universidade de aveiro
theoria poiesis praxis

MECÂNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL para ENGENHARIA AEROSPACIAL

2024/2025

Modelos físicos: abordagem macroscópica e abordagem diferencial

V. A. F. Costa

Grandezas envolvidas/transferidas

Massa (global) - m

Massa de uma espécie química j - m_j

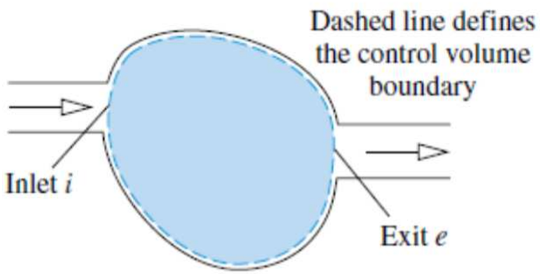
Quantidade de movimento - mv_i

Energia (total) - E

Energia interna - $E_U = E - E_{mecânica}$

Equações macroscópicas de balanço/conservação das grandezas envolvidas/transferidas

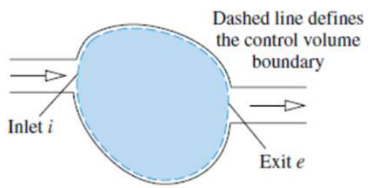
Equação de balanço/conservação de **massa** global



$$\frac{dm}{dt} = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

Equação de balanço/conservação de **massa de uma espécie química** j

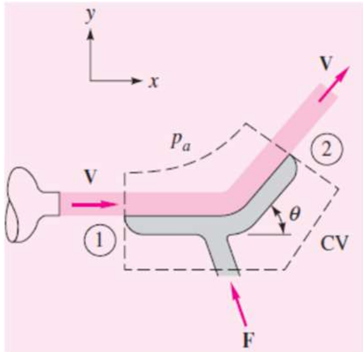
$$\frac{dm_j}{dt} = \sum_{in} \dot{m}_j - \sum_{out} \dot{m}_j + \dot{S}_{g,m_j}$$



Equações macroscópicas de balanço/conservação das grandezas envolvidas/transferidas

Equação de balanço da **quantidade de movimento linear** segundo a direção *i* (2ª Lei de Newton)

$$\frac{d\left(mv_i\right)}{dt}=\sum F_i+\sum_{in}\dot{m}v_i-\sum_{out}\dot{m}v_i$$



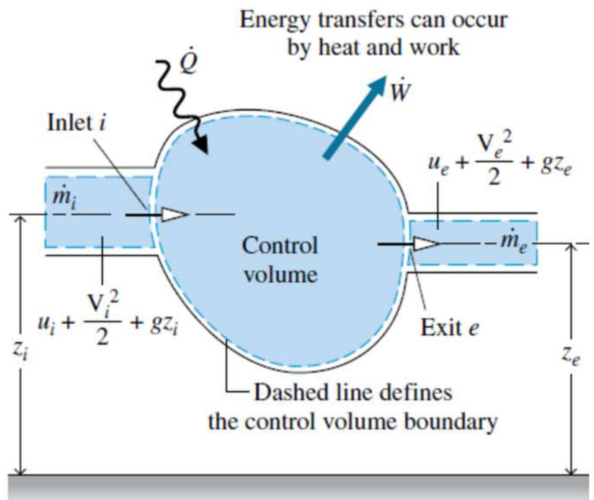
Há uma equação de balanço da quantidade de movimento segundo cada direção coordenada (*x*, *y*, *z*)

Forças atuantes: de pressão, viscosas, e de volume

Equação de balanço de **energia**

[time *rate of change* of the energy contained within the control volume *at time t*] = [*net rate* at which energy is being transferred in by heat *at time t*] − [*net rate* at which energy is being transferred out by work *at time t*] + [*net rate* of energy transfer *into* the control volume accompanying mass flow]

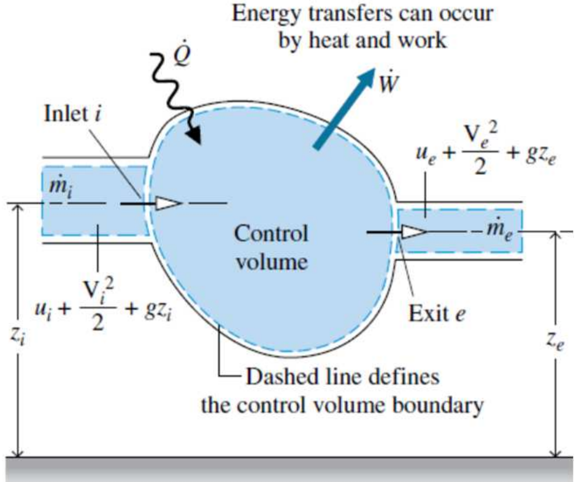
$$\frac{d\left(me\right)}{dt}=\dot{Q}-\dot{W}+\sum_{in}\dot{m}e-\sum_{out}\dot{m}e$$



Equações macroscópicas de balanço/conservação das grandezas envolvidas/transferidas

Equação de balanço de energia

$$\frac{d(me)}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_{in} \dot{m}\left(u + \frac{1}{2}v^2 + gz\right) - \sum_{out} \dot{m}\left(u + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)$$



As equações macroscópicas de balanço incluem as trocas do vc com o exterior, através da sua fronteira

Equações de balanço sobre um volume infinitesimal: equações diferenciais de balanço

Obtidas fazendo tender para zero o vc sobre o qual se aplicam, e dividindo o resultado por esse volume infinitesimal

Adjacentes a um vc infinitesimal ficam outros vc infinitesimais, havendo trocas entre eles

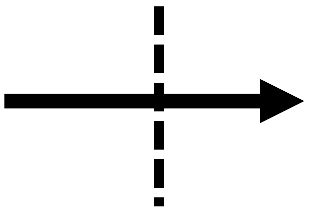
Equações de balanço sobre um volume infinitesimal: equações diferenciais de balanço

Fluxos de troca entre os vc adjacentes, através das faces que partilham

Advecção (não depende de nenhum coeficiente particular – lei geral)

Proporcional à quantidade advectada

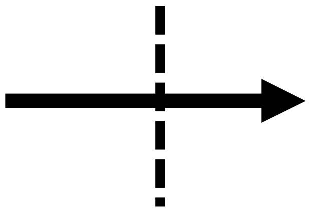
$$J_{a,\phi,x} = \rho v_x \phi = \frac{\dot{m}_x}{A}\phi$$

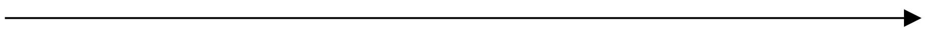


Difusão (depende de um coeficiente particular – lei constitutiva)

Proporcional ao gradiente da variável que difunde

$$J_{d,\phi,x} = -\Gamma_\phi \frac{d\phi}{dx}$$





x

Equação diferencial de balanço/conservação de massa (global)

Não há difusão, e apenas há advecção

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0$$

Equação diferencial de balanço/conservação de massa da espécie química *j*

Difusão descrita pela Lei de Fick

$$J_{j,x}=-\rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial x} \qquad J_{j,y}=-\rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial y} \qquad J_{j,z}=-\rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial z}$$

c_j fração mássica da espécie química *j*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_j)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u c_j)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v c_j)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w c_j)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho D_j \frac{\partial c_j}{\partial z}\right)+S_{m_j}$$

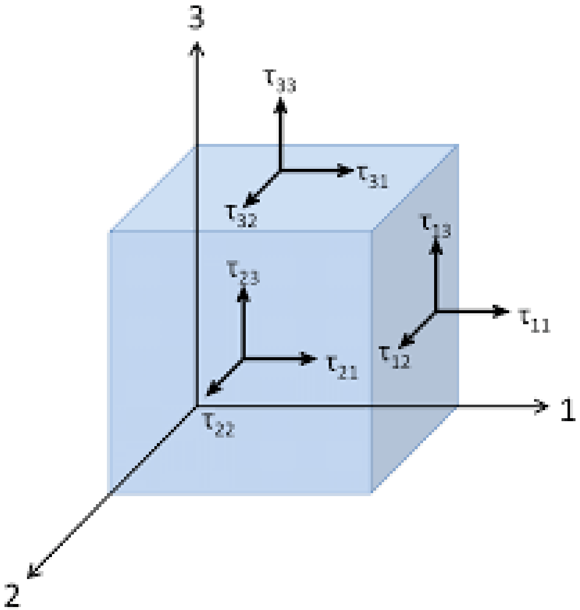
Equações diferenciais de balanço de quantidade de movimento (equações de Navier-Stokes)

Difusão descrita pela Lei da Viscosidade de Newton
(Há modelos reológicos mais complexos!)

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Equações diferenciais de balanço de quantidade de movimento (equações de Navier-Stokes)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+S_u$$

$$S_u=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wv)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+S_v$$

$$S_v=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+S_w$$

$$S_w=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

Equação diferencial de balanço de energia interna

Difusão descrita pela Lei de Fourier (condução de calor)

$$\dot{q}_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \dot{q}_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad \dot{q}_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w c_p T\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+S_U$$

$$S_U = -\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\mu\Phi$$

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

Algumas notas sobre as equações diferenciais de balanço/conservação

Semelhança formal das equações diferenciais para as diversas variáveis

As equações diferencias de balanço para os vc infinitesimais incluem as trocas entre eles, através das suas faces

Falta especificar as trocas entre os vc da fronteira e a fronteira do domínio (através das suas faces) $\Rightarrow$ Falta especificar as condições de fronteira

Forma geral da equação diferencial de balanço/conservação

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\substack{\text{acumulação}\\ \text{no vc}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi)}_{\text{advecção através das faces do vc}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}_{\text{difusão através das faces do vc}} + \underbrace{S_\phi}_{\substack{\text{geração}\\ \text{no vc}}}$$

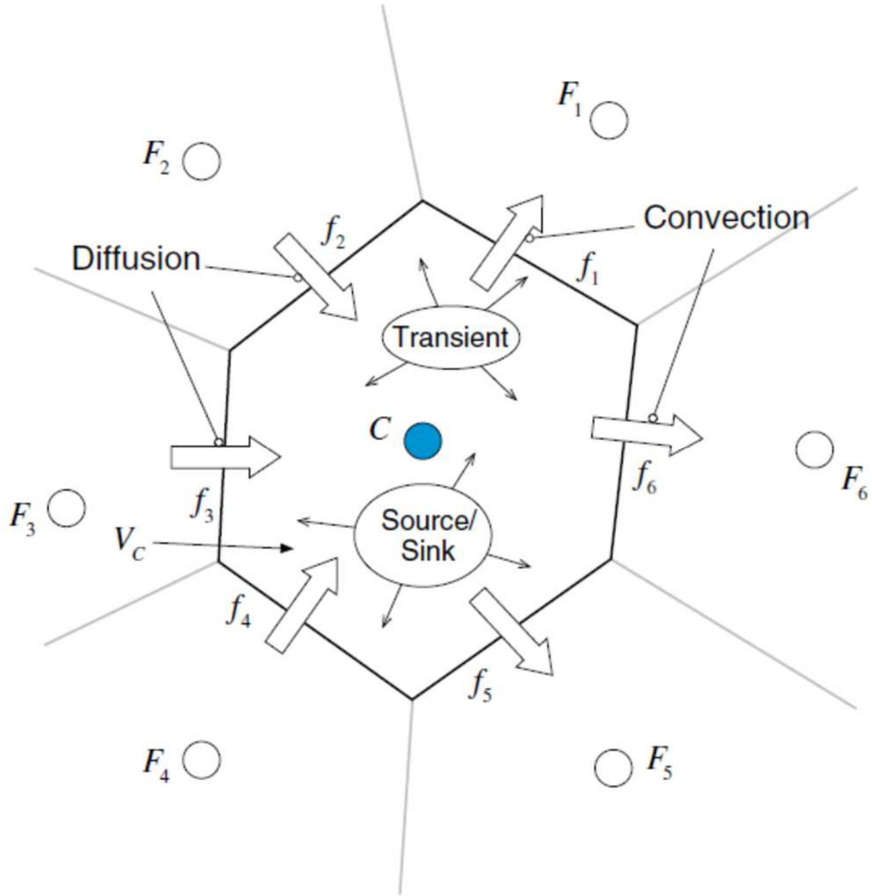
Equações diferenciais do modelo

Equações diferenciais tomadas como sendo nominalmente lineares

Cada equação diferencial permite obter a distribuição espacial e temporal da respetiva variável independente ϕ

Algumas notas sobre as equações diferenciais de balanço/conservação

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\text{acumulação no vc}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi)}_{\text{advecção através das faces do vc}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}_{\text{difusão através das faces do vc}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{geração no vc}}$$



Algumas notas sobre as equações diferenciais de balanço/conservação

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\substack{\text{acumulação} \\ \text{no vc}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi)}_{\text{advecção através das faces do vc}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)}_{\text{difusão através das faces do vc}} + \underbrace{S_\phi}_{\substack{\text{geração} \\ \text{no vc}}}$$

Equação diferencial geral inclui:

- A massa volúmica do fluido (a mesma qualquer que seja a variável dependente em causa)
- O coeficiente de difusão (o qual depende da variável dependente em causa)
- O termo fonte (o qual depende da variável dependente em causa)

Sistemas de coordenadas

Pode haver outros sistemas de coordenadas que melhor se adaptem ao sistema em análise que não o sistema de coordenadas Cartesianas

Sistema de coordenadas Cartesianas

Sistema de coordenadas cilíndricas

Sistema de coordenadas esféricas

Sistemas de coordenadas curvilíneas generalizadas