MECÂNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL para ENGENHARIA AEROSPACIAL

2021/2022

Advecção e difusão

V. A. F. Costa

MECÂNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL para ENGENHARIA AEROSPACIAL

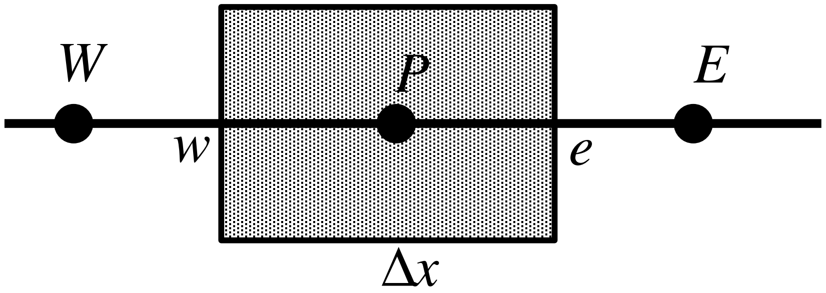
Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

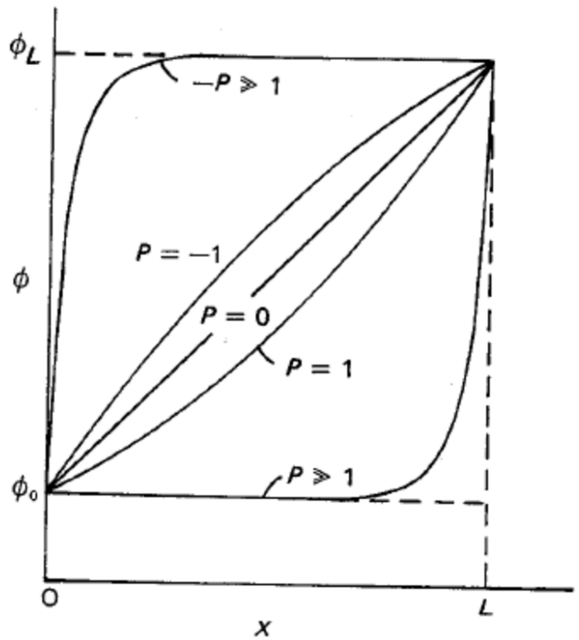
Equação de base

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

Integração sobre um vc finito

Que perfil da variável entre dois nós?





Solução da equação diferencial de base

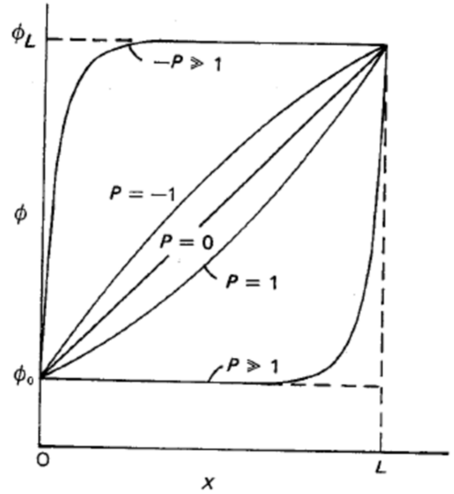
$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(Pe\frac{x}{L}\right) - 1}{\exp(Pe) - 1} \qquad Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma_\phi}$$

Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

Ensinamentos extraídos da solução da equação diferencial de base

$$\frac{\phi-\phi_0}{\phi_L-\phi_0}=\frac{\exp\left(Pe\dfrac{x}{L}\right)-1}{\exp(Pe)-1}$$

$$P_\phi=\frac{\rho u L}{\Gamma_\phi}$$



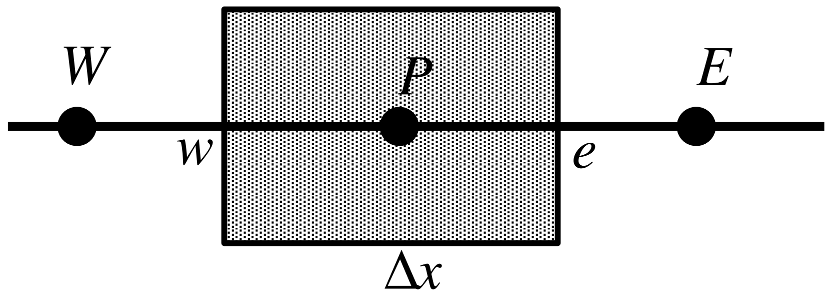
Se a advecção é dominante, $\rho u L >> \Gamma_\phi$, a variável é sobretudo advectada na direção da velocidade e a difusão é irrelevante

Nesse caso, a variável ϕ entre dois nós assume essencialmente o valor da variável ϕ no **nó de montante** (perfil espacial exponencial)

Se a velocidade é baixa a difusão é dominante (perfil espacial essencialmente linear)

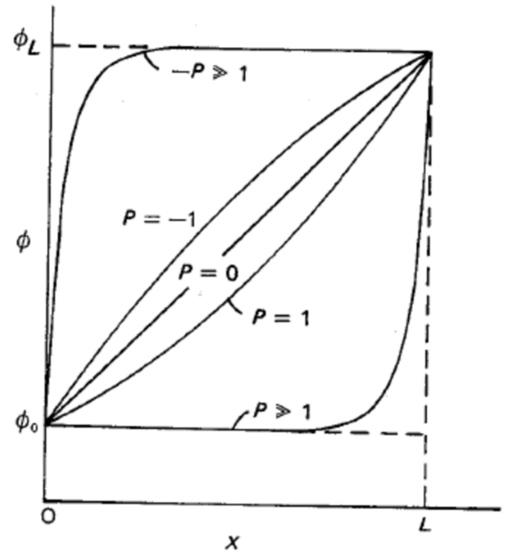
Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

Ensinamentos extraídos da solução da equação diferencial de base



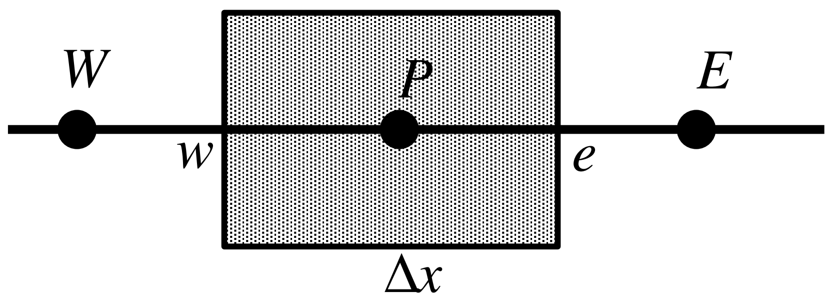
$$\left(\frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\phi}\right)_e \begin{cases} >> 1, & \phi_e \approx \phi_P \\ << -1, & \phi_e \approx \phi_E \\ \approx 0, & \phi_e \approx \dfrac{\phi_E + \phi_P}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\phi}\right)_w \begin{cases} >> 1, & \phi_w \approx \phi_W \\ << -1, & \phi_w \approx \phi_P \\ \approx 0, & \phi_w \approx \dfrac{\phi_P + \phi_W}{2} \end{cases}$$



Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

- Características upwind da advecção (influência de montante)
- Características elíticas da difusão (influência bidirecional)
- Esquemas convectivos: levam em consideração essas características da advecção e da difusão
- Integração da equação diferencial de base sobre um vc

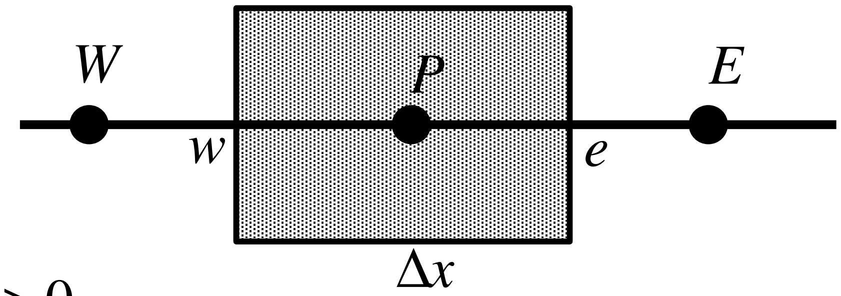


$$\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}(\rho u\phi)-\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)\right]dV=0\Rightarrow\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w=0$$

Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

$$\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}(\rho u\phi)-\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)\right]dV=0\Rightarrow\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w=0$$

$$F=\rho uA \qquad D_\phi=\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x} \qquad P_\phi=\frac{\rho u\Delta x}{\Gamma_\phi}=\frac{F}{D_\phi}$$



Esquema **upwind**

$$\phi_e=\begin{cases}\phi_P & \text{se} \quad F_e>0\\ \phi_E & \text{se} \quad F_e<0\end{cases} \qquad \phi_w=\begin{cases}\phi_W & \text{se} \quad F_w>0\\ \phi_P & \text{se} \quad F_w<0\end{cases}$$

$$F_e\phi_e=\left[\max\left(F_e,0\right)\right]\phi_P-\left[\max\left(-F_e,0\right)\right]\phi_E \qquad F_w\phi_w=\left[\max\left(F_w,0\right)\right]\phi_E-\left[\max\left(-F_w,0\right)\right]\phi_P$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e=\frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x} \qquad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w=\frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x}$$

Equação de discretização:

$$\left\{\left[D_e+\max\left(-F_e,0\right)\right]+\left[D_w+\max\left(F_w,0\right)\right]+\left(F_e-F_w\right)\right\}\phi_P=$$

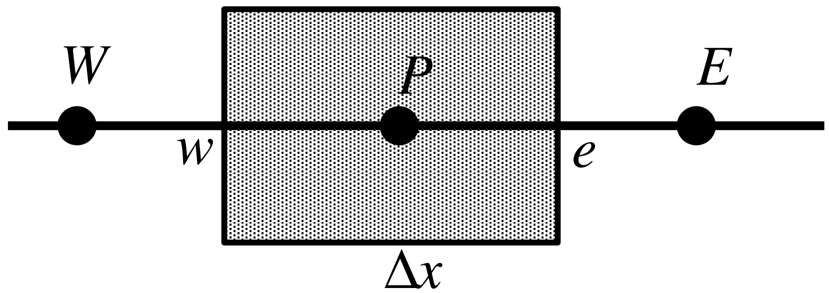
$$\left[D_e+\max\left(-F_e,0\right)\right]\phi_E+\left[D_w+\max\left(F_w,0\right)\right]\phi_W$$

$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P$$

Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

$$\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}(\rho u\phi)-\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)\right]dV=0\Rightarrow\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w=0$$

$$F=\rho uA \qquad D_\phi=\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x} \qquad P_\phi=\frac{\rho uL}{\Gamma_\phi}=\frac{F}{D_\phi}$$



Esquema baseado na **solução exata**

$$\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e=F_e\left[\phi_P+\frac{\phi_P-\phi_E}{\exp(P_e)-1}\right] \qquad \left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w=F_w\left[\phi_W+\frac{\phi_W-\phi_P}{\exp(P_w)-1}\right]$$

Equação de discretização

$$\left\{\left[\frac{F_e}{\exp(F_e/D_e)-1}\right]+\left[\frac{F_w\exp(F_w/D_w)}{\exp(F_w/D_w)-1}\right]+(F_e-F_w)\right\}\phi_P=$$

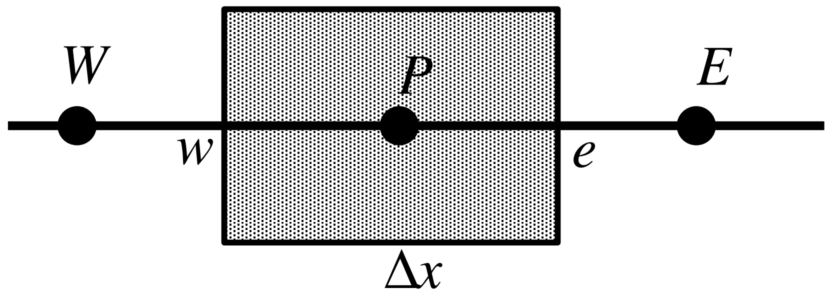
$$\left[\frac{F_e}{\exp(F_e/D_e)-1}\right]\phi_E+\left[\frac{F_w\exp(F_w/D_w)}{\exp(F_w/D_w)-1}\right]\phi_W$$

$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P$$

Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

$$\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}(\rho u\phi)-\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)\right]dV=0\Rightarrow\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_e-\left(\rho uA\phi-\Gamma A\frac{d\phi}{dx}\right)_w=0$$

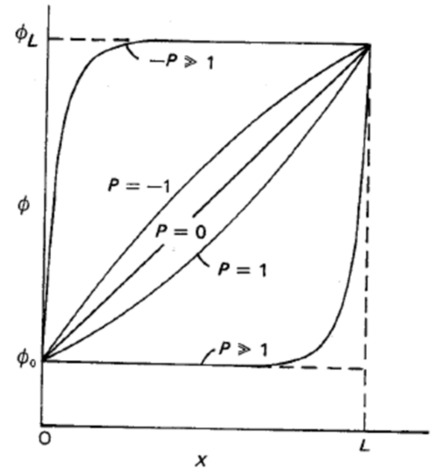
$$F=\rho uA \qquad D_\phi=\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x} \qquad P_\phi=\frac{\rho uL}{\Gamma_\phi}=\frac{F}{D_\phi}$$



Esquema **híbrido**

Perfil linear se $-2\le P_\phi\le 2$

Upwind puro se $\left|P_\phi\right|>2$



Equação de discretização

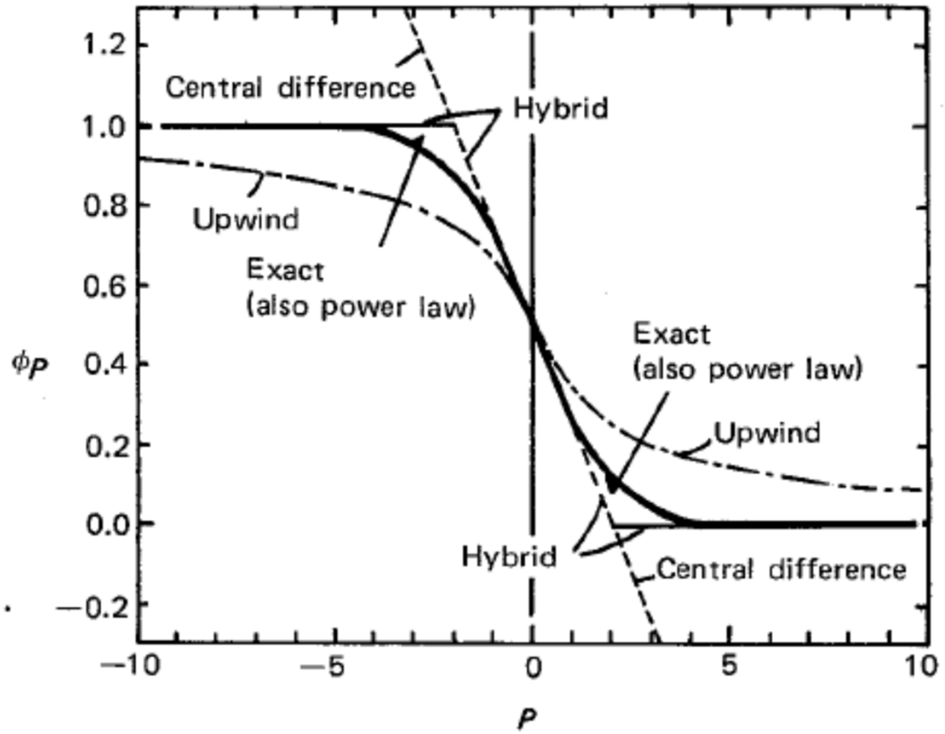
$$\left\{\left[\max\left(-F_e,D_e-\frac{F_e}{2},0\right)\right]+\left[\max\left(F_w,D_w+\frac{F_w}{2},0\right)\right]+\left(F_e-F_w\right)\right\}\phi_P=$$

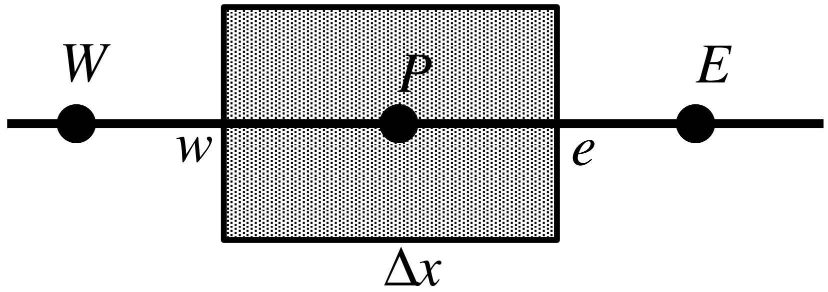
$$\left[\max\left(-F_e,D_e-\frac{F_e}{2},0\right)\right]\phi_E+\left[\max\left(F_w,D_w+\frac{F_w}{2},0\right)\right]\phi_W$$

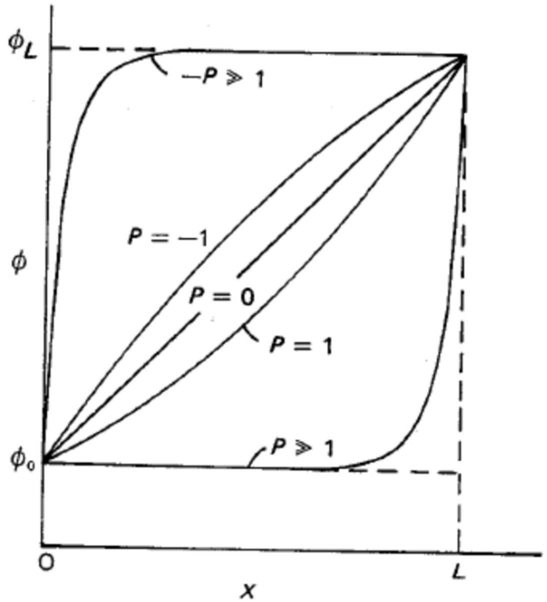
$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P$$

Advecção e difusão unidimensional em regime permanente, sem termo fonte

Comparação dos vários esquemas







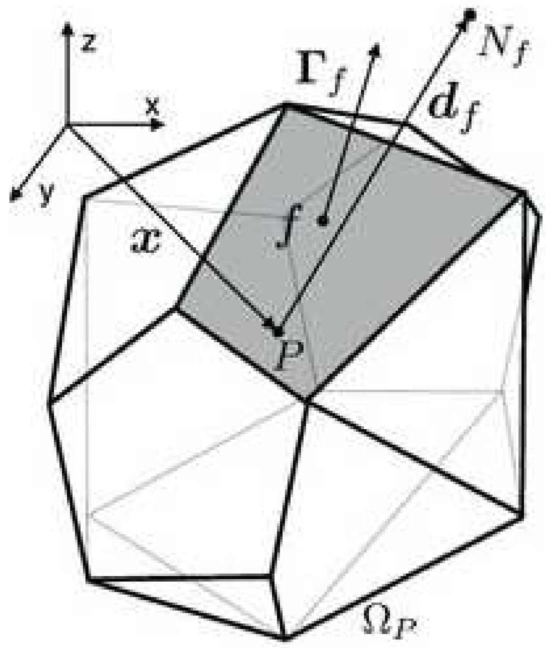
A solução exata é uma utopia!

Há muitos outros esquemas de advecção-difusão, se bem que as suas características essenciais estejam presentes nos esquemas aqui apresentados

Advecção e difusão multidimensional geral

De modo análogo, pode-se obter a equação de discretização para uma situação multidimensional geral

A solução exata é uma utopia!



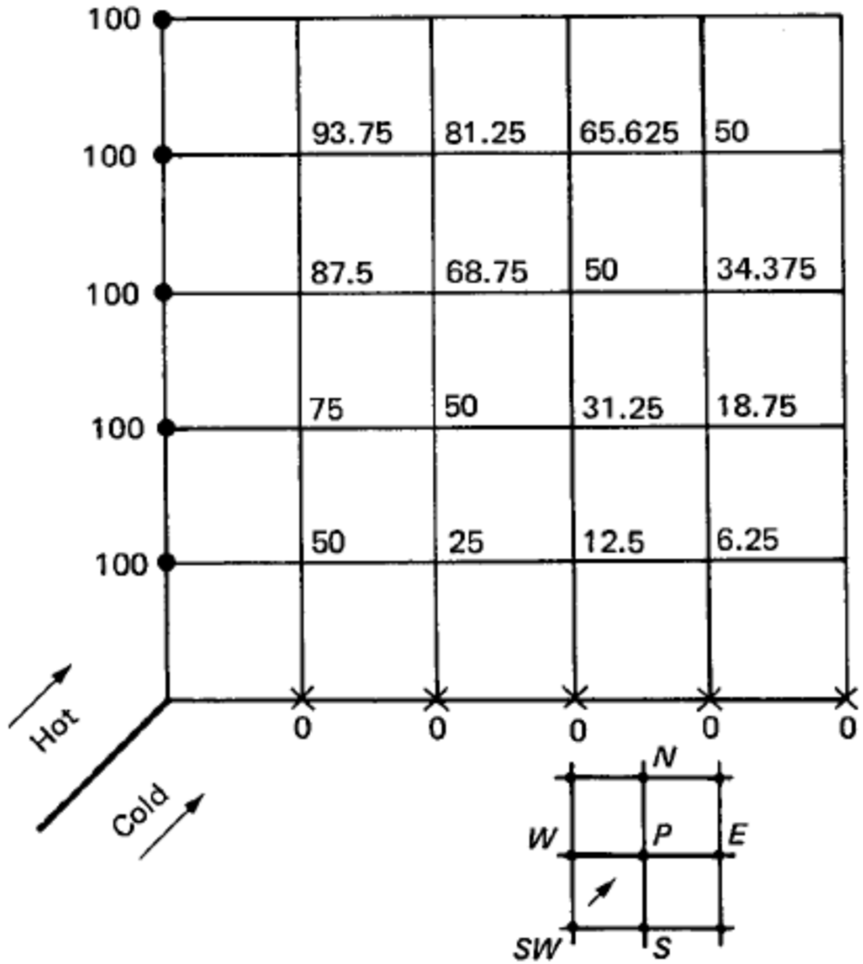
A situação transitória e/ou com termo fonte é tratada analogamente ao que foi feito aquando do tratamento da difusão

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_P$$

Advecção e difusão multidimensional

Falsa difusão

- Influência do alinhamento entre o vetor velocidade e a disposição dos nós da malha de cálculo
- Influência na qualidade da solução

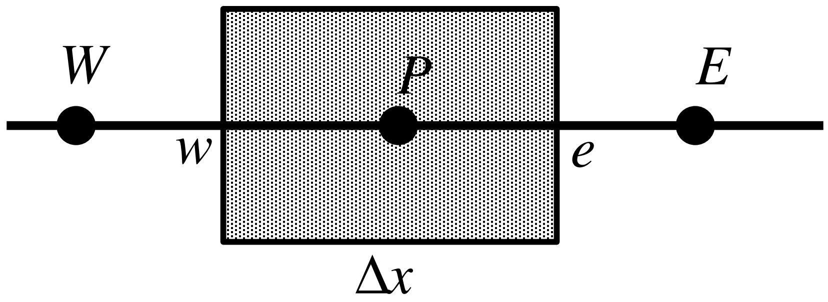


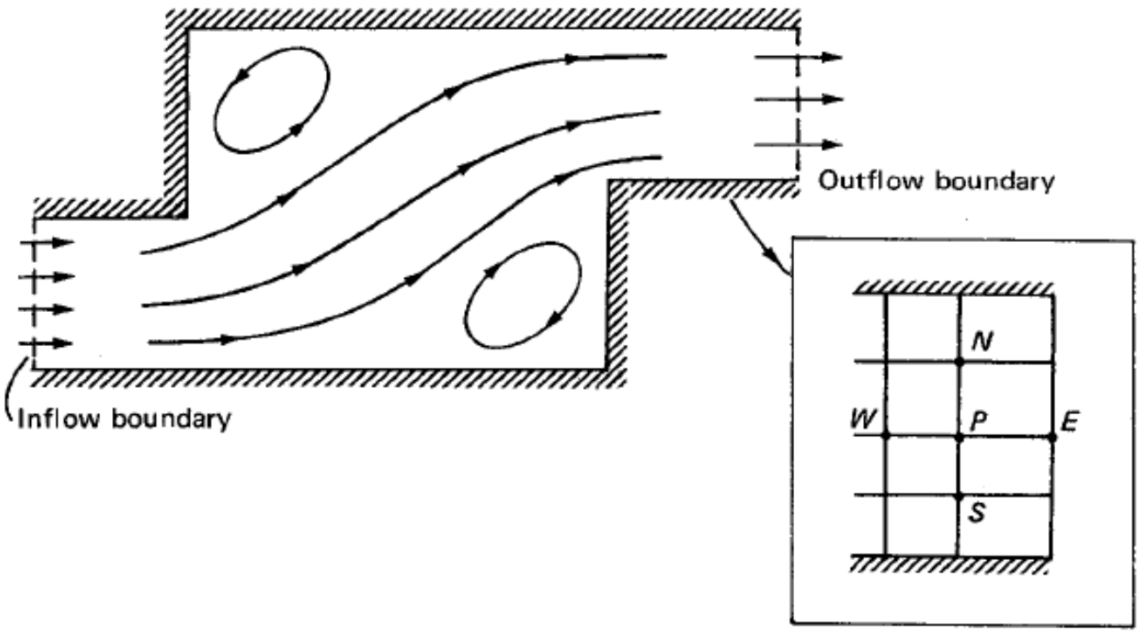
Advecção e difusão multidimensional

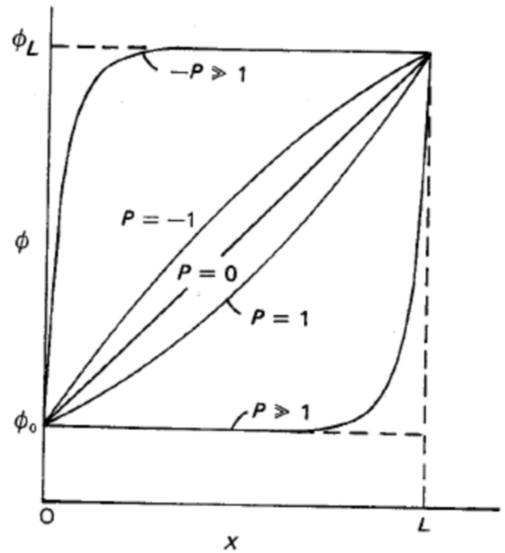
Caráter parabólico da advecção (influência de montante)

Condições de fronteira de **saída (saída é saída!)**

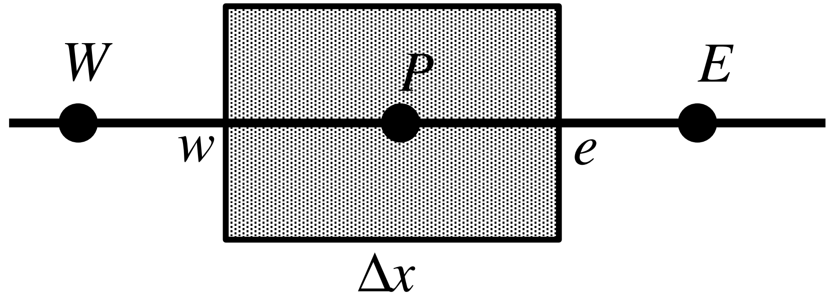
Desligar do domínio do que lhe está a jusante







Um pouco mais sobre a física do problema



Tempo para a informação viajar por advecção ao longo da distância Δx

$$\tau_a = \frac{\Delta x}{u}$$

Tempo para a informação viajar por difusão ao longo da distância Δx

$$\tau_d \sim \rho(\Delta x)^2 \Big/ \Gamma_\phi$$

$$P_\phi = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\phi} \sim \frac{\tau_d}{\tau_a} \begin{cases} \left|P_\phi\right| >> 1 \Rightarrow \tau_d >> \tau_a;\ \text{advecção é dominante} \\ \left|P_\phi\right| << 1 \Rightarrow \tau_d << \tau_a;\ \text{difusão é dominante} \end{cases}$$

Se o problema é transitório o passo de tempo deve ser $\Delta t < \Delta t_a$

Condição a verificar (condição de Courant–Friedrichs–Lewy): $\dfrac{u\Delta t}{\Delta x} < 1$

Num problema em geral, deve ser $\dfrac{\left|\mathbf{V}\right| \Delta t}{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)} < 1$