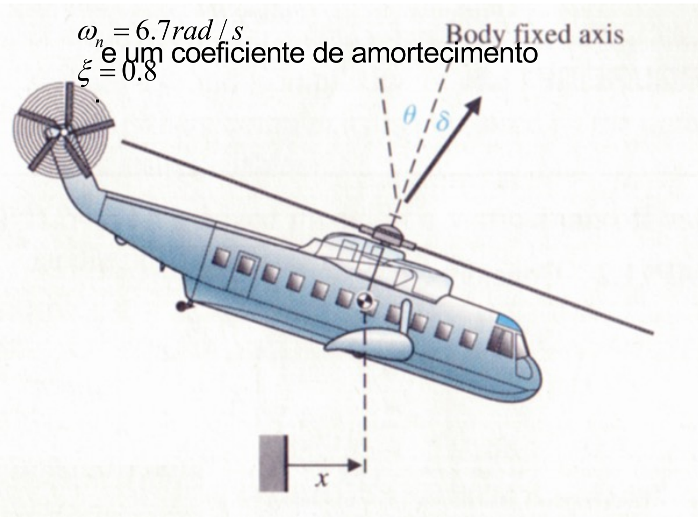
Objetivo: avaliação de conhecimentos de controlo realimentado de sistemas

Considere o helicóptero da figura 2. Pretende-se controlar o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ (*pitch angle*) pelo ajuste do ângulo do rotor $\boldsymbol{\delta}$. $\boldsymbol{x}$ representa a translação no movimento horizontal. Considere a função de transferência do ângulo $\boldsymbol{\delta}$ para o ângulo $\boldsymbol{\theta}$:

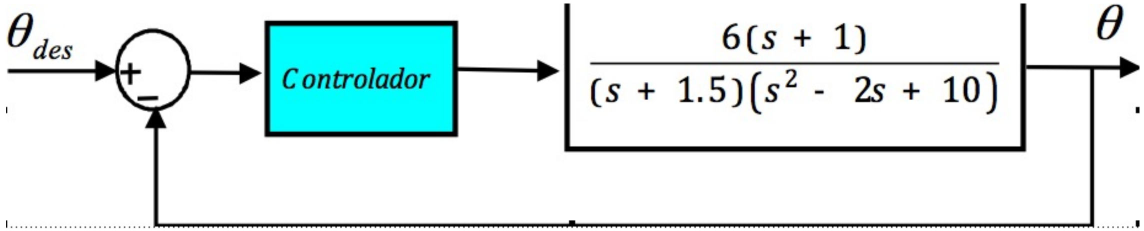
$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{6(s+1)}{(s+1.5)(s^2-2s+10)}$$

Projecte um controlador de modo a cumprir as seguintes especificações para o sistema em malha fechada:

- Sistema estável em malha fechada
- Erro em regime estacionário nulo quando o ângulo desejado (θdes) for um degrau unitário
- O sistema em malha fechada possua um par de polos complexos conjugados a que corresponda uma frequência natural não amortecida de $\omega_n = 9rad/s$ e uma relação de amortecimento $\zeta = 0.54$



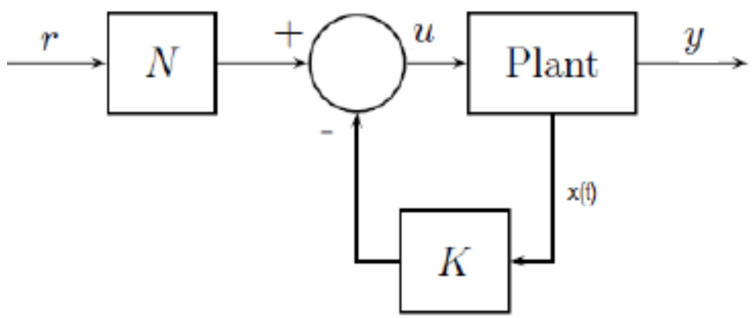
Helicopter pitch angle, θ, control.

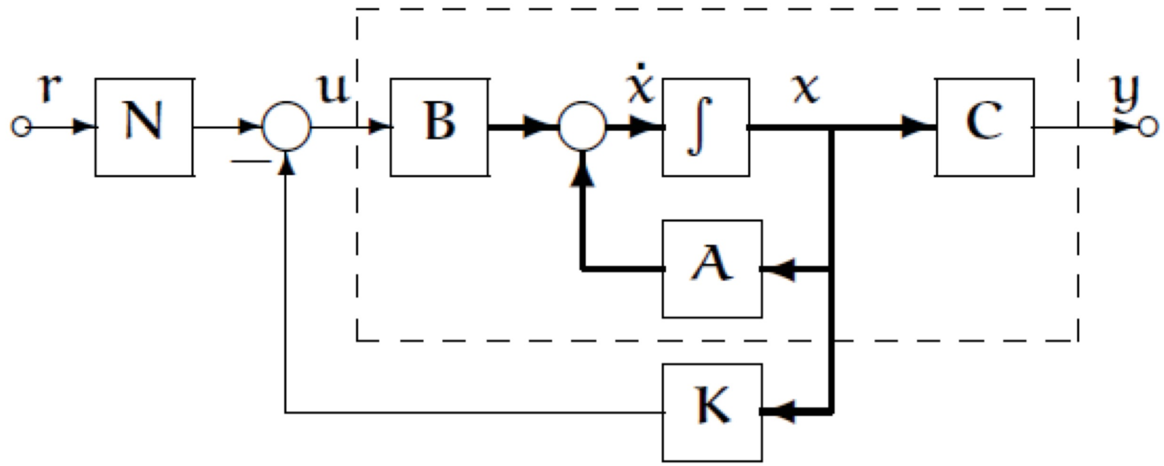


Controlo realimentado via espaço de estados

Controlo realimentado via espaço de estados

- A teoria do controlo linear do espaço de estados envolve a modificação do comportamento de um sistema de ***m*** entradas, ***p*** saídas e ***n*** estados (assumindo a matriz D nula, por simplicidade)
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
  - $y(t) = Cx(t)$
- a que chamamos planta, ou equação de estado em malha aberta
- Por aplicação de uma lei de controlo da forma: $u(t) = Nr(t) - Kx(t)$ onde *r(t)* é o novo sinal de entrada (a nova referência). A matriz ***K*** é o ganho de realimentação de estado (*state feedback gain*) e ***N*** é o ganho para a frente (*feedforward gain*)



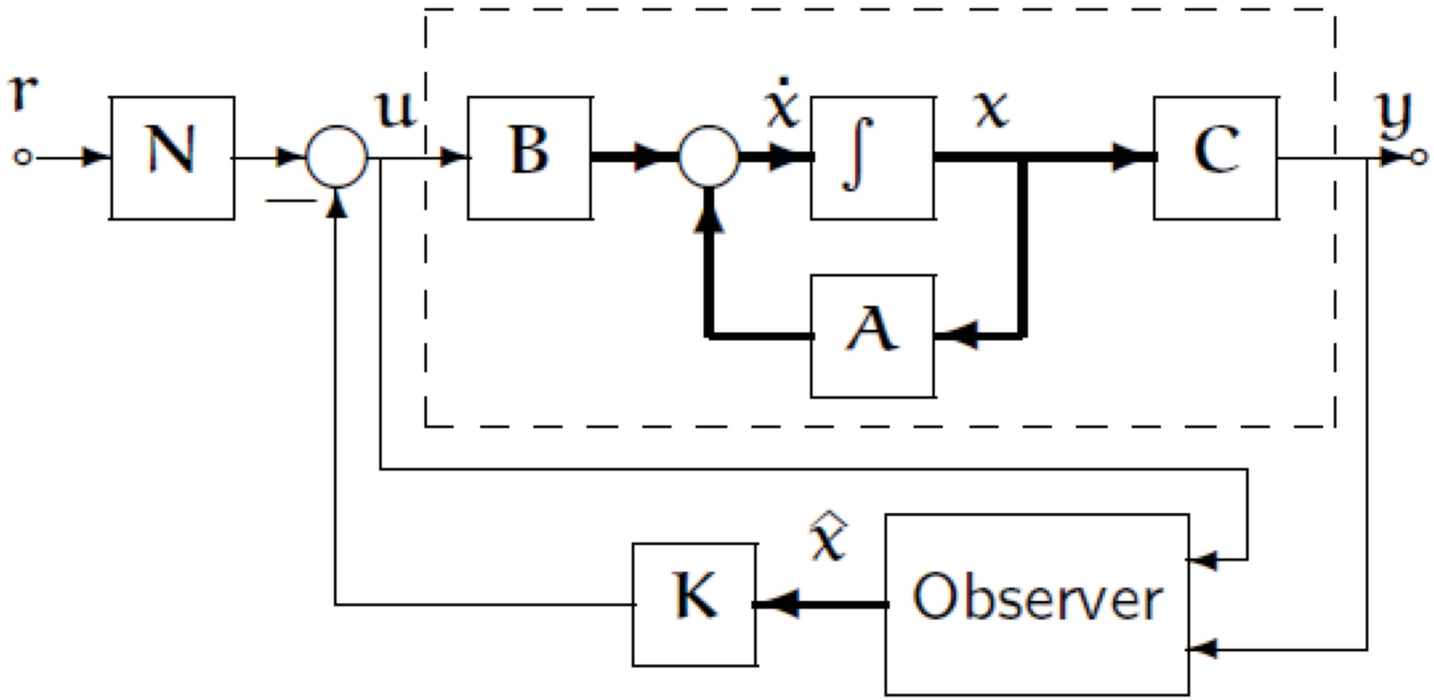


Controlo realimentado via espaço de estados

- Substituindo *u(t)* obtém-se a equação de estado em malha fechada
  - $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BNr(t)$
  - $y(t) = Cx(t)$
- Este tipo de controlo é dito estático, depende apenas dos valores atuais do estado *x(t)* e da referência *r(t)*.
- Note-se que é **necessário que todos os estados do sistema sejam medidos**.
- Se os estados não forem medidos é necessário um **observador de estado**

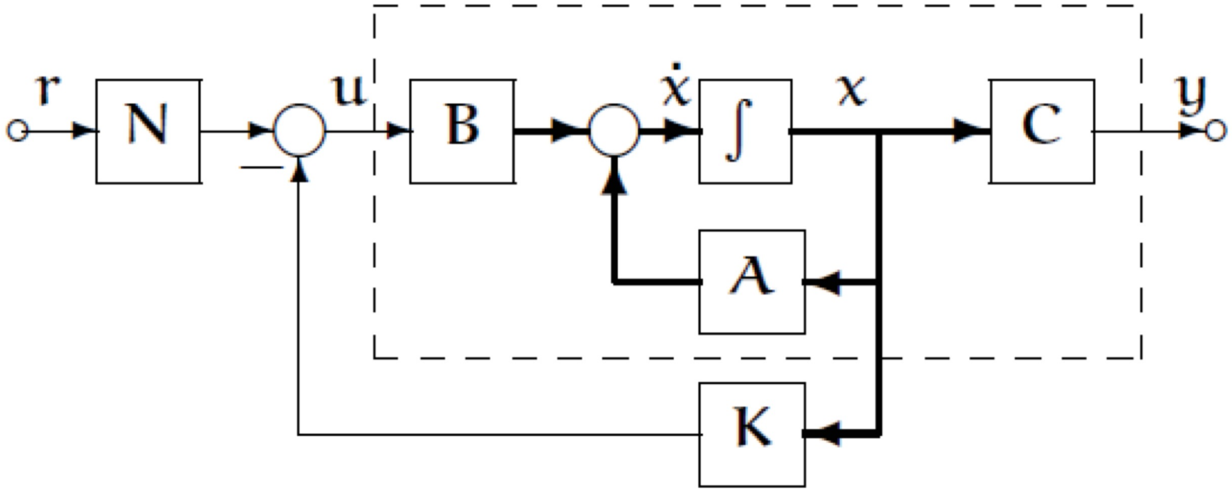
Observador de estado

- Quando nem todos os estados do sistema são mensuráveis, pode-se recorrer à sua estimação por meio de um observador, ou estimador de estado, que reconstrói o estado a partir de medições das entradas *u(t)* e saídas *y(t)*.
- A combinação da realimentação de estado e da estimativa de estado produz um controlador de realimentação de saída dinâmica.

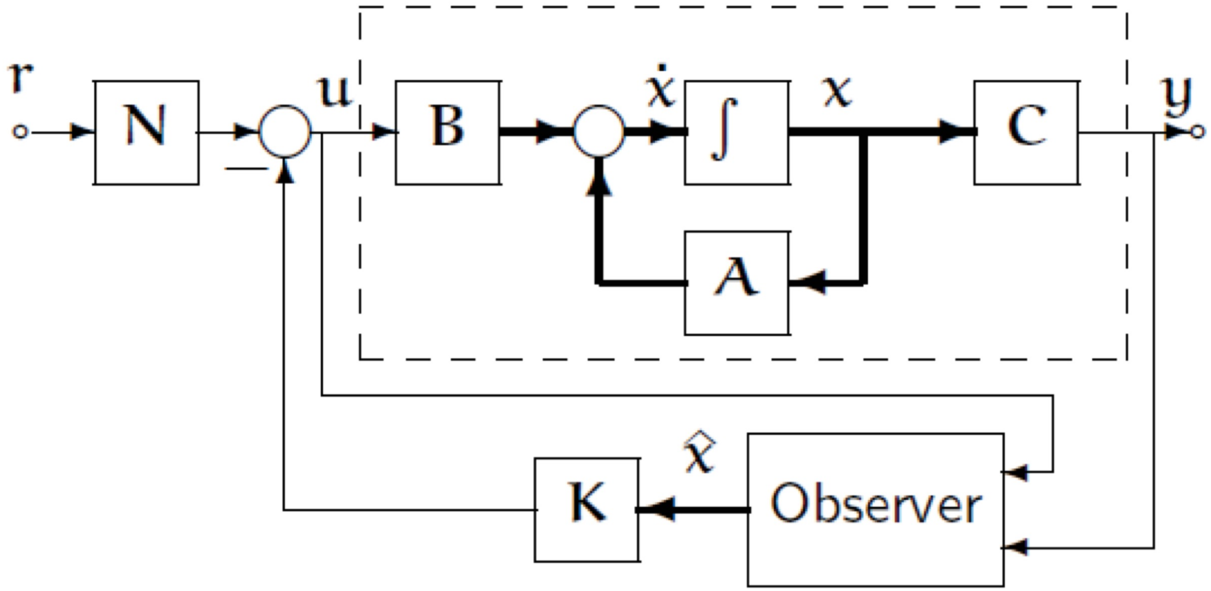


Feedback de saída por feedback de estado estimado

Controlo por realimentação de estado sem e com observador



Controlo estático



Controlo dinâmico

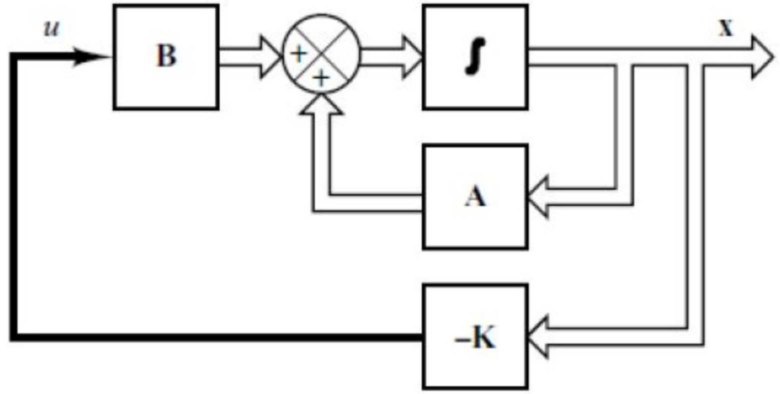
Objetivo de controlo por realimentação de estado

- Aprender a conceber um sistema de controlo linear por realimentação dinâmica de saída (realimentação de estado + observador de estado) para satisfazer as especificações desejadas do sistema em malha fechada em termos de estabilidade e desempenho

- Estudo de técnicas para a conceção do ganho de realimentação de estado ***K*** para obter:
  - regulação e seguimento de trajetória
  - posicionamento dos pólos (estabilização)
- Técnicas para o projeto de observadores
  - Sistemas considerados:
    - Sistemas SISO
    - sistemas MIMO

Controlo realimentado via espaço de estados

- Controlo de realimentação de estado completo
  - Como é que alteramos os polos do sistema no espaço de estados?
  - Ou, mesmo que possamos mudar a localização dos polos, para onde mudamos a localização dos polos?
  - Como é que esta abordagem funciona?
- Efetivamente, pretende-se utilizar a entrada *u(t)* para modificar os valores próprios da matriz **A** de modo a alterar alterar a dinâmica do sistema.
- Se $r = 0$, chamamos a este controlador um **regulador**
  - $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$
  - $\dot{x}(t) = A_{cl}x(t)$
  - $y(t) = Cx(t)$



Regulador por realimentação de estado

Controlo realimentado via espaço de estados

- Objetivo: Escolher ***K*** de modo a que ***A***$\boldsymbol{A_{cl}}$ tenha as propriedades desejadas, por exemplo:
  - Para *A* instável, queremos *Acl* estável
  - 2 Polos em −2±2i
- Note-se que existem ***n*** parâmetros em ***K*** e ***n*** valores próprios em **A**
- Exemplo: Considere-se

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Então o det(sI −A) = (s−1)(s−2)−1 = s2 −3s+1 = 0 e o sistema é instável.
  - Defina-se u$(t) = -[k_1 \quad k_2]x(t) = -Kx(t)$
  - e $A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - e det(sI − Acl) = $s^2 + (k_1 - 3)s + (1 - 2k_1 + k_2) = 0$

- Assim, escolhendo k_1 e k_2, pode-se colocar os $\lambda_i(A_{cl})$ *"valores próprios de* A_{cl}" em qualquer local do plano complexo (assumindo pares de polos complexos conjugados).

Controlo realimentado via espaço de estados

- Para colocar os polos em $-2 \pm 2i$, deve comparar-se a equação caraterística desejada:
  - $(s-2+2i)\,(s-2-2i) = s^2 + 4s + 8 = 0$

- com a de malha fechada: $s^2 + (k_1 - 3)s + (1 - 2k_1 + k_2) = 0$
- e concluir que: $k_1 - 3 = 7$ e $1 - 2k_1 + k_2 = 8$

- de modo a que $K = [7 \quad 21]$, o que se designa por "posicionamento de polos" (*pole placement*)
- e os polos da A_{cl} são $-2 \pm 2i$

Controlo realimentado via espaço de estados

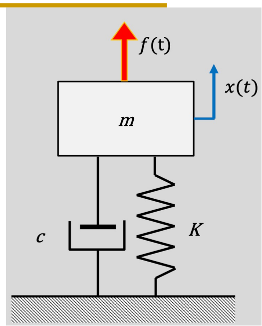
- Exemplo 2 $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

  - $A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $det(sI - A_{cl})$= $(s - 1 + k_1)(s - 2) = 0$
  - Assim, o controlo de **realimentação** pode modificar o polo em s = 1, mas não pode mover o polo em s = 2.
  - O sistema não pode ser estabilizado com feedback de estado total.
  - Problema causado por falta de **"controlabilidade"**

- Deverá ser possível encontrar o vector de ganho ***K*** de tal forma que a matriz *A−BK* tenha um conjunto de valores próprios desejados.

- O posicionamento de polos só pode ser determinado se o sistema obedecer a determinados requisitos, nomeadamente, se o sistema for **controlável** e **observável**

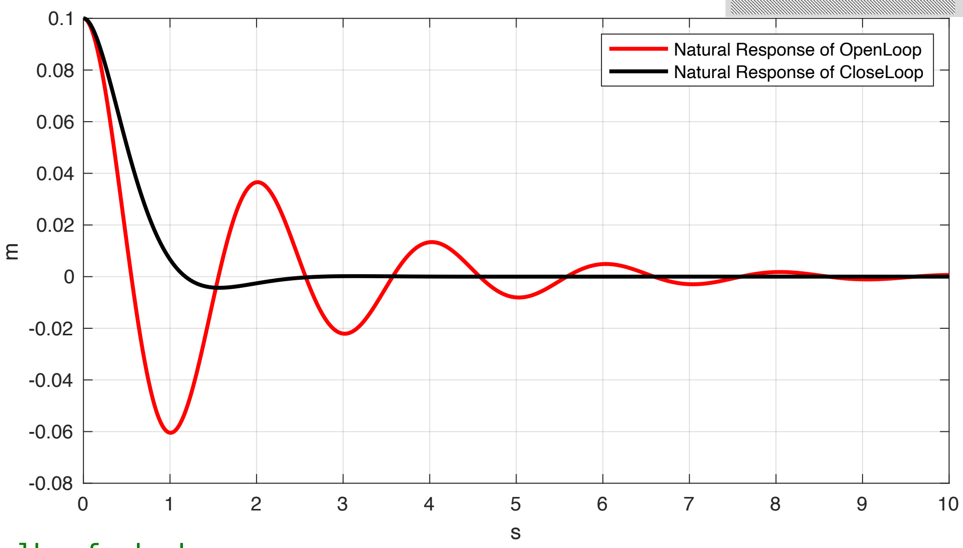
Controlo realimentado via espaço de estados



- Exemplo 3: Sistema Massa, mola, amortecedor
  - m = 1 *Kg*; k = 10 *N/m*; c = 1 *N/*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

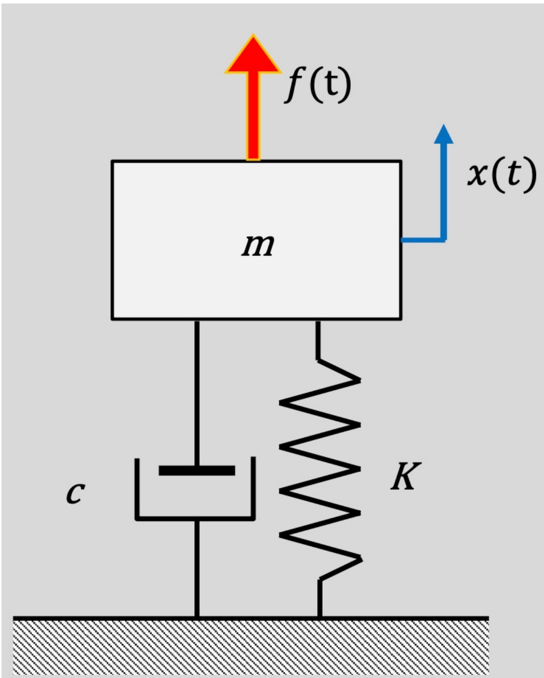
  - Colocar 2 Polos em $-2 \pm 2i$
  - Matlab:

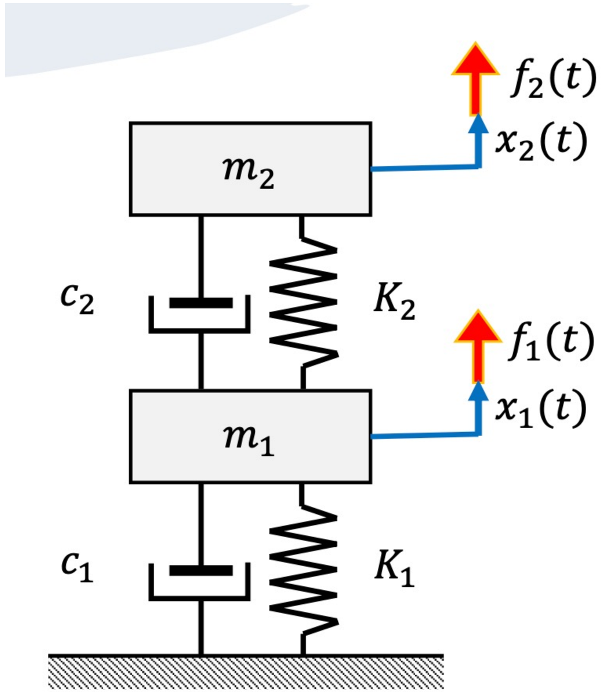



```
m = 1; k = 10; c = 1;
A = [0 1;-k/m -c/m]; B = [0;1]; C = [1 0]; D = [0];
eig(A); % valores próprios da matriz A
sysOl = ss(A,B,C,D); % espaço de estados do sistema em malha fechada
s1 = -2+2*j; s2 = -2-2*j; P = [s1 s2]; % local desejado para os polos
K = place(A,B,P); % comando place para determinar a matriz de ganho
x0 = [0.1 0]'; % valores iniciais para as variáveis de estado
K1 = K(1); K2 = K(2);
Acl = A-B*[K1 K2]; % Matriz de sistema em malha fechada
eig(Acl); % valores próprios da matriz Acl
sysCl = ss(Acl,B,C,D); % espaço dse estados do sistema em malha fechada
[YOl,TOl,XOl] = initial(sysOl,x0,t); % simulação da resposta para valores iniciais e sem entrada: malha aberta
[YCl,TCl,XCl] = initial(sysCl,x0,t); % simulação da resposta para valores iniciais e sem entrada: malha
fechada
plot(TOl,YOl,'r',TCl,YCl,'k','LineWidth',2);
legend('Natural Response of OpenLoop',('Natural Response of CloseLoop')); xlabel('s'); ylabel('m'); grid on;
```

Exemplo prático 2

- Revisão de conceitos com exemplos
  - Controlo de sistemas de 1ª e 2ª ordem
  - Implementar reguladores (com realimentação de estado) para os sistemas de 1ª e 2ª ordem





Controlabilidade e Observabilidade

- A **controlabilidade** indica se os estados do sistema podem ter a sua trajetória controlada por meio de uma entrada:
  - Existe uma matriz K tal que $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ é estável?
  - Os polos de $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ podem ser movidos para localizações desejadas?
- A **observabilidade** indica se a trajetória dos estados do sistema pode ser observada a partir da saída:
  - Os estados do sistema podem ser estimados com erros arbitrariamente pequenos a partir da saída?

Controlabilidade e Observabilidade

- Num sistema representado em espaço dos estados podem existir **dinâmicas que não são vistas pelas saídas** do sistema ou **não são influenciadas pelas entradas do sistema**.

- Numa função de transferência um cancelamento de um polo com um zero implica que alguma dinâmica no sistema deixa de ser vista pela saída e nem pode ser alterada pela entrada.

- Dinâmicas “escondidas” são causadas por cancelamentos de polos e zeros ⇒ **dinâmicas escondidas geram perda de controlabilidade e/ou observabilidade**.

- Para sistemas representados em espaço dos estados não é simples verificar se ocorre um cancelamento de polo e zero.

- Para controlar um sistema ele deve ser **controlável** e **observável** ⇒ **existem testes para verificar se um sistema é controlável e observável.**

Controlabilidade

- Diz-se que um sistema é controlável se e só se existir uma acção de controlo *u(t)* não restringida, de tal forma que, num intervalo finito de tempo, consiga transferir o sistema do estado inicial para um outro qualquer estado final.

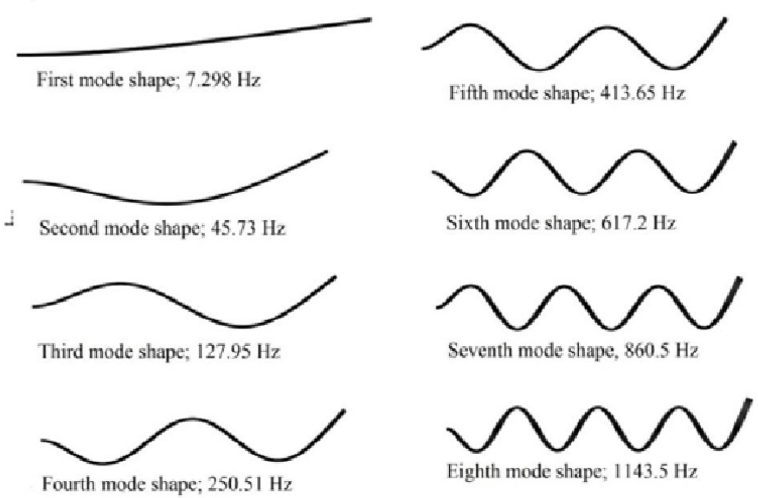
- Ou mais formal:
  - Um sistema linear invariante no tempo (LIT) é controlável se existe um vetor de entrada $\boldsymbol{u}(t)$ para $0 \leq t \leq T$, com $T > 0$ e finito, tal que o sistema vai da condição inicial $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ para qualquer estado $\boldsymbol{x}$ no intervalo de tempo T.

- A **controlabilidade** está associada à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema.

- É importante referir que a controlabilidade pode ser completa ou não:
  - Um sistema diz-se completamente controlável se for possível transferir todos os seus estados, caso contrário haverá estados que não podem ser controlados.
  - Isto não quer dizer que o sistema de controlo proposto não pode ser utilizado, mas significa que não é possível impor uma dinâmica completa ao sistema.

Controlabilidade (AVC)

- **O caso do controlo ativo de vibrações**
  - Se o sistema **não for completamente controlável**, **haverá modos de vibração sobre os quais não se pode exercer qualquer acção de controlo**.
  - Fisicamente, a controlabilidade está relacionada com o posicionamento da ação de controlo no sistema, pois depende essencialmente da composição da matriz **B**. Isto quer dizer que, se a ação de controlo estiver posicionada sobre um nodo de um determinado modo de vibração, será impossível controlar esse modo, pois a força modal correspondente será sempre nula.
  - No entanto, tal facto pode não ser impeditivo da utilização deste sistema de controlo, pois pode dar-se o caso de este modo de vibração não ser importante na dinâmica global do sistema, podendo a força de controlo estar até melhor posicionada relativamente às componentes modais máximas dos modos mais relevantes.



mode shapes and natural frequencies for cantilever beam

Controlabilidade

- Teste de controlabilidade:
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ onde **x**(t) ∈ R^n e **u**(t) ∈ R^m .
  - Para um sistema ser controlável basta analisar a equação de estado, ou seja, o par de matrizes **A** e **B**
  - Definindo a matriz de controlabilidade
    - $M_C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$

- **O sistema definido pelas matrizes (A, B) é controlável se a característica (rank) de M_C = n.** Característica de uma matriz é o número de colunas ou linhas linearmente independentes da matriz.

- Para qualquer matriz o número de linhas linearmente independentes coincide com o número de colunas linearmente independentes.

-

Controlabilidade (testes matlab)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

```
n = 2; A = [1 1; 1 2]; B = [1;0]
Cc = ctrb(A,B) %returns the controllability matrix [B AB A^2B ...].
if rank(Cc) == 2
   fprintf('The system is controlable \n');
else
   fprintf('The system is uncontrolable \n');
end
```

$$Cc = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

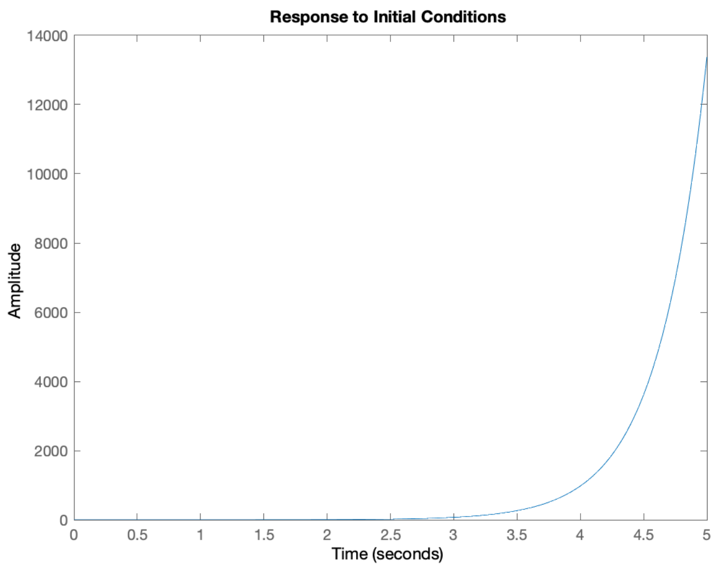
```
n = 2; A = [1 1; 0 2]; B = [1;0]
Cc = ctrb(A,B) %returns the controllability matrix [B AB A^2B ...].
```

$$Cc = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

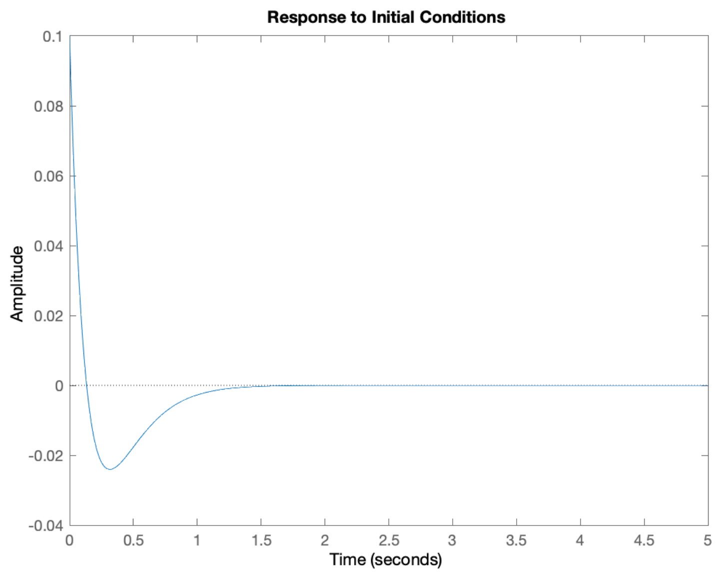
Controlabilidade (pole placement - matlab)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

```
n = 2; A = [1 1; 1 2]; B = [1;0]; C = [1 0]; D = 0;
x0 = [0.1;0]; % vetor de estado inicial
t = 0:0.01:5;
sys = ss(A, B, C, D); % espaço de estados
P = [-5 -6] % local onde se pretendem os polos em malha fechada
K = place(A,B,P) %calcula uma matriz K de "realimentação" do estado tal que os valores próprios de A-B*K são os especificados no vetor P.
Acl =A-B*K % matriz de malha fechada
eig(Acl) % valores próprios da matriz A-BK
sysCl = ss(Acl, B, C, D); % espaço de estados do sistema em malha fechada
figure; initial(sys,x0,t); %simulação da resposta natural, com o estado inicial x0 e no tempo t
figure; initial(sysCl,x0,t); %simulação da resposta natural do sistema em malha fechada, com os estado inicial x0 e no tempo t
```



Sistema instável em malha aberta



Sistema estável em malha fechada

Observabilidade

- A observabilidade: como o estado interno de um sistema pode ser entendido examinando as suas saídas externas

- É uma medida de quão bem podem os estados de um sistema ser inferidos a partir do conhecimento de suas saídas externas

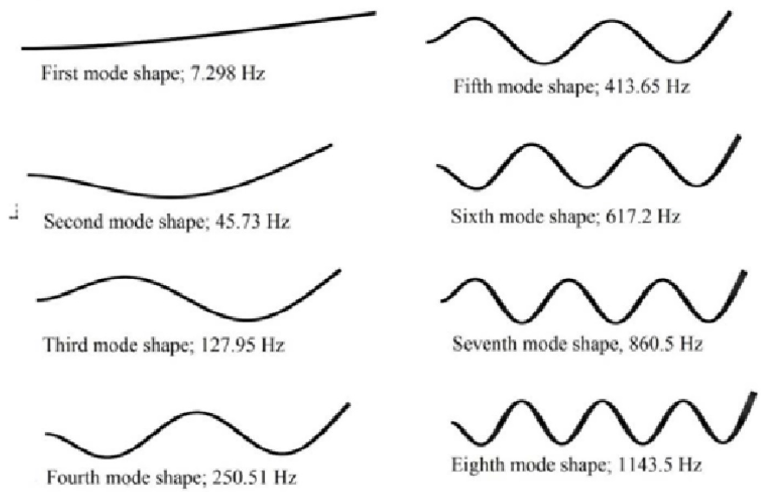
- A observabilidade está associada à capacidade de “ver” todos os estados por meio das saídas do sistema.

- **Definição:** Um sistema LIT é observável se qualquer condição inicial ***x****(0)* pode ser obtida conhecendo-se as entradas ***u****(t)* e as saídas ***y****(t)* do sistema para todo instante de tempo *t* entre 0 e *T* > 0.

-

Observabilidade

- **O caso do controlo ativo de vibrações**
  - O conceito da observabilidade de um sistema está de certa forma relacionado com o conceito de controlabilidade, mas, neste caso, na perspectiva da observação da resposta dos modos de vibração da estrutura, e não na perspectiva do controlo desses modos.
  - Um sistema será completamente observável se for possível observar todos os seus estados, caso contrário, não será completamente observável, ou seja, haverá modos de vibração que não contribuem para a saída do sistema definida pela matriz de saída C. Isto quer dizer que se um sensor estiver posicionado sobre um nodo de um determinado modo de vibração, será impossível medir a contribuição desse modo para a variável de saída associada a esse ponto.



mode shapes and natural frequencies for cantilever beam

Observabilidade

- **O caso do controlo ativo de vibrações**
  - O facto de um sistema ser completamente observável não quer dizer que todos os estados estão a ser efectivamente observados, mas significa que os estados eventualmente não observados podem ser estimados a partir de relações que os ligam com os estados que estão a ser directamente medidos.
  - Esta noção é extremamente importante porque a modelação de uma estrutura vulgar envolve frequentemente um elevado número de graus de liberdade, tornando-se impraticável medir na íntegra o vector de estado do sistema.
  - Por outro lado, a obtenção do vector de estado é uma tarefa essencial para a determinação da ação de controlo.
  - Então, nestes casos, pode-se recorrer a um **estimador de estado (observador)**, o qual, tendo por base as medições levadas a efeito num número limitado de graus de liberdade, permite estimar o vector de estado completo

Observabilidade

- **O caso do controlo ativo de vibrações**
- A utilização de observadores de estado é inevitável em muitas situações práticas, pois, quando o sistema tem um número de graus de liberdade relativamente elevado, torna-se impraticável a instalação de sensores de deslocamento e de velocidade em todos esses os pontos.

- Pode dizer-se até que, mesmo existindo condições para proceder à observação directa do vector de estado, em muitos casos nem haverá necessidade de o fazer, se o número de variáveis medidas for suficiente para conduzir a estimativas precisas das variáveis não medidas.

- No caso de veículos aeroespaciais, os observadores de estado revelam ser uma ferramenta importante na implementação real de sistemas de controlo baseados na realimentação do vector de estado completo, porque, em geral, a medição rigorosa de deslocamentos é dificultada pelas dimensões que normalmente estes sistemas apresentam.

- Por outro lado, a medição de velocidades não é tão problemática, pois geralmente pode ser realizada com suficiente rigor integrando os sinais provenientes de acelerómetros. A obtenção de deslocamentos por dupla integração das acelerações pode não ser a melhor solução para este problema, conduzindo por vezes a diferenças significativas, em particular decorrentes do facto de muitos sensores não apresentarem uma resposta linear na gama de frequências que caracterizam estes sistemas. Nestes casos, poderá ser preferível **recorrer a observadores** de estado para estimar os deslocamentos da estrutura, tendo por base a medição das velocidades. A eficácia deste processo depende, no entanto, de uma boa calibração do estimador e do modelo numérico do sistema.

Observabilidade

- Teste de observabilidade
- Seja um sistema de ordem ***n***, com o vetor de entradas ***u****(t) = 0* e *D = 0*, então tem-se:
  - $\dot{x}(t) = Ax(t)$
  - $y(t) = Cx(t)$

- onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$. Observe-se que para um Sistema ser observável basta analisar o par de matrizes **A** e **C**.

Definindo a matriz de observabilidade $M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

- O sistema definido pelas matrizes (A, C) **é observável** se a **característica (rank) da matriz M_o = n.**

Observabilidade

- Exemplo 1

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

- Teste de controlabilidade

$$M_C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  - O número de colunas e linhas linearmente independente da matriz $\boldsymbol{M_C}$ é 2, portanto: **Controlável**

- Teste de observabilidade

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

  - O número de colunas e linhas linearmente independente da matriz $\boldsymbol{M_o}$ é 1, portanto: **não observável**

-

Observabilidade

- Em termos de função de transferência, a perda de controlabilidade e/ou observabilidade pode ser vista como se segue.
  A função de transferência pode ser obtida a partir do espaço de estados:
  - $\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$
- $\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+2}$

- Ou seja, ocorreu um cancelamento de polo e zero no sistema fazendo com que este seja não observável.

Observabilidade

- Exemplo 2

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Teste de controlabilidade

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- O número de colunas e linhas linearmente independente da matriz $\boldsymbol{M_C}$ é 1, portanto: **não Controlável**

- Teste de observabilidade

$$M_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- O número de colunas e linhas linearmente independente da matriz $\mathbf{M_o}$ é 2, portanto: **observável**

Forma canónica controlável

- Dado um sistema dinâmico LIT de ordem *n*,
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
  - $y(t) = Cx(t) + Du(t)$
- onde $\mathbf{x}(t) \in R^n$,$\mathbf{u}(t) \in R^m$ e $\mathbf{y}(t) \in R^p$

- Considere-se uma mudança de coordenadas $x(t) = Tr(t)$
  - Com $T = M_C W$ onde M_C é a matriz de controlabilidade
    - $M_C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$
  - e *W* uma matriz com a seguinte composição
  - $$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \\ a_{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  - onde a_i são os coeficientes da equação característica da matriz de estado do sistema
    - $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Forma canónica controlável

- $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
- $T\dot{r}(t) = ATr(t) + Bu(t)$
- $\dot{r}(t) = T^{-1}ATr(t) + T^{-1}Bu(t)$

- ou simplesmente
  - $\dot{r}(t) = A_c r(t) + B_c u(t)$
  - com $A_c = T^{-1}AT$ e $B_c = T^{-1}B$
  - $y(t) = CTr(t) + Du(t)$
  - $y(t) = C_c(t) + D_c u(t)$

- $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & .. & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$ e $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 1 \end{bmatrix}$
- $C_c = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1]$ e $D_c = b_0$

- A e A_c tem os mesmos valores próprios pois são matrizes similares
- **Só existe a forma canónica se o sistema for completamente controlável**
- Só tem interesse quando a matriz B tem uma só coluna
- Pode ser utilizada para atribuir facilmente os polos em malha fechada de um sistema dinâmico com um esforço computacional muito reduzido.

Forma canónica controlável

- *Considere-se a realimentação de estado*
- $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $\qquad\qquad$ $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$
- $u(t) = -Kx(t)$

No sistema "transformado” uma lei equivalente de controlo é:

- $x(t) = Tr(t)$
- $\dot{r}(t) = A_c r(t) + B_c u(t)$
- $u(t) = -Kx(t) = -KT\, r(t)$
- $\dot{r}(t) = (A_c - B_c K)\, r(t)$
- Se se comparar as matrizes de controlabilidade
- $M_C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B]$
- e para o sistema transformado
- $M_{CR} = [B_c \quad A_c B_c \quad {A_c}^2 B_c \quad \ldots \quad {A_c}^{n-1} B_c]$ mas $A_c = T^{-1}AT$ e $B_c = T^{-1}B$
- $M_{CR} = [T^{-1}B \quad T^{-1}ATT^{-1}B \quad (T^{-1}AT)^2 T^{-1}B \quad \ldots \quad (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B]$
- $M_{CR} = T^{-1}[B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B] = T^{-1}\, M_C$
- e $T = M_C {M_{CR}}^{-1}$

Forma canónica controlável

- Exemplo: Considere a função de transferência:
  - $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2-2s+3}{s^3+7s^2+14s+8}$ ou $\dddot{y} + 7\ddot{y} + 14\dot{y} + 8y = 7\ddot{u} - 2\dot{u} + 3u$
  - $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$ $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_2 & & -a_1 \end{bmatrix}$ e $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ $C_c = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \end{bmatrix}$ e $D_c = b_0$
  - A função de transferência pode ser "dividida" em 2:
    - $U(s)\frac{1}{s^3+7s^2+14s+8} = X(s)$ e $Y(s) = (s^2 - 2s + 3)X(s)$
  - Considerando os estados: $\ddot{x}, \dot{x}$ e x, tem-se as matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
    - $C = [3 \quad -2 \quad 1]$ $D = [0]$

Matlab (file: FormaCanonica.m):

```
clear all; close all
s = tf('s');
Gs = (s^2-2*s+3)/(s^3+7*s^2+14*s+8)
sys = ss(Gs);
Ac= [0 1 0;0 0 1;-8 -14 -7]; Bc = [0;0;1]; Cc = [3 -2 1]; Dc=[0]; sysC= ss(Ac,Bc,Cc, Dc);
step(sys);hold on; figure; step(sysC) ; hold on; step(Gs)
pole(Gs)
eig(sys)
eig(sysC)
```

Forma canónica observável

- Dado um sistema dinâmico LIT de ordem n,
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
  - $y(t) = Cx(t) + Du(t)$
- onde $\mathbf{x}(t)\in R^n$,$\mathbf{u}(t)\in R^m$ e $\mathbf{y}(t)\in R^p$
- Considere-se uma mudança de coordenadas $x(t) = Sq(t)$
  - Com $S = (WM_o)^{-1}$ onde M_o é a matriz de observabilidade
    - $M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 1 & 0 \\ a_{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - onde a_i são os coeficientes da equação característica da matriz de estado do sistema
    - $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$
    - $S\dot{q}(t) = ASq(t) + Bu(t)$
    - $\dot{q}(t) = S^{-1}ASq(t) + S^{-1}Bu(t)$
    - $\dot{q}(t) = A_q q(t) + B_q u(t)$

Forma canónica observável

- $A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ e $B_o = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$
- $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$
  - *Por outro lado* $y(t) = CSq(t) + D_o u(t)$
  - $y(t) = C_o q(t) + D_o u(t)$
  - com $C_o = [0 \quad 0 \quad .. \quad 1]$ e $D_o = b_0$
- É útil na análise e conceção de sistemas de controlo, uma vez que esta forma **garante a observabilidade**
- A relação entre as formas canónicas observáveis e controláveis é a seguinte

$$A_c = A_o^T$$

$$B_c = C_o^T$$

$$C_c = B_o^T$$

$$D_c = D_o$$

Formas canónicas: Controlável e observável

- $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$

$$\frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- **Forma canónica controlável**
  - $\dot{r}(t) = A_c r(t) + B_c u(t)$
  - $y(t) = C_c(t) + D_c u(t)$
  - $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & .. & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$ e $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ $C_c = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \end{bmatrix}$ e $D_c = b_0$

- **Forma canónica observável**
  - $\dot{q}(t) = A_q q(t) + B_q u(t)$
  - $y(t) = C_o q(t) + D_o u(t)$
  - $A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ e $B_o = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$, $C_o = [0 \quad 0 \quad .. \quad 1]$, $D_o = b_0$

$$A_c = A_o^T$$

$$B_c = C_o^T$$

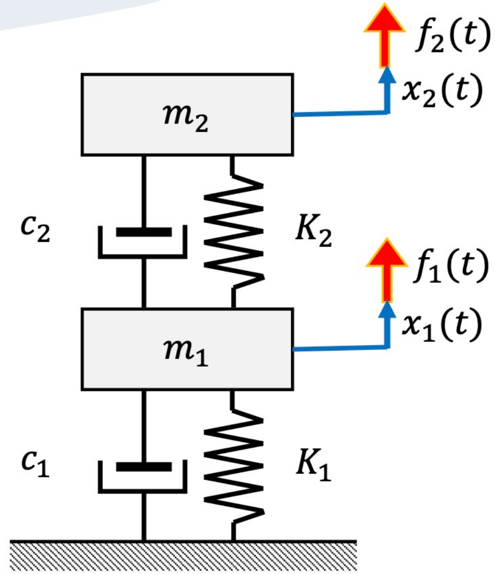
$$C_c = B_o^T$$

$$D_c = D_o$$

Forma canónica controlável

- Exemplo:
  - Sistema com 2 graus de liberdade:
    - $m_2\ddot{x}_2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)c_2 + (x_2 - x_1)k_2 = f_2$
    - $m_1\ddot{x}_1 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)c_2 + (x_1 - x_2)k_2 + \dot{x}_1 c_1 + x_1 k_1 = f_1$

    - $m_1\ddot{x}_1 = -(k_2 + k_1)x_1 - (c_2 + c_1)\dot{x}_1 + k_2 x_2 + c_2\dot{x}_2 + f_1$
    - $m_2\ddot{x}_2 = k_2 x_1 + c_2\dot{x}_1 - k_2 x_2 - c_2\dot{x}_2 + f_2$

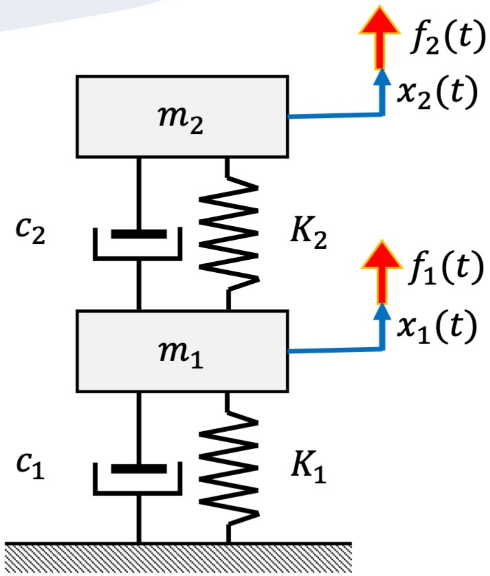


      - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2+k_1}{m_1} & -\frac{c_2+c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}. \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$
      - $C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad D = [0]$

Forma canónica controlável

- Exemplo: Sistema com 2 graus de liberdade:

- Matlab (twoMassSpringDamper.m):




```
clear all; close all; clc;
M1 = 1; M2 = 2; K1=10; K2 = 20; C1 = 0.1; C2 = 0.2;
A = [0 1 0 0; -(K1+K2)/M1 -(C1+C2)/M1 K2/M1 C2/M1; 0 0 0 1; K2/M2 C2/M2 -K2/M2 -C2/M2];
B = [0; 0;0; 1/M2]; C = [0 0 1 0]; D = [0]; % only f1 as input
x10 = 0.2; x20 = 0.3;
x0 = [x10; 0; x20;0];
sys = ss(A,B,C,D);
[Y,T,X] = initial(sys,x0,10);
plot(T,Y(:,1),'r','LineWidth',2);
legend('x2'); xlabel('s'); ylabel('m');
P = [-4+2*i -4-2*i -5 -10]
K = place(A,B,P);
Acl =A-B*K;
%%
sysCl = ss(Acl,B,C,D);
[Y,T,X] = initial(sysCl,x0,10);
plot(T,Y(:,1),'r--','LineWidth',2);
legend('x2'); xlabel('s'); ylabel('m');

%% controllable Cannonical form
% 0.5 s^2 + 0.15 s + 15
% -------------------------------------
% s^4 + 0.4 s^3 + 40.01 s^2 + 2 s + 100
Gs = tf(sys)
Ac = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -100 -2 -40.01 -0.4]; Bc = [0; 0; 0; 1]; Cc = [15 0.15 0.5 0]; Dc = 0;
sysC = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
figure; step(sys,20);hold on; step(sysC,20); hold on; step(Gs,20)

% observable cannonical form
Ao = [0 0 0 -100;1 0 0 -2; 0 1 0 -40.01; 0 0 1 -0.4]; Bo = [15; 0.15; 0.5; 0]; Co = [0 0 0 1]; Do = 0;
sysO = ss(Ao,Bo,Co,Do);
hold on; step(sysO,20)
```

Observadores

- Considere-se um sistema dinâmico cujo comportamento é definido pelo espaço de estados (considere-se D=0, por simplicidade),
  - $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
  - $y(t) = Cx(t)$
- cujas variáveis de estado não estão todas disponíveis para medição direta. Então, pode recorrer-se a um observador de estado caracterizado pela seguinte equação
  - $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - C\hat{x}(t)\big)$
- Esta equação é conhecia como a equação de Luenberger
- onde $\hat{x}(t)$ representa a estimativa do vector de estado, y(t) é a variável de estado disponível para medida (saída) e L é uma matriz cujo objectivo é introduzir um factor de peso a um termo de correção baseado na diferença verificada entre a resposta medida y(t) e a resposta estimada $C\hat{x}(t)$

Observadores

- Defina-se o vector erro e(t) como sendo a diferença entre o vector de estado efetivo e o vector de estado estimado, ou seja
  - $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
  - $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$
  - $\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L\big(y(t) - C\hat{x}(t)\big)$
- e como $y(t) = Cx(t)$
  - $\dot{e}(t) = A\big(x(t) - \hat{x}(t)\big) - L(Cx(t) - C\hat{x}(t))$
  - $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$
- de onde se conclui que a dinâmica do erro é determinada pelos valores próprios da matriz $\boldsymbol{A-LC}$

Observadores

- Os valores próprios da matriz ***A-BK*** condicionam a dinâmica de uma estrutura

- Os valores próprios da matriz ***A-LC*** ditam o comportamento do observador na estimação das variáveis de estado. Por exemplo:
  - se os valores próprios da matriz ***A-LC*** estiverem em correspondência com frequências naturais e coeficientes de amortecimento elevados, o erro tenderá rapidamente para zero, da mesma maneira que uma estrutura também tenderia para a resposta nula.
  - Por outro lado, se os valores próprios de ***A-LC*** corresponderem a uma dinâmica baixa, o erro demora a estabilizar podendo até atingir valores elevados, o que também aconteceria à resposta estrutural de um sistema mecânico.
- Portanto, o dimensionamento de um observador de estado depende essencialmente da composição matriz ***L***, a qual se designa de **matriz de ganho do observador.**
- Será fácil perceber que, idealmente, a dinâmica associada à estimação das variáveis de estado terá necessariamente de ser caracterizada por valores próprios correspondentes a elevadas frequências e coeficientes de amortecimento, porque só assim se manterá o erro com um valor próximo de zero, produzindo-se desta maneira boas estimativas do vector de estado.

Observadores

- É geralmente aceite que a **dinâmica do observador deve ser, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápida do que a dinâmica do sistema em análise**, ou seja, o observador deve ter a capacidade de se antecipar relativamente ao comportamento da estrutura, de tal forma que o sistema de controlo baseie a sua actuação em valores fiáveis das variáveis de estado. A questão da rapidez está relacionada com o tempo que o sistema precisa para estabilizar dentro de uma margem pequena de erro, podendo ser quantificada através do tempo de estabelecimento.
- No entanto, a dinâmica do observador deve também ser limitada a valores aceitáveis porque, quanto maior for a sua dinâmica, maior será a sua sensibilidade a perturbações e ruído dos sensores.
    - Se o observador possuir uma dinâmica baixa, torna-se pouco sensível a estes fenómenos porque, tendo baixos ganhos, não consegue atuar energicamente sobre o erro.
    - Por outro lado, se o observador tiver uma dinâmica demasiado elevada caracterizada por ganhos excessivos, qualquer pequena flutuação do sinal faz disparar a ação de correção do erro, tornando o observador hipersensível.
    - Portanto, na prática, a imposição de uma dinâmica para o observador requer um compromisso equilibrado entre rapidez e sensibilidade, havendo muitas vezes a necessidade de calibrar "in-situ" a matriz de ganho do observador.

Observadores

- Relativamente à questão da determinação desta matriz, já foi feita referência à equivalência existente entre o comportamento de um sistema controlado e o desempenho de um observador.
- Por conseguinte, por analogia com os controladores, o problema da determinação da matriz ***L*** consiste em saber qual deverá ser a sua composição de tal forma que, definido um conjunto de valores próprios em correspondência com uma dinâmica que se quer implementar no observador, a matriz ***A-LC*** tenha esses valores próprios desejados.
- Este problema é um problema de alocação de polos cuja solução matemática pode ser encontrada seguindo processos semelhantes aos já expostos.
- Por último, refira-se que o estabelecimento da dinâmica do observador pode ser feita recorrendo a processos de optimização, tendo por base uma função objectivo. Um dos observadores mais conhecidos que segue esta estratégia é o **observador de Kalman**, o qual, além de definir a sua dinâmica, faz intervir a influência do ruído no processo de estimação (abordado eventualmente nos trabalhos práticos laboratoriais).
-

Observadores: matriz de ganho

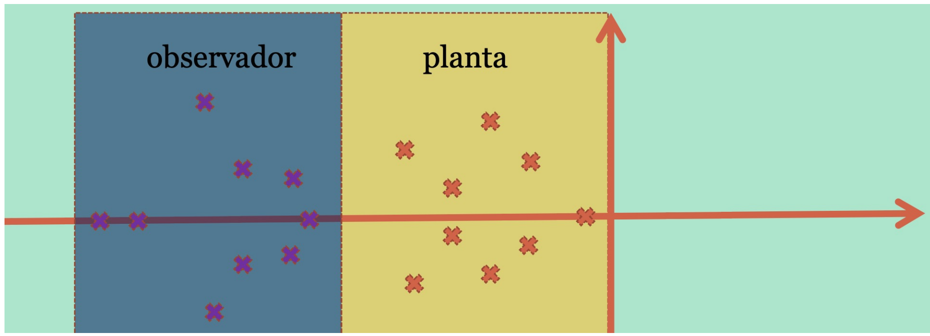
- A matriz de ganho de um determinado observador, que permita a observação completa do vector de estado, poderá ser encontrada se e só se o sistema em análise for completamente observável.
- Para simplicidade, supõe-se que a saída do sistema, caracterizada pela matriz ***C***, é composta por um só vector linha, ou seja, só existe uma variável de saída que pode ser uma variável de estado, ou então, uma relação entre várias variáveis de estado.
- Por conseguinte, a matriz de ganho do observador será, neste caso, composta por um único vector coluna.
  - Na situação de sistemas multivariáveis nos quais existam várias variáveis de saída, será necessário ter em conta o peso de cada uma dessas variáveis para a estimação do vector de estado, aumentando a complexidade do problema. Nestes casos mais gerais, a matriz de ganho terá tantas colunas quantas as variáveis de saída do sistema.

Observadores: matriz de ganho

- Comparando $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$ com $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$, onde os valores próprios de ***A-LC*** devem estar no semiplano esquerdo (negativos)
- Será posivel usar o método do posicionamento de polos (função *"place"* do Matlab) para determinar a matriz de fanho do observador?

- $(A - LC) \neq (A - BK)$
- Prova-se que os valores próprios de ***A*** são os mesmos de $\boldsymbol{A^T}$ e os valores próprios de $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})$ são os mesmos de $\left(\boldsymbol{A^T} - \boldsymbol{C^T L^T}\right)$ então pode usar-se a função "*place*"!

- É muito importante que o observador seja mais rápido que o sistema que ele observa, assim ele não introduz erros significativos na dinâmica do sistema controlado



Controladores e observadores: questões de implementação

- Na implementação real de um sistema de controlo de vibrações, será necessário ter em funcionamento paralelo:
  - um algoritmo dedicado à definição da ação de controlo,
  - e um outro algoritmo destinado à estimação do vector de estado em cada instante, caso este não se encontre disponível para medição directa.
  - Neste funcionamento conjunto, o observador alimenta o controlador, o qual, com base nas estimativas fornecidas e com base na matriz de realimentação adotada, a ação do atuador, para que a dinâmica pretendida seja efetivamente imposta à estrutura.

- Estando o controlador e o observador a funcionar simultaneamente, qual é o efeito que cada um exerce sobre o outro? Ou seja, um observador pode afectar o desempenho do controlador, e vice-versa?

- $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ e $u(t) = -K\hat{x}(t)$
- $\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK[x(t) - \hat{x}(t)]$
- $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t)$ e $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$
- e $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$

Controladores e observadores: questões de implementação

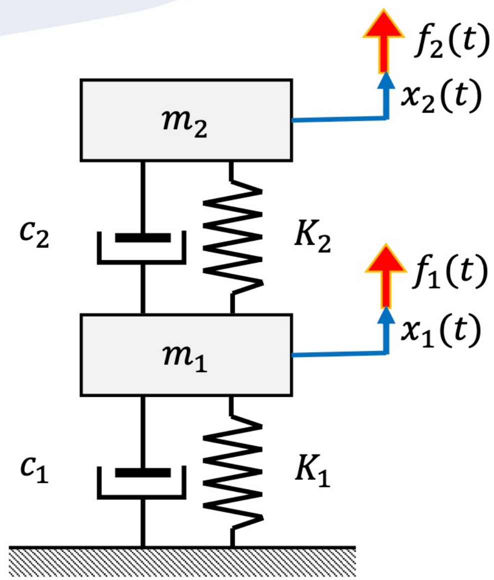
- Esta equação traduz o comportamento de uma estrutura controlada com base na observação completa do vector de estado. Então, a dinâmica global do sistema, dotado simultaneamente de um controlador e de um observador, pode ser avaliada calculando a equação característica respectiva

- $$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + BK \end{vmatrix} = |sI - A + BK|\,|sI - A + LC| = 0$$

- Como se pode constatar:
  - os valores próprios da matriz que caracteriza a dinâmica global são os valores próprios da matriz ***A-BK*** que caracteriza a dinâmica do controlador,
- mais os valores próprios de ***A-LC***, que caracteriza a dinâmica do observador, obtidos independentemente um do outro.
- Ou seja, o dimensionamento do sistema de controlo baseado na alocação dos poolos da matriz ***A-BK*** é independente do dimensionamento do observador de estado baseado na alocação dos pólos da matriz ***A-LC***.
- Ambos os sistemas podem ser dimensionados separadamente e, posteriormente, colocados a funcionar em conjunto, sem que haja interferências de um na dinâmica do outro.

Observadores: matriz de ganho

- Exemplo: projetar um controlador por realimentação de estado: a) sem observador; b) com observador supondo que o único estado medido é $x_1(t)$
  - Sistema com 2 graus de liberdade. Considere-se somente a força f_1 *e só a saída* x_1
    - $m_1\ddot{x}_1 = -(k_2+k_1)x_1 - (c_2+c_1)\dot{x}_1 + k_2x_2 + c_2\dot{x}_2$
    - $m_2\ddot{x}_2 = k_2x_1 + c_2\dot{x}_1 - k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 + f_2$



  - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2+k_1}{m_1} & -\frac{c_2+c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ $D = 0$

- $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\big(y(t) - C\hat{x}(t)\big)$
- $\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + [B \quad L]\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$ Novo espaço de estados
- A equação de saída é: $y_o = C_o\hat{x}(t)$ e, neste caso $C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observadores: matriz de ganho

- Simulação em Matlab: (TwoMassSemObservador.m)
- "pole placement" sem observador

```
close all; clear all
M1 = 1; M2 = 2; K1=10; K2 = 20; C1 = 0.1; C2 = 0.2; %% constantes
x10 = 0.618; x20 = 1; % Posições iniciais das massas
A = [0 1 0 0; -(K1+K2)/M1 -(C1+C2)/M1 K2/M1 C2/M1; 0 0 0 1; K2/M2 C2/M2 -K2/M2 -C2/M2]; % matriz A
B = [0; 1/M1; 0; 0]; % matrixz B - somente força aplicada em m1
C = eye(4); % matriz C - Identidade: todos os estados são sídas
D = [0;0;0;0]; % matriz D
x0 = [x10; 0; x20;0]; % vetor de estado inicial
sys = ss(A,B,C,D); % espaço de estados
initial(sys,x0,10); % simulação só com condições iniciais durante 5 segundos
Mc = ctrb(A,B); rank(Mc) %% verificação se o sistema é controlável
Mo = ctrb(A,C); rank(Mo) %% verificação se o sistema é observável


%% Controlo por realimentação de estado
P = [-2+4*i; -2-4*i; -1; -4]; %polos desejados para o controlo por realimentação de estado
K = place(A,B,P); % posicionamento de polos com a função place
Acl = A-B*K; % matriz do sistema em malha fechada
sysControl = ss(Acl,B,C,D); % espaço de estados
hold on; % para sobreposição dos resultados de simulação
initial(sysControl,x0,5); % simulação em malha fechada só com condições iniciais duurante 5 segundos
```

Observadores: matriz de ganho

- Simulação em Matlab: (TwoMassSemObservador.m)
- "pole placement" com observador

```
%% Controlo por realimentacao de estado com observador
C1 = [1 0 0 0]; % o systema tem só a saída Y = x1
D1 = 0;
AT = A'; CT = C1'; %Matrizes transpostas para cálculo da matris de ganho L com a função "place"
% posição desejada dos polos do observador, para cálculo matriz L (utilizar a matriz transposta de A de L e de C
Po = [-4+2*i; -4-2*i; -4; -5];
LT = place(AT, CT,Po); % matriz L transposta
L = LT'; % matriz de ganho L
Ao = A-L*C1; % matriz A do observador
Co = eye(4); % matriz de saída do observador: monitoriza todos os estados estimados
Bo = [B L]; % matriz de entrada do observador: o observador tem a entrada u e y
Do = [0 0 0 0; 0 0 0 0]'; % matriz de alimentação direta do observador


%% simulação do ficheiro de controlo em simulink
out = sim('TwoMassSpring_WithDamper_SimulinkComESemObservadorFinal.slx');
x1 = out.Data.signals(1).values;
dx1 = out.Data.signals(2).values;
x2 = out.Data.signals(3).values;
dx2 = out.Data.signals(4).values;
u_noise = out.Data.signals(5).values;
y_noise =out.Data.signals(6).values;
t = out.Data.time;
figure
subplot(2,1,1)
plot(t,x1(:,1),'r',t,x1(:,2),'-g',t,x1(:,3),'--b','LineWidth',2); legend('x1','x1 Est','x1 Sem Obs')
subplot(2,1,2)
plot(t,x2(:,1),'r',t,x2(:,2),'-g',t,x2(:,3),'--b','LineWidth',2); legend('x2','x2 Est','x2 Sem Obs')
```

Controlo de realimentação de estado ótimo: Linear quadratic regulator

- Se o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, for controlável,
- então é possível manipular arbitrariamente os valores próprios do sistema em malha fechada $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$ através da escolha de uma lei de controlo de realimentação em estado completo $u(t) = -Kx(t)$
- Isto pressupõe que:
  - estão disponíveis medições de estado completo (ou seja, C = I e D = 0, de modo que $y(t) = x(t)$).
  - se o sistema for observável, é possível construir uma estimativa de estado total a partir das medições dos sensores.
- Dado um sistema controlável, quer com medições do estado completo, quer um sistema observável com uma estimativa do estado completo, há muitas escolhas de leis de controlo estabilizadoras $u(t) = -Kx(t)$.
- É possível tornar os valores próprios do sistema em malha fechada *(A - BK)* arbitrariamente estáveis, colocando-os tão longe quanto desejado na metade esquerda do plano complexo.
- No entanto, valores próprios demasiado estáveis podem exigir despesas de controlo excessivamente dispendiosas e podem também resultar em sinais de ativação que excedam os valores máximos permitidos.

Controlo de realimentação de estado ótimo: Linear quadratic regulator

- A escolha de valores próprios "muito estáveis" pode também fazer com que o sistema de controlo reaja de forma excessiva ao ruído e às perturbações
- A estabilização excessiva pode degradar a robustez e pode levar à instabilidade se houver pequenos atrasos ou dinâmicas não modeladas.
- A escolha da melhor matriz de ganho K para estabilizar o sistema sem despender demasiado esforço de controlo é um objetivo importante no controlo ótimo.
- Deve ser encontrado um equilíbrio entre a estabilidade do sistema em malha fechada e a agressividade do controlo.
- É importante ter em conta as despesas de controlo para:
  - 1) evitar que o controlador reaja excessivamente a ruídos e perturbações de alta frequência,
  - 2) que a atuação não exceda as amplitudes máximas permitidas,
  - 3) que o controlo não seja proibitivamente dispendioso.

- Solução: utilizar uma função de custo que quantifique as "despesas" do controlo

Controlo de realimentação de estado ótimo: Linear quadratic regulator

- Em particular, a função de custo
  - $J(t) = \int_0^t \left(x(\tau)^T Qx(\tau) + u(\tau)^T Ru(\tau)\right) d\tau$
- equilibra o custo da regulação efetiva do estado com o custo do controlo.
- As matrizes ***Q*** **e** ***R*** **ponderam o custo dos desvios do estado em relação a zero e o custo da atuação, respetivamente**.
- A matriz ***Q*** é semi-definida positiva: $x^T Qx \geq 0 \; \forall x$ (1xn nxn nx1) =1x1
- e ***R*** é definida positiva $u^T Ru > 0 \; \forall u$ (1xm mxm mx1) =1x1
- estas matrizes são frequentemente diagonais e os elementos da diagonal podem ser ajustados para alterar a importância relativa dos objetivos de controlo.
- A adição de uma tal função de custo torna a escolha da lei de controlo um problema de otimização bem colocado, para o qual existe uma grande quantidade de técnicas teóricas e numéricas.

Controlo de realimentação de estado ótimo: Linear quadratic regulator

- A lei de controlo do regulador linear-quadrático (LQR): $u(t) = -K_r x(t)$ é concebida para minimizar $J = \ lim_{t\to\infty} J(t)$.

- O LQR é assim chamado porque é uma lei de controlo linear, concebida para um sistema linear, que minimiza uma função de custo quadrática, que regula o estado do sistema para $lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
- Como a função de custo é quadrática, existe uma solução analítica para os ganhos ótimos do controlador K_r, dada por $K_r = R^{-1}B^TS$
- em que *S* é a solução de uma equação algébrica de Riccati:
  - $A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q = 0$
- A resolução da **equação de Riccati** para ***S*** e, portanto, para $\boldsymbol{K_r}$, é numericamente robusta e já está implementada em muitas linguagens de programação

- Em Matlab, K_r pode ser obtida para A, B, Q e R:
  - >> Kr = lqr(A,B,Q,R);