2024/2025

Cálculo de escoamentos incompressíveis

V. A. F. Costa

Algumas questões a reter

Equações diferenciais de base (uma para cada componente de velocidade)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+S_u$$

$$S_u=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wv)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+S_v$$

$$S_v=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+S_w$$

$$S_w=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

Algumas questões a reter

Escoamentos incompressíveis

- Massa volúmica não é afetada pela pressão
- Massa volúmica pode ser afetada pela temperatura (dilatabilidade)
- Meios incompressíveis, ainda que eventualmente dilatáveis
- Não há uma relação fechada entre a massa volúmica, a pressão e a temperatura

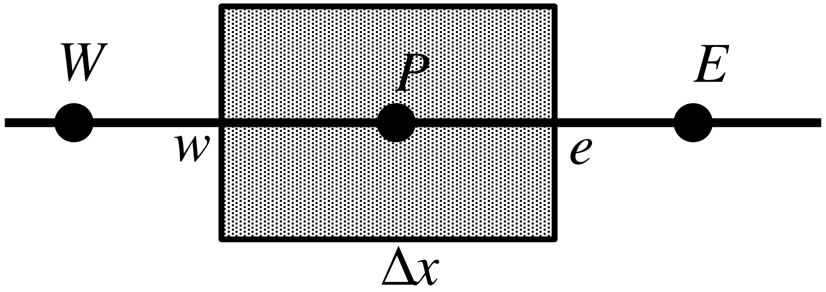
Algumas questões a reter

A velocidade para cálculo dos termos advectivos é, ela mesma, uma variável a calcular

A pressão, cujas componentes do gradiente estão presentes nos termos fonte da equações para as velocidades, é também uma grandeza a calcular

Tentativa de integração da equação da conservação de massa

$$\frac{d}{dx}(\rho u)=0$$



$$\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}(\rho u)\right]dV=0\Rightarrow(\rho uA)_e-(\rho uA)_w=0$$

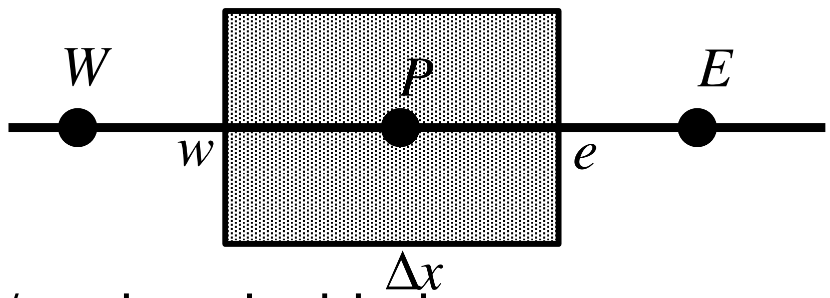
$$\rho A(u_e-u_w)=0\Rightarrow u_e-u_w=0\Rightarrow\frac{u_E+u_P}{2}-\frac{u_P+u_W}{2}=0\Rightarrow\frac{1}{2}(u_E-u_W)=0$$

E a velocidade em *P* desaparece!

Algumas questões a reter

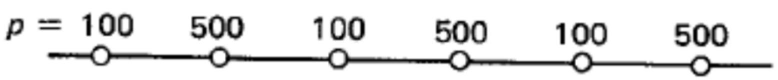
Tentativa de integração do gradiente de pressão que aparece na equação da quantidade de movimento segundo *x*

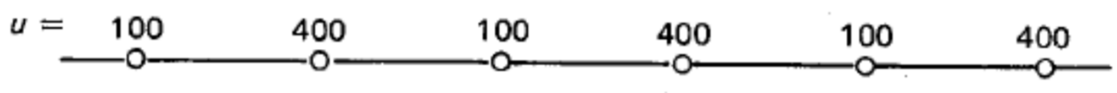
$$\int_{\Delta V}\left(\frac{dP}{dx}\right)dV = P_e - P_w = \frac{P_E + P_P}{2} - \frac{P_P + P_W}{2} = \frac{1}{2}\left(P_E - P_W\right)$$



E a pressão em *P* desaparece!

Possibilidade de distribuição de pressão e/ou de velocidade em ziguezague (xadrez)





Para resolver esta questão

- Uso de malhas desviadas para as componentes de velocidade e para a pressão
- Uso de técnicas que consideram ‘zonas de influência’ para a pressão

Equações de discretização para as componentes de velocidade

Obtidas a partir das equações de quantidade de movimento (uma segundo cada uma das direções coordenadas)

Considera-se separadamente a parte do termo fonte associada ao gradiente de pressão

$$a_P^u u_P = \sum a_{nb}^u u_{nb} + b_P^u - V_P \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_P$$

$$a_P^v v_P = \sum a_{nb}^v v_{nb} + b_P^v - V_P \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_P$$

$$a_P^w w_P = \sum a_{nb}^w w_{nb} + b_P^w - V_P \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_P$$

O cálculo das componentes de velocidade requer conhecer a pressão, mas apenas se conhece uma sua aproximação grosseira (não final) *P**, da iteração anterior

Equações de discretização para as componentes de velocidade

A partir da aproximação grosseira da pressão, P^* , apenas se obtém uma aproximação grosseira das componentes de velocidade

$$a_P^u u_P^* = \sum a_{nb}^u u_{nb}^* + b_P^u - V_P \left(\frac{\partial P^*}{\partial x} \right)_P$$

$$a_P^v v_P^* = \sum a_{nb}^v v_{nb}^* + b_P^v - V_P \left(\frac{\partial P^*}{\partial y} \right)_P$$

$$a_P^w w_P^* = \sum a_{nb}^w w_{nb}^* + b_P^w - V_P \left(\frac{\partial P^*}{\partial z} \right)_P$$

Os valores melhorados da pressão e das componentes de velocidade podem ser expressos como a soma de uma correção aos seus valores grosseiros

$$P = P^* + P' \qquad u = u^* + u' \qquad v = v^* + v' \qquad w = w^* + w'$$

Equações de discretização para as componentes de velocidade

Subtraindo as equações de discretização para as estimativas grosseiras das componentes de velocidade das equações de discretização para os valores das componentes de velocidade a determinar obtêm-se equações de discretização para as correções de velocidade

$$a_P^u u_P' = \underbrace{\sum a_{nb}^u u_{nb}'}_{\approx 0} - V_P \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_P$$

$$a_P^v v_P' = \underbrace{\sum a_{nb}^v v_{nb}'}_{\approx 0} - V_P \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right)_P$$

$$a_P^w w_P' = \underbrace{\sum a_{nb}^w w_{nb}'}_{\approx 0} - V_P \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)_P$$

Se o método a usar convergir podem-se tomar como nulos os somatórios nas equações anteriores já que, na convergência, as correções de velocidade são nulas

Equações de discretização para as componentes de velocidade

Podem assim obter-se equações que expressam as correções de velocidade como função das correções de pressão

$$u_P' = -\frac{V_P}{a_P^u}\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right) = -d_P^u\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right) \qquad u_P = u_P^* + u_P' = u_P^* - d_P^u\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)$$

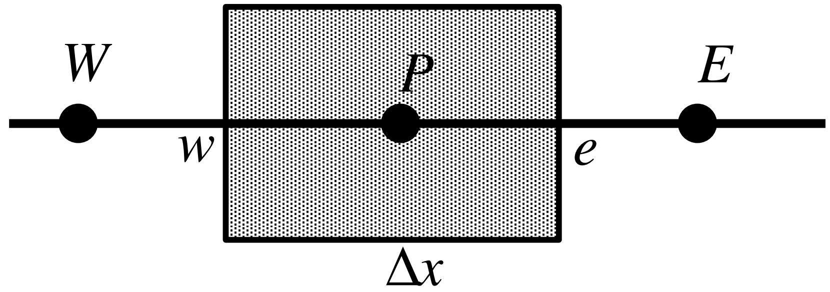
$$v_P' = -\frac{V_P}{a_P^v}\left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right) = -d_P^v\left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right) \qquad v_P = v_P^* + v_P' = v_P^* - d_P^v\left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right)$$

$$w_P' = -\frac{V_P}{a_P^w}\left(\frac{\partial P'}{\partial z}\right) = -d_P^w\left(\frac{\partial P'}{\partial z}\right) \qquad w_P = w_P^* + w_P' = w_P^* - d_P^w\left(\frac{\partial P'}{\partial z}\right)$$

Pode-se agora integrar a equação da conservação de massa sobre o vc associado ao nodo P usando estas relações

Equações de discretização para as correções de pressão

$$\int_{\Delta V}\left[\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]dV=0$$



$$\frac{\left(\rho_P-\rho_P^0\right)\Delta V}{\Delta t}+\left[(\rho uA)_e-(\rho uA)_w\right]+\left[(\rho vA)_n-(\rho vA)_s\right]+\left[(\rho wA)_t-(\rho wA)_b\right]=0$$

Substituindo as equações que expressam as correções de velocidade como função das correções de pressão obtém-se a equação de discretização para a correção de pressão

$$\left[\left(\rho d^u A\right)_e+\left(\rho d^u A\right)_w+\left(\rho d^v A\right)_n+\left(\rho d^v A\right)_s+\left(\rho d^w A\right)_t+\left(\rho d^w A\right)_b\right]P_P^{'}=$$

$$\left[\left(\rho d^u A\right)_e\right]P_E^{'}+\left[\left(\rho d^u A\right)_w\right]P_W^{'}+\left[\left(\rho d^v A\right)_n\right]P_N^{'}+\left[\left(\rho d^v A\right)_s\right]P_S^{'}+\left[\left(\rho d^w A\right)_t\right]P_T^{'}+\left[\left(\rho d^w A\right)_b\right]P_B^{'}+b_p^{P'}$$

$$b_p^{P'}=-\frac{\left(\rho_P-\rho_P^0\right)\Delta V}{\Delta t}-\left[(\rho u^*A)_e-(\rho u^*A)_w\right]-\left[(\rho v^*A)_n-(\rho v^*A)_s\right]-\left[(\rho w^*A)_t-(\rho w^*A)_b\right]$$

Equações de discretização para as correções de pressão

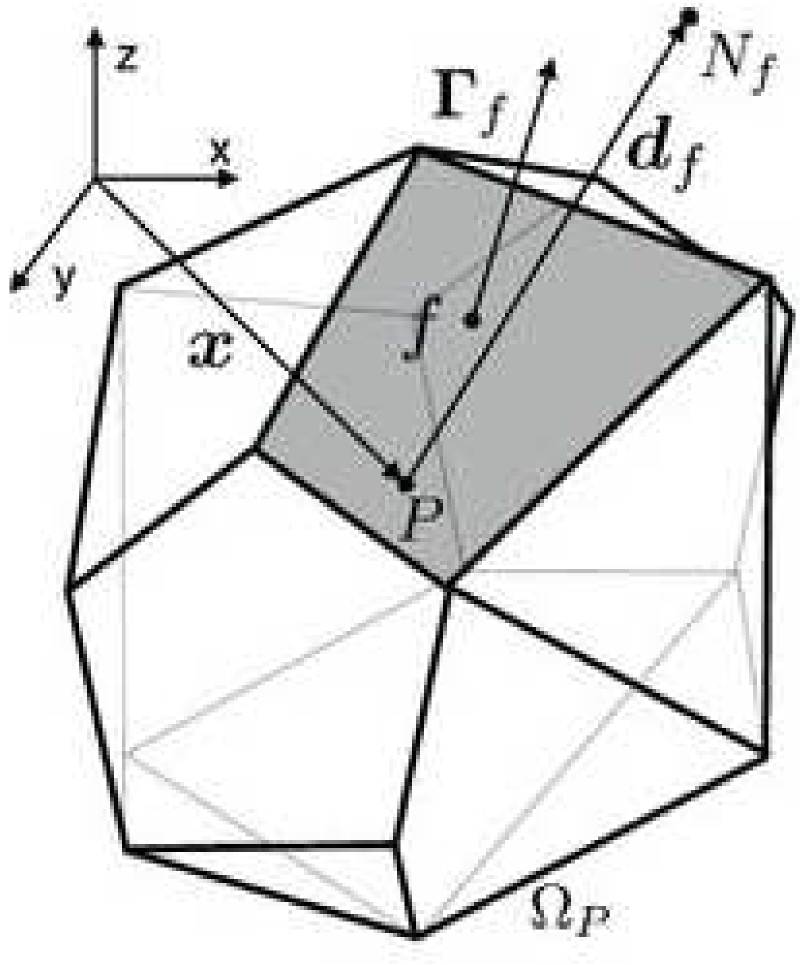
$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + a_T P'_T + a_B P'_B + b_p^{P'}$$

- O termo independente da equação de correção de pressão resulta da (ainda!) não conservação de massa sobre o volume de controlo associado ao nodo *P*
- Na convergência esse termo independente será nulo, todas as correções de pressão serão nulas, todas as correções de velocidade serão nulas, e a distribuição de velocidades obtida é a que se pretendia obter (convergida), satisfazendo a conservação de massa e o balanço de quantidade de movimento
- As correções de pressão entram na integração da equação de conservação de massa com a forma de termos difusivos: caráter difusivo (elítico) da pressão em escoamentos incompressíveis, e das correções de pressão

$$u_P = u_P^* - d_P^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right) \qquad v_P = v_P^* - d_P^v \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right) \qquad w_P = w_P^* - d_P^w \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)$$

Equações de discretização para as correções de pressão

O que foi feito para um sistema de coordenadas Cartesianas pode ser feito para o caso geral



O algoritmo SIMPLE

Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations (SIMPLE)

1. Partir de uma distribuição de pressão P^*
2. Resolver as equações para as componentes de velocidade baseadas em P^* $\left(u_P^*, v_P^*, w_P^*\right)$
3. Obter as correções de pressão P'
4. Obter a pressão melhorada como $P=P^*+P'$
5. Corrigir as componentes de velocidade com as correções de velocidade $\left(u_P = u_P^* + u_P^{'}; v_P = v_P^* + v_P^{'}; w_P = w_P^* + w_P^{'}\right)$
6. Resolver para outras eventuais variáveis dependentes ϕ
7. Tomar as novas pressões $P=P^*+P'$ como P^*, e retornar ao passo 2.

O algoritmo diz-se semi-implícito porque anteriormente se tomaram como nulas as somas

$$a_P^u u_P^{'} = \underbrace{\sum a_{nb}^u u_{nb}^{'}}_{\approx 0} - V_P\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right) \qquad a_P^v v_P^{'} = \underbrace{\sum a_{nb}^v v_{nb}^{'}}_{\approx 0} - V_P\left(\frac{\partial P'}{\partial y}\right) \qquad a_P^w w_P^{'} = \underbrace{\sum a_{nb}^w w_{nb}^{'}}_{\approx 0} - V_P\left(\frac{\partial P'}{\partial z}\right)$$

O algoritmo SIMPLE

Na convergência serão nulos (dentro de alguma tolerância) os termos independentes das equações de discretização das correções de pressão, as correções de pressão, as correções de velocidade, e as somas tomadas como nulas nas equações de discretização

O termo independente da equação de discretização de pressão pode ser visto como o resíduo de massa no vc associado ao nó P

A correção da pressão pode necessitar de alguma relaxação, do tipo

$$P = P^* + \alpha_P P' \qquad \left(0 < \alpha_P \leq 1\right)$$

As componentes de velocidade corrigidas satisfazem a conservação de massa e o balanço da quantidade de movimento

Muitos outros algoritmos derivados/semelhantes do algoritmo SIMPLE

SIMPLER, SIMPLEC, SIMPLEX, IMPLE, PISO, …

Algumas notas adicionais

A natureza relativa da pressão em escoamentos incompressíveis

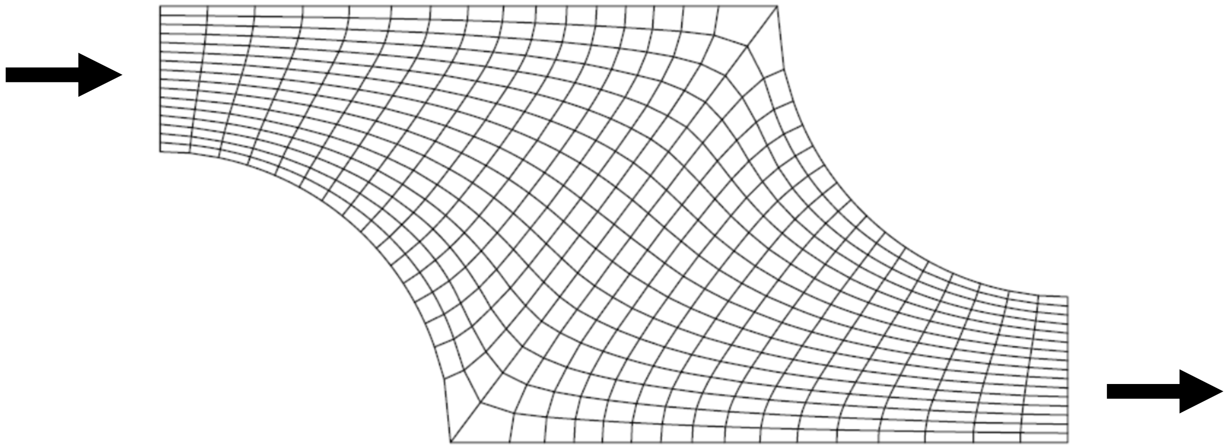
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (P+C)}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (P+C)}{\partial y} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial (P+C)}{\partial z}$$

A pressão pode ser tomada como nula num ponto qualquer do domínio, e tomada com referenciada a esse ponto $P = P - P_{ref}$

As equações de discretização para as componentes de velocidade geralmente precisam de sub-relaxação

Algumas notas adicionais

Condições de fronteira



- Imposto o caudal/velocidade de entrada, especificada a geometria e, dada a condição de fronteira parabólica na saída, não há mais condições de fronteira a prescrever; a distribuição de pressão é uma consequência dessas condições
- Imposta a pressão na entrada, imposta a pressão na saída, e especificada a geometria, as velocidades/caudais são consequências, e não há mais condições de fronteira a prescrever
- Fronteira impermeável: velocidade normal à fronteira nula

Há uma equação para cada uma das componentes de velocidade

Não há uma equação de base para a pressão: a pressão é obtida a partir da equação de conservação de massa

Algumas notas adicionais

- São geralmente usados métodos segregados
  - As equações diferenciais para cada variável dependente (componente de velocidade) são tomadas como sendo nominalmente lineares
  - Cada variável dependente (componente de velocidade) é calculada separadamente das restantes, e não todas calculadas em simultâneo
  - As várias variáveis podem estar ligadas através das propriedades e/ou dos termos fonte
  - As componentes de velocidade estão ligadas pelas propriedades, pelos termos advectivos, e pela pressão (pela equação de conservação de massa)
- Há métodos 'coupled', ao nível do volume de controlo: u, v, w, P