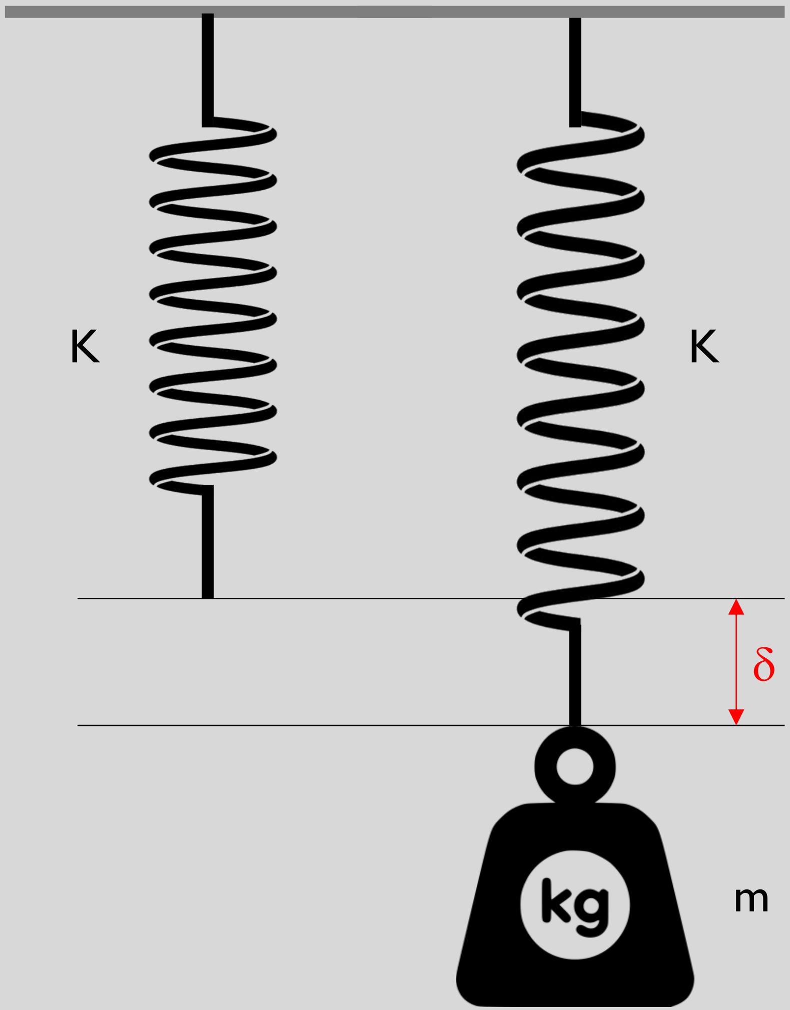
Spacecraft Dynamics & Control

Aula 1 – Sistemas discretos (1GDL) – regime livre

2024/2025
Rui Moreira

Sistema com 1 grau de liberdade – Equação de movimento



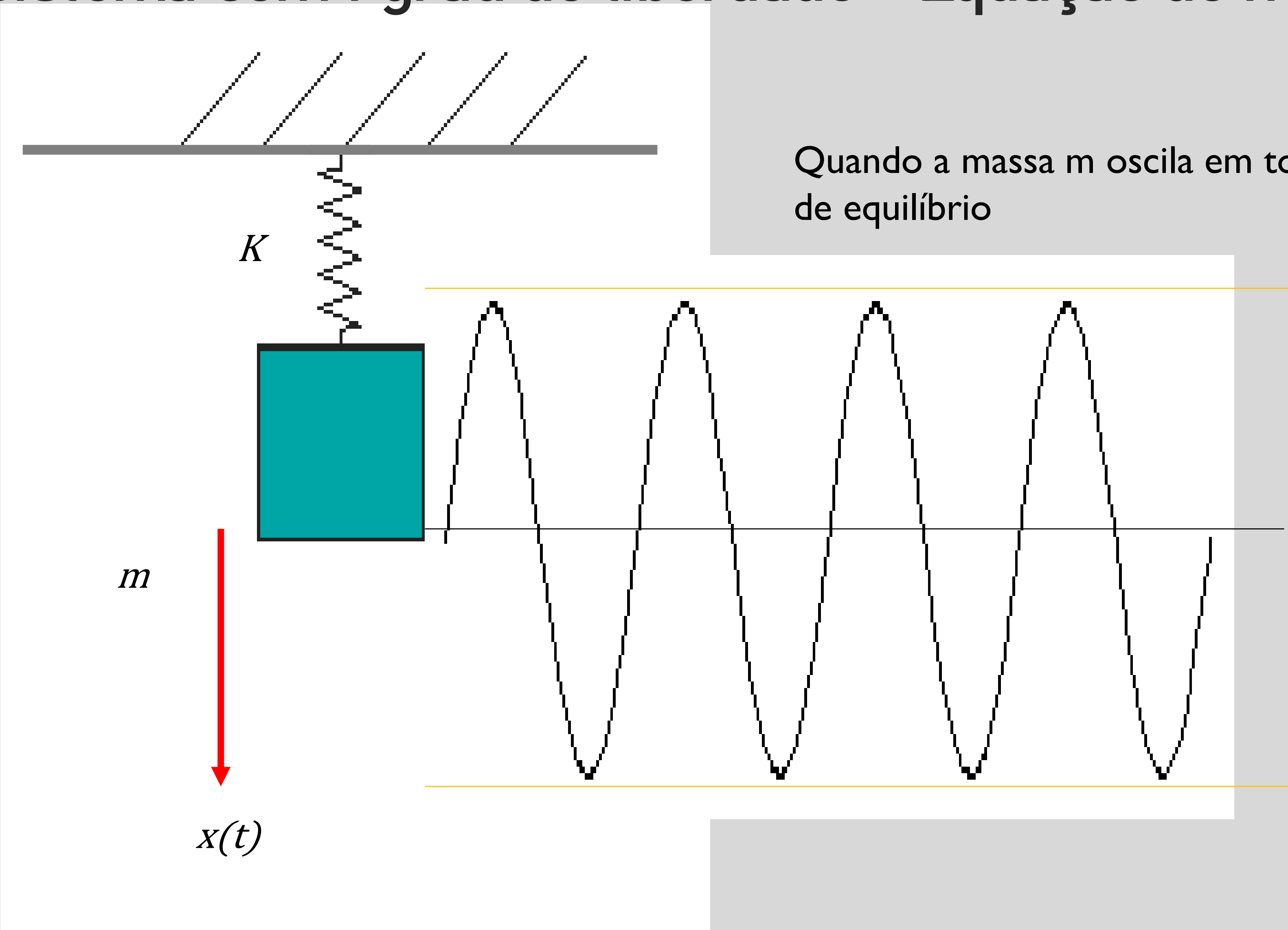
2ª Lei de Newton

$$\sum F = m\ddot{x}$$

Posição de equilíbrio estático

$$K\delta = mg \Leftrightarrow \delta = \frac{mg}{K}$$

Sistema com 1 grau de liberdade - Equação de movimento



Quando a massa m oscila em torno da posição de equilíbrio

$$\sum F = m\ddot{x}$$

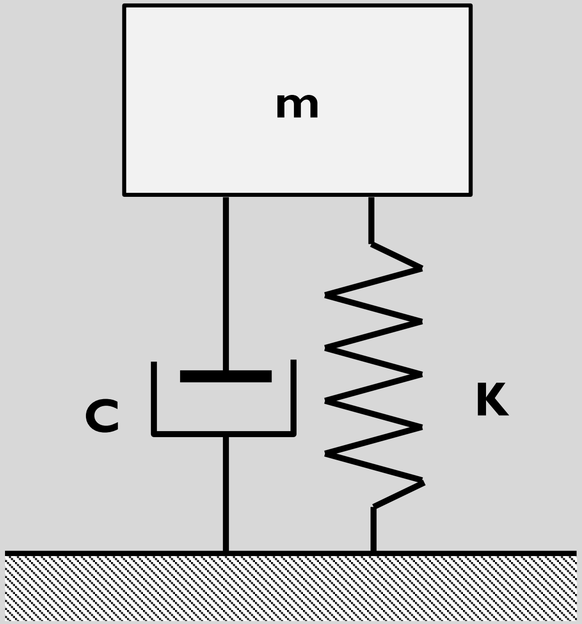
$$mg - K(\delta + x) = m\ddot{x}$$

$$mg - K\delta - Kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0}$$

Equação de movimento

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



Regime livre:

$$\sum F = 0$$

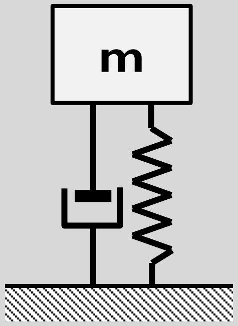
Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

Equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



Equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

Equação diferencial que admite uma solução não nula da forma:

$$x(t) = Ce^{st}$$

cujas derivadas em ordem ao tempo são escritas como:

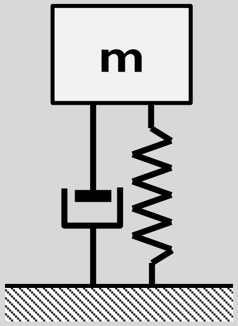
$$\dot{x}(t) = sCe^{st}$$

$$\ddot{x}(t) = s^2Ce^{st}$$

Introduzindo as expressões na eq. de movimento:

$$(s^2m + s\mathrm{c} + K)Ce^{st} = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



$$(s^2m + sc + K)Ce^{st} = 0$$

$$x(t) = Ce^{st}$$

A solução não trivial: $C \neq 0$

resultando na equação característica:

$$s^2m + sc + K \ = 0$$

cuja solução é dada por:

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

2 soluções

$$s_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

$$s_1 = \frac{-C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$s_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

$$s_2 = \frac{-C}{2m} - \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

Soluções da equação característica

$$s_1 = \frac{-C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$s_2 = \frac{-C}{2m} - \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

Soluções da equação de movimento

$$x_1(t) = \boxed{C_1} e^{s_1 t}$$

$$x_2(t) = \boxed{C_2} e^{s_2 t}$$

C_1 e C_2
constantes a
determinar pelas
condições iniciais

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

Amortecimento crítico (C_c)

$$s = \frac{-c \pm \boxed{\sqrt{c^2 - 4mK}}}{2m}$$

$$c^2 - 4mK = 0$$

$$C_c = 2\sqrt{mK}$$
$$C_c = 2m\omega_n$$

Frequência natural não amortecida (ω_n)

$$m\ddot{x} + \cancel{c}\dot{x} + Kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\Downarrow \quad \boxed{(x = \mathrm{Csin}(\omega t))}$$

$$(-m\omega^2 + K)\mathrm{Csin}(\omega t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-m\omega^2 + K) = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Razão de amortecimento (ξ)

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

Amortecimento crítico (c_c)

$$c_c = 2m\omega_n$$

Frequência natural não amortecida (ω_n)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Razão de amortecimento (ξ)

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

Equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

A equação de movimento reescrita em função de ω_n e ξ

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Assim, as soluções da equação característica podem ser escritas como:

$$s_1 = \frac{-C}{2m} + \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad \Rightarrow \quad s_1 = -\omega_n\xi + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s_2 = \frac{-C}{2m} - \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad \Rightarrow \quad s_2 = -\omega_n\xi - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\sqrt{\xi^2 - 1}$

$\xi = 0$	Sistema não amortecido
$0 < \xi < 1$	Sistema subamortecido
$\xi = 1$	Sistema criticamente amortecido
$\xi > 1$	Sistema sobreamortecido

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$\xi = 0$ Sistema não amortecido

$$s_1 = s_2 = \pm\, \omega_n \sqrt{-1} = \pm j\omega_n$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = C_1 e^{-j\omega_n t} + C_2 e^{+j\omega_n t}$$

$$e^{\pm j\omega_n t} = \cos(\omega_n t) \pm j sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A_1} \cos(\omega_n t) + \underbrace{(C_2 - C_1) j}_{A_2} .\sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t)$$

Condições iniciais:

$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

$$x(t=0) = A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = -A_1 \omega_n \sin(0) + A_2 \omega_n \cos(0) = V_0$$

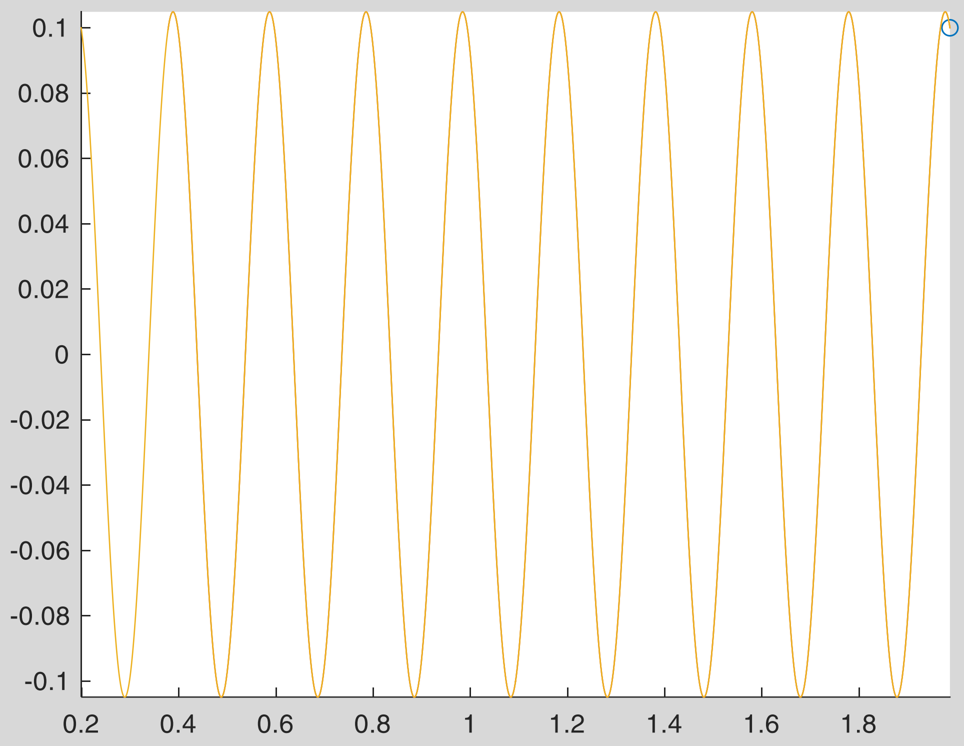
$$A_1 = X_0 \qquad A_2 = \frac{V_0}{\omega_n}$$

$$x(t) = X \cos(\omega_n t - \phi)$$

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega_n}\right)^2}$$ Amplitude

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{V_0}{X_0 \omega_n}\right)$$ Ângulo de fase

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m=1
K=1000

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]
% ---------------------------------
wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);
T=1/fn;

t=linspace(0,5*T,10000);
X=sqrt(x0^2+(v0/wn)^2);
phi=atan2(v0/wn,x0);
x=X*cos(wn*t-phi);

figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$s_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

2 raízes distintas e conjugadas

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = X\boxed{e^{-\xi\omega_n t}}\cos\left(\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d}\,t - \phi\right)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Frequência natural AMORTECIDA

Envelope da amplitude

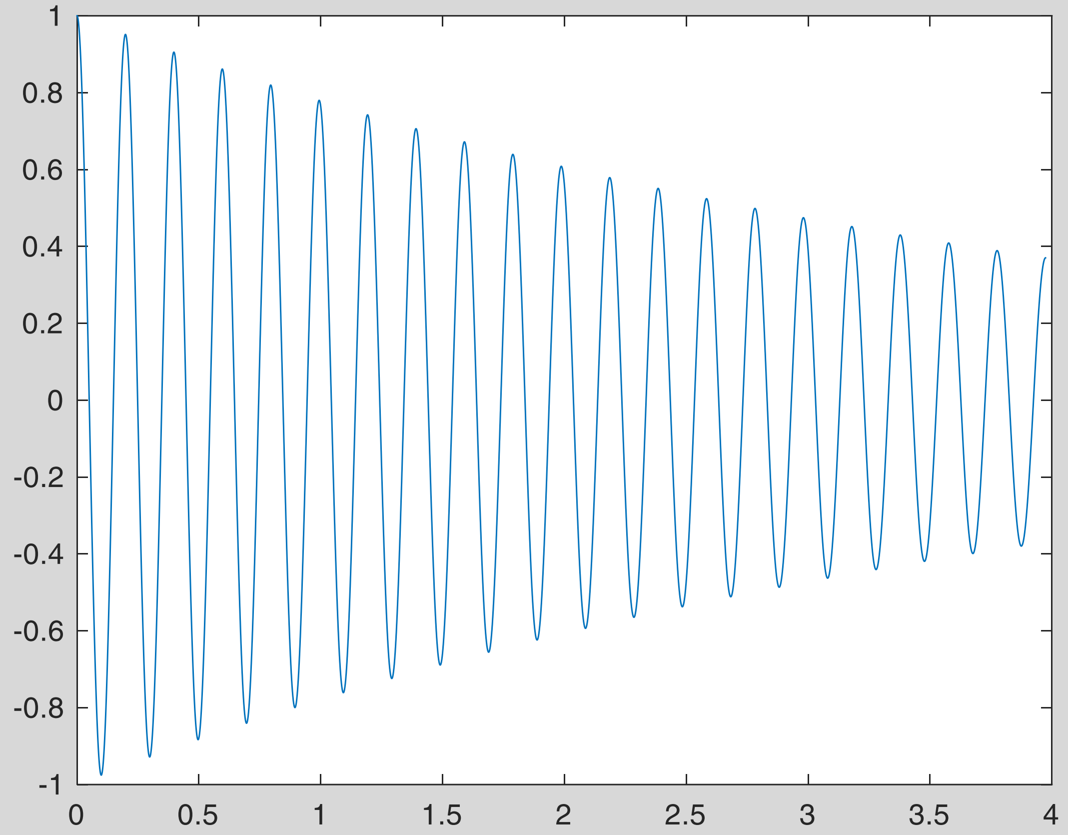
Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\phi\right)$$

$$X = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0+\xi\omega_n X_0}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}$$ Amplitude

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{V_0+\xi\omega_n X_0}{X_0\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$ Ângulo de fase

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m=1
K=1000
c=0.5→62

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
c=2;     % amortecimento viscoso [N/(m/s)]
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]

wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);
cc=2*sqrt(K*m);
qsi=c/cc;

wd=wn*sqrt(1-qsi^2);
fd=wd/(2*pi);
T=1/fd;
t=linspace(0,5*T,10000);
X=sqrt(x0^2+((v0+qsi*wn*x0)/wd)^2);
phi=atan2((v0+qsi*wn*x0),(x0*wd));
x=X*exp(-qsi*wn*t).*cos(wd*t-phi);
figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$\xi = 1$ Sistema criticamente amortecido

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Frequência natural amortecida

quando $\xi \to 1 \Rightarrow \omega_d \to 0 \Rightarrow$ $\cos(\omega_d t) \to 1$, $\sin(\omega_d t) \to \omega_d t$

$$x(t) = e^{-\omega_n t}[A_1 + A_2\omega_d t]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$\xi = 1$ Sistema criticamente amortecido

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_1 + A_2\omega_d t]$$

Condições iniciais:

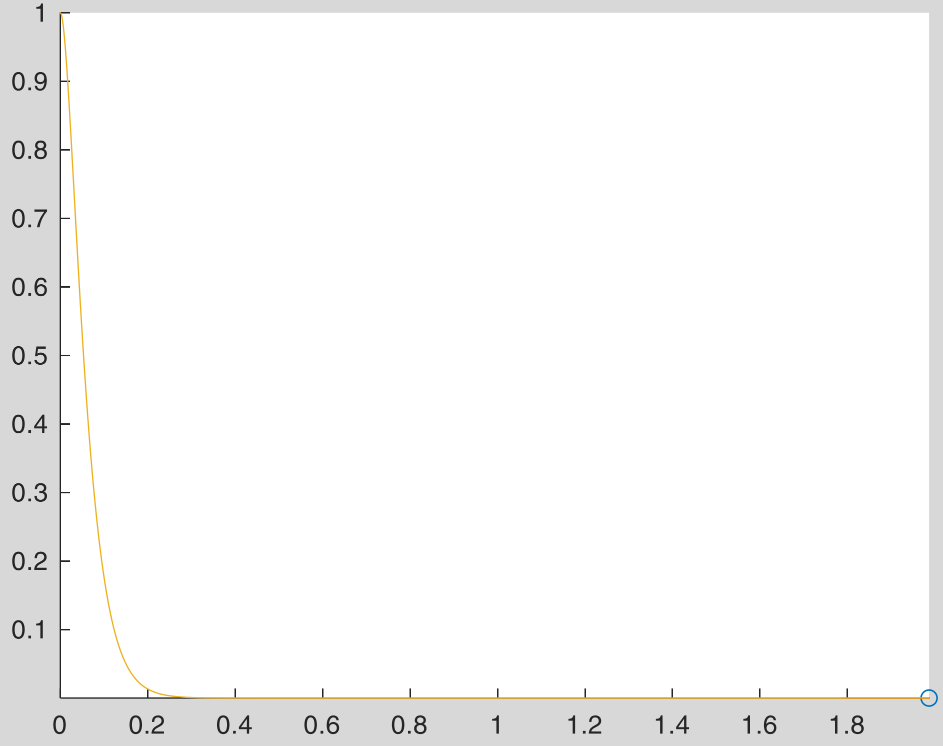
$$x(t=0) = X_0$$
$$\dot{x}(t=0) = V_0$$

$$A_1 = X_0$$

$$A_2 = \frac{V_0 + \omega_n X_0}{\omega_d}$$

$$x(t) = e^{-\omega_n t}[X_0 + (V_0 + X_0\omega_n)t]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



m=1
K=1000
c=Cc (≈63)

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]
% ---------------------------------
wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);
T=1/fn;
cc=2*sqrt(K*m);
qsi=1;

t=linspace(0,5*T,10000);

x=exp(-wn*t).*(x0+(v0+x0*wn)*t);

figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

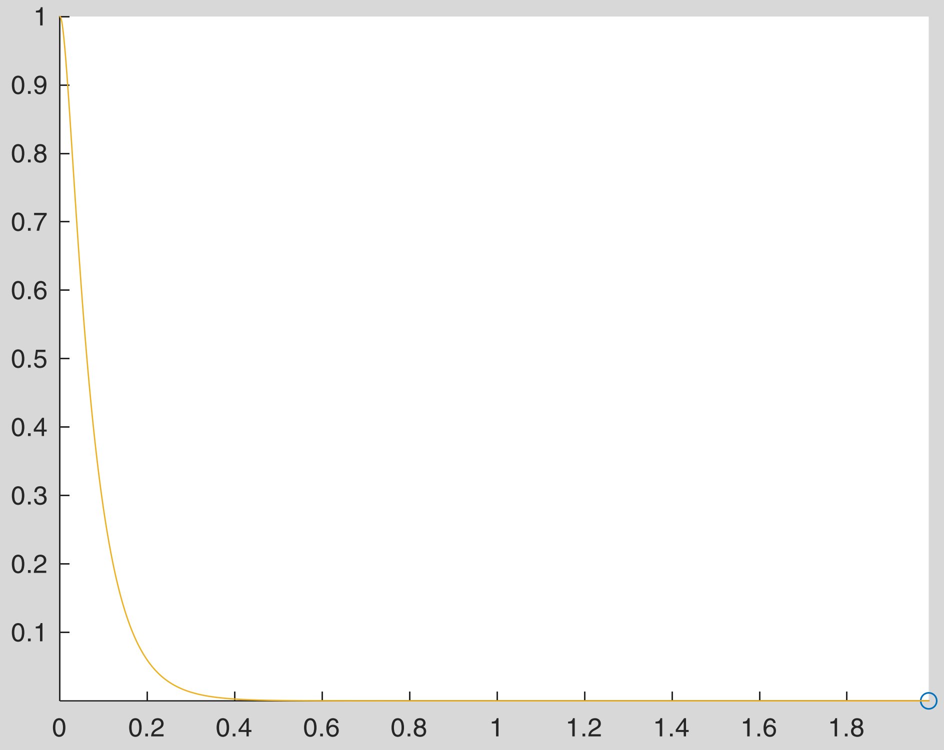
$\xi > 1$ **Sistema sobreamortecido**

$$s_{1/2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

2 raízes reais e negativas

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[X_0 \cosh\left[\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right] + \frac{\xi\omega_n X_0 + V_0}{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}\sinh\left[\left(\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right]\right]$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre



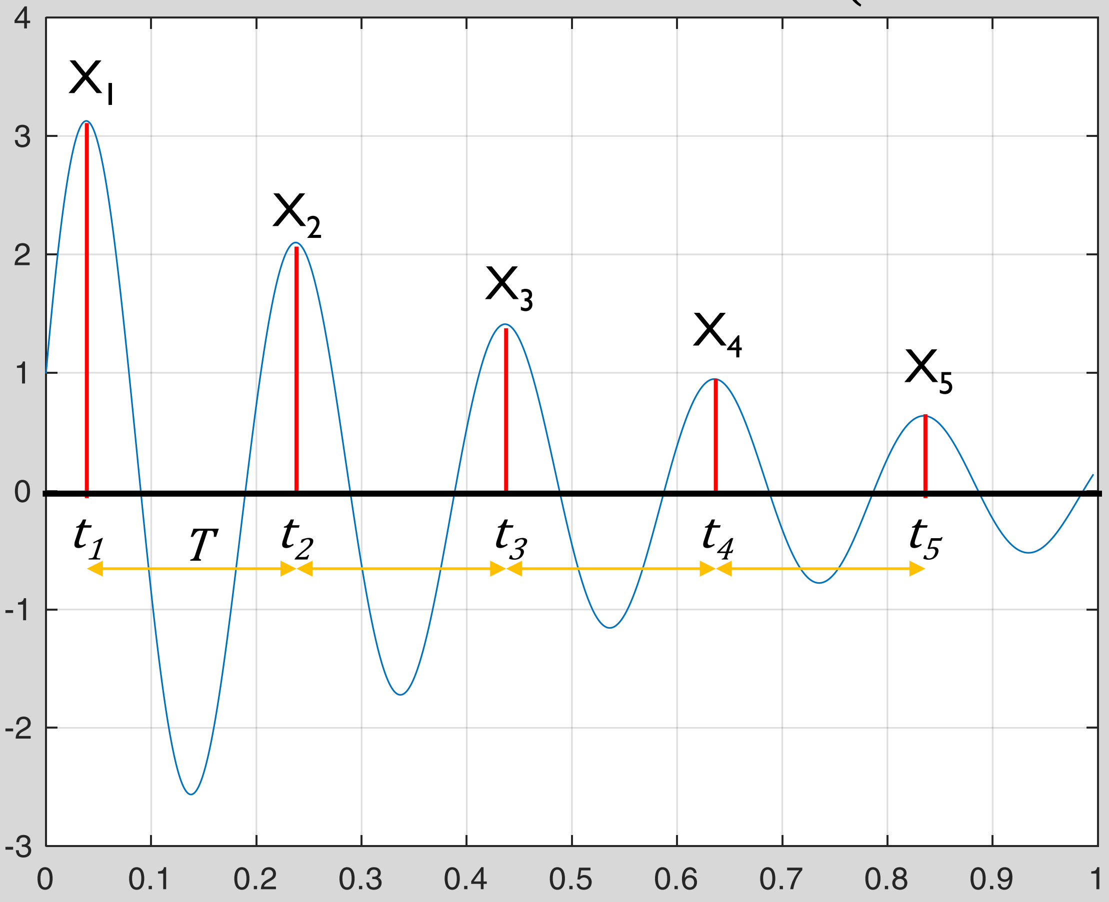
m=1
K=1000
c>Cc (Cc=63.3)

```
m=1;     % massa do sistema [kg]
K=1000; % rigidez do sistema [N/m]
c=65; cc=63.2456
x0=1; % deslocamento inicial [m]
v0=10; % velocidade inicial   [m/s]
% ----------------------------------
wn=sqrt(K/m);
fn=wn/(2*pi);

cc=2*sqrt(K*m);
qsi=c/cc;

wd=wn*sqrt(qsi^2-1); fd=wd/(2*pi);
T=1/fd;

t=linspace(0,3*T,10000);
x=exp(-qsi*wn*t).*(x0*cosh(wd*t)
+(qsi*wn*x0+v0)/wd*sinh(wd*t));
figure(1);
comet(t,x,.9);
xlabel('t [s]');
ylabel('x(t)')
```

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t - \phi\right) \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$ Período da onda

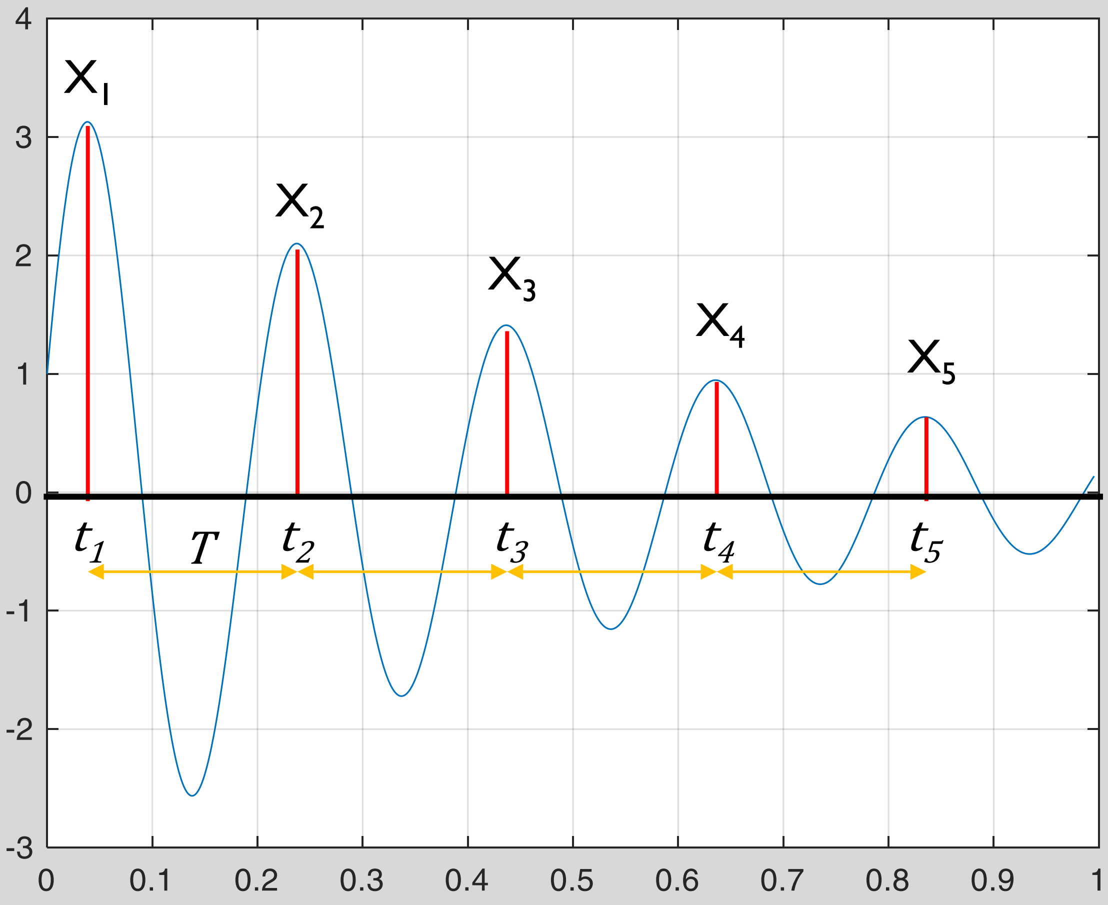
$$x(t_1) = Xe^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

$$x(t_2) = Xe^{-\xi\omega_n (t_1+T)}\cos(\omega_d (t_1 + T) - \phi)$$

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$



$$x(t_1) = Xe^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)$$

$$x(t_2) = Xe^{-\xi\omega_n (t_1+T)}\cos(\omega_d (t_1 + T) - \phi)$$

$$\frac{x(t_1) = Xe^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{x(t_2) = Xe^{-\xi\omega_n (t_1+T)}\cos(\omega_d (t_1 + T) - \phi)}$$

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = e^{-\xi\omega_n (t_1 - t_1 - T)} = e^{\xi\omega_n T}$$

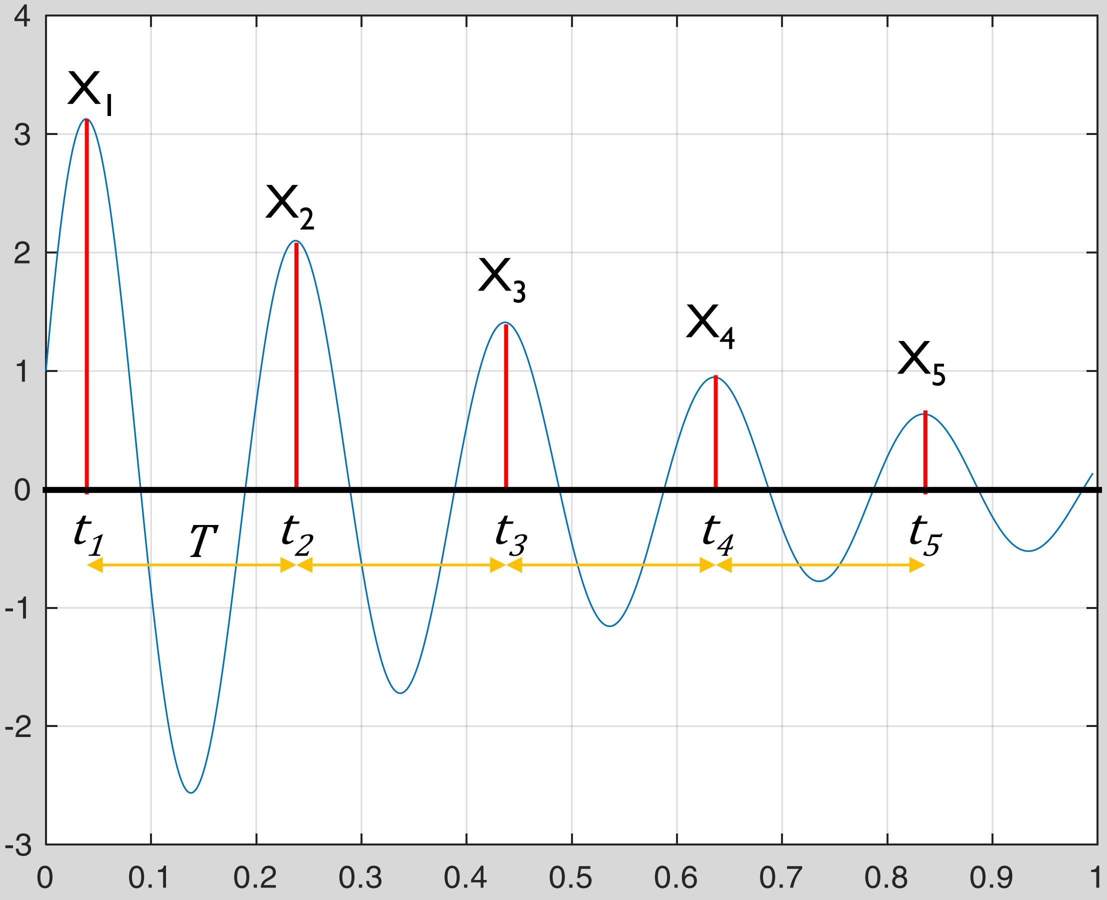
$$\log\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \xi\omega_n T = \delta$$

Decremento logarítmico

Sistema com 1 grau de liberdade – Regime livre

$0 < \xi < 1$ Sistema subamortecido

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

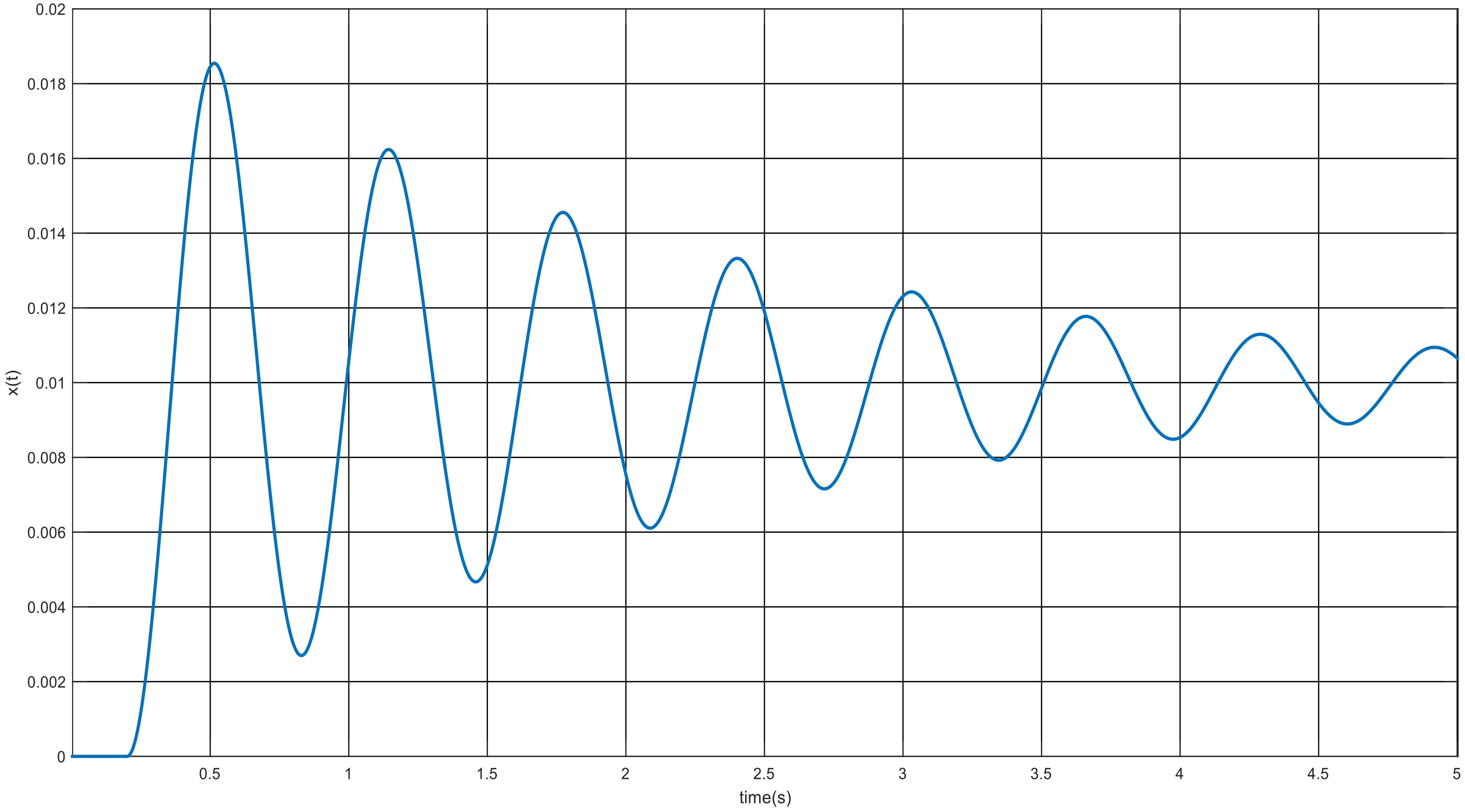


$$\log\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right) = \xi\omega_n T = \delta$$ Decremento logarítmico

$$\delta = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi}$$ para $\xi < 5\%$


0.02
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
x(t)
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
time(s)