MECÂNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL para ENGENHARIA AEROSPACIAL

2024/2025

Tratamento de escoamentos compressíveis

V. A. F. Costa

Algumas questões a reter

Equações diferenciais de base (uma para cada componente de velocidade)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wu)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+S_u$$

$$S_u=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho wv)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+S_v$$

$$S_v=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho ww)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)+S_w$$

$$S_w=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

Algumas questões a reter

Escoamentos de velocidade elevada

Escoamentos de gases e de vapores com grandes variações de pressão

É necessária uma **formulação compressível**

Escoamentos compressíveis

- Massa volúmica é afetada pela pressão e pela temperatura
- Meios compressíveis, e eventualmente dilatáveis
- Há uma relação fechada entre a massa volúmica, a pressão e a temperatura: Gases ideais $P=\rho RT$
- Nestes casos, toma-se $\rho=\rho^*+\rho'$ e $u=u^*+u'$

$$\left.\begin{array}{l}\rho(P,T)=a^{\rho}P+b^{\rho}\\ \rho^*(P^*,T^*)=a^{\rho}P^*+b^{\rho}\end{array}\right\}\underbrace{\rho(P,T)-\rho^*(P^*,T^*)}_{\rho'}=a^{\rho}\left(\underbrace{P-P^*}_{P'}\right)$$

$$\rho(P,T)=\rho^*(P^*,T^*)+\underbrace{a^{\rho}P'}_{\rho'}$$

Gás ideal:

$$P=\rho RT$$

$$\rho=\underbrace{\frac{1}{RT}}_{a^{\rho}}P+\underbrace{0}_{b^{\rho}}$$

Algumas questões a reter

Quando, anteriormente, para os escoamentos incompressíveis, se fez

$$\left[\left(\rho d^{u} A\right)_{e}+\left(\rho d^{u} A\right)_{w}+\left(\rho d^{v} A\right)_{n}+\left(\rho d^{v} A\right)_{s}+\left(\rho d^{w} A\right)_{t}+\left(\rho d^{w} A\right)_{b}\right] P_{P}^{'}=$$

$$\left[\left(\rho d^{u} A\right)_{e}\right] P_{E}^{'}+\left[\left(\rho d^{u} A\right)_{w}\right] P_{W}^{'}+\left[\left(\rho d^{v} A\right)_{n}\right] P_{N}^{'}+\left[\left(\rho d^{v} A\right)_{s}\right] P_{S}^{'}+\left[\left(\rho d^{w} A\right)_{t}\right] P_{T}^{'}+\left[\left(\rho d^{w} A\right)_{b}\right] P_{B}^{'}+b_{p}^{P'}$$

$$b_{p}^{P'}=-\frac{\left(\rho_{P}-\rho_{P}^{0}\right) \Delta V}{\Delta t}-\left[(\rho u^{*} A)_{e}-(\rho u^{*} A)_{w}\right]-\left[(\rho v^{*} A)_{n}-(\rho v^{*} A)_{s}\right]-\left[(\rho w^{*} A)_{t}-(\rho w^{*} A)_{b}\right]$$

tomou-se $\rho=\rho^{*}$ e a massa volúmica ficou 'inativa' nas equações; só os P' ficaram 'ativos' nas equações

Para escoamentos compressíveis, ambos ρ' e P' devem ficar 'ativos' nas equações de discretização

Há vários modos de o fazer; vamos ver um deles

Mantendo a massa volúmica e a pressão ativas nas equações

$$u_P = u_P^* + u_P' = u_P^* - d_P^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)$$

$$v_P = v_P^* + v_P' = v_P^* - d_P^v \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right)$$

$$\rho(P,T) = \rho^*(P^*,T^*) + \rho' = \rho^*(P^*,T^*) + a^\rho P'$$

$$w_P = w_P^* + w_P' = w_P^* - d_P^w \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)$$

O produto ρu na equação de conservação de massa vem

$$\rho u = (\rho^* + \rho') \left[u^* - d^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right) \right] = \underbrace{\rho^* u^* - \rho^* d^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)}_{\text{como para incompressível}} + \rho' u^* - \underbrace{\rho' d^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)}_{\approx 0} =$$

$$\underbrace{\rho^* u^* - \rho^* d^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)}_{\text{como para incompressível}} + a^\rho u^* P'$$

Mantendo a massa volúmica e a pressão ativas nas equações

Com o produto

$$\rho u = \underbrace{\rho^* u^* - \rho^* d^u \left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)}_{\text{como para incompressível}} + a^{\rho} u^* P'$$

e os análogos para as outras faces do volume de controlo, chega-se a uma equação de discretização para P' cujos coeficientes incorporam ambas as influências de manter P' e ρ' ativas nas equações

Por exemplo, o coeficiente que multiplica P_E' na equação de discretização vem

$$\underbrace{\left(\rho^* d^u A\right)_e}_{\substack{\text{como para}\\ \text{incompressível}}} + \underbrace{\left(a^{\rho} A \max\left(u^*, 0\right)\right)_e}_{\substack{\text{por ser}\\ \text{compressível}}}$$

se se usar uma aproximação upwind para a massa volúmica no termo correspondente à manutenção de ρ' ativo nas equações

Notas finais

Para escoamentos compressíveis a pressão deixa de ter a natureza relativa que tem para o caso de escoamentos incompressíveis

O cálculo de escoamentos compressíveis é geralmente acompanhado pela resolução da equação da energia interna, para obtenção da temperatura, pois (P,T,ρ) encontram-se ligadas por uma equação de estado

Apenas se ilustrou uma possibilidade de fazer a ligação (P,T,ρ) para o tratamento de escoamentos incompressíveis, havendo outras formas de a fazer

Os escoamentos compressíveis, bem como os escoamentos de alta velocidade, têm geralmente associadas variações (espaciais e temporais) consideráveis de pressão e de massa volúmica