2024/2025

Turbulência e modelos de turbulência

V. A. F. Costa

Introdução

Escoamento laminar

Ordenado e estável

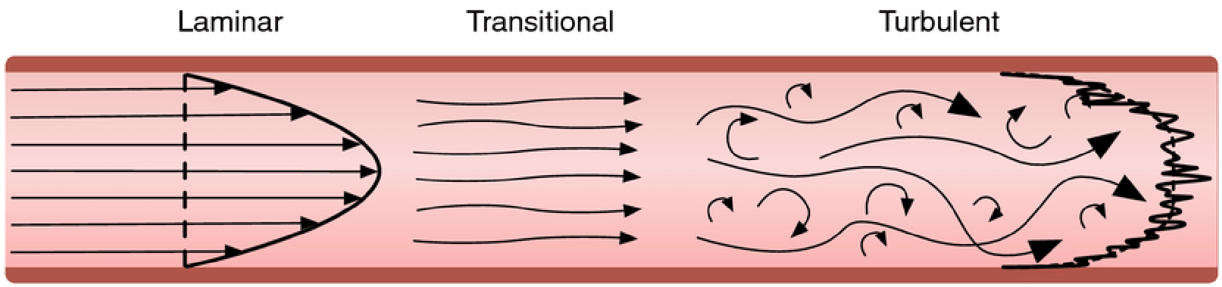
Escoamento turbulento

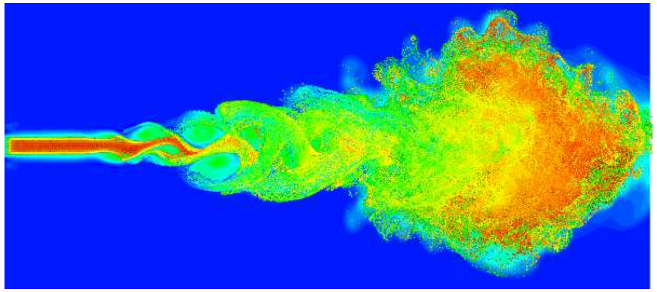
Desordenado, instável e transitório

Ainda que seja bem identificado o sentido do escoamento principal, há vórtices no escoamento e, localmente, o escoamento pode ter até um sentido contrário ao do escoamento principal

O potencial para o aparecimento da turbulência existe sempre, mas a turbulência só se manifesta acima de determinados valores da velocidade ou de espaço livre para se desenvolver

O número de Reynolds em escoamento forçado…

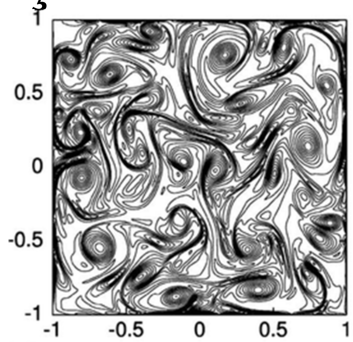




Introdução

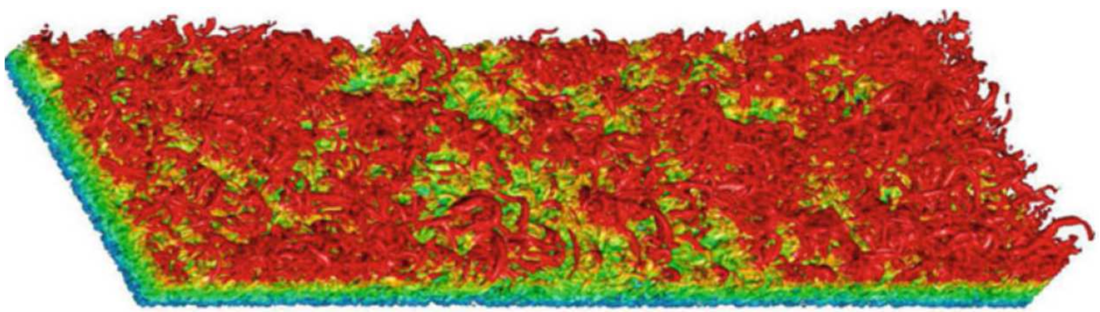
A turbulência do ponto de vista energético

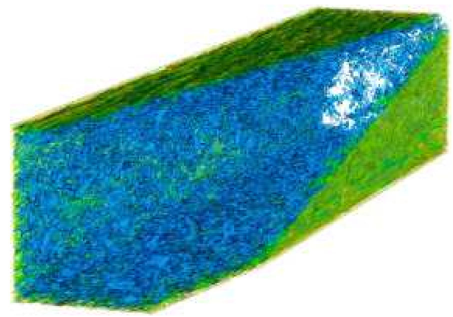
- Vórtices no escoamento, os maiores dos quais que se formam e movimentam à custa de energia mecânica retirada do escoamento principal
- A turbulência torna mais difícil o escoamento, induzindo maiores perdas de carga; escoamentos requerem mais energia para acontecerem, e para se manterem
- Vórtices de maiores dimensões que passam a sua energia mecânica a vórtices de dimensões menores
- Cascata de vórtices, dos de maiores dimensões até aos de menores dimensões, a escalas muito pequenas, para as quais a energia mecânica dos vórtices se converte em calor por dissipação viscosa



Como calcular escoamentos turbulentos?

- Escalas de espaço podem ser, localmente, de dimensão muito reduzida
- Escalas de tempo podem ser, localmente, de dimensão muito reduzida
- Há escalas espaciais e temporais muito diversas num escoamento!
- DNS – Direct Numerical Simulation
  - Requer malha suficientemente fina para capturar todos os pormenores do escoamento, até às escalas espaciais de menor dimensão
  - Requer malha temporal suficientemente fina para capturar todos os pormenores do escoamento, até às escalas temporais menores
  - Requer recursos de memória e de processamento compatíveis com essas malhas espacial e temporal muito finas
  - Geralmente não é exequível para problemas de interesse prático





Como calcular escoamentos turbulentos?

Métodos alternativos

Fenómenos e processos de pequena escala tomados por valores médios

Malhas espacial e temporal mais compatíveis com os recursos necessários/disponíveis

Exequível para cálculo de escoamentos de interesse prático

Decomposição de Reynolds

Valor instantâneo de uma variável tomado como a soma do seu valor médio (temporal) e da sua flutuação

$$\tilde{u} = u + u'$$

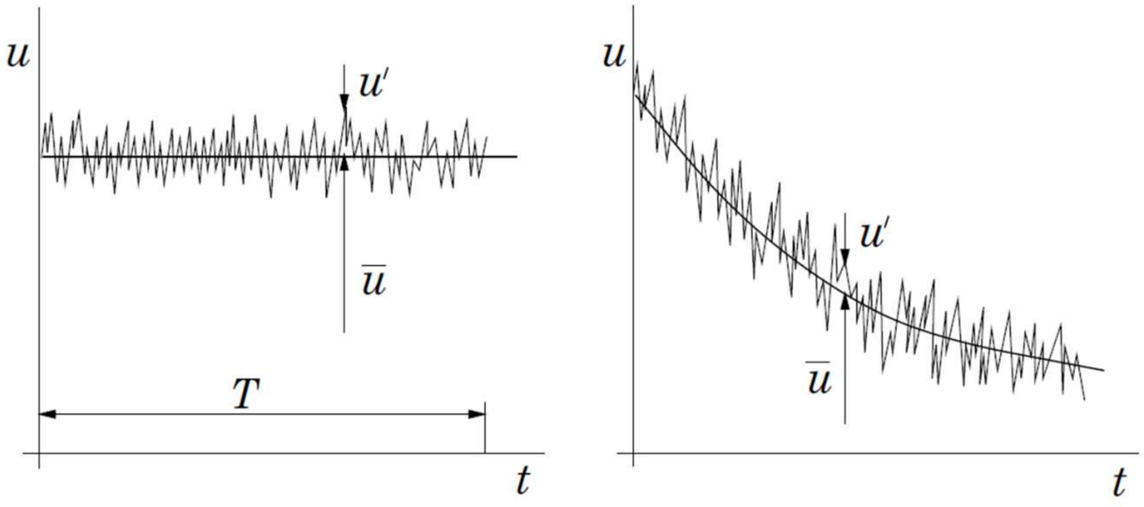
$$\tilde{v} = v + v'$$

$$\tilde{w} = w + w'$$

$$\tilde{P} = P + P'$$

$$\tilde{T} = T + T'$$

$$\tilde{\phi} = \phi + \phi'$$



Equações diferenciais para o escoamento instantâneo

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\tilde{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\tilde{w})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\tilde{u}\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\tilde{v}\tilde{u})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\tilde{w}\tilde{u})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right)+\tilde{S}_u$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{v})+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\tilde{u}\tilde{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\tilde{v}\tilde{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\tilde{w}\tilde{v})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\right)+\tilde{S}_v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{w})+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\tilde{u}\tilde{w})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\tilde{v}\tilde{w})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\tilde{w}\tilde{w})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\right)+\tilde{S}_w$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_p\tilde{T}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\tilde{u}c_p\tilde{T}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\tilde{v}c_p\tilde{T}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\tilde{w}c_p\tilde{T}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right)+\tilde{S}_U$$

Equações diferenciais para o escoamento médio (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)- RANS

Tomam-se os valores instantâneos das variáveis dependentes como a soma dos seus valores médios e das suas respetivas flutuações

Aplica-se o operador média sobre cada uma das equações diferenciais

Equações diferenciais para o escoamento médio (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)- RANS

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u)=0$$

$$\bar{\tilde{\phi}}=\phi=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\tilde{\phi}dt$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\rho\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\rho\overline{v'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}-\rho\overline{w'u'}\right)+S_u$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wv)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}-\rho\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\rho\overline{v'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}-\rho\overline{w'v'}\right)+S_v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}-\rho\overline{u'w'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}-\rho\overline{v'w'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\rho\overline{w'w'}\right)+S_w$$

Equações diferenciais para o escoamento médio (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)- RANS

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w c_p T\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}-\rho c_p\overline{u'T'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}-\rho c_p\overline{v'T'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}-\rho c_p\overline{w'T'}\right)+S_U$$

As equações diferenciais para o escoamento médio têm novos termos, que são a média dos produtos das flutuações das variáveis presentes nos termos advectivos: fluxos turbulentos

As flutuações das variáveis têm uma ação local de mistura, com um efeito semelhante ao da difusão (contributo para a maior uniformidade local das variáveis dependentes) $\Rightarrow$ Os fluxos turbulentos são modelados como sendo fluxos difusivos

Equações diferenciais para o escoamento médio (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)- RANS

$$-\rho\overline{u'u'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\rho k \qquad -\rho\overline{v'u'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad -\rho\overline{w'u'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$-\rho\overline{u'v'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad -\rho\overline{v'v'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\rho k \qquad -\rho\overline{w'v'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$-\rho\overline{u'w'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad -\rho\overline{v'w'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad -\rho\overline{w'w'} \approx \mu_t\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\rho k$$

$$-\rho c_p\overline{u'T'} \approx k_t\frac{\partial T}{\partial x} \qquad -\rho c_p\overline{v'T'} \approx k_t\frac{\partial T}{\partial y} \qquad -\rho c_p\overline{w'T'} \approx k_t\frac{\partial T}{\partial z}$$

Uma outra grandeza ‘nova’ é a energia cinética específica do movimento turbulento

$$k=\frac{1}{2}\left(\overline{u'u'}+\overline{v'v'}+\overline{w'w'}\right)$$

O uso deste modelo de turbulência requer novos coeficientes de difusão: a viscosidade turbulenta, e a condutividade térmica turbulenta $k_t = \mu_t c_p / \sigma_T$

A condutividade térmica turbulenta pode ser expressa como dependendo da viscosidade turbulenta e de um número de Prandtl turbulento σ_T

Equações diferenciais para o escoamento médio (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)- RANS

As equações do escoamento médio a resolver são então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+S_u$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wv)=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+S_v$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((\mu+\mu_t)\frac{\partial w}{\partial z}\right)+S_w$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v c_p T\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w c_p T\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(k+\frac{\mu_t c_p}{\sigma_T}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(k+\frac{\mu_t c_p}{\sigma_T}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(k+\frac{\mu_t c_p}{\sigma_T}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+S_U$$

Equações para o escoamento médio (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)- RANS

É preciso agora um modelo para cálculo da viscosidade turbulenta

Modelo *k*-ε

A partir das equações diferenciais da quantidade de movimento é possível obter uma equação diferencial para a energia cinética específica do movimento turbulento

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uk)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vk)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wk)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial z}\right)+\mu_t\Phi-\rho\varepsilon$$

Modelo *k*-ε

Para resolver a equação diferencial para *k* é preciso conhecer a taxa de dissipação da energia cinética específica do movimento turbulento, ε

Pode-se obter também uma equação diferencial para a taxa de dissipação da energia cinética específica do movimento turbulento

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w\varepsilon)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial z}\right)+\left(C_{1,\varepsilon}\mu_t\Phi-C_{2,\varepsilon}\rho\varepsilon\right)\frac{\varepsilon}{k}$$

Constantes do modelo *k*-ε

Constante	C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$
Valor	0.09	1.0	1.3	1.44	1.92

A viscosidade turbulenta é calculada como $\mu^t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$

Modelo *k*-ε

Condições de fronteira para *k* e para ε

Nas paredes, $k = 0$

Nas paredes, já não é tão simples especificar ε, que não é aí nulo, mas os softwares incluem como o fazer

Nas entradas do escoamento pode especificar-se a intensidade da turbulência (geralmente 1% para escoamentos de baixa turbulência, de 3 % a 5 % para escoamentos de média turbulência, e de 5% a 20% para escoamentos altamente turbulentos)

$$Ti = \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right)}}{U} \right]_{in} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} k_{in}}}{U_{in}}$$

de onde se obtém a condição de entrada de *k* como $k_{in} = \frac{3}{2}\left(Ti \times U_{in}\right)^2$

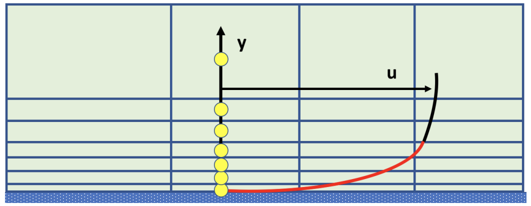
Modelo *k*-ε

Condições de fronteira para k e para ε

A condição de fronteira de entrada para ε é

$$\varepsilon_{in} = \frac{k^{3/2}}{l_{in}}, \qquad l_{in} = [0{,}03 - 0{,}15] \times D_h$$

em que D_h é o diâmetro hidráulico da entrada



$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} = \frac{\rho \sqrt[4]{C_\mu k^2}}{\mu}$$

Distância da primeira camada de nós relativamente à parede

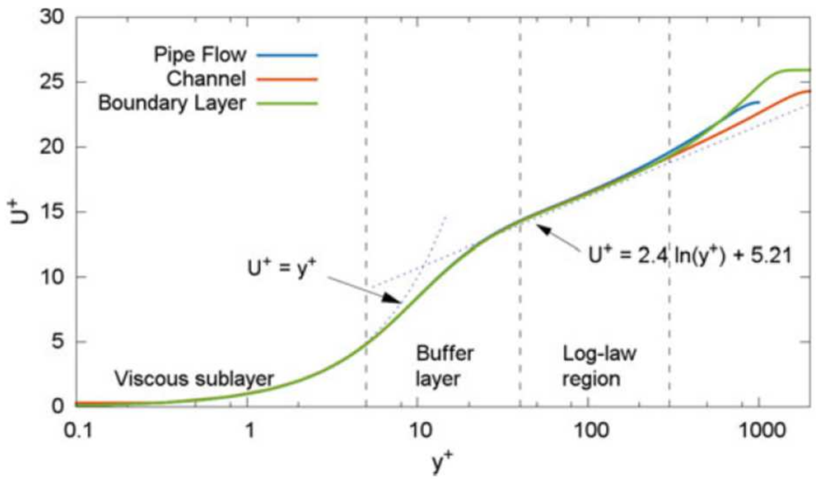
É da maior importância para uma boa modelação do que se passa na camada limite adjacente à parede

Subcamada viscosa, em que prevalecem os efeitos viscosos

Buffer layer: o gradiente de velocidade ainda é elevado, mas a turbulência já é intensa

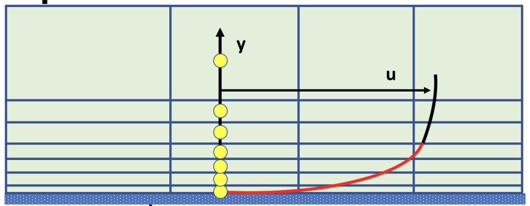
Log-law region: zona de validade da lei de parede logarítmica

Camada exterior, turbulenta



Modelo *k*-ε

Distância da primeira camada de nós relativamente à parede



Várias possibilidades:

Fazer a integração na própria camada limite

A 1ª camada de nós adjacente à parede deve ter $y^+ \approx 1$

Usar um modelo de turbulência de baixo número de Reynolds, como, por exemplo, o modelo *k*-ω

É especialmente indicada quando se pretende maior exatidão no cálculo das forças de interação fluido-parede

Usar uma lei de parede

A 1ª camada de nós adjacente à parede deve ter $30 < y^+ < 300$

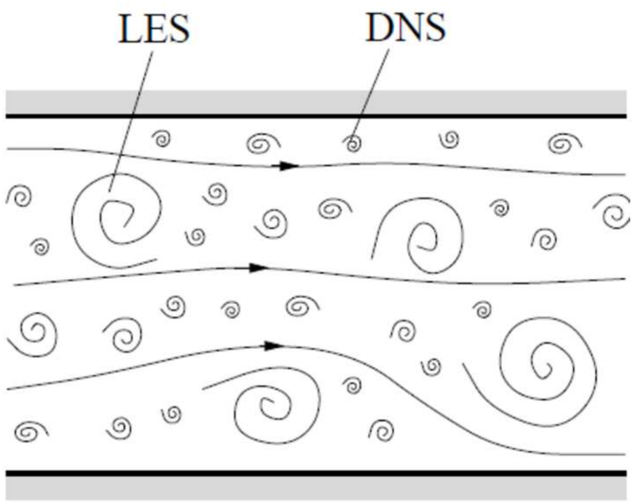
Usar um modelo de turbulência como o modelo *k*-ε, ou outro dele derivado

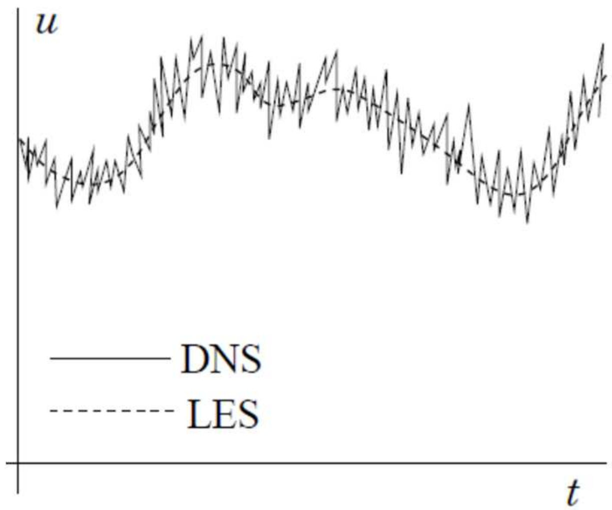
É especialmente indicada quando se quer uma maior exatidão no cálculo da mistura/difusão induzida pela turbulência, e não tanto no cálculo das forças de interação fluido-parede

Outros modelos de turbulência de duas equações

- Geralmente a energia cinética específica do movimento turbulento, k, é comum a todos eles
- Há, no entanto, modelos que consideram outra segunda variável que não a taxa de dissipação isotrópica da energia cinética específica do movimento turbulento
  - Modelo RNG k-ε (variante do modelo k-ε baseada na 'renormalization group theory')
  - Modelo k-ω (em que há uma equação diferencial para ω, a taxa específica de dissipação da energia cinética turbulenta em energia interna (calor))
  - Modelo SST k-ω (combinação do modelo k-ω e de uma transformação do modelo k-ε)
  - Modelo …
- Não há um modelo de turbulência universal para todas as situações
- Obter indicações sobre qual o modelo de turbulência que melhor se adequa a um determinado tipo de escoamento

LES – Large Eddy Simulation





Os vórtices de maior escala têm associada mais energia, e interferem mais nos mecanismos de transferência e de mistura

Os vórtices de menor escala têm associada menos energia, e interferem menos nos mecanismos de transferência e de mistura

Daí que faça algum sentido tratar com mais 'cuidado' os vórtices de escalas maiores que os vórtices de escalas menores

Os vórtices de escala superior à dimensão da malha são bem capturados pela malha de cálculo, sendo o cálculo feito em regime transitório

LES – Large Eddy Simulation

- Aplica-se um filtro, com uma malha Δ: os vórtices de escala maior que Δ não necessitam de ser modelados, mas os vórtices de escalas menores que Δ precisam
- Modelos usados para modelação dos vórtices de escalas menores referidos como 'subgrid-scale models', ou como 'subfilter scale models'
- Os vórtices de escalas mais pequenas são tratados através de modelos estatísticos apropriados, aparecendo como termos adicionais das equações diferenciais da quantidade de movimento do escoamento (filtrado) de escalas maiores
- Os vórtices de escalas maiores são fortemente dependentes do problema em causa, e não há soluções gerais
- Os vórtices de escalas menores são têm um comportamento essencialmente isotrópico, e podem ser mais fielmente descritos por modelos gerais
- O modelo de 'subgrid' mais usado é o modelo de Smagorinsky, que é em muito semelhante aos modelos de viscosidade turbulenta $\mu_t = C_S^2 \rho \Delta^2 |\overline{S}|$

Ainda sobre a turbulência e os modelos de turbulência

- Escoamentos turbulentos
  - Com múltiplas escalas, espaciais e temporais
  - Só DNS com malhas espacial e temporal muito finas permite capturar tudo o que é relevante
  - Recursos requeridos são incomportáveis
  - Caráter não linear dos termos advectivos é a fonte das complicações
  - Geralmente não é necessário um nível de detalhe muito fino, bastando valores médios sobre escalas espaciais e temporais aceitáveis
- Modelos de turbulência
  - Assentes em múltiplas hipóteses, e incluindo múltiplas aproximações
  - Não têm uma validade genérica
  - São melhores que nada, mas ainda assim longe do ideal
  - Devem ser usados com cautela e ponderação
  - Experimentar vários modelos de turbulência, comparar resultados, procurar algum tipo de validação de resultados, …