universidade de aveiro
theoria poiesis praxis

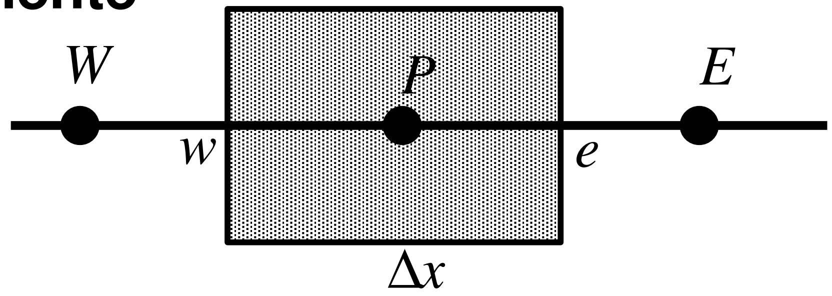
MECÂNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL para ENGENHARIA AEROSPACIAL

2024/2025

Difusão em regime permanente

V. A. F. Costa

Difusão unidimensional em regime permanente



Equação diferencial de base

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S_\phi$$

Que perfil da variável que difunde entre nós vizinhos: Perfil linear!

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{EP}}; \quad \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PW}}$$

Integração sobre um vc finito (método dos volumes finitos)

$$0 = \int_{\Delta V} \left[\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S_\phi\right] dV \Rightarrow 0 = \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{EP}} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{PW}} + S_\phi \Delta V$$

Equação de discretização

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b_P \Rightarrow a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_P$$

Condições de fronteira

Variável dependente especificada na fronteira: condição de fronteira de 1ª espécie (Dirichlet)

$$\phi_P = \text{valor especficado}$$

Fluxo difusivo especificado na fronteira: condição de fronteira de 2ª espécie (Newmann):

$$J_{d,\phi} = \text{valor especficado}$$

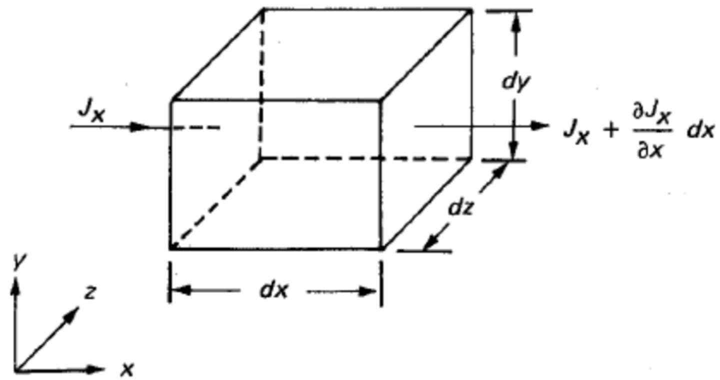
$$J_{d,\phi,x} = \Gamma \frac{d\phi}{dx}$$

Fluxo especificado na fronteira através de um coeficiente de transferência *K* e de um valor conhecido da variável dependente: Condição de fronteira de 3ª espécie (Robin):

$$J_{d,\phi} = K_\phi \left(\phi_P - \phi_\infty\right)$$

Plano de simetria: fluxo difusivo nulo $\frac{d\phi}{dx} = 0$ $J_{d,\phi,x} = \Gamma \frac{d\phi}{dx} = 0$

Difusão tridimensional em regime permanente



Equação diferencial de base

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi$$

Integração sobre um vc finito que, neste caso, se assemelha a um paralelepípedo, e em que o nó que o representa tem 6 nós vizinhos

Perfil linear da variável dependente em cada direção coordenada

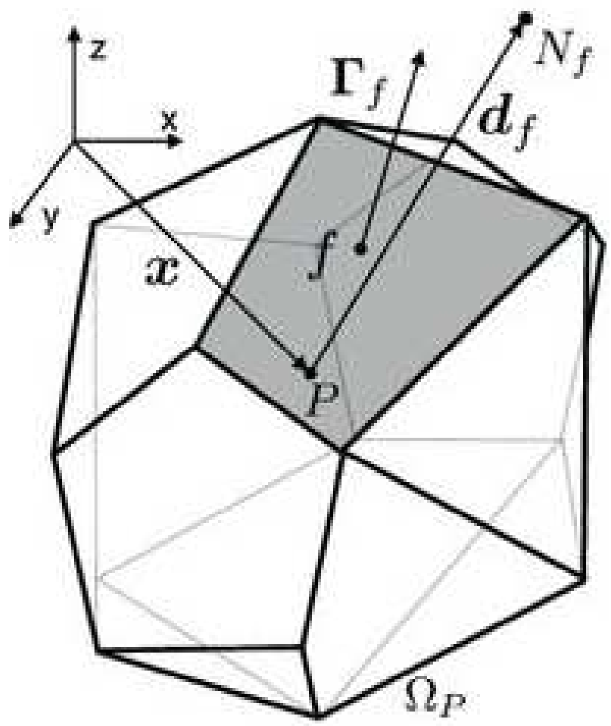
Equação de discretização

$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P \Rightarrow a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P$$

A equação de discretização traduz o princípio de conservação da grandeza associada à variável dependente no volume de controlo associado ao nó *P*

Difusão tridimensional em regime permanente

O que foi feito para uma geometria Cartesiana pode ser feito para qualquer outra geometria



A equação de discretização traduz o princípio de conservação da grandeza associada à variável dependente no volume de controlo associado ao nó *P*

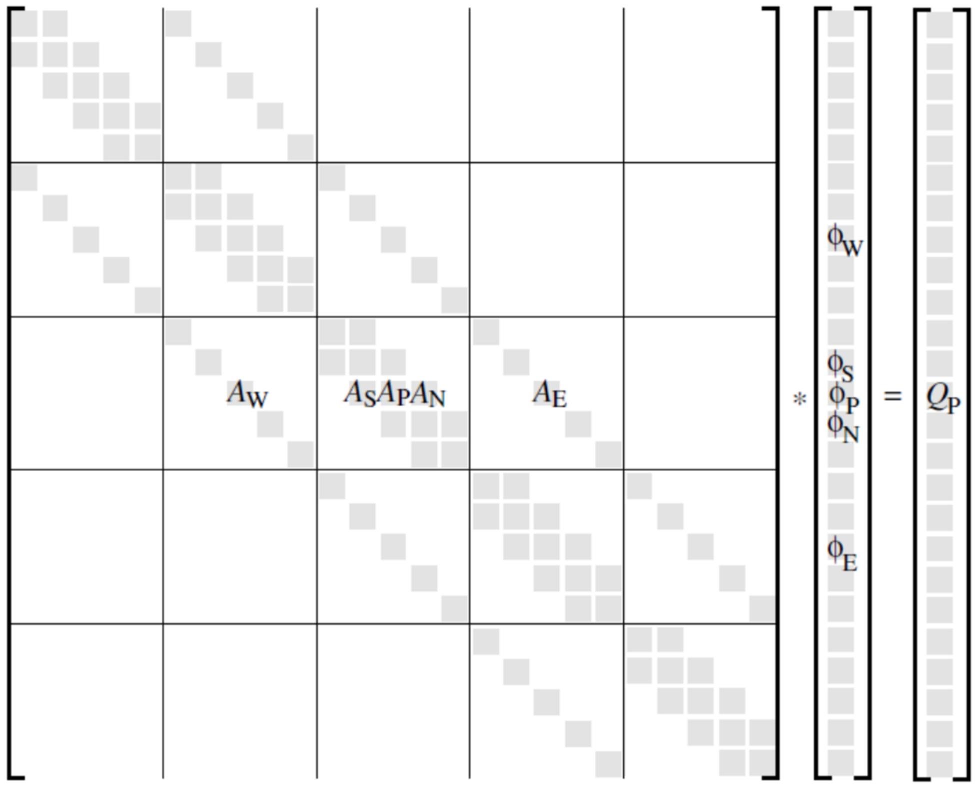
Resolução do sistema de equações discretizadas

- Sistema de equações lineares (que têm que ser resolvidas simultaneamente)
- Métodos diretos
  - Após um número finito de operações fornecem a solução ‘final’
  - Não são os mais indicados; coeficientes são apenas tentativas, e não se pretende uma ‘solução final’, a qual seria apenas provisória
- Métodos iterativos
  - Partindo de uma solução inicial vão, iteração após iteração, fornecendo uma solução cada vez mais próxima da solução ‘final’
  - Convergência dos métodos iterativos (assegurada pelos métodos de resolução de sistemas de equações lineares integrados nos códigos de cálculo)
  - São os mais adequados, dado os coeficientes serem apenas tentativas, e em cada etapa não se procurar uma solução ‘final’

Resolução do sistema de equações discretizadas

Métodos iterativos

A matriz do sistema é bastante esparsa, e são usados métodos de resolução de sistemas de equações que tomam isso em consideração



Para coeficientes constantes, os métodos iterativos de resolução de sistemas de equações lineares asseguram a convergência para a solução

E se o coeficiente de difusão e/ou o termo fonte dependem da variável a calcular?

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi$$

- Nesse caso:
  - Resolve-se o sistema de equações de discretização até algum nível de convergência aceitável
  - Atualizam-se os valores do coeficiente de difusão e/ou do termo fonte
  - Obtêm-se novas equações de discretização
  - Repete-se o processo, até à obtenção da 'solução final convergida'
- Há dois processos iterativos
  - Um processo de iteração global (externo)
  - Um processo iterativo (interno) para resolução dos sistemas de equações lineares, embebido dentro do processo de iteração global
- Linearização do termo fonte (se necessário, e o código o permitir)

$$S_\phi=S_{C,\phi}+\phi\times S_{P,\phi}\qquad\left(S_{P,\phi}\le 0\right)$$

$$S_\phi=S_\phi^*+\left(\frac{dS_\phi}{d\phi}\right)^*\left(\phi-\phi^*\right)\qquad\left(\frac{dS_\phi}{d\phi}\right)^*\le 0$$

Subrelaxação

E se as variações no coeficiente de difusão e/ou no termo fonte induzidas pelas variações da variável dependente levam o processo de iteração global a divergir, não permitindo a obtenção da solução pretendida?

Subrelaxação

- Atenuação das flutuações da variável dependente de um nível de iteração global para o seguinte
- Há vários modos de introduzir a subrelaxação
- Subrelaxação através dos coeficientes das equações de discretização

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P \Rightarrow \phi_P = \frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P}{a_P}$$

$$\phi_P = \phi_P^* + \underbrace{\left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P}{a_P} - \phi_P^* \right)}_{\substack{\text{variação de } \phi \text{ de um nível de} \\ \text{iteração global para o seguinte}}} \Rightarrow \phi_P = \phi_P^* + \alpha \left(\frac{\sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P}{a_P} - \phi_P^* \right)$$

$$0 < \alpha \le 1$$

Subrelaxação

Subrelaxação

Subrelaxação através dos coeficientes das equações de discretização

Equação de discretização modificada

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P \Rightarrow \qquad \frac{a_P}{\alpha}\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P - (1-\alpha)\frac{a_P}{\alpha}\phi_P^*$$

Uma vez convergida a solução $\phi_P = \phi_P^*$ e o fator de subrelaxção não afeta a solução obtida

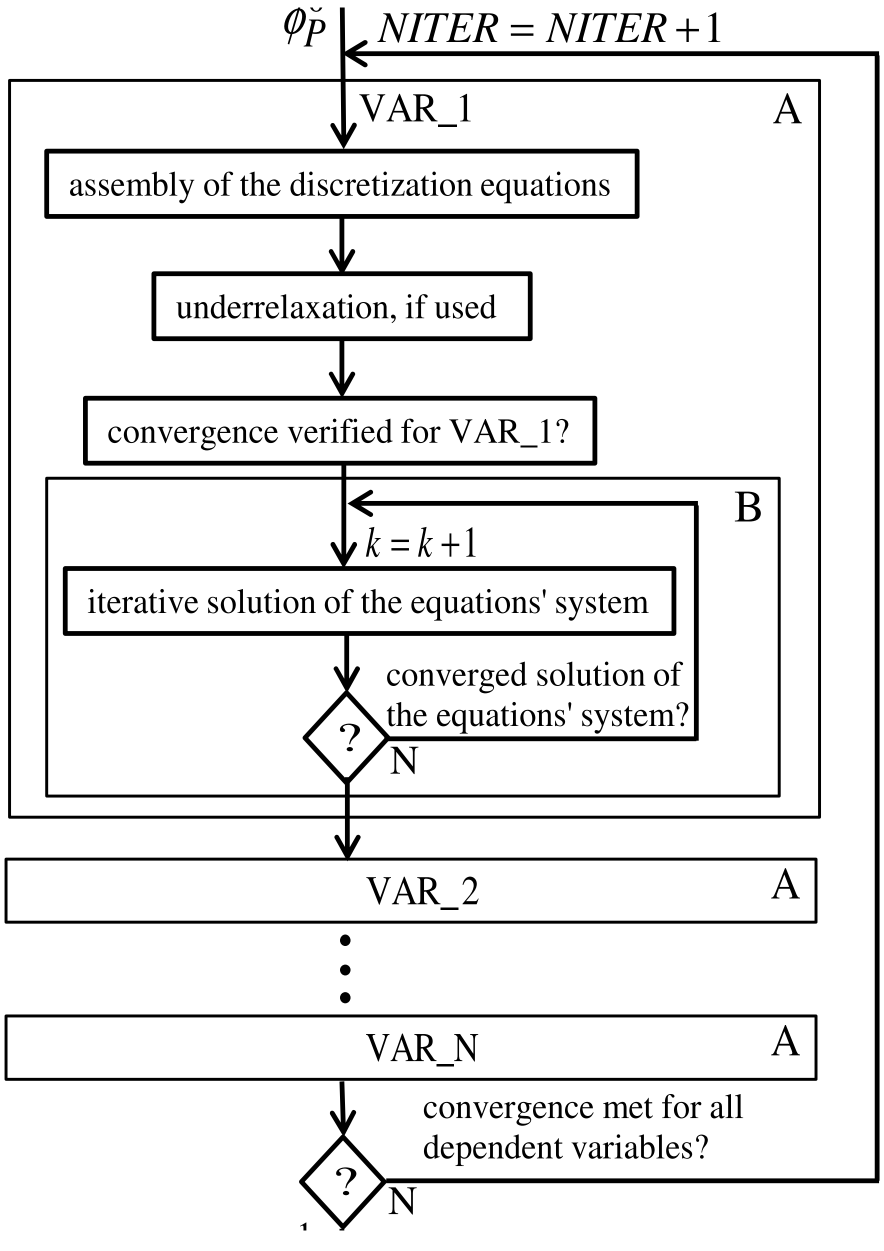
Subrelaxação por introdução de inércia

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P \Rightarrow (a_P + I)\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b_P + I\phi_P^* \qquad I \geq 0$$

A subrelaxação torna mais demorado o processo global de iteração (variações da variável dependente menores que as esperadas, de um nível de iteração global para o seguinte)

Subrelaxação pode ser essencial para conseguir a convergência do processo global de iteração

Iteração externa (global) e iteração interna (resolução dos sistemas de equações)



Acompanhamento da evolução do processo global de iteração

Cada equação de discretização traduz o princípio de balanço/conservação de uma grandeza sobre o volume de controlo caracterizado pelo nó em causa

O afastamento da conservação pretendida sobre o volume de controlo em causa é avaliado pelo resíduo

$$R_{P,\phi} = \left| -a_P \phi_P + \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_P \right|$$

O afastamento da conservação pretendida sobre todo o domínio de cálculo pode ser avaliado pela soma dos resíduos (há outras alternativas)

$$R_\phi = \sum R_{P,\phi}$$

Não é necessário (nem possível) almejar obter $R_{P,\phi} = R_\phi = 0$, bastando obter $R_{P,\phi} \le \delta_{P,\phi}$ ou $R_\phi \le \delta_\phi$ em que os limites estabelecidos são os critérios de paragem, ou de convergência, pretendidos

Os resíduos vão diminuindo $\Rightarrow$ processo de iteração global converge

Acompanhamento da evolução do processo global de iteração

Os resíduos vão diminuindo $\Rightarrow$ processo de iteração global converge!