



Mestrado em Engenharia Aeroespacial

Dinâmica e Controlo de Veículos Espaciais

Estudo Numérico e Experimental dos Modos de Vibração de uma Viga

Docente:
Rui Moreira

Alunos:
Magner Gusse 110180
Pedro Mendes 108063

Índice

1	Introdução	1
1.1	Contexto e Motivação	1
1.2	Objetivos	1
2	Fundamentos Teóricos	2
2.1	Modelo de Viga e Elementos Finitos	2
2.1.1	Matriz de Rigidez (K)	2
2.1.2	Matriz de Massa (M)	3
2.1.3	Cálculo das Frequências Naturais	3
2.2	Condições de Fronteira da Viga e Implicações nas Frequências Naturais . .	3
2.2.1	Viga Encastrada numa Extremidade e Livre na Outra	4
2.2.2	Viga Livre-Livre	4
2.2.3	Viga Simplesmente Apoiada	5
2.3	Tratamento de Dados	5
3	Metodologia e Procedimento	6
4	Resultados	9
4.1	Analíticos	9
4.2	Matlab	9
4.3	ANSYS	10
4.4	Visualização dos resultados	17
5	Conclusão	18
.1	Visualização dos Modos de Vibração	20
.2	Códigos Matlab	27
.3	Tabelas Vigas 400 e 500m (Média e Desvio Padrão)	43
.4	Gráficos FRF Viga de 500mm	48
.5	Correção do Módulo de Young no Ansys	49

Lista de Figuras

2.1	Modos Normais de Vibração de Viga Livre-Livre[4]	4
2.2	Modos Normais de Vibração de Viga Livre-Livre obtidos pelo método de Ritz	4
4.1	Análise de Convergência de Malha (Matlab)	10
4.2	Análise de Convergência de Malha (Ansys)	11
4.3	Função de resposta em frequência direta FRF's para a viga de 400 mm.	13
4.4	Função de resposta em frequência direta FRF_{61} para a viga de 400 mm.	13
4.5	Componente Imaginária da FRF direta FRF_{61} para a viga de 400 mm.	14
4.6	Componente Real da FRF direta FRF_{61} para a viga de 400 mm.	14
4.7	Módulo de Young Corrigido obtido com script auxiliar	15
4.8	Modo de torção - Ansys	17
4.9	Modo de flexão vertical - Ansys	17
1	Modo 1 FL - Ansys	20
2	Modo 2 FL - Ansys	20
3	Modo 3 FL - Ansys	20
4	Modo 4 FL - Ansys	20
5	Modo 5 FL - Ansys	20
6	Modo 6 FL - Ansys	20
7	Modo 1 FL - Matlab	21
8	Modo 2 FL - Matlab	21
9	Modo 3 FL - Matlab	21
10	Modo 4 FL - Matlab	21
11	Modo 5 FL - Matlab	21
12	Modo 6 FL - Matlab	21
13	Modo 1 de corpo Rígido LL - Ansys	22
14	Modo 2 de corpo Rígido LL - Ansys	22
15	Modo 1 LL - Ansys	22
16	Modo 2 LL - Ansys	22
17	Modo 3 LL - Ansys	22
18	Modo 4 LL - Ansys	22
19	Modo 5 LL - Ansys	23
20	Modo 6 LL - Ansys	23
21	Modo 1 de Corpo Rígido LL - Matlab	23
22	Modo 2 de Corpo Rígido LL - Matlab	23
23	Modo 1 LL - Matlab	23
24	Modo 2 LL - Matlab	23
25	Modo 3 LL - Matlab	23
26	Modo 4 LL - Matlab	23
27	Modo 5 LL - Matlab	24
28	Modo 6 LL - Matlab	24
29	Modo 1 SS - Ansys	25
30	Modo 2 SS - Ansys	25
31	Modo 3 SS - Ansys	25
32	Modo 4 SS - Ansys	25
33	Modo 5 SS - Ansys	25

34	Modo SS - Ansys	25
35	Modo 1 SS - Matlab	26
36	Modo 2 SS - Matlab	26
37	Modo 3 SS - Matlab	26
38	Modo 4 SS - Matlab	26
39	Modo 5 SS - Matlab	26
40	Modo 6 SS - Matlab	26
41	Função de resposta em frequência direta FRF's para a viga de 500 mm. . .	48
42	Função de resposta em frequência direta FRF_{61} para a viga de 500 mm. .	48
43	Componente Imaginária da FRF direta FRF_{61} para a viga de 500 mm. . .	49
44	Componente Real da FRF direta FRF_{61} para a viga de 500 mm.	49

Lista de Tabelas

3.1	Massas Volúmicas Experimentais	7
4.1	Frequências naturais para $L = 400\text{ mm}$	9
4.2	Frequências naturais para $L = 500\text{ mm}$	9
4.3	Frequências Naturais em Matlab ($l_1 = 400\text{ mm}$)	10
4.4	Frequências Naturais em Matlab ($l_2 = 500\text{ mm}$)	10
4.5	Frequências Naturais em Ansys ($l_1 = 400\text{ mm}$)	11
4.6	Frequências Naturais em Ansys ($l_2 = 500\text{ mm}$)	11
4.7	Frequências Naturais em Ansys elementos de Viga ($l_1 = 400\text{ mm}$)	12
4.8	Frequências Naturais em Ansys elementos de placa ($l_1 = 400\text{ mm}$)	12
4.9	Frequências Experimentais [Hz]	12
4.10	Frequências Naturais Analíticas para $l_1 = 400\text{ mm}$, c/correção	15
4.11	Frequências Naturais Analíticas para $l_2 = 500\text{ mm}$, c/correção	16
4.12	Frequências Naturais Numericamente (Matlab) para $l_1 = 400\text{ mm}$, c/correção	16
4.13	Frequências Naturais Numericamente (Matlab) para $l_2 = 500\text{ mm}$, c/correção	16
4.14	Frequências Naturais Numericamente (Ansys) para $l_1 = 400\text{ mm}$, c/correção	17
4.15	Frequências Naturais Numericamente (Ansys) para $l_2 = 500\text{ mm}$, c/correção	17
1	Análise de média e desvio padrão das frequências naturais experimentais ($l_1=500\text{mm}$)	44
2	Análise de média e desvio padrão das frequências naturais experimentais ($l_2=500\text{mm}$) - Modos 2:5,8,9	45
3	Análise de μ e σ das frequências naturais experimentais, $l_2=500\text{mm}$, Modo 6	46
4	Análise de μ e σ das frequências naturais experimentais, $l_2=500\text{mm}$, Modo 7	47

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contexto e Motivação

A análise de vibrações estruturais é uma etapa essencial no estudo da Dinâmica e Controlo de Veículos Aeroespaciais, dado que as frequências naturais de estruturas, como asas, fuselagens ou painéis, influenciam diretamente o desempenho, a segurança e a confiabilidade das aeronaves. Compreender o comportamento vibratório de sistemas estruturais permite evitar ressonâncias destrutivas, otimizar o projeto estrutural e garantir uma interação segura com os sistemas de controlo.

Neste contexto, este relatório foca-se na determinação, por métodos analíticos, numéricos (MATLAB e Software de Elementos Finitos) e experimentais, das frequências naturais de três sistemas de vigas com diferentes condições de fronteira: encastrada, livre-livre e simplesmente apoiada. Além disso, visa ajustar o modelo teórico através da identificação precisa de parâmetros materiais, como a massa volúmica (ρ) e o módulo de Young (E), garantindo maior exatidão no dimensionamento e na simulação de componentes estruturais aeroespaciais.

1.2 Objetivos

Os principais objetivos deste relatório são:

- Obter analiticamente, numericamente (Matlab e Software de Elementos Finitos) e experimentalmente as frequências associadas à vibração de 3 sistemas de viga: encastrada, livre e simplesmente apoiada;
- Determinar valores de ρ e E de forma a corrigir os modelos teóricos pré-definidos;
- Estudar as Funções de Resposta em Frequência obtidas experimentalmente;
- Automatizar processos de tratamento de dados, recorrendo ao Matlab

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo será explorado o impacto de parâmetros materiais e geométricos, como a massa volúmica (ρ) e o módulo de Young (E), nas matrizes de rigidez e massa, além de sua contribuição para o cálculo das frequências naturais.

2.1 Modelo de Viga e Elementos Finitos

A viga é uma estrutura que pode ser modelada como um sistema de barras flexíveis, sujeitas a deslocamentos transversais e rotações. O método de elementos finitos (FEM) divide a viga em pequenos elementos lineares, o que permite calcular a resposta de uma viga de maneira precisa. A viga 1D considerada recorrentemente tem dois graus de liberdade (DoF) por nó: o deslocamento transversal v e a rotação θ . A soma de todos os elementos de viga forma um sistema global de equações de movimento.

2.1.1 Matriz de Rigidez (K)

A matriz de rigidez K é uma representação das propriedades elásticas da viga. Esta está diretamente relacionada com a resistência da estrutura às deformações. A matriz de rigidez de cada elemento de viga pode ser derivada da teoria da elasticidade, tendo em consideração o módulo de Young E (que define a rigidez do material) e a geometria da viga (especificamente o momento de inércia da seção transversal I). Para um elemento de viga, a matriz de rigidez K_{elem} é dada pela seguinte fórmula:

$$K_{\text{elem}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix},$$

onde:

- E: Módulo de Young do material (medido em Pa).
- I: Momento de Inércia da seção transversal da viga (medido em m^4).
- L: Comprimento do elemento de viga (m).

O módulo de Young E representa a rigidez do material, ou seja, a sua resistência à deformação elástica. Quanto maior o valor de E , mais rígida será a viga e, portanto, maior será a sua resistência à flexão. O momento de inércia I depende da geometria da seção transversal da viga e descreve a distribuição da área de tal seção em relação ao eixo neutro, sendo crucial para determinar a flexibilidade de uma viga. No caso de uma viga com seção retangular, o momento de inércia I é calculado por:

$$I = \frac{bh^3}{12},$$

onde:

- b é a largura da secção transversal da viga,
- h é a espessura da secção transversal.

A matriz de rigidez global K é formada pelas contribuições de cada elemento, respeitando as condições de fronteira entre nós (por exemplo, as vibrações de um nó afetam as vibrações de nós vizinhos).

2.1.2 Matriz de Massa (M)

A matriz de massa M representa a distribuição de massa ao longo da viga e está associada à inércia da estrutura. A fórmula da matriz de massa de cada elemento de viga é dada por:

$$M_{\text{elem}} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix},$$

onde:

- ρ : Massa volúmica do material (em kg/m^3).
- A : Área da secção transversal da viga (em m^2).
- L : Comprimento do elemento de viga (m).

A massa volúmica ρ descreve a "quantidade" de massa por unidade de volume do material da viga. Assim, quanto maior a massa volúmica, maior será a massa associada ao elemento e, consequentemente, maior será sua inércia.

2.1.3 Cálculo das Frequências Naturais

O cálculo das frequências naturais da viga é realizado resolvendo o problema dos valores próprios (eigenvalue problem) do sistema de equações de movimento. O sistema de equações para o problema de vibração livre pode ser expresso como:

$$(K - \omega^2 M)\Phi = 0$$

onde:

- K é a matriz de rigidez global,
- M é a matriz de massa global,
- ϕ é o vetor próprio, que representa o modo de vibração,
- ω^2 é a frequência natural associada ao modo de vibração.

Para calcular as frequências naturais, é possível resolver o problema de valores próprios, ou seja, obtendo os valores de ω^2 que satisfazem a equação acima.

Esses valores de ω^2 representam as frequências naturais da viga, e os vetores próprios ϕ , que correspondem aos modos de vibração associados a essas frequências [2].

2.2 Condições de Fronteira da Viga e Implicações nas Frequências Naturais

A análise das frequências naturais e modos de vibração de uma viga depende fortemente das condições de fronteira do problema em questão. As condições de fronteira podem ser de três tipos principais: *encastrada*, *livre-livre* e *simplesmente apoiada*. Cada uma dessas condições afeta a rigidez e o comportamento dinâmico da viga de maneira diferente.

2.2.1 Viga Encastrada numa Extremidade e Livre na Outra

Uma viga encastrada numa ponta e livre na outra possui uma condição de fronteira onde um extremo está fixo, impedindo deslocamento e rotação, enquanto o outro extremo pode se mover livremente [1]. As condições de contorno para essa viga são:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} &= 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=L} &= 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

As vibrações iniciais são caracterizadas por uma deflexão maior no ponto livre e menor no ponto encastrado, com o primeiro modo de vibração exibindo uma flexão acentuada na extremidade livre.

2.2.2 Viga Livre-Livre

Numa viga *livre* ambos os extremos não estão restritos, ou seja, a viga pode mover-se livremente. As condições de fronteira para uma viga livre-livre são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0} &= 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=L} &= 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

No caso desta condição, os modos normais de vibração serão os presentes na figura 2.1, e obtidos com simulação pelo método de Ritz, conforme a figura 2.2. Esta última permite obter uma relação entre a amplitude máxima e o modo de vibração respetivo.

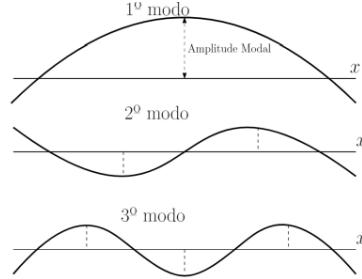


Figura 2.1: Modos Normais de Vibração de Viga Livre-Livre[4]

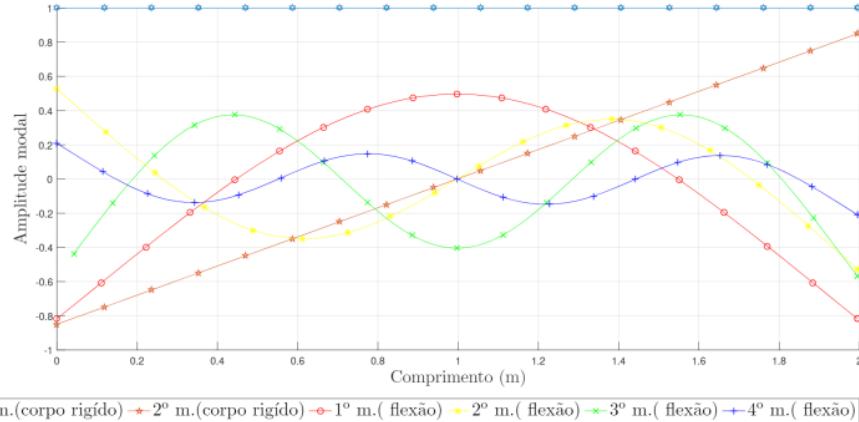


Figura 2.2: Modos Normais de Vibração de Viga Livre-Livre obtidos pelo método de Ritz

Conclui-se, portanto, que modos de vibração superiores estão associados a amplitudes modais menores.

2.2.3 Viga Simplesmente Apoiada

Uma viga *simplesmente apoiada* possui um apoio em cada extremidade, mas sem restrição de rotação. As condições de fronteira são:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = 0 &\quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0, \\ w|_{x=L} = 0 &\quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=L} = 0. \end{aligned}$$

2.3 Tratamento de Dados

O desvio padrão, σ , é uma medida da variação ou dispersão dos dados em relação à média.

Quando se realiza um procedimento experimental e são obtidos vários dados, é essencial efetuar uma análise da média e do desvio padrão para compreender a dispersão dos resultados.

Um desvio padrão baixo indica que os dados estão concentrados junto da média, enquanto que um desvio padrão superior sugere que os dados estão mais dispersos. Quando o desvio padrão é próximo de zero, significa que os pontos de dados estão muito próximos da média; já um desvio padrão maior reflete uma maior distância dos pontos em relação à média.

Para calcular o desvio padrão, deve-se usar a fórmula $\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}\right)}$, em que σ é o desvio padrão, x_i é cada ponto de dados individual no conjunto, μ é a média e N é o número total de pontos dos dados recolhidos.

Com esses dados é possível concluir que 68% dos dados estudados têm em média σ mais ou menos μ [3].

Capítulo 3

Metodologia e Procedimento

Conforme indicado nos objetivos foram feitos 3 tipos de análises.

Em primeiro lugar foi feita uma análise pelo método analítico aproximado, para perceber quais seriam os modos normais de vibração dos 3 casos de estudo, e em seguida o processo passou por utilizar o código de Matlab, presente nos Anexos, para visualizar os modos de vibração, e obter as frequências a que estes ocorreriam.

Foram analisadas 2 barras, de comprimento $l_1 = 400mm$ e $l_2 = 500mm$. Assimiu-se que ambas tinham uma secção retangular de 3 x 30mm, módulo de Young $E = 70GPa$ (Alumínio) e massa volúmica $\rho = 2700 \frac{kg}{m^3}$.

De seguida, foi desenvolvido um modelo em ANSYS que foi posteriormente simulado para, mais uma vez, visualizar-se os modos de vibração, e obter as frequências dos mesmos.

Já experimentalmente, foram utilizadas duas "réguas", cujas propriedades estariam próximas daquelas mencionadas acima, e através de um aparelho de medição próprio, obtiveram-se as frequências dos picos das FRF's, para as 3 condições de fronteira distintas.

Com os resultados experimentais, calculou-se o valor de ρ real das barras usadas, de modo a introduzir esses valores nos modelos em Matlab e ANSYS. Os valores de E foram obtidos ao testar para vários valores, de forma iterativa, aproximando o máximo possível as frequências teóricas das frequências obtidas experimentalmente.

Método analítico aproximado

Neste método, são considerados todos os parâmetros que caracterizam as vigas em estudo, sendo estes a massa, comprimento da viga, módulo de Young e o momento de Inércia, onde:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Deste modo, as frequências naturais associadas a cada um dos modos naturais é dada por:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}},$$

onde: λ é um factor associado a cada tipo de fixação e m está expresso em kg/m.

Assim sendo, o fator λ para cada tipo de fixação corresponde a:

- Viga biapoiada: $\lambda_{SS} = i \cdot \pi$
- Viga Livre: $\lambda_{LL} = (2i + 1) \cdot \pi/2$
- Viga encastrada: $\lambda_{FL} = (2i - 1) \cdot \pi/2$

Procedimento Experimental

Preparação

Após a obtenção dos valores teóricos e simulados em Matlab e ANSYS, obteve-se a massa das duas "réguas" usadas que, com a área da secção da viga e o comprimento total da viga, permite chegar à massa volúmica real:

$$\rho = \frac{m_i}{V}, \quad \text{onde} \quad V = b \cdot h \cdot l_i$$

Substituindo V na fórmula da massa volúmica:

$$\rho = \frac{m_i}{b \cdot h \cdot l_i}$$

Portanto:

$$\rho = \frac{m_i}{A \cdot l_i}, \quad \text{onde} \quad A = b \cdot h$$

Como $b = 0.03 \text{ m}$ e $h = 0.003 \text{ m}$, temos:

$$A = b \cdot h = 0.03 \cdot 0.003 = 9 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Foram considerados os dois casos com duas massas distintas (m_1 e m_2) e dois comprimentos diferentes (l_1 e l_2) para despistar possíveis erros de medição.

Tabela 3.1: Massas Volúmicas Experimentais

	1 (m)	m (kg)	A (m²)	$\rho(kgm^{-3})$
1	4.00E-01	0.09256	9.00E-05	2.571E+03
2	5.00E-01	0.11565	9.00E-05	2.571E+03

Substituiu-se então a massa volúmica obtida, experimentalmente, nos scripts desenvolvidos para análise teórica e simulada em Matlab, assim como em ANSYS e, iterativamente, obteve-se o valor ideal do módulo de Young que aproximava os dois tipos de soluções. Os valores experimentais foram obtidos, medindo a força aplicada ao longo do tempo, e a resposta em frequência com um acelerômetro.

Realização

Utilizou-se um martelo de impacto instrumentado DJB IH/01-50 (103mV/N) e um acelerômetro ICP miniatura Dytran 3225F (1.0707mV/ms-2) para obter as funções de resposta em frequência de cada viga.

Para isso, as duas réguas foram apoiadas em dois elásticos, com o centro a meia distância entre esses dois elásticos. Isto permitiu recriar a condição de viga livre-livre, já que os elásticos utilizados para apoiar a viga minimizam as restrições impostas nas extremidades, permitindo que a viga vibre de forma muito próxima à condição ideal de liberdade total.

De seguida foi utilizado o martelo de impacto para impor uma força, idealmente, na forma de um impulso com $\Delta t \approx 0$, difícil de conseguir. Esta força foi aplicada num ponto perto de um antinodo, já que se torna mais eficiente para excitar modos naturais, e fora do local onde foi instalado o acelerômetro. Este último na posição 7 na viga de 500 mm, e na posição 6 na viga de 400 mm, posições estas que evitam os nodos, já que resultaria em medições nulas.

O acelerômetro foi utilizado para medir diretamente a **Função de Resposta em Frequência (FRF)**, sendo a **acelerância** ($\frac{\text{aceleração}}{\text{força}}$) o parâmetro mais relevante obtido. A FRF é uma função que relaciona a força aplicada num ponto da viga, medida pelo martelo de impacto, com a resposta da vibração da viga, medida na forma de aceleração pelo acelerômetro, em função da frequência.

O martelo de impacto está equipado com um sensor que mede a **força aplicada** ($F(t)$) no domínio do tempo, enquanto o acelerómetro mede a **aceleração da viga** ($a(t)$) no ponto em que está fixado, também no domínio do tempo. Esses sinais são então convertidos para o domínio da frequência usando a **Transformada de Fourier**, resultando em $F(f)$ e $a(f)$, respetivamente. Com essas grandezas, a FRF ($H(f)$) é calculada como a razão entre a resposta ($a(f)$) e a entrada ($F(f)$):

$$H(f) = \frac{a(f)}{F(f)}$$

Dependendo da grandeza medida, a FRF pode ser expressa como:

- **Acelerância:** $\frac{\text{aceleração}}{\text{força}}$ – a forma mais comum.
- **Mobilidade:** $\frac{\text{velocidade}}{\text{força}}$.
- **Complacência:** $\frac{\text{deslocamento}}{\text{força}}$.

A FRF permite identificar as frequências naturais da viga, que aparecem como picos na função. Esses picos indicam os modos de vibração, e a análise detalhada pode fornecer informações sobre rigidez, amortecimento e distribuição de massa.

Em resumo, o martelo fornece a entrada (força aplicada), e o acelerómetro mede a saída (aceleração). A relação entre essas grandezas no domínio da frequência forma a FRF, cuja análise ajuda a compreender as propriedades dinâmicas da viga.

As funções de resposta em frequência foram disponibilizadas, em ficheiros .mat para os dois casos. Utilizando esses ficheiros, desenvolveu-se um script para identificar automaticamente as frequências experimentais, presente nos Anexos.

Este script permite obter os picos do gráfico da parte imaginária das várias FRF's, e efetuar a correção para a média, para valores muito próximos entre si. De forma a obter os valores únicos de frequências os valores para deteção mínima neste ponto foram superiores o suficiente para garantir que ruído não interferisse, e baixo o suficiente para garantir que nenhum pico relevante não fosse tido em consideração.

Numa primeira análise e para dar origem aos resultados da tabela 4.9, utilizou-se todo o script, e um valor de tol , tolerância, médio. Ou seja, para fazer uma análise mais grosseira e inicial para trabalho paralelo.

Numa segunda análise, da média e desvio padrão, diminuiu-se o parâmetro tol para perceber quais as frequências que estariam mais afetadas de erro, e ter maior precisão.

No caso da Viga de 400 mm, esta análise resultou nos mesmos valores de Frequência Natural, enquanto que para 500 mm, esta análise resultou em ligeiras variações.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Analíticos

Os valores obtidos com base nas equações apresentadas previamente apresentam-se nas tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Frequências naturais para $L = 400$ mm

i	λ_{SS}	$f_i(SS)$	λ_{LL}	$f_i(LL)$	λ_{FL}	$f_i(FL)$
1	3.141	43.291	4.712	97.405	1.570	10.823
2	6.283	173.164	7.853	270.569	4.712	97.405
3	9.424	389.619	10.995	530.315	7.853	270.569
4	12.566	692.656	14.137	876.643	10.995	530.315
5	15.707	1082.275	17.278	1309.553	14.137	876.643
6	18.849	1558.476	20.420	1829.045	17.278	1309.553
7	21.991	2121.259	23.561	2435.119	20.420	1829.045
8	25.132	2770.624	26.703	3127.775	23.561	2435.119

Tabela 4.2: Frequências naturais para $L = 500$ mm

i	λ_{SS}	$f_i(SS)$	λ_{LL}	$f_i(LL)$	λ_{FL}	$f_i(FL)$
1	3.142	27.706	4.712	62.339	1.571	6.927
2	6.283	110.825	7.854	173.164	4.712	62.339
3	9.425	249.356	10.996	339.401	7.854	173.164
4	12.566	443.300	14.137	561.051	10.996	339.401
5	15.708	692.656	17.279	838.114	14.137	561.051
6	18.850	997.425	20.420	1170.589	17.279	838.114
7	21.991	1357.606	23.562	1558.476	20.420	1170.589
8	25.133	1773.200	26.704	2001.776	23.562	1558.476

4.2 Matlab

Frequências Naturais

Utilizou-se o script Matlab fornecido para calcular as frequências numericamente. Inicialmente, fez-se uma análise de convergência, num script auxiliar, que indica o número mínimo de elementos ideal, para uma tolerância muito baixa ($1e-4$ %).

Obteve-se o gráfico da Figura 4.1, e o número de elementos ideal determinado foi 18 elementos. Esta análise foi feita para as duas vigas, já que bastava mudar o comprimento, ou seja, a variável L_t . O número de elementos ideal foi o mesmo, pelo que apenas se apresenta o gráfico obtido para a viga de comprimento $l_1 = 400$ mm.

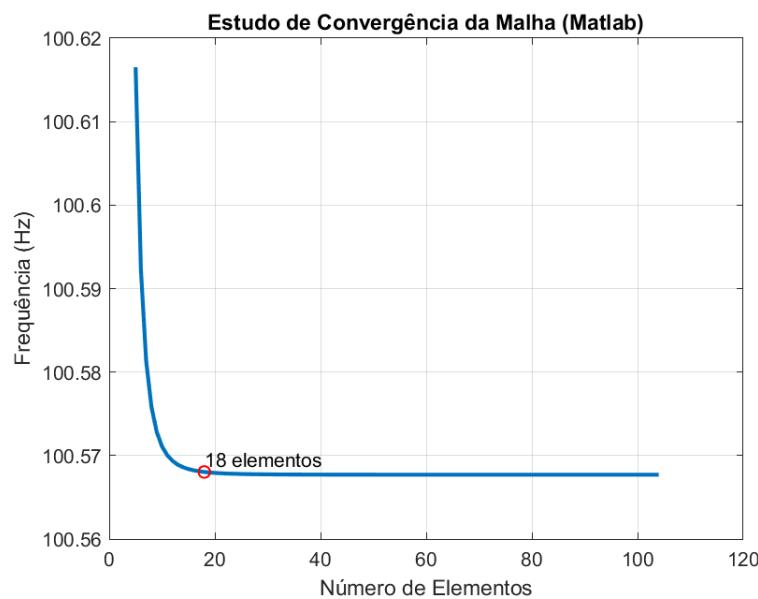


Figura 4.1: Análise de Convergência de Malha (Matlab)

Sabendo o número de elementos ideal, apresentam-se as tabelas com os valores de frequência obtidos para a viga de 500mm 4.4, e 400mm 4.15, nas 3 situações estudadas, para $E = 70GPa$ e $\rho=2700 \text{ kgm}^{-3}$.

Para o caso das vigas Livre-Livre, verificam-se dois valores iniciais, aproximadamente 0, que correspondem aos modos de corpo rígido.

Tabela 4.3: Frequências Naturais em Matlab ($l_1 = 400mm$)

Frequências Matlab [Hz] l_1			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F1	98.14	15.42	43.29
F2	270.52	96.65	173.17
F3	530.37	270.63	389.64
F4	876.86	530.36	692.77
F5	1310.28	876.87	1082.70
F6	1831.00	1310.29	1559.74

Tabela 4.4: Frequências Naturais em Matlab ($l_2 = 500mm$)

Frequências Matlab [Hz] l_2			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F1	62.81	9.87	27.71
F2	173.13	61.86	110.83
F3	339.44	173.20	249.37
F4	561.19	339.43	443.37
F5	838.58	561.20	692.93
F6	1171.84	838.59	998.23
F7	1561.38	1171.87	1359.62
F8	2007.79	1561.45	1777.63

4.3 ANSYS

Frequências Naturais

Como forma de iniciar a análise, também foi feito uma análise de convergência de malha como forma de determinar o número ideal de elementos que melhor aproxima os resultados do real. Esta análise foi feita analisando o primeiro modo normal de vibração da Viga de 400mm, usando elementos sólidos.

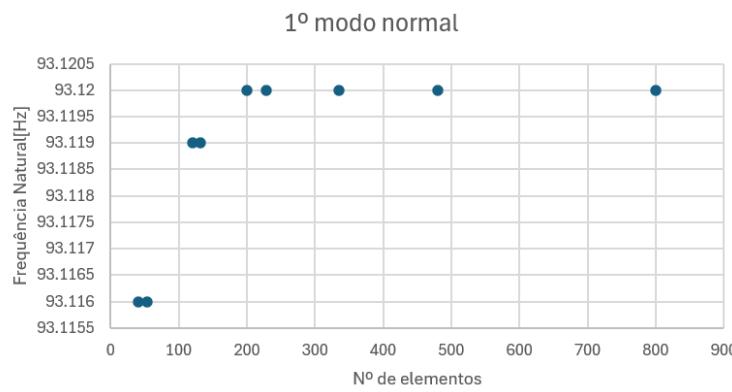


Figura 4.2: Análise de Convergência de Malha (Ansys)

Assim sendo, a melhor opção de malha, surge a partir dos 200 elementos, e com essa informação pode-se seguir passar à retirada dos dados de simulação, nas três condições, com $E = 70GPa$ e $\rho=2700 \text{ kgm}^{-3}$. Apresentam-se as tabelas com os valores de frequência obtidos para a viga de 500mm 4.6, e 400mm 4.5, nas 3 situações estudadas.

Tabela 4.5: Frequências Naturais em Ansys ($l_1 = 400mm$)

Frequências Ansys [Hz] l1			
Modos Corpo Rígido	Livre	Encastrado	SS
	0.00E+00	0.00E+00	
F1	9.81E+01	1.55E+01	4.32E+01
F2	2.71E+02	9.71E+01	1.73E+02
F3	5.31E+02	2.72E+02	3.90E+02
F4	8.78E+02	5.33E+02	6.94E+02
F5	1.31E+03	8.82E+02	1.08E+03
F6	1.83E+03	1.31E+03	1.56E+03
F7	2.44E+03	1.84E+03	2.13E+03
F8	3.13E+03	2.45E+03	2.78E+03

Tabela 4.6: Frequências Naturais em Ansys ($l_2 = 500mm$)

Frequências Ansys [Hz] l2			
Modos Corpo Rígido	Livre	Encastrada	SS
	0.00E+00	0.00E+00	
	2.30E-02		
F1	6.28E+01	9.91E+00	2.77E+01
F2	1.73E+02	6.21E+01	1.10E+02
F3	3.39E+02	1.73E+02	2.49E+02
F4	5.61E+02	3.41E+02	4.44E+02
F5	8.40E+02	5.63E+02	6.94E+02
F6	1.17E+03	8.42E+02	1.00E+03
F7	1.56E+03	1.17E+03	1.36E+03
F8	2.01E+03	1.57E+03	1.78E+03

Foi ainda feita uma comparação com os casos de uso de elementos de viga e elementos de placa, ao invés dos elementos sólidos, segue nas tabelas 4.7 e 4.8 os resultados.

Tabela 4.7: Frequências Naturais em Ansys elementos de Viga ($l_1 = 400mm$)

Frequências Ansys [Hz] l1			
Modo	Livre	Encastrada	SS
F1	9.31E+01	1.46E+01	4.11E+01
F2	2.57E+02	9.17E+01	1.64E+02
F3	5.03E+02	2.57E+02	3.69E+02
F4	8.30E+02	5.02E+02	6.56E+02
F5	1.24E+03	8.30E+02	1.02E+03
F6	1.73E+03	1.24E+03	1.47E+03
F7	2.30E+03	1.73E+03	2.00E+03
F8	2.95E+03	2.30E+03	2.61E+03

Tabela 4.8: Frequências Naturais em Ansys elementos de placa ($l_1 = 400mm$)

Frequências Ansys [Hz] l1			
Modo	Livre	Encastrada	SS
F1	9.82E+01	1.55E+01	4.33E+01
F2	2.71E+02	9.71E+01	1.73E+02
F3	5.32E+02	2.72E+02	3.91E+02
F4	8.82E+02	5.34E+02	6.97E+02
F5	1.32E+03	8.84E+02	1.09E+03
F6	1.85E+03	1.32E+03	1.58E+03
F7	2.35E+03	1.85E+03	2.15E+03
F8	3.16E+03	2.48E+03	2.82E+03

Com estes resultados, pode ser concluído que os resultados para elementos de placa e sólidos são os que mais se aproximam dos resultados analíticos, no entanto os resultados dos elementos em viga se aproximam dos resultados experimentais em 4.9.

Experimentais

As frequências naturais obtidas experimentalmente encontram-se na tabela 4.9, para os parâmetros iniciais ($\rho = 2700kgm^{-3}$ e $E = 70GPa$), no caso da Viga Livre.

Tabela 4.9: Frequências Experimentais [Hz]

F_{exp} [Hz] Viga Livre		
	l1	l2
F1	93.75	60
F2	256.25	163.75
F3	503.75	322.25
F4	837.50	534.38
F5	1247.5	795
F6	1738.75	1126.25
F7	—	1491.25
F8	—	1761.88
F9	—	1907.50

Verificaram-se modos de corpo rígido, a frequências muito inferiores e com baixa amplitude. No caso, estas frequências situam-se entre 1.25, 2.5, 5 e 7.5 Hz.

Análise de FRF's

Com os ficheiros .mat fornecidos, é possível gerar 3 tipos de gráficos para representar a resposta em frequência deste sistema.

Pode-se mostrar a parte real, a parte imaginária ou o valor absoluto. A parte real representa a amplitude da resposta, o argumento determina o ângulo de fase, (desfasamento) entre a resposta e a excitação.

Para o caso da viga com comprimento $l_1 = 400\text{mm}$ apresentam-se 4 figuras.

Em primeiro lugar, um gráfico, Fig.4.3, que junta todas as respostas da magnitude de todas as FRF's, com y em formato logarítmico.

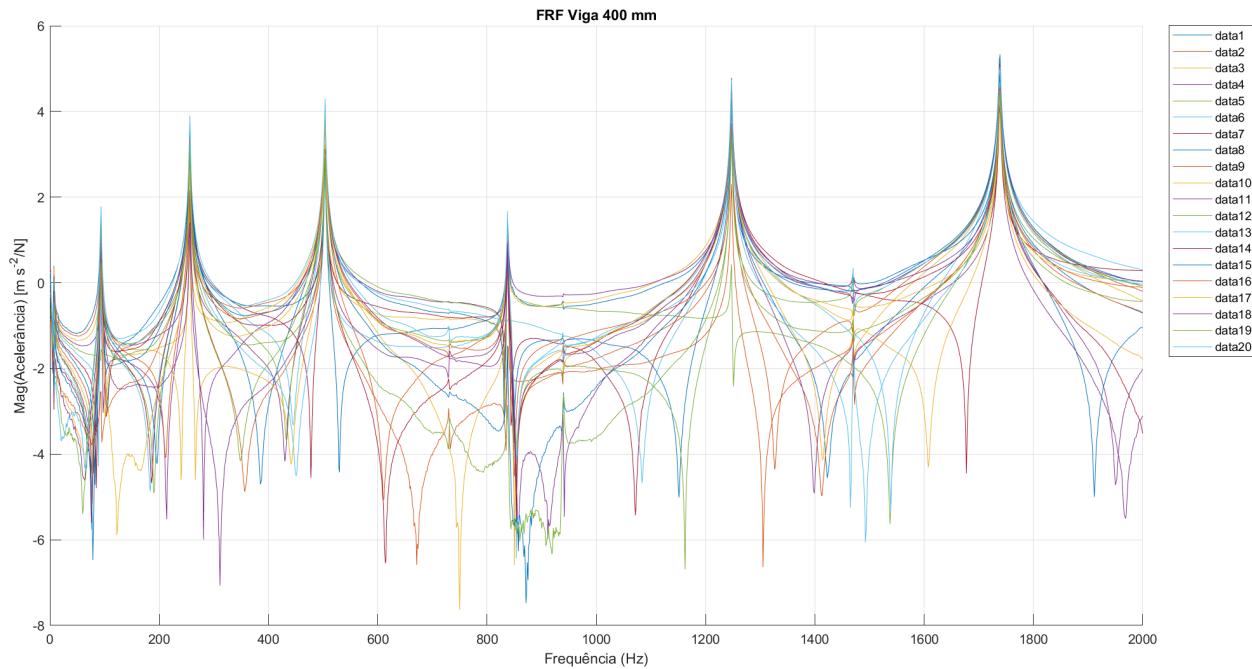


Figura 4.3: Função de resposta em frequência direta FRF's para a viga de 400 mm.

Nesta figura, é possível constatar que os picos de todas as tentativas se alinham e focam em picos específicos, às frequências naturais.

Por outro lado, apresenta-se um gráfico, Fig.4.4, que mostra a resposta da magnitude de uma FRF que mostra todas as frequências naturais, com y em formato logarítmico. Assinalaram-se as frequências que foram anotadas e obtidas previamente. Junto aos oHz, é possível verificar um pico correspondente a um modo de corpo rígido.

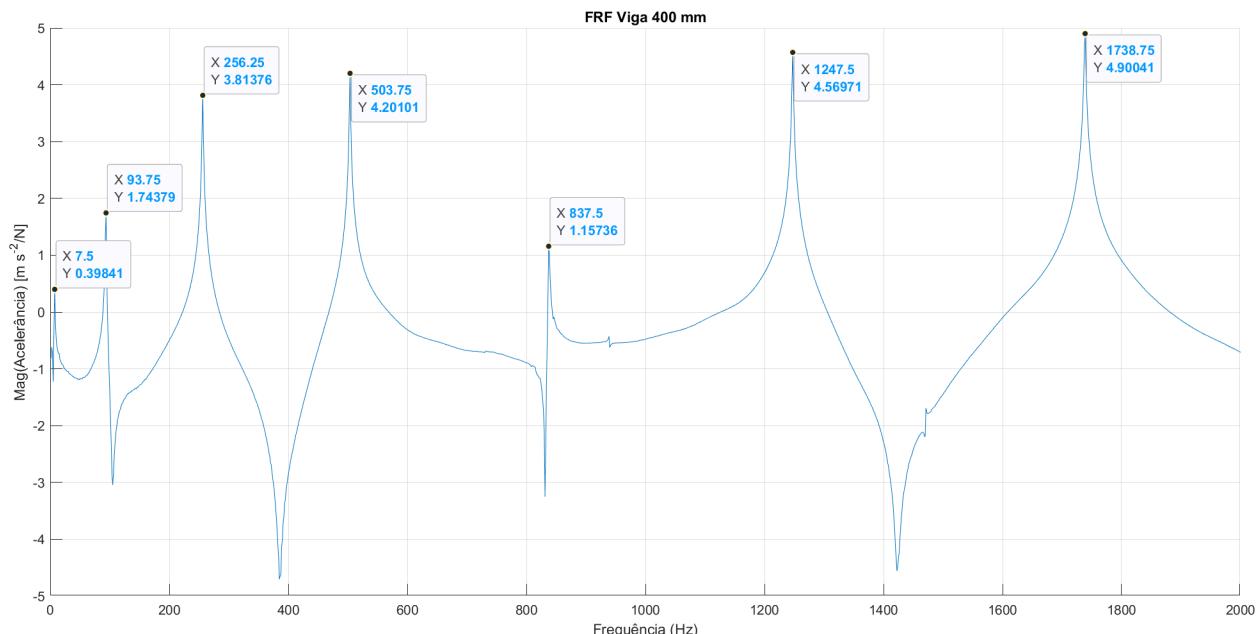


Figura 4.4: Função de resposta em frequência direta FRF_{61} para a viga de 400 mm.

Estas frequências também se observam quer no gráfico apenas da componente real, Fig.4.6, quer da componente imaginária, Fig.4.5, das FRF's.

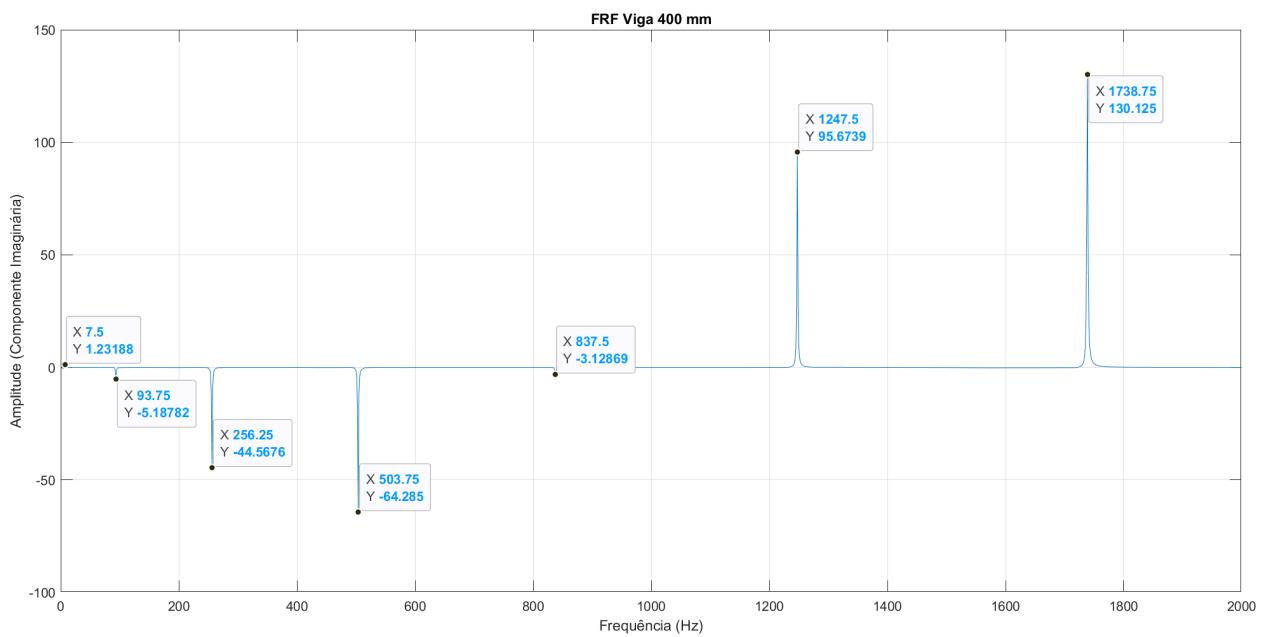


Figura 4.5: Componente Imaginária da FRF direta FRF_{61} para a viga de 400 mm.

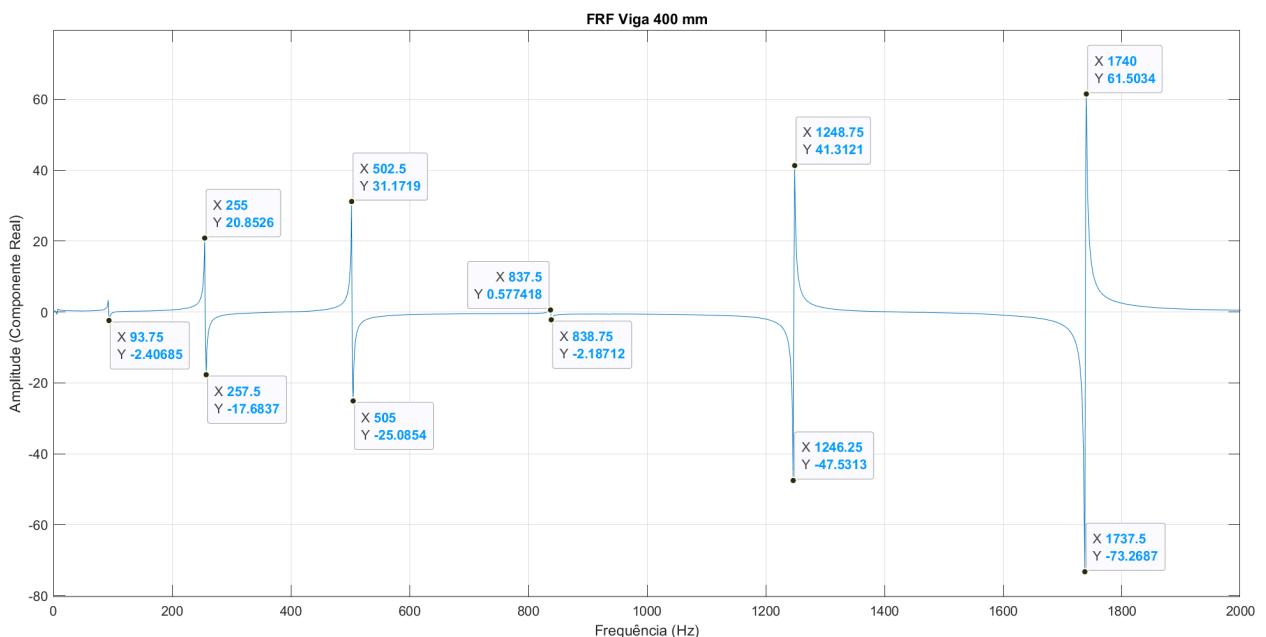


Figura 4.6: Componente Real da FRF direta FRF_{61} para a viga de 400 mm.

Como é possível constatar, para a componente real as frequências naturais revelam maior dispersão, e os resultados obtidos na análise da componente imaginária encontram-se aproximadamente na média dos valores encontrados para a componente real.

Portanto, é possível fazer esta mesma análise, e gerar estes mesmos gráficos para o caso da Viga com 500 mm, cujas imagens estão nos Anexos.

Além disso, sabendo que os picos da componente imaginária (que ocorrem nas frequências naturais) descrevem as amplitudes de cada grau de liberdade em cada um dos modos naturais, é possível concluir que os picos correspondem aos deslocamentos relativos da viga, nos pontos 6 ou 7.

Correção Experimental

Como mencionado na *Metodologia*, obteve-se o ρ real, derivado de dados experimentais. Para obter o Módulo de Young, E , ideal no caso da aproximação teórica e numericamente pelo Matlab, utilizaram-se dois scripts em Matlab, que de forma iterativa, calculavam as 8 frequências para um valor de E crescente, fazendo a diferença com os valores experimentais.

Ainda neste processo, era calculado o valor absoluto dessa diferença e feita a média, tendo em conta o número de frequências obtidas experimentalmente. Como se verificou uma tendência decrescente da média, quando o valor em $k + 1$ fosse maior que em k , o processo iterativo terminava e apresentava uma frase com o valor de E ideal, e a média das diferenças que levavam a este resultado.

Este script encontra-se nos Anexos, e o valor de E após correção de resultados analíticos foi de 60.3 GPa, e numericamente no matlab foi de 60.2 GPa.

O output deste script de automatização está na figura 4.7.

```
>> obter_E
Analiticamente: Módulo de Young Corrigido: 60.3 GPa, com ...variação 1.567
Numericamente: Módulo de Young Corrigido: 60.2 GPa, com ...variação 1.566
```

Figura 4.7: Módulo de Young Corrigido obtido com script auxiliar

Fazendo a mesma correção no Ansys, fazendo iterações de cálculos, o modelo que aproxima o máximo possível a teoria e a prática corresponde a usar $\rho = 2571 \text{ kgm}^{-3}$ e $E = 60 \text{ GPa}$, as tabelas de iterações usadas para fazer o cálculo encontram-se nos anexos.

Os valores ideias de E , de forma a corrigir os modelos simulados, estão bastante próximos, entre 60 e 60.3 GPa.

Isto indica que o nosso modelo inicial estava a considerar maior rigidez da estrutura considerada.

Frequências com Correção do Módulo de Young

Corrigindo os valores do módulo de Young e massa volúmica, obtiveram-se as tabelas em baixo, com as frequências obtidas após cálculos analíticos e simulação.

Analítico

Tabela 4.10: Frequências Naturais Analíticas para $l_1 = 400 \text{ mm}$, c/correção

Frequências [Hz]			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F ₁	92.65	10.29	41.18
F ₂	257.35	92.65	164.70
F ₃	504.40	257.35	370.58
F ₄	833.80	504.40	658.81
F ₅	1245.56	833.80	1029.39
F ₆	1739.66	1245.56	1482.32
F ₇	2316.12	1739.66	2017.60
F ₈	2974.93	2316.12	2635.23

Tabela 4.11: Frequências Naturais Analíticas para $l_2 = 500mm$, c/correção

Frequências [Hz]			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F ₁	59.29	6.59	26.35
F ₂	164.70	59.29	105.41
F ₃	322.82	164.70	237.17
F ₄	533.63	322.82	421.64
F ₅	797.16	533.63	658.81
F ₆	1113.38	797.16	948.68
F ₇	1482.32	1113.38	1291.26
F ₈	1903.95	1482.32	1686.55

Matlab

Tabela 4.12: Frequências Naturais Numericamente (Matlab) para $l_1 = 400mm$, c/correção

Frequências [Hz]			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F ₁	93.42	14.68	41.21
F ₂	257.52	92.00	164.84
F ₃	504.87	257.62	370.91
F ₄	834.71	504.86	659.46
F ₅	1247.28	834.71	1030.65
F ₆	1742.97	1247.30	1484.75
F ₇	2322.35	1743.00	2022.26
F ₈	2986.34	2322.45	2644.00

Tabela 4.13: Frequências Naturais Numericamente (Matlab) para $l_2 = 500mm$, c/correção

Frequências [Hz]			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F ₁	59.79	9.40	26.37
F ₂	164.81	58.88	105.50
F ₃	323.12	164.88	237.38
F ₄	534.21	323.11	422.10
F ₅	798.26	534.21	659.61
F ₆	1115.50	798.27	950.24
F ₇	1486.30	1115.52	1294.25
F ₈	1911.26	1486.37	1692.16

ANSYS

Tabela 4.14: Frequências Naturais Numericamente (Ansys) para $l_1 = 400$ mm, c/correção

Frequências [Hz]			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F ₁	93.12	14.718	41.08
F ₂	256.82	92.203	164.4
F ₃	503.83	258.18	370.2
F ₄	833.57	506.06	658.75
F ₅	1246.3	836.93	1030.3
F ₆	1742.1	1250.9	1485.1
F ₇	2320.9	1747.9	2023.1
F ₈	2982.5	2328	2644.2

Tabela 4.15: Frequências Naturais Numericamente (Ansys) para $l_2 = 500$ mm, c/correção

Frequências [Hz]			
Modo	Livre	Encastrado	SS
F ₁	29.594	9.4089	26.29
F ₂	164.33	58.951	105.19
F ₃	322.31	165.07	236.81
F ₄	533.14	323.53	421.28
F ₅	796.98	535.01	658.76
F ₆	1114	799.58	949.38
F ₇	1484.1	1117.3	1293.2
F ₈	1907.5	1488.3	1690.4

4.4 Visualização dos resultados

De seguida foi possível visualizar estes modos normais na viga encastrada, livre-livre e simplesmente apoiada, sendo que assim melhor se pode estudar o comportamento da viga para cada um dos modos normais. Os gráficos apresentados nos Anexos representam os casos onde a correção experimental foi feita.

Esta representação foi feita no Ansys e no Matlab, permitindo ainda analisar se o comportamento se repete, validando os dois métodos, sendo importante mencionar que os resultados do Matlab apresentados, contêm um fator de amplificação de **16.4349** como forma de melhor os visualizar.

Nestes modos é possível ver o aumento do número de nodos, onde não há movimento (deslocamento zero).

Foi ainda possível, do Ansys, visualizar e retirar além dos modos normais de flexão, alguns modos de torção e flexão em torno do eixo vertical.

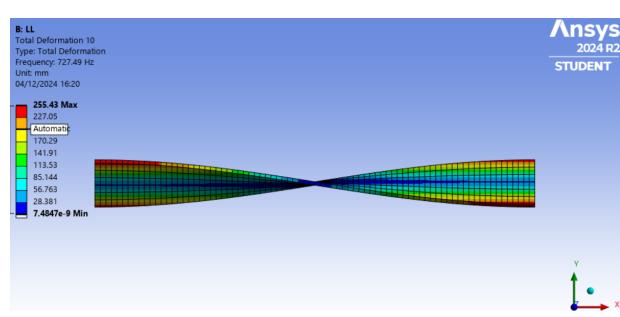


Figura 4.8: Modo de torção - Ansys

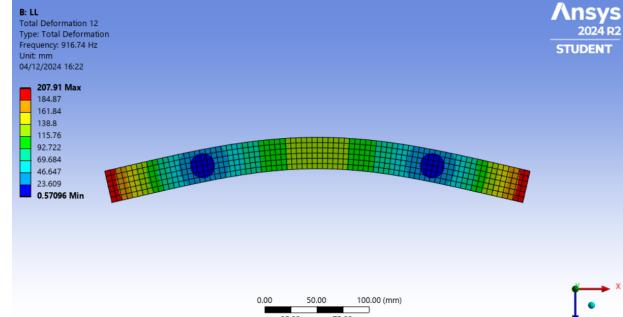


Figura 4.9: Modo de flexão vertical - Ansys

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, foi realizada uma análise modal teórica de vigas, utilizando os modelos contínuos, comparando com o método discreto de Ritz. Inicialmente, foram analisadas as formulações matemáticas para ambos os modelos, permitindo a aplicação de técnicas analíticas e numéricas para a determinação das frequências naturais e modos de vibração das vigas. Foi também utilizada uma régua que representasse uma viga, e instrumentos de aplicação de forças e medição que permitiram obter as FRF's deste sistema.

A análise mostrou a consistência e a aplicabilidade das quatro abordagens, destacando a importância da sua utilização conjunta para obter resultados precisos e confiáveis em problemas de análise modal estrutural. Enquanto que para modelos simples, uma abordagem analítica pode fazer sentido, para modelos mais complexos, os métodos numéricos ou experimentais tornam-se mais relevantes. No entanto, para modelos muito complexos, o procedimento experimental torna-se demasiado complexo.

Conlcui-se ainda que a automatização de processos, como análise de convergência e outros permitem que as análises destes sistemas sejam mais rápidas, sendo facilmente adaptáveis à mudança de variáveis.

Referências Bibliográficas

- [1] Mehmet Avcar. Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions. *International Journal of Mechanics and Applications*, 4:94–100, 12 2014.
- [2] Lucas dos Santos Fernandez, Tatiane Weimann, Anderson Martins, and Alexandre Molter. Análise de vibrações em vigas com buracos prescritos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 8(1):0365, 2021.
- [3] National Library of Medicine. Module 2: Descriptive statistics. <https://www.nlm.nih.gov/oet/ed/stats/02-900.html>, 2023. Acedido a: 2024-12-20.
- [4] Silvio Ney Alves Veras. Análise modal teórica de vigas: Estudo dos modelos contínuo e discreto de ritz, 2023. Apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

.1 Visualização dos Modos de Vibração

Viga encastrada

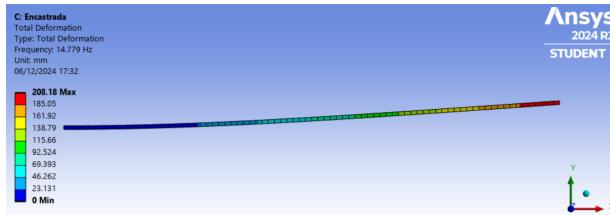


Figura 1: Modo 1 FL - Ansys

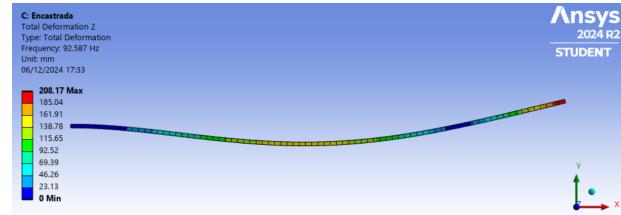


Figura 2: Modo 2 FL - Ansys

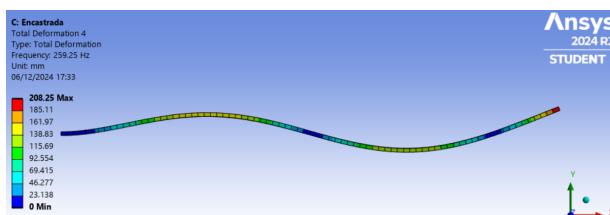


Figura 3: Modo 3 FL - Ansys

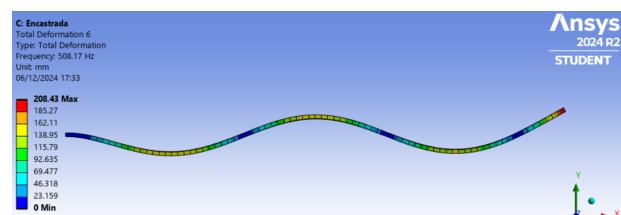


Figura 4: Modo 4 FL - Ansys

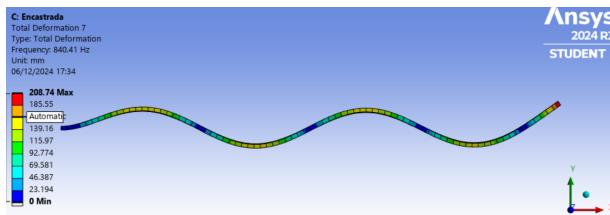


Figura 5: Modo 5 FL - Ansys

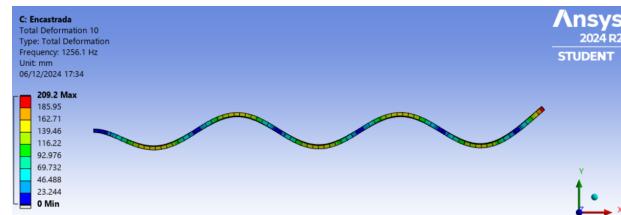


Figura 6: Modo 6 FL - Ansys

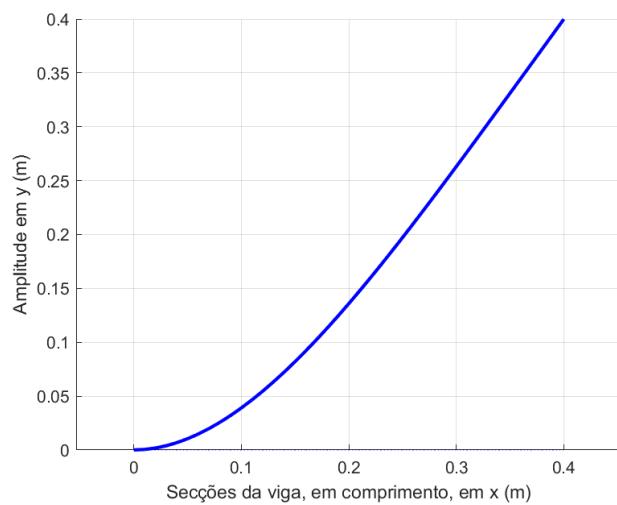


Figura 7: Modo 1 FL - Matlab

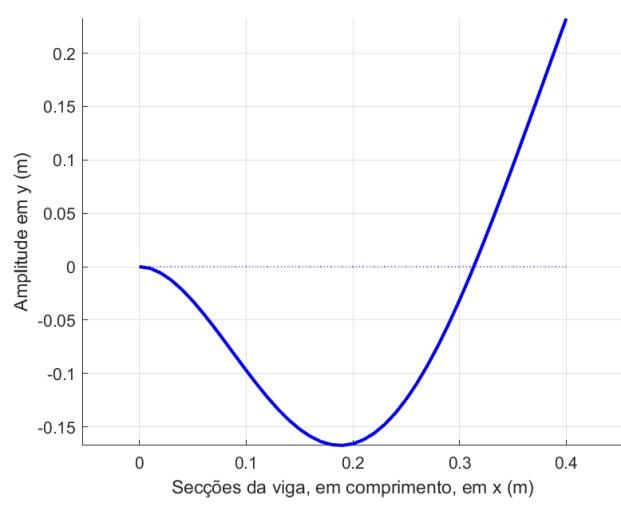


Figura 8: Modo 2 FL - Matlab

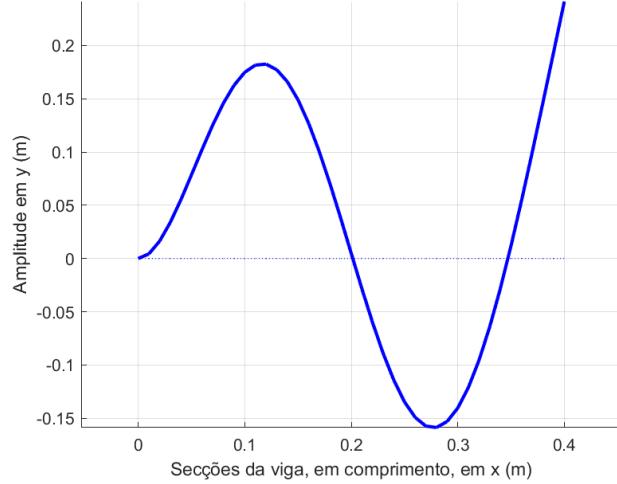


Figura 9: Modo 3 FL - Matlab

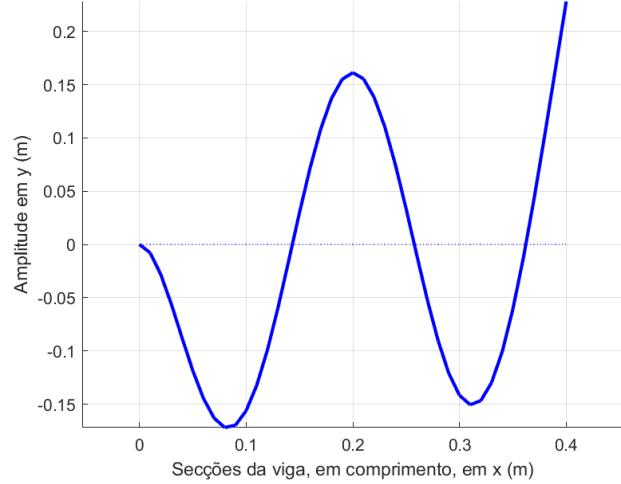


Figura 10: Modo 4 FL - Matlab

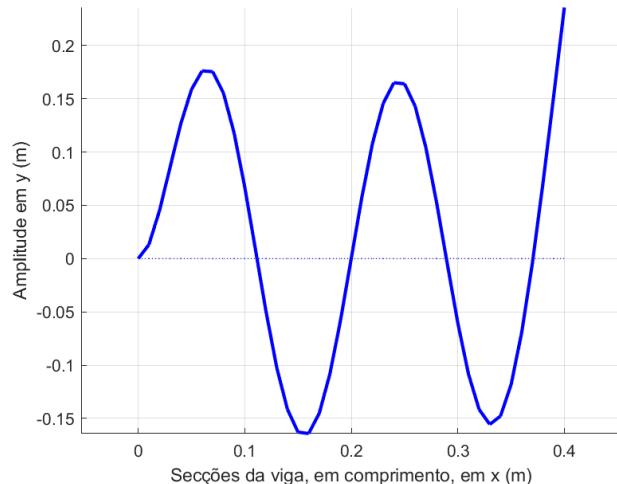


Figura 11: Modo 5 FL - Matlab

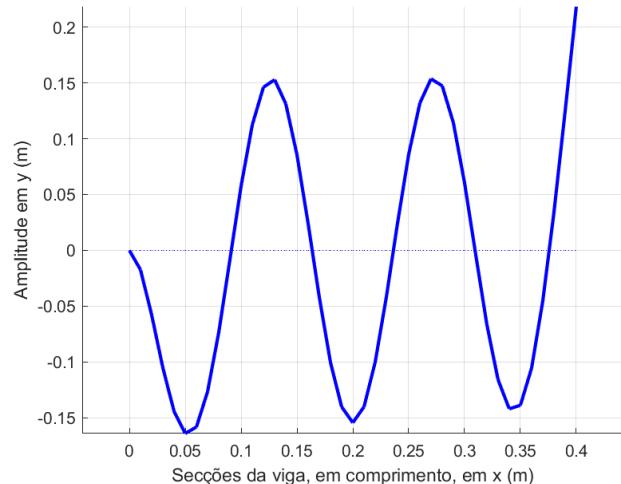


Figura 12: Modo 6 FL - Matlab

Viga Livre-Livre

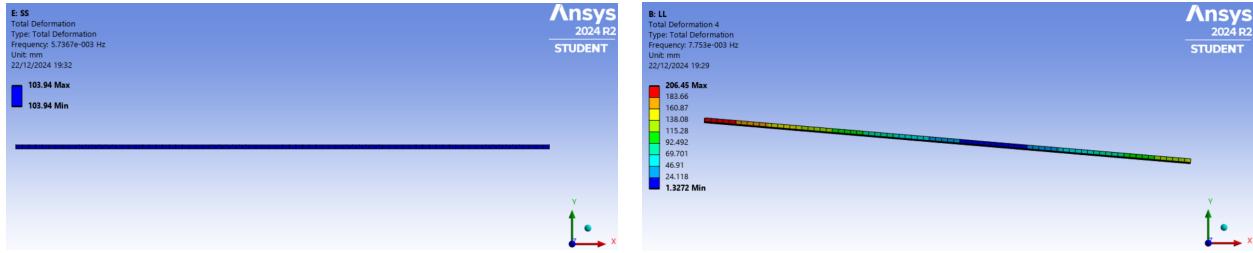


Figura 13: Modo 1 de corpo Rígido LL - Ansys

Figura 14: Modo 2 de corpo Rígido LL - Ansys

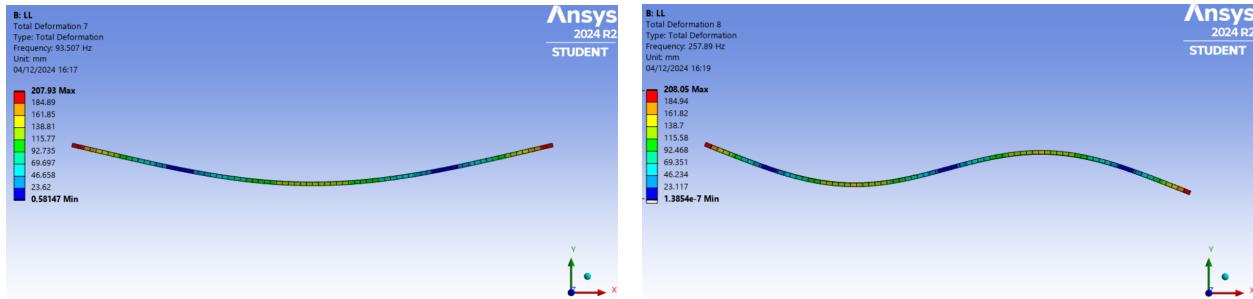


Figura 15: Modo 1 LL - Ansys

Figura 16: Modo 2 LL - Ansys

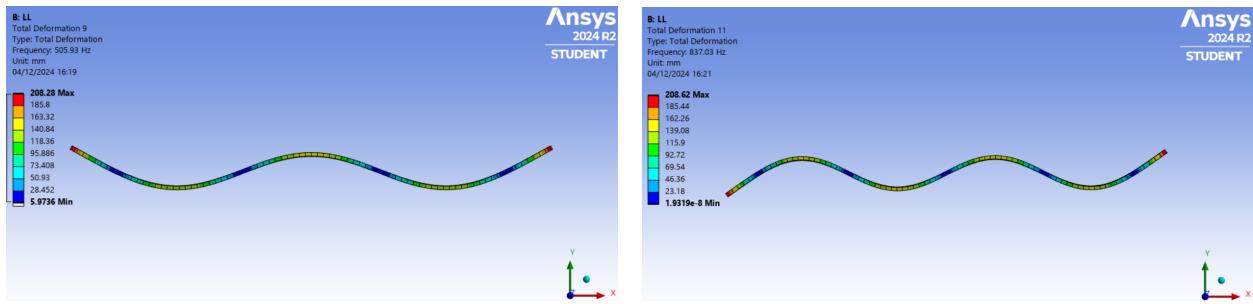


Figura 17: Modo 3 LL - Ansys

Figura 18: Modo 4 LL - Ansys

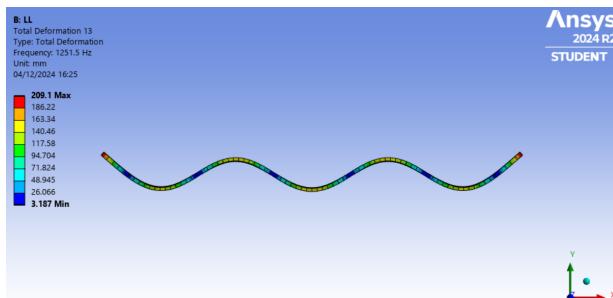


Figura 19: Modo 5 LL - Ansys

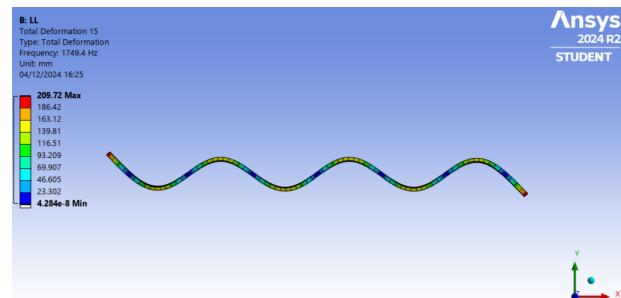


Figura 20: Modo 6 LL - Ansys

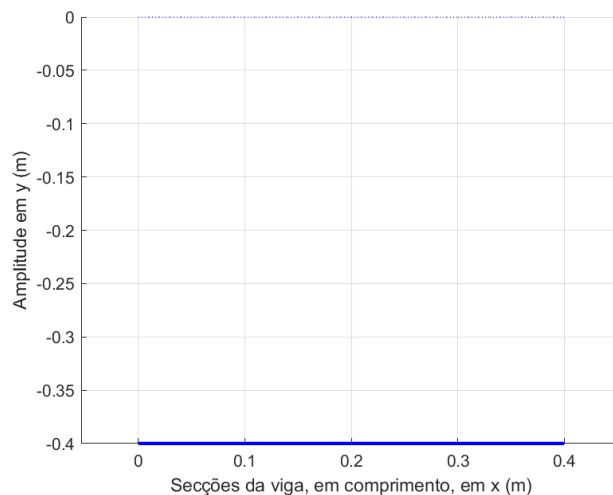


Figura 21: Modo 1 de Corpo Rígido LL - Matlab

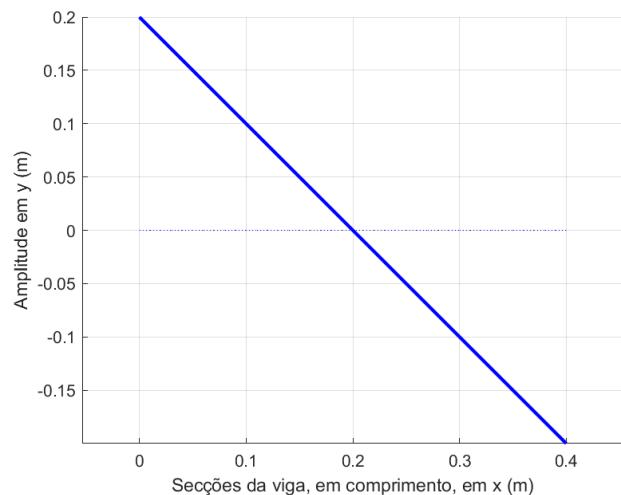


Figura 22: Modo 2 de Corpo Rígido LL - Matlab

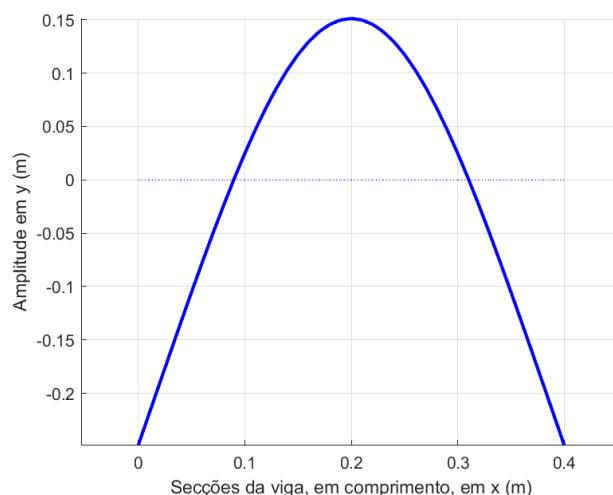


Figura 23: Modo 1 LL - Matlab

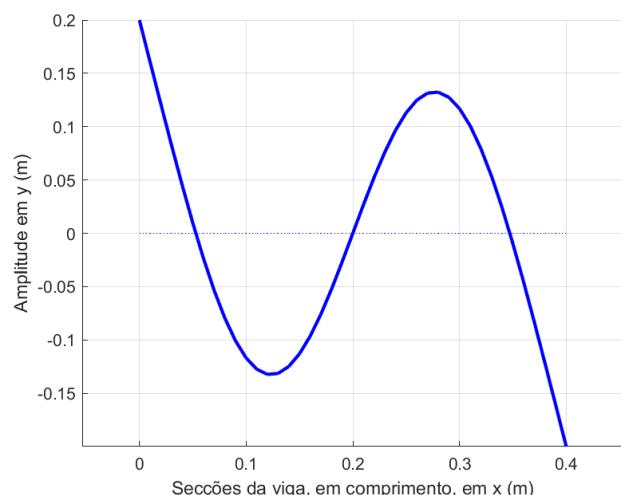


Figura 24: Modo 2 LL - Matlab

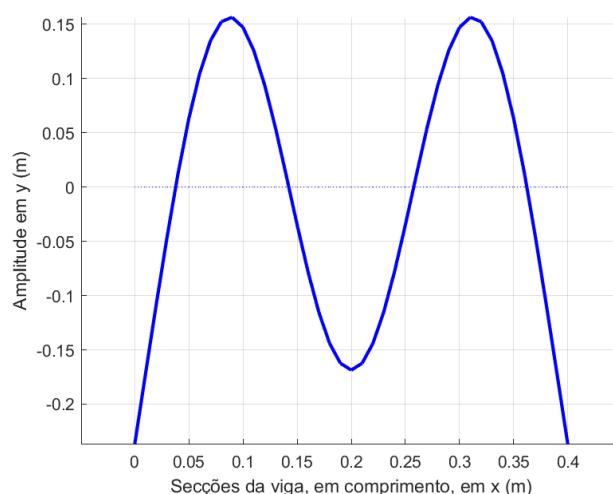


Figura 25: Modo 3 LL - Matlab

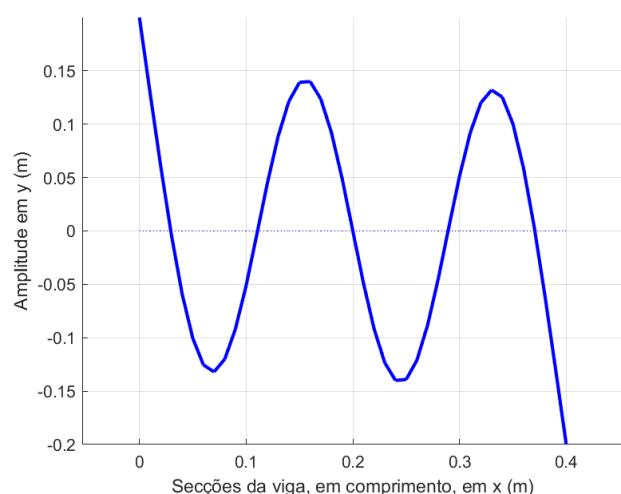


Figura 26: Modo 4 LL - Matlab

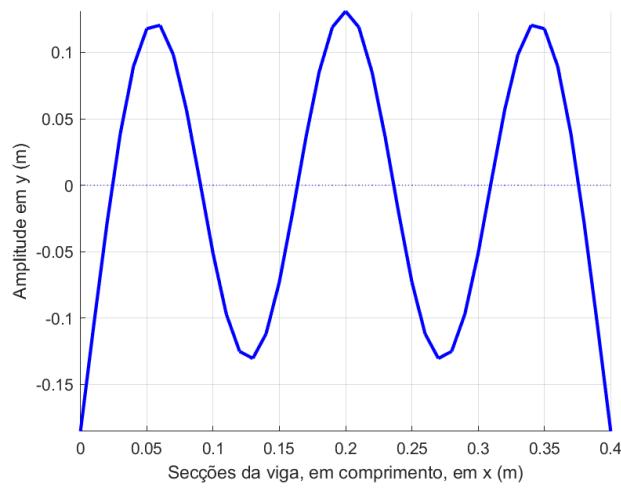


Figura 27: Modo 5 LL - Matlab

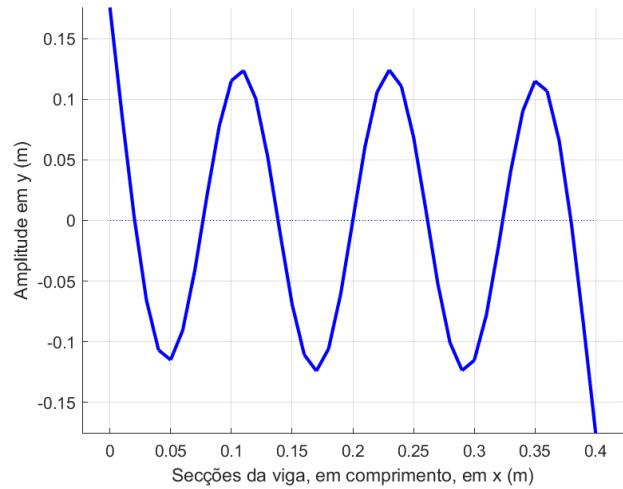
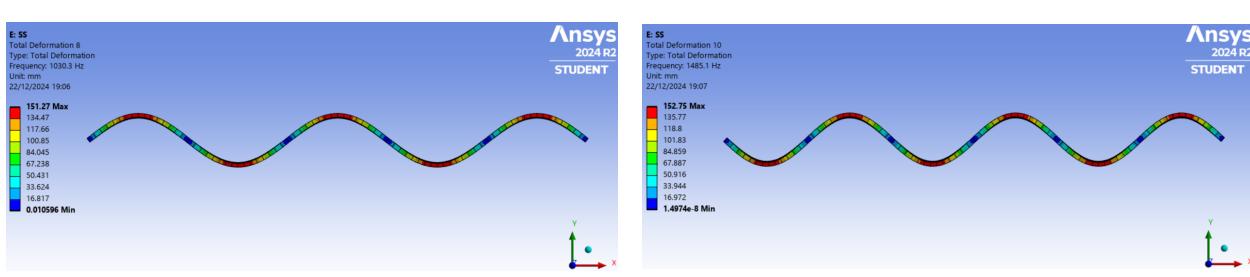
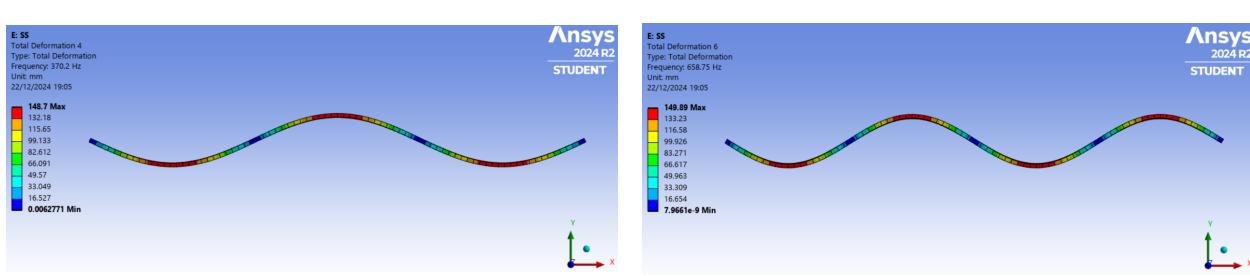
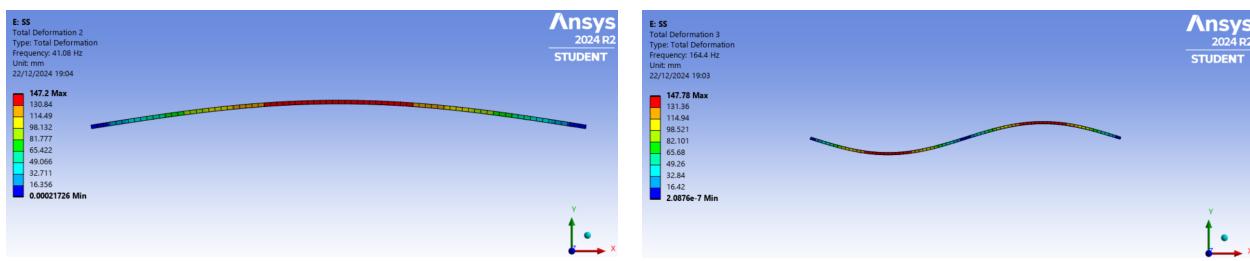


Figura 28: Modo 6 LL - Matlab

Viga Simplesmente Apoiada



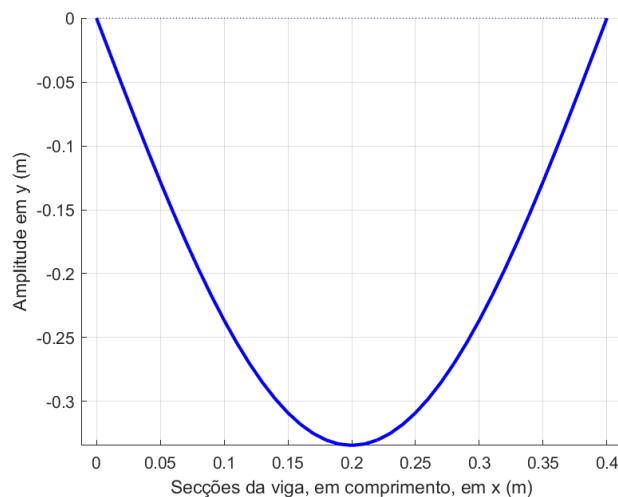


Figura 35: Modo 1 SS - Matlab

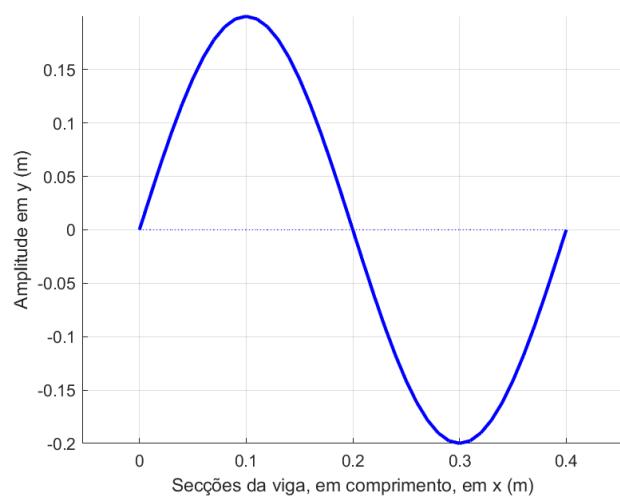


Figura 36: Modo 2 SS - Matlab

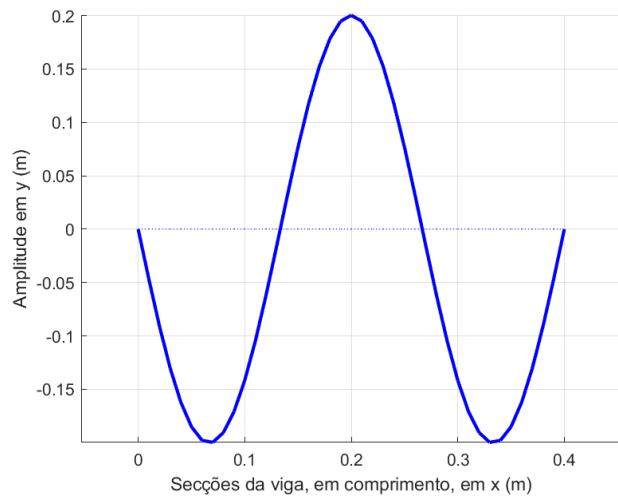


Figura 37: Modo 3 SS - Matlab

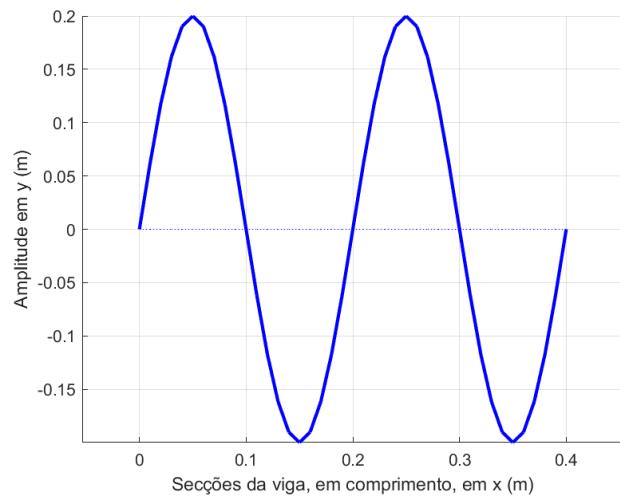


Figura 38: Modo 4 SS - Matlab

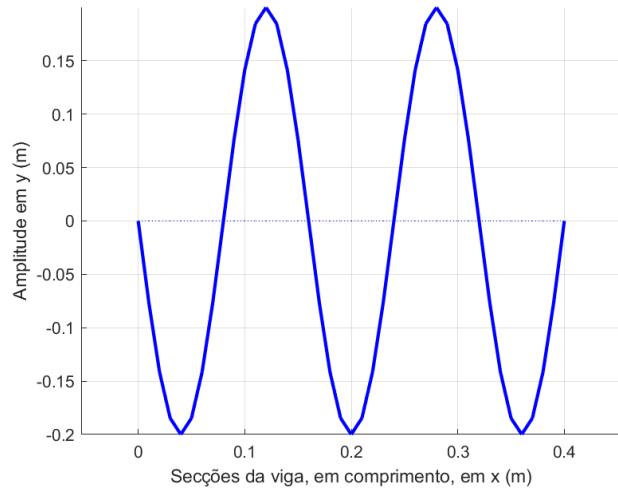


Figura 39: Modo 5 SS - Matlab

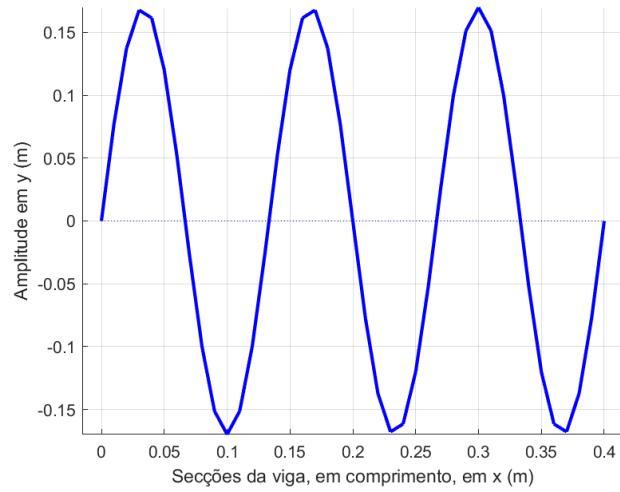


Figura 40: Modo 6 SS - Matlab

.2 Códigos Matlab

```
1 %% Beam 1D
2
3 % k=EI/L^3*[12 6L -12 6L;6L 4L^2 -6L 2L^2;-12 -6L 12 -6L;6L 2L^2 -6L 4L^2];
4 % beam with 2 nodes
5 % each node has 2 dofs (degrees-of-freedom):
6 %     transverse displacement v
7 %     rotation theta
8 %
9 %      ^           ^
10 %      |v1,theta1  |v2,theta2
11 %      O-----O
12 %
13 %% Example
14
15 % Beam with 4 elements fixed at one end and
16 % simply supported at the other end 2
17 % with vertical load at midspan
18
19 %% FEM model parameters
20 clear; clc;close all;
21 nelem=18; %numero de elementos de viga que constitui a viga
22 nnodes=nelem+1; % Numero de nos
23 ndof=nnodes*2; % Considerando 2 graus de liberdade por no (v, theta)
24
25 %% Parametros materiais e geometricos
26 E=70e9; %Pa (material)
27 Es=E*ones(nelem,1); % Vetor de modulo de young das vigas
28
29 larg=30e-3;
30 h=3e-3;
31
32 I=larg*h^3/12; % Momento de inercia de seccao retangular (40x80mm)
33 Is=I*ones(nelem,1); %vetor de momentos de inercia para as vigas
34
35 L=500e-3; % Comprimento total da viga (0.5 ou 0.4 metros)
36 Lt=L/nelem;
37 Ls=L*ones(nelem,1);
38
39 rho=2700;
40 rhos=rho*ones(nelem,1);
41 Area=larg*h;
42 Areas=Area*ones(nelem,1);
43
44 % Localizacoes dos n s e ligacoes nodais
45 xyU=zeros(nnodes,2);
46 lnodes={nelem};
47 for ielem=1:nelem
48     xyU(ielem,1)=Lt*(ielem-1);
49     xyU(ielem+1,1)=Lt*ielem;
50     lnodes{ielem}=[ielem, ielem+1];
51 end
52
53 %% Condicoes de fronteira
54 % graus de liberdade restritos: no1_v, no1_theta, no_end_v
55
56 %Rdof=[1,2]; %FL - encastrada % graus de liberdade restritos: no1_v,
57 %          no1_theta, no_end_v
58 Rdof=[];    %LL - livre-livre
```

```

58 % Rdof=[1:(nelem+1)*2-1]; % SS simplesmente apoiada
59
60 %% Calculo da Matriz de rigidez
61 %alpha=1/50;
62
63 K=zeros(ndof,ndof); %inicializacao da matriz de rigidez global
64 M=zeros(ndof,ndof);
65
66 for ielem=1:nelem
67 % matriz de rigidez do elemento de viga (2dof por no=4dof por elemento)
68 Kbeam= E*I/Lt^3;
69
70 Kelem=Kbeam*[ 12 6*L -12 6*L; 6*L 4*L^2 -6*L 2*L^2;-12 -6*L 12 -6*L;6*L...
71 2*L^2 -6*L 4*L^2];
72
73 %montagem da matriz de rigidez do elemento na matriz de rigidez global
74 dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1 dof do 1 no do elemento ielem
75 dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1 dof do 2 no do elemento ielem
76
77 K(dof1:dof1+1,dof1:dof1+1)=K(dof1:dof1+1,dof1:dof1+1)+Kelem(1:2,1:2);
78 K(dof1:dof1+1,dof2:dof2+1)=K(dof1:dof1+1,dof2:dof2+1)+Kelem(1:2,3:4);
79 K(dof2:dof2+1,dof1:dof1+1)=K(dof2:dof2+1,dof1:dof1+1)+Kelem(3:4,1:2);
80 K(dof2:dof2+1,dof2:dof2+1)=K(dof2:dof2+1,dof2:dof2+1)+Kelem(3:4,3:4);
81
82 Mbeam= rho*Area*Lt/420;
83
84
85 Melem=Mbeam*[ 156 22*L 54 -13*L; 22*L 4*L^2 13*L -3*L^2; 54 13*L 156 -22*L;
86 -13*L -3*L^2 -22*L 4*L^2];
87
88 M(dof1:dof1+1,dof1:dof1+1)=M(dof1:dof1+1,dof1:dof1+1)+Melem(1:2,1:2);
89 M(dof1:dof1+1,dof2:dof2+1)=M(dof1:dof1+1,dof2:dof2+1)+Melem(1:2,3:4);
90 M(dof2:dof2+1,dof1:dof1+1)=M(dof2:dof2+1,dof1:dof1+1)+Melem(3:4,1:2);
91 M(dof2:dof2+1,dof2:dof2+1)=M(dof2:dof2+1,dof2:dof2+1)+Melem(3:4,3:4);
92 end
93
94 % Aplicacao das condicoes de fronteira
95 free_dofs=setxor(1:ndof,Rdof); %graus de liberdade nao restritos
96 Kp=K(free_dofs,free_dofs);
97 % Fp=F(free_dofs,1);
98 Mp=M(free_dofs,free_dofs);
99 %% Resolucao do sistema de equacoes
100 U=zeros(ndof,1);
101 [a,b]=eig(Kp, Mp);
102 freqs=sqrt(diag(b))/2/pi; %[Hz]
103
104 for ifreq=1:10
105 fprintf('F%2.1f = %12.6e [Hz] \n',ifreq,freqs(ifreq));
106 end
107
108
109 %% output de resultados: Movimento ate Amplitude Maxima
110
111 % representacao da deformada
112 % U(free_dofs)=a(:,6);
113 % aF =(max(U)-min(U))/(max(max(xyU))-min(min(xyU))); %fator de amplificacao
114 % da deformada
115 %
116 % for ielem=1:nelem
117 % no1=lnodal{ielem}(1);%1 no do elemento ielem

```

```

117 % no2=lnodal{ielem}(2); %2 no do elemento ielem
118 % dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1 dof do no 1 do elemento ielem
119 % dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1 dof do no 2 do elemento ielem
120 % LinesU(ielem,1:4)=[xyU(no1,1) xyU(no2,1) xyU(no1,2) xyU(no2,2)];
121 % LinesUD(ielem,1:4)=LinesU(ielem,1:4)+1/aF*[0 0 U(dof1) U(dof2)];
122 %
123 % end
124 % grid on
125 % figure(1); hold on; axis equal
126 % for i=1:size(LinesU,1)
127 %     undef(i)=line(LinesU(i,1:2),LinesU(i,3:4)); set(undef,'LineStyle',':','
128 %         color','b','LineWidth',.5);
129 %     def(i)=line(LinesUD(i,1:2),LinesUD(i,3:4)); set(def,'LineStyle','-','
130 %         color','b','LineWidth',2);
131 % end
132 % hold off
133 %
134 % % animacao
135 %
136 % xlabel('Seccoes da viga, em comprimento, em x (m)');
137 % ylabel('Amplitude em y (m)')
138 % max_anim_steps=100;time_step=0.01;
139 % for anim_step=1:max_anim_steps
140 %     pause(time_step);
141 %     for ielem=1:nelem
142 %         no1=lnodal{ielem}(1);%1 no do elemento ielem
143 %         no2=lnodal{ielem}(2); %2 no do elemento ielem
144 %         dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1 dof do no 1 do elemento ielem
145 %         dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1 dof do no 2 do elemento ielem
146 %         LinesUD(ielem,1:4)=LinesU(ielem,1:4)+anim_step/max_anim_steps*...
147 %             1/aF*[0 0 U(dof1) U(dof2)];
148 %         set(def(ielem),'XData',LinesUD(ielem,1:2),'YData',LinesUD(ielem
149 %             ,3:4));
150 %     end
151 %
152 %
153 %% Animacao Inf
154
155 U(free_dofs)=a(:,3);
156 aF = (max(U)-min(U))/(max(max(xyU))-min(min(xyU))); %fator de amplificacao da
deformada
157
158
159 for ielem=1:nelem
160     no1=lnodal{ielem}(1);%1 no do elemento ielem
161     no2=lnodal{ielem}(2); %2 no do elemento ielem
162     dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1 dof do no 1 do elemento ielem
163     dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1 dof do no 2 do elemento ielem
164     LinesU(ielem,1:4)=[xyU(no1,1) xyU(no2,1) xyU(no1,2) xyU(no2,2)];
165     LinesUD(ielem,1:4)=LinesU(ielem,1:4)+1/aF*[0 0 U(dof1) U(dof2)];
166
167 end
168
169 figure(1); hold on; axis equal
170 for i=1:size(LinesU,1);
171     undef(i)=line(LinesU(i,1:2),LinesU(i,3:4)); set(undef,'LineStyle',':','
172         color','b','LineWidth',.5);

```

```

172 def(i)=line(LinesUD(i,1:2),LinesUD(i,3:4)); set(def, 'LineStyle', '-','
173 color', 'b', 'LineWidth', 2);
174 end
175 hold off
176 time_step=0.01;
177 max_anim_steps=6;
178 limY=get(gca, 'ylim'); MY=max(abs(limY)); limY=[ -MY, +MY];
179 set(gca, 'Ylim', limY, 'Xlim', [0,L]);
180
181 for anim_step=1:max_anim_steps
182 sinus=sin(linspace(0,2*pi,180));
183 for sin_step=1:length(sinus)
184 pause(time_step);
185 for ielem=1:nelem
186 no1=lnodal{ielem}(1); %1 no do elemento ielem
187 no2=lnodal{ielem}(2); %2 no do elemento ielem
188 dof1=2*lnodal{ielem}(1)-1; %1 dof do no 1 do elemento ielem
189 dof2=2*lnodal{ielem}(2)-1; %1 dof do no 2 do elemento ielem
190 LinesUD(ielem,1:4)=LinesU(ielem,1:4)+sinus(sin_step)*...
191 1/aF*[ 0 0 U(dof1) U(dof2)];
192 set(def(ielem), 'XData', LinesUD(ielem,1:2), 'YData', LinesUD(ielem
193 ,3:4));
194 end
195 end

```

Listing 1: Código Matlab para Visualizar, por métodos numéricos, em Matlab Modos Normais de Vibração de uma Viga (Professor)

```

1 %% Obter Frequencias Experimentais para viga de 400mm
2 load('viga400.mat');
3
4 data_viga400 = load('viga400.mat');
5
6 frequencias_viga400 = data_viga400.f; % Frequencias associadas a viga 400
7
8 n_tentativas = 20; % Numero de tentativas experimentais
9
10 % Matriz para armazenar as frequencias naturais as quais ocorrem picos
11 frequencias_naturais_viga400 = zeros(n_tentativas, 8);
12
13 tol = 1;
14
15 hold on
16 for i = 1:n_tentativas
17     % Obtem cada FRF
18     FRF_i = data_viga400.(['FRF_6_' num2str(i)]);
19
20     % Encontrar os picos na componente imaginaria
21     [picos, idx] = findpeaks(abs(imag(FRF_i)));
22
23     j=1;
24     for k=1:length(picos)
25         if picos(k) > tol % Verifica quais os picos relevantes
26             frequencias_naturais_viga400(i,j) = frequencias_viga400(idx(k));
27             j=j+1;
28         end
29     end
30     % figure(1)
31     % % Plot do grafico do modulo

```

```

32 % plot(frequencias_viga400,log(abs(FRF_i)));
33 % title('FRF Viga 400 mm');
34 % xlabel('Frecuencia (Hz)');
35 % ylabel('Mag(Acelerancia) [m s^{-2}/N]');
36 % legend('show', 'Location', 'bestoutside');
37 % grid on;
38
39 % Plot do grafico da parte imaginaria
40 % plot(frequencias_viga400,imag(FRF_i));
41 % title('FRF Viga 400 mm');
42 % xlabel('Frecuencia (Hz)');
43 % ylabel('Amplitude (Parte Imaginaria)');
44 % legend('show', 'Location', 'bestoutside');
45 % grid on;
46
47 % Plot do grafico da parte real
48 % plot(frequencias_viga400,real(FRF_i));
49 % title('FRF Viga 400 mm');
50 % xlabel('Frecuencia (Hz)');
51 % ylabel('Amplitude (Parte Real)');
52 % legend('show', 'Location', 'bestoutside');
53 % grid on;
54
55
56 % Obter todos os valores unicos de todas as tentativas, ignorando os zeros
57 valores_unicos = unique(frequencias_naturais_viga400(
58     frequencias_naturais_viga400 ~= 0));
59 % Exibir os valores com a mensagem personalizada
60 disp('Valores unicos de frequencias naturais para l=400mm:');
61
62 % Iterar sobre os valores unicos
63 modosnormais_400 = [];
64 r=0; % Numero de Modos de Corpo Rígido
65 for i = 1:length(valores_unicos)
66     if valores_unicos(i) < 10
67         % Exibir como "Modos de Corpo Rígido"
68         fprintf('Modos de Corpo Rígido: %.2f\n', valores_unicos(i));
69         r=r+1;
70     else
71         % Exibir como "Modo X"
72         modosnormais_400 = [modosnormais_400; valores_unicos(i)];
73     end
74 end
75
76 guardar=0; % Flag que indica se foi detetado um valor semelhante
77 modosnormais_final_400 = []; % Valores Finais dos Modos Normais Detetados
78 semelhantes = []; % Vetor que guarda valores semelhantes
79
80 p=1;
81
82 for i = 1:length(modosnormais_400)-1
83
84     % Valores de freqs distintas:
85     if modosnormais_400(i+1)-modosnormais_400(i)>100
86         if guardar == 1
87             if i == length(modosnormais_400)-1
88                 semelhantes=[semelhantes;modosnormais_400(i)];
89                 modosnormais_final_400(p)=mean(semelhantes);
90                 modosnormais_final_400(p+1) = modosnormais_400(i+1);
91             else

```

```

92         semelhantes=[semelhantes;modosnormais_400(i)];
93         modosnormais_final_400(p)=mean(semelhantes);
94         p=p+1;
95         semelhantes = [];
96         guardar=0;
97     end
98 else % guardar == 0
99     if i == length(modosnormais_400)-1
100        modosnormais_final_400(p) = modosnormais_400(i);
101        modosnormais_final_400(p+1) = modosnormais_400(i+1);
102    else
103        modosnormais_final_400(p) = modosnormais_400(i);
104        p=p+1;
105        guardar=0;
106    end
107 end
108
109 % Valores de Freq Semelhantes:
110 elseif modosnormais_400(i+1)-modosnormais_400(i)<100
111
112     if i == length(modosnormais_400)-1 % Penultimo Elemento
113         semelhantes=[semelhantes;modosnormais_400(i)];
114         modosnormais_final_400(p)=mean(semelhantes);
115
116     else
117         semelhantes=[semelhantes;modosnormais_400(i)];
118         guardar=1;
119     end
120 end
121
122
123
124 for i=1:length(modosnormais_final_400)
125     fprintf('Modo %d: %.2f\n', i, modosnormais_final_400(i));
126 end
127
128
129
130 % Apenas para perceber os diferentes casos visualmente
131 % figure(1)
132 % plot(frequencias_viga400,log(abs(FRF_6_1)))
133 % title('FRF Viga 400 mm');
134 % xlabel('Frequencia (Hz)');
135 % ylabel('Mag(Acelerancia) [m s^{-2}/N]');
136 % grid on;
137
138 figure(2)
139 plot(frequencias_viga400,abs(imag(FRF_6_1)))
140 title('FRF Viga 400 mm');
141 xlabel('Frequencia (Hz)');
142 ylabel('Amplitude (Componente Imaginaria)');
143 grid on;
144
145 % figure(3)
146 % plot(frequencias_viga400,real(FRF_6_1))
147 % title('FRF Viga 400 mm');
148 % xlabel('Frequencia (Hz)');
149 % ylabel('Amplitude (Componente Real)');
150 grid on;
151 hold off
152

```

```

153 %% Ver Modos Normais Viga 400 mm num grafico 3D
154
155 % frequencias (frequencias_viga400)
156 % FRF_real (parte real de FRF)
157 % FRF_imag (parte imaginaria de FRF)
158
159 FRF_real = real(FRF_6_1); % Parte real da FRF
160 FRF_imag = imag(FRF_6_1); % Parte imaginaria da FRF
161 frequencias = frequencias_viga400; % Frequencias associadas
162
163 figure;
164 plot3( FRF_imag,FRF_real,frequencias, 'b', 'LineWidth', 1.5);
165 grid on;
166
167 xlabel('Parte Real da FRF');
168 ylabel('Parte Imaginaria da FRF');
169 zlabel('Frequencia (Hz)');
170 title('Grafico 3D da FRF para Modos Normais');
171 view(45, 30);
172
173
174
175
176 %% Obter Frequencias Experimentais para viga de 500mm
177
178 data_viga500 = load('viga500.mat');
179
180 frequencias_viga500 = data_viga500.f; % Frequencias associadas a viga 500
181
182 n_tentativas = 20; % Numero de tentativas experimentais
183
184 % Matriz para armazenar as frequencias naturais as quais ocorrem picos
185 frequencias_naturais_viga500 = zeros(n_tentativas, 11);
186
187 tol=0.9;
188
189 hold on
190 for i = 1:n_tentativas
191     % Obtem cada FRF
192     FRF_i = data_viga500.(['FRF_7_' num2str(i)]);
193
194     % Encontrar os picos na componente imaginaria
195     [picos, idx] = findpeaks(abs(imag(FRF_i)));
196
197     j=1;
198
199     for k=1:length(picos)
200         if picos(k) > tol % Verifica quais os picos relevantes
201             frequencias_naturais_viga500(i,j) = frequencias_viga500(idx(k));
202             j=j+1;
203         end
204     end
205
206     % Plot do grafico do modulo
207     % figure(1)
208     % plot(frequencias_viga500,log(abs(FRF_i)));
209     % title('FRF Viga 500 mm');
210     % xlabel('Frequencia (Hz)');
211     % ylabel('Mag(Acelerancia) [m s^{-2}/N]');
212     % legend('show', 'Location', 'bestoutside');
213     % grid on;

```

```

214
215 % Plot do grafico da parte imaginaria
216 % plot(frequencias_viga500,imag(FRF_i));
217 % title('FRF Viga 500 mm');
218 % xlabel('Frequencia (Hz)');
219 % ylabel('Amplitude Real');
220 % legend('show', 'Location', 'bestoutside');
221 % grid on;
222
223 % Plot do grafico da parte real
224 % plot(frequencias_viga500,real(FRF_i));
225 % title('FRF Viga 500 mm');
226 % xlabel('Frequencia (Hz)');
227 % ylabel('Amplitude Imaginaria');
228 % legend('show', 'Location', 'bestoutside');
229 % grid on;
230
231 end
232
233 title('FRFs - Parte Real');
234 xlabel('Frequencia (Hz)');
235 ylabel('Amplitude');
236 legend('show', 'Location', 'Best'); % Mostra a legenda com os nomes das
variaveis
237 grid on;
238 % Obter todos os valores unicos de todas as tentativas, ignorando os zeros
239 valores_unicos = unique(frequencias_naturais_viga500(
frequencias_naturais_viga500 ~= 0));
240
241 % Exibir valores unicos
242 disp('Valores unicos de frequencias naturais para l=500mm:');
243
244 % Iterar sobre os valores unicos
245 modosnormais_500 = [];
246 r=0; % Numero de Modos de Corpo Rígido
247 for i = 1:length(valores_unicos)
248     if valores_unicos(i) < 10
249         % Exibir como "Modos de Corpo Rígido"
250         fprintf('Modos de Corpo Rígido: %.2f\n', valores_unicos(i));
251         r=r+1;
252     else
253         % Exibir como "Modo X"
254         % fprintf('Modo %d: %.2f\n', i-r, valores_unicos(i));
255         modosnormais_500 = [modosnormais_500; valores_unicos(i)];
256     end
257 end
258
259 % Algoritmo de detecção e correção de valores semelhantes
260 guardar=0;
261 modosnormais_final_500 = [];
262 semelhantes = [];
263 p=1;
264
265 for i = 1:length(modosnormais_500)-1
266
267     if modosnormais_500(i+1)-modosnormais_500(i)>100
268         if guardar == 1
269             if i == length(modosnormais_500)-1
270                 semelhantes=[semelhantes;modosnormais_500(i)];
271                 modosnormais_final_500(p)=mean(semelhantes);
272                 modosnormais_final_500(p+1) = modosnormais_500(i+1);

```

```

273     else
274         semelhantes=[semelhantes;modosnormais_500(i)];
275         modosnormais_final_500(p)=mean(semelhantes);
276         p=p+1;
277         semelhantes = [];
278         guardar=0;
279     end
280
281     else
282         if i == length(modosnormais_500)-1
283
284             modosnormais_final_500(p) = modosnormais_500(i);
285             modosnormais_final_500(p+1) = modosnormais_500(i+1);
286         else
287             modosnormais_final_500(p) = modosnormais_500(i);
288             p=p+1;
289             guardar=0;
290         end
291     end
292
293 elseif modosnormais_500(i+1)-modosnormais_500(i)<100
294
295     if i == length(modosnormais_500)-1
296         semelhantes=[semelhantes;modosnormais_500(i)];
297         modosnormais_final_500(p)=mean(semelhantes);
298
299     else
300         semelhantes=[semelhantes;modosnormais_500(i)];
301         guardar=1;
302     end
303 end
304
305
306
307 for i=1:length(modosnormais_final_500)
308     fprintf('Modo %d: %.2f\n', i, modosnormais_final_500(i));
309 end
310
311 % Apenas para perceber os diferentes casos visualmente
312 % figure(1)
313 % plot(frequencias_viga500,log(abs(FRF_7_1)))
314 % title('FRF Viga 500 mm');
315 % xlabel('Frequencia (Hz)');
316 % ylabel('Mag(Acelerancia) [m s^{-2}/N]');
317 % grid on;
318
319 figure(2)
320 plot(frequencias_viga500,abs(imag(FRF_7_1)))
321 title('FRF Viga 500 mm');
322 xlabel('Frequencia (Hz)');
323 ylabel('Amplitude (Componente Imaginaria)');
324 grid on;
325
326 % figure(3)
327 % plot(frequencias_viga500,real(FRF_7_1))
328 % title('FRF Viga 500 mm');
329 % xlabel('Frequencia (Hz)');
330 % ylabel('Amplitude (Componente Real)');
331 % grid on;
332 hold off

```

Listing 2: Código Matlab para Obtenção de Frequências Experimentais

```

1 %% Analise de Convergencia Matlab
2
3 nmax=100; % Numero de elementos a simular
4
5 E=70e9; % [Pa] Modulo de Young
6 rho=2700; % [kg/m^3] Massa volumica do material
7 Lt=0.5; % [m] Comprimento da viga
8 h=0.003; % [m] espessura da viga
9 b=0.030; % [m] largura da viga
10
11 I=b*h^3/12; % [m^4] Momento de inercia de seccao retangular
12 A=b*h; % [m^2] area da seccao da viga
13
14 nelems=5:nmax+4; % Vetor com numero de elementos a simular
15
16 umafreq=zeros(1,nmax);
17
18 for i=1:nmax
19     freqs = beam_solver(E, I, rho, A, Lt,nelems(i)); % Simulacao por nelem
20     umafreq(1,i)= freqs(3); % Apenas obter 1 frequencia
21 end
22
23 cp=0; % Ponto de Convergencia
24 fc=0; % Frequencia de Convergencia
25 tol = 0.000001; % Tolerancia
26
27 % Ciclo que verifica se a variacao entre valor atual e anterior de
28 % frequencias e inferior a tolerancia inserida
29
30 for i=2:nmax
31     var = abs((umafreq(i) - umafreq(i-1)) / umafreq(i-1));
32     if var < tol
33         cp=nelems(i);
34         fc=umafreq(i);
35         fprintf(['Convergencia atingida com %d elementos (variacao ...' ...
36             ' relativa = %.6f).\n'], nelems(i), var);
37         break;
38     end
39 end
40
41
42 % Plot do Grafico de Convergencia
43 figure;
44 plot(nelems, umafreq, 'LineWidth', 2);
45 hold on
46
47 plot(cp,fc, 'ro', 'LineWidth', 1)
48 text(cp + 0.01, fc, sprintf('%d elementos', cp), 'VerticalAlignment', ...
49     'bottom', 'HorizontalAlignment', 'left');
50
51 hold off
52
53 xlabel('Numero de Elementos');
54 ylabel('Frequencia (Hz)');
55 title('Estudo de Convergencia da Malha (Matlab)');
56 grid on;
57
58 %% Calculo numerico das frequencias:

```

```

59
60 function [freqs] = beam_solver(E, I, rho, A, Lt,nelem)
61     L=Lt/nelem;
62     Rdof=[];
63
64     % Inicializacao de parametros
65     nnodes = nelem + 1;
66     ndof = nnodes * 2;
67     xyU = zeros(nnodes, 2);
68     lnodes = cell(nelem, 1);
69     K = zeros(ndof, ndof);
70     M = zeros(ndof, ndof);
71
72     for ielem = 1:nelem
73         xyU(ielem, 1) = L * (ielem - 1);
74         xyU(ielem + 1, 1) = L * ielem;
75         lnodes{ielem} = [ielem, ielem + 1];
76     end
77
78     % Matrizes de rigidez e massa
79     for ielem = 1:nelem
80
81         Kbeam = E * I / L^3;
82         Kelem = Kbeam * [12, 6 * Lt, -12, 6 * Lt;
83                             6 * Lt, 4 * Lt^2, -6 * Lt, 2 * Lt^2;
84                             -12, -6 * Lt, 12, -6 * Lt;
85                             6 * Lt, 2 * Lt^2, -6 * Lt, 4 * Lt^2];
86
87
88         Mbeam = rho * A * L;
89         Melem = Mbeam / 420 * [156, 22 * Lt, 54, -13 * Lt;
90                             22 * Lt, 4 * Lt^2, 13 * Lt, -3 * Lt^2;
91                             54, 13 * Lt, 156, -22 * Lt;
92                             -13 * Lt, -3 * Lt^2, -22 * Lt, 4 * Lt^2];
93
94         dof1 = 2 * lnodes{ielem}(1) - 1;
95         dof2 = 2 * lnodes{ielem}(2) - 1;
96
97         K(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) = K(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) +
98             Kelem(1:2, 1:2);
99         K(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) = K(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) +
100            Kelem(1:2, 3:4);
101         K(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) = K(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) +
102            Kelem(3:4, 1:2);
103         K(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) = K(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) +
104            Kelem(3:4, 3:4);
105
106         M(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) = M(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) +
107             Melem(1:2, 1:2);
108         M(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) = M(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) +
109             Melem(1:2, 3:4);
110         M(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) = M(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) +
111             Melem(3:4, 1:2);
112         M(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) = M(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) +
113             Melem(3:4, 3:4);
114
115     end
116
117     free_dofs = setxor(1:ndof, Rdof);
118     Kp = K(free_dofs, free_dofs);
119     Mp = M(free_dofs, free_dofs);
120
121

```

```

112
113 [~, b] = eig(Kp, Mp);
114 freqs=sqrt(diag(b))/2/pi; %[Hz]
115 end

```

Listing 3: Código Matlab para Análise de Convergência

```

1 %% Calculo de E timo analiticamente
2
3 num=500; % Numero de itera es
4
5 % Valores obtidos experimentalmente:
6 Exp=[93.75,256.25,503.75,837.5,1247.5,1738.75];
7 nfreq=length(Exp);
8
9 % Matrizes com as frequencias [Hz] nas linhas e itera es nas colunas
10
11 SS=zeros(nfreq,num);
12 fSS=zeros(nfreq,num); % SS simplesmente apoiada
13 LL=zeros(nfreq,num);
14 fLL=zeros(nfreq,num); % LL - livre-livre
15 FL=zeros(nfreq,num);
16 fFL=zeros(nfreq,num); % FL - encastrada
17
18 E=zeros(1,num); % Vetor de M dulos de Young
19 E(2)=40E9; % [Pa] M dulo de Young Inicial
20 h=0.003; % [m] Espessura da viga
21 b=0.030; % [m] Largura da viga
22 L=0.4; % [m] Comprimento da viga
23 rho=2571; % [kg/m^3] Massa volumica do material
24 m=0.23139; % [kg/m] Massa por comprimento
25 I=b*h^3/12; % [m^4] Momento de in rcia de seco retangular
26
27 differ=zeros(nfreq,num);
28 adifer=zeros(nfreq,num);
29 media=zeros(1,num);
30
31 k=2; % Para clculo para vrios m dulos de Young
32
33 % Inicializa es apenas para garantir funcionamento do algoritmo
34 media(1,1)=10000000;
35 media(1,2)=999999;
36
37
38 while(media(1,k)<media(1,k-1) && media(1,k+1)<media(1,k) && k<num)
39     k=k+1;
40     E(1,k)=E(1,k-1)+0.1E9;
41     for i=1:nfreq
42         SS(i,k)=i*pi;
43         fSS(i,k)=(1/(2*pi))*(SS(i,k)^2/L^2)*sqrt((E(1,k)*I)/m);
44         LL(i,k)=(2*i+1)*pi/2;
45         fLL(i,k)=(1/(2*pi))*(LL(i,k)^2/L^2)*sqrt((E(1,k)*I)/m);
46         FL(i,k)=(2*i-1)*pi/2;
47         fFL(i,k)=(1/(2*pi))*(FL(i,k)^2/L^2)*sqrt((E(1,k)*I)/m);
48         differ(i,k)=fLL(i,k)-Exp(i);
49         adifer(i,k)=abs(differ(i,k));
50     end
51     media(1,k)=sum(adifer(:,k))/nfre;
52 end
53
54 % Para um valor a seguir ao valor corrigir

```

```

55 fprintf(['Analiticamente: M dulo de Young Corrigido: %.1f GPa, com ...' ...
56   'varia o %.3f \n'],E(1,k-1)/1E9,media(1,k-1));
57
58 %% Calculo de E timo numericamente
59
60 num=500; % Numero de itera es
61
62
63 E=zeros(1,num); % Vetor de M dulos de Young
64 E(2)=55e9; % [Pa] M dulo de Young Inicial
65 rho=2571; % [kg/m^3] Massa volmica do material
66 Lt=0.4; % [m] Comprimento da viga
67 h=0.003; % [m] espessura da viga
68 b=0.030; % [m] largura da viga
69
70 I=b*h^3/12; % [m^4] Momento de in rcia de sec o retangular
71 A=b*h; % [m^2] rea da sec o da viga
72
73 % Valores obtidos experimentalmente:
74 Exp=[93.75,256.25,503.75,837.5,1247.5,1738.75];
75 nfreq=length(Exp);
76
77 differ=zeros(nfreq,num);
78 adifer=zeros(nfreq,num);
79 media=zeros(1,num);
80
81 k=2; % Para clculo para vrios m dulos de Young
82
83 % Inicializa es apenas para garantir funcionamento do algoritmo
84 media(1,1)=10000000;
85 media(1,2)=999999;
86
87 % Para dar apenas display de 6 freqncias
88 seisfreqs=zeros(nfreq,num);
89
90 while(media(1,k)<media(1,k-1) && media(1,k+1)<media(1,k) && k<num)
91   k=k+1;
92   E(1,k)=E(1,k-1)+0.1E9;
93   freqs = beam_solver(E(1,k),I, rho, Lt);
94
95   seisfreqs(:,k)= freqs(3:nfreq+2); % come a em 3 devido a modos de corpo
96   % r gido
97   differ(:,k)=seisfreqs(:,k)-Exp(:);
98   adifer(:,k)= abs(differ(:,k));
99   media(1,k)=sum(adifer(:,k))/nfreq;
100 end
101
102 % Para um valor a seguir ao valor corrigido
103 fprintf(['Numericamente: M dulo de Young Corrigido: %.1f GPa, com ...' ...
104   'varia o %.3f \n'],E(1,k-1)/1E9,media(1,k-1));
105
106
107 %% Clculo numrico das freqncias
108
109 function [freqs] = beam_solver(E, I, rho, A, Lt)
110
111   % N mero de Elementos
112   nelem=18;
113   L=Lt/nelem;
114   Rdof=[];
115

```

```

116 % Inicializa o de parametros
117 nnode = nelem + 1;
118 ndof = nnode * 2;
119 xyU = zeros(nnode, 2);
120 lnodal = cell(nelem, 1);
121 K = zeros(ndof, ndof);
122 M = zeros(ndof, ndof);

123
124 for ielem = 1:nelem
125     xyU(ielem, 1) = L * (ielem - 1);
126     xyU(ielem + 1, 1) = L * ielem;
127     lnodal{ielem} = [ielem, ielem + 1];
128 end

129
130 % Matrizes de rigidez e massa
131 for ielem = 1:nelem

132
133     Kbeam = E * I / L^3;
134     Kelem = Kbeam * [12, 6 * Lt, -12, 6 * Lt;
135                             6 * Lt, 4 * Lt^2, -6 * Lt, 2 * Lt^2;
136                             -12, -6 * Lt, 12, -6 * Lt;
137                             6 * Lt, 2 * Lt^2, -6 * Lt, 4 * Lt^2];

138
139
140     Mbeam = rho * A * L;
141     Melem = Mbeam / 420 * [156, 22 * Lt, 54, -13 * Lt;
142                             22 * Lt, 4 * Lt^2, 13 * Lt, -3 * Lt^2;
143                             54, 13 * Lt, 156, -22 * Lt;
144                             -13 * Lt, -3 * Lt^2, -22 * Lt, 4 * Lt^2];

145
146     dof1 = 2 * lnodal{ielem}(1) - 1;
147     dof2 = 2 * lnodal{ielem}(2) - 1;

148
149     K(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) = K(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) +
150         Kelem(1:2, 1:2);
151     K(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) = K(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) +
152         Kelem(1:2, 3:4);
153     K(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) = K(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) +
154         Kelem(3:4, 1:2);
155     K(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) = K(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) +
156         Kelem(3:4, 3:4);

157
158     M(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) = M(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) +
159         Melem(1:2, 1:2);
160     M(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) = M(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) +
161         Melem(1:2, 3:4);
162     M(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) = M(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) +
163         Melem(3:4, 1:2);
164     M(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) = M(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) +
165         Melem(3:4, 3:4);

166
167 end

168 free_dofs = setxor(1:ndof, Rdof);
169 Kp = K(free_dofs, free_dofs);
170 Mp = M(free_dofs, free_dofs);

171
172
173 [~, b] = eig(Kp, Mp);
174 freqs=sqrt(diag(b))/2/pi; %[HZ]
175
176
177 end

```

Listing 4: Código Matlab para Cálculo de Módulo de Young

```

1 %% Display de matrizes no formato fLL | fFL | fSS (Analiticamente), com
2 % correcao do Modulo de Young e Massa Volumica
3
4 nfreqs=8; % Numero de Frequencias a obter
5
6 % Matrizes com as frequencias [Hz] nas linhas e iteracoes nas colunas
7 SS=zeros(8,1);
8 fSS=zeros(8,1);
9 LL=zeros(8,1);
10 fLL=zeros(8,1);
11 FL=zeros(8,1);
12 fFL=zeros(8,1);
13
14 E=60.3E9; % [Pa] Modulo de Young
15 b=3E-2; % [m] largura da viga
16 h=3E-3; % [m] espessura da viga
17 L=0.5; % [m] Comprimento da viga
18 rho=2571; % [kg/m^3] Massa volumica do material
19 m=0.23139; % [kg/m] Massa por comprimento
20 I=b*h^3/12; % [m^4] Momento de inercia de seccao retangular
21
22 matrizfreqs = zeros(nfreqs,3);
23
24 for i=1:nfreqs
25     SS(i)=i*pi;
26     fSS(i)=(1/(2*pi))*(SS(i)^2/L^2)*sqrt((E*I)/m);
27     LL(i)=(2*i+1)*pi/2;
28     fLL(i)=(1/(2*pi))*(LL(i)^2/L^2)*sqrt((E*I)/m);
29     FL(i)=(2*i-1)*pi/2;
30     fFL(i)=(1/(2*pi))*(EN(i)^2/L^2)*sqrt((E*I)/m);
31 end
32
33 matrizfreqs(:,1)=fLL;
34 matrizfreqs(:,2)=fEN;
35 matrizfreqs(:,3)=fSS;
36
37
38 %% Display de matrizes no formato fLL | fFL | fSS (Numericamente), com
39 % correcao do Modulo de Young e Massa Volumica
40
41 num=500;
42
43 E=60.4E9; % [Pa] Modulo de Young
44 rho=2571; % [kg/m^3] Massa volumica do material
45 Lt=0.4; % [m] Comprimento da viga
46 h=0.003; % [m] espessura da viga
47 b=0.030; % [m] largura da viga
48
49 I=b*h^3/12; % [m^4] Momento de inercia de seccao retangular
50 A=b*h; % [m^2] rea da seccao da viga
51 nfreq=8; % Numero de Frequencias a obter
52
53 matrizfreq = zeros(nfreq,3); % Matriz de Resultados
54
55 for i = 1:3
56     freqs = beam_solver_LL(18, E, I, rho, A, Lt, i);
57     if i == 1
58         matrizfreq(:, i) = freqs(3:nfreq+2); % LL - livre-livre

```

```

59     elseif i == 2
60         matrizfreq(:, i) = freqs(1:nfreq); % FL - encastrada
61     else
62         matrizfreq(:, i) = freqs(1:nfreq); % SS - simplesmente apoiada
63     end
64 end
65
66
67 %% Calculo numerico das frequencias
68
69 function [freqs] = beam_solver_LL(nelem,E, I, rho, A, Lt,rdfs)
70
71 L=Lt/nelem;
72
73 switch rdfs
74     case 1
75         Rdof = []; % LL - livre-livre
76     case 2
77         Rdof = [1, 2]; % FL - encastrada
78     case 3
79         Rdof = [1, (nelem + 1) * 2 - 1]; % SS - simplesmente apoiada
80 end
81
82 % Inicializacao de parametros
83 nnode = nelem + 1;
84 ndof = nnode * 2;
85 xyU = zeros(nnode, 2);
86 lnodal = cell(nelem, 1);
87 K = zeros(ndof, ndof);
88 M = zeros(ndof, ndof);
89
90 for ielem = 1:nelem
91     xyU(ielem, 1) = L * (ielem - 1);
92     xyU(ielem + 1, 1) = L * ielem;
93     lnodal{ielem} = [ielem, ielem + 1];
94 end
95
96 % Matrizes de rigidez e massa
97 for ielem = 1:nelem
98
99     Kbeam = E * I / L^3;
100    Kelem = Kbeam * [12, 6 * Lt, -12, 6 * Lt;
101                                6 * Lt, 4 * Lt^2, -6 * Lt, 2 * Lt^2;
102                                -12, -6 * Lt, 12, -6 * Lt;
103                                6 * Lt, 2 * Lt^2, -6 * Lt, 4 * Lt^2];
104
105
106    Mbeam = rho * A * L;
107    Melem = Mbeam / 420 * [156, 22 * Lt, 54, -13 * Lt;
108                                22 * Lt, 4 * Lt^2, 13 * Lt, -3 * Lt^2;
109                                54, 13 * Lt, 156, -22 * Lt;
110                                -13 * Lt, -3 * Lt^2, -22 * Lt, 4 * Lt^2];
111
112    dof1 = 2 * lnodal{ielem}(1) - 1;
113    dof2 = 2 * lnodal{ielem}(2) - 1;
114
115    K(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) = K(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) +
116        Kelem(1:2, 1:2);
117    K(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) = K(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) +
118        Kelem(1:2, 3:4);
119    K(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) = K(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) +
120        Kelem(3:4, 1:2);

```

```

118 Kelem(3:4, 1:2);
119 K(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) = K(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) +
120 Kelem(3:4, 3:4);

121 M(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) = M(dof1:dof1 + 1, dof1:dof1 + 1) +
122 Melem(1:2, 1:2);
123 M(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) = M(dof1:dof1 + 1, dof2:dof2 + 1) +
124 Melem(1:2, 3:4);
125 M(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) = M(dof2:dof2 + 1, dof1:dof1 + 1) +
126 Melem(3:4, 1:2);
127 M(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) = M(dof2:dof2 + 1, dof2:dof2 + 1) +
128 Melem(3:4, 3:4);

129
130
131 [~, b] = eig(Kp, Mp);
132 freqs=sqrt(diag(b))/2/pi; %[HZ]
133 end

```

Listing 5: Código Matlab para Plot de Matriz de Frequências no Formato Desejado

.3 Tabelas Vigas 400 e 500m (Média e Desvio Padrão)

Tabela 1: Análise de média e desvio padrão das frequências naturais experimentais ($l_1=500\text{mm}$)

	Viga de 400mm											
	MODO 1		MODO 2		MODO 3		MODO 4		MODO 5		MODO 6	
	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$	F [Hz]	
FRF 1	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 2	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 3	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 4	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 5	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 6	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 7	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 8	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 9	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 10	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 11	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 12	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 13	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 14	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 15	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 16	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 17	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 18	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 19	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
FRF 20	93.75	0	256.25	0	503.75	0	837.5	0	1247.5	0	1738.75	
MEDIA	93.75	256.25	503.75	837.5	1247.5	1738.75						
DP (sqrt(((x_i - \mu)^2)/N))	0	0	0	0	0	0						

Tabela 2: Análise de média e desvio padrão das frequências naturais experimentais ($l_2=500\text{mm}$) - Modos 2:5,8,9

	Viga de 500mm																										
	MODO 1			MODO 2			MODO 3			MODO 4			MODO 5			MODO 6			MODO 7			MODO 8			MODO 9		
	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]	(x_i-μ)^2	F [Hz]		
FRF 1	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 2	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 3	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 4	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 5	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 6	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 7	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 8	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 9	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 10	60	0	163.75	0	322.5	0	535	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 11	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	
FRF 12	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 13	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 14	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	
FRF 15	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 16	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 17	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	
FRF 18	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	1761.25	1	1907.5	0	
FRF 19	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
FRF 20	60	0	163.75	0	322.5	0	533.75	0.391	795	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	1762.5	0.0625	1907.5	0	
MEDIA	60	0	163.75	0	322.5	0	534.375	0	795	0	1762.25	0.5	1907.5	0	1762.25	0.5	1907.5	0	1762.25	0.5	1907.5	0	1762.25	0.5	1907.5	0	
DP =	0	0	0	0	0	0	0.641	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3: Análise de μ e σ das frequências naturais experimentais, l2=500mm, Modo 6

MODO 6	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$
FRF1	1097.5	905.5641
	1103.75	568.4692
	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF2	1097.5	905.5641
	1102.5	629.6382
	1115	158.5734
	1122.5	25.9345
FRF3	1096.25	982.3581
	1115	158.5734
	1122.5	25.9345
	1136.25	74.9507
	1172.5	2016.675
FRF4	1097.5	905.5641
	1115	158.5734
	1130	5.79561
	1172.5	2016.675
FRF5	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF6	1115	158.5734
	1136.25	74.9507
FRF7	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF8	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF9	1115	158.5734
	1136.25	74.9507
	1172.5	2016.675
FRF10	1093.75	1145.321
	1115	158.5734
	1136.25	74.9507
FRF11	1113.75	191.6174
	1117.5	101.8604
	1172.5	2016.675
FRF12	1098.75	831.8951
	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF13	1098.75	831.8951
	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF14	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF15	1098.75	831.8951
	1115	158.5734
FRF16	1098.75	831.8951
	1115	158.5734
FRF17	1098.75	831.8951
	1115	158.5734
	1128.75	1.339592
FRF18	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF19	1115	158.5734
	1172.5	2016.675
FRF20	1115	158.5734
MEDIA	1127.5926 ⁴⁶	
DP (sqrt(((x_i - μ)^2)/N))	=	27.24509

Tabela 4: Análise de μ e σ das frequências naturais experimentais, l₂=500mm, Modo 7

MODO 7	F [Hz]	$(x_i - \mu)^2$
FRF1	1486.25	11.652
	1491.25	2.517
FRF2	1483.75	34.969
	1486.25	11.652
	1491.25	2.517
FRF3	1483.75	34.969
	1491.25	2.517
FRF4	1491.25	2.517
FRF5	1482.5	51.315
	1491.25	2.517
FRF6	1483.75	34.969
	1491.25	2.517
FRF7	1491.25	2.517
FRF8	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
FRF12	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
FRF14	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
FRF16	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
FRF18	1491.25	2.517
	1491.25	2.517
FRF20	1491.25	2.517
MEDIA	1489.663	
DP (sqrt(((x_i - μ)^2)/N)) =		2.063

.4 Gráficos FRF Viga de 500mm

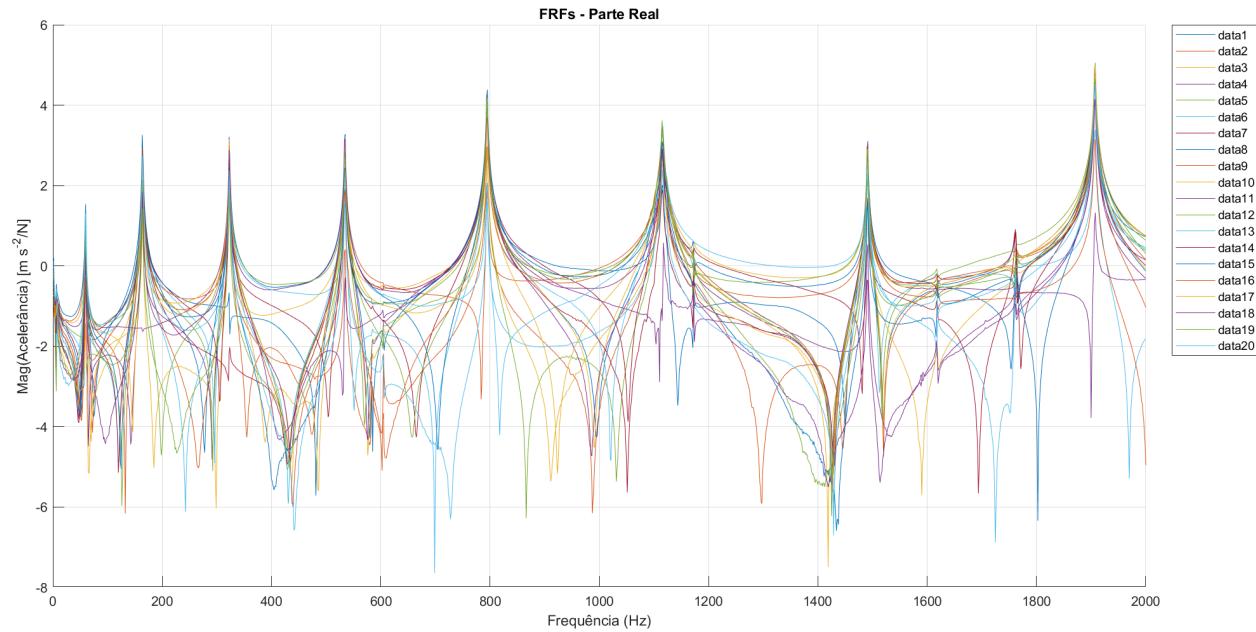


Figura 41: Função de resposta em frequência direta FRF's para a viga de 500 mm.

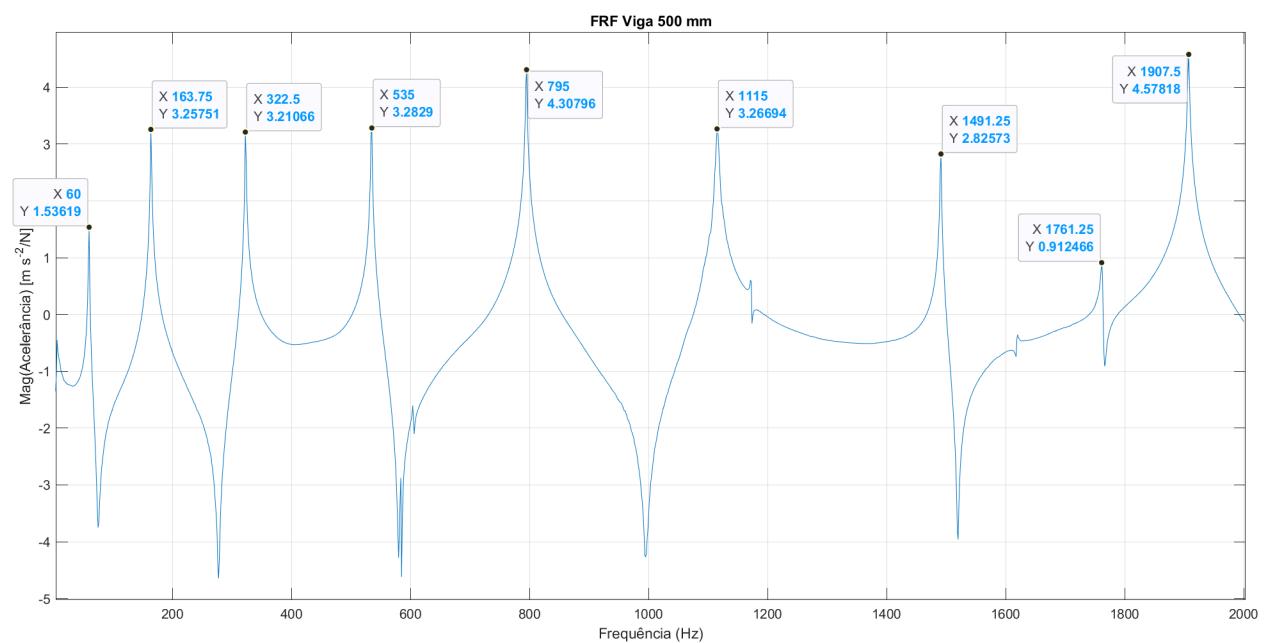


Figura 42: Função de resposta em frequência direta FRF_{61} para a viga de 500 mm.

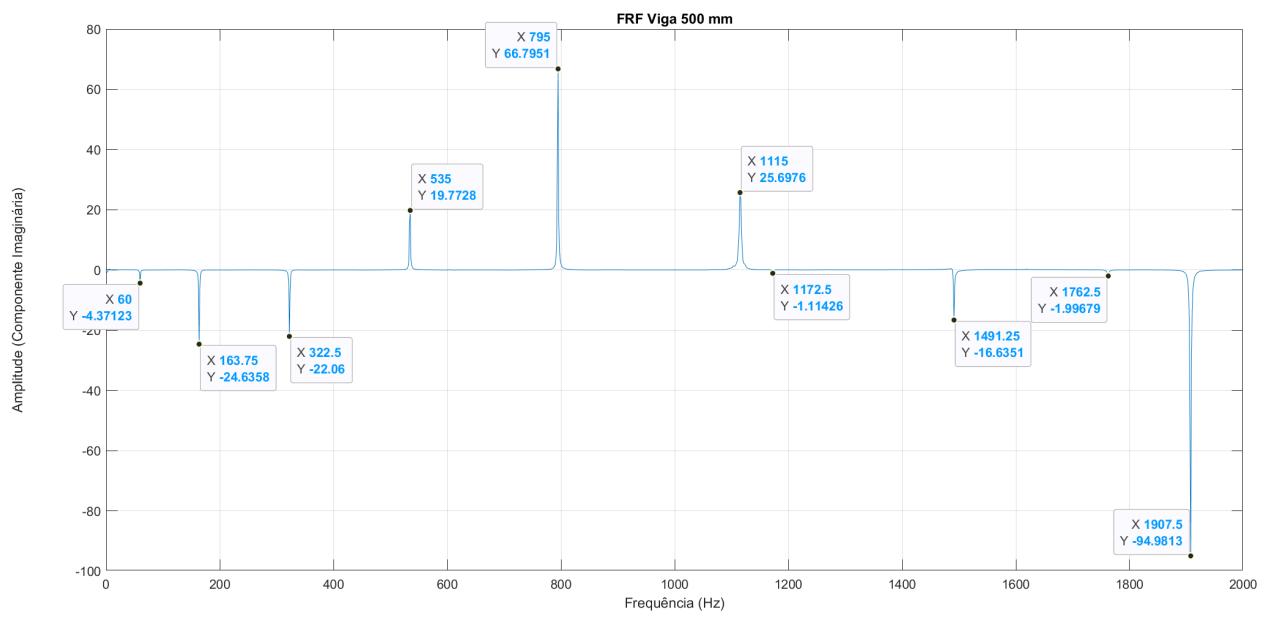


Figura 43: Componente Imaginária da FRF direta FRF_{61} para a viga de 500 mm.

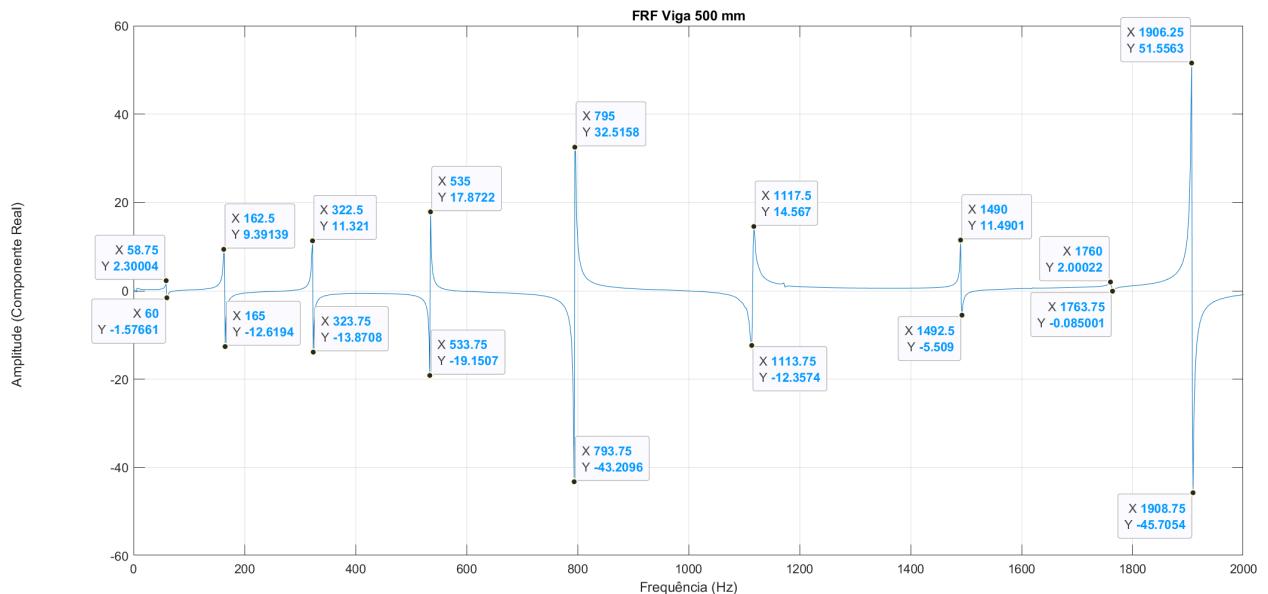


Figura 44: Componente Real da FRF direta FRF_{61} para a viga de 500 mm.

.5 Correção do Módulo de Young no Ansys

Frequências naturais no Ansys para diferentes valores de E na Viga de 400mm

$E=70\text{GPa}$	Diferença Absoluta	$E=60.5\text{GPa}$	Diferença Absoluta	$E=60.3\text{GPa}$	Diferença Absoluta	$E=59\text{GPa}$	Diferença Absoluta
98.15	4.4	93.51	0.24	93.352	0.398	92.341	1.409
270.69	14.44	257.89	1.64	257.46	1.21	254.67	1.58
531.04	26.04	505.93	0.93	505.09	1.34	499.61	4.14
878.59	44.84	837.03	3.28	835.65	1.9	826.59	7.16
1313.6	71.1	1251.5	9	1249.4	1.9	1235.9	11.6
1836.2	86.2	1749.4	0.6	1746.5	7.75	1727.5	11.25
Média:	41.17	Média:	2.615	Média:	2.416333333	Média:	6.189833333
$E=60\text{GPa}$	Diferença Absoluta	$E=65\text{GPa}$	Diferença Absoluta	$E=62.5\text{GPa}$	Diferença Absoluta	$E=59.5\text{GPa}$	Diferença Absoluta
93.12	0.63	96.922	3.172	95.04	1.29	92.731	1.019
256.82	0.57	267.3	11.05	262.11	5.86	255.75	0.5
503.83	0.08	524	20.25	514.22	10.47	501.73	2.02
833.57	0.18	867.61	33.86	850.76	17.01	830.09	3.66
1246.3	1.2	1297.2	49.7	1272	24.5	1241.1	6.4
1742.1	3.35	1813.3	74.55	1778	39.25	1734.8	3.95
Média:	1.001666667	Média:	32.097	Média:	16.39666667	Média:	2.924833333