universidade de aveiro
theoria poiesis praxis

MECÂNICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL para ENGENHARIA AEROSPACIAL

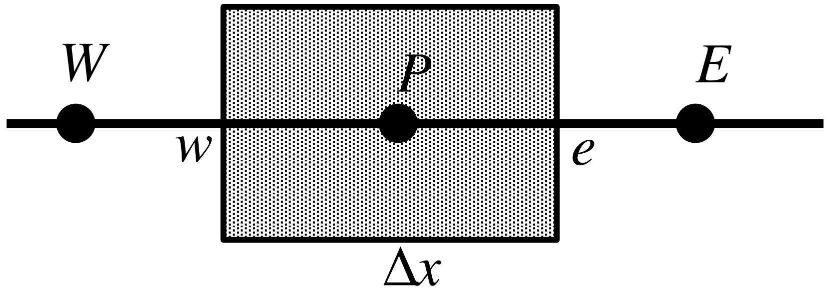
2024/2025

Difusão em regime transitório

V. A. F. Costa

Difusão unidimensional em regime transitório

Equação diferencial de base



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + S_\phi$$

Difusão: perfil espacial linear

Acumulação: aproximação de 1ª ordem da derivada temporal (há outras opções!)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \approx \frac{\rho\phi_P^1 - \rho\phi_P^0}{\Delta t}$$

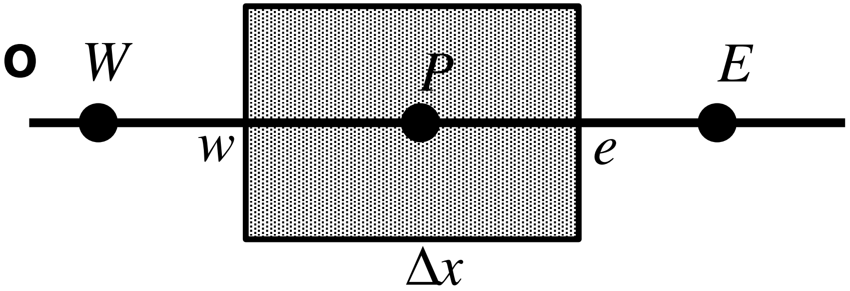
Integração espacial e integração temporal

$$\int_{\Delta V}\int_{\Delta t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)\right]dt\,dV = \int_{\Delta t}\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right) + S_\phi\right]dV\,dt$$

E que valor da variável (em que instante) usar ao fazer o integral do lado direito?

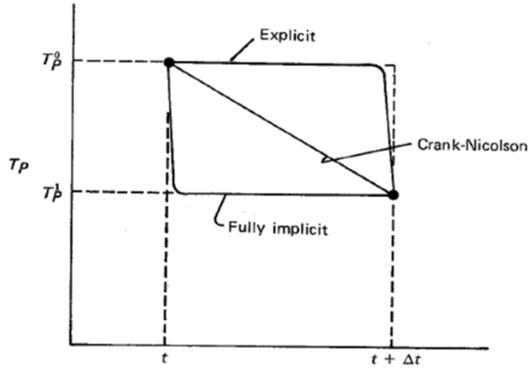
$$\phi = f\phi^1 + (1-f)\phi^0$$

Difusão unidimensional em regime transitório



$$\int_{\Delta V}\int_{\Delta t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)\right]dt\,dV = \int_{\Delta t}\int_{\Delta V}\left[\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\phi}{dx}\right)+S_\phi\right]dV\,dt$$

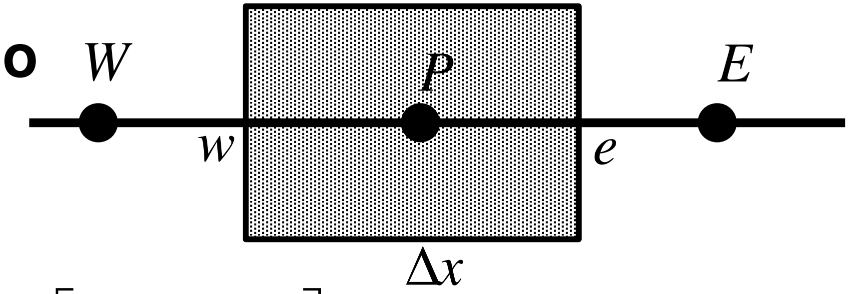
$$\phi = f\phi^1 + (1-f)\phi^0 \quad \begin{cases} f = 0 & \text{Método explícito} \\ f = 1 & \text{Método totalmente implícito} \\ f = 0,5 & \text{Método semi implícito (Crank-Nicolson)} \\ \text{Outros...} & \end{cases}$$



$$\frac{\rho\Delta V}{\Delta t}\left(\phi_P^1-\phi_P^0\right) = f\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e\left(\phi_E^1-\phi_P^1\right)-\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\left(\phi_P^1-\phi_W^1\right)\right]+$$

$$(1-f)\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e\left(\phi_E^0-\phi_P^0\right)-\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\left(\phi_P^0-\phi_W^0\right)\right]+S_\phi\Delta V\Delta t$$

Difusão unidimensional em regime transitório



$$\left\{\frac{\rho\Delta V}{\Delta t}+f\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e+\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\right\}\phi_P^1=\left[f\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e\right]\phi_E^1+\left[f\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\phi_W^1+$$

$$(1-f)\left\{\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e\right]\phi_E^0+\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\phi_W^0\right\}+\left\{\frac{\rho\Delta V}{\Delta t}-(1-f)\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e+\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\right\}\phi_P^0+S_\phi\Delta V\Delta t$$

$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P+a_P^0\phi_P^0$$

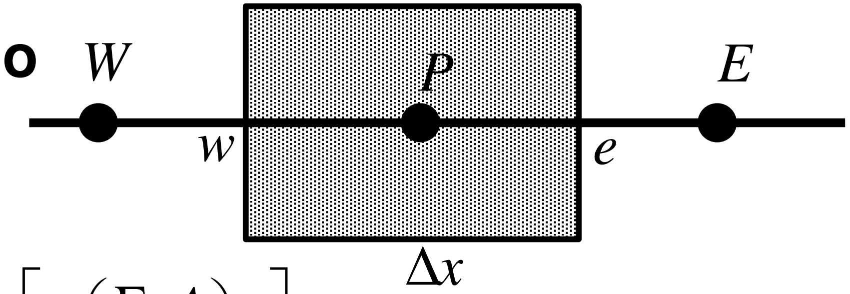
Condição de estabilidade: $a_P^0 \geq 0$

Só o método totalmente implícito é incondicionalmente estável!

Condição de estabilidade: o intervalo de tempo Δt tem que ser menor que o tempo associado à difusão da informação da variável ϕ ao longo da distância Δx.

$$t_d \sim \frac{\rho(\Delta x)^2}{\Gamma_\phi} \qquad V_d \sim \frac{\Gamma_\phi}{\rho\Delta x}$$

Difusão unidimensional em regime transitório



$$\left\{\frac{\rho\Delta V}{\Delta t}+f\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e+\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\right\}\phi_P^1=\left[f\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e\right]\phi_E^1+\left[f\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\phi_W^1+$$

$$(1-f)\left\{\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e\right]\phi_E^0+\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\phi_W^0\right\}+\left\{\frac{\rho\Delta V}{\Delta t}-(1-f)\left[\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_e+\left(\frac{\Gamma_\phi A}{\Delta x}\right)_w\right]\right\}\phi_P^0+S_\phi\Delta V\Delta t$$

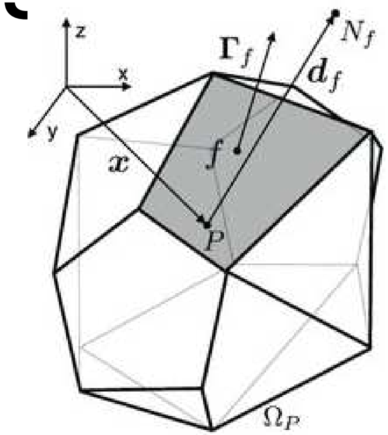
$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P+a_P^0\phi_P^0$$

Condição inicial, e condições de fronteira

Qualquer método que seja implícito requer a resolução de um sistema de equações

O método explícito não requer a resolução de um sistema de equações $\Rightarrow$ com o método explícito há relações explícitas para avanço no tempo

Com o método explícito não há controlo dos resíduos…



Difusão multidimensional em regime transitório

Equação de base

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi$$

De modo análogo ao feito para a situação unidimensional, obtém-se

$$a_P\phi_P=\sum a_{nb}\phi_{nb}+b_P+a_P^0\phi_P^0$$

A condição de estabilidade continua a ser $a_P^0\geq 0$

Há métodos que levam em consideração mais que apenas dois níveis de tempo para aproximar a derivada $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)$

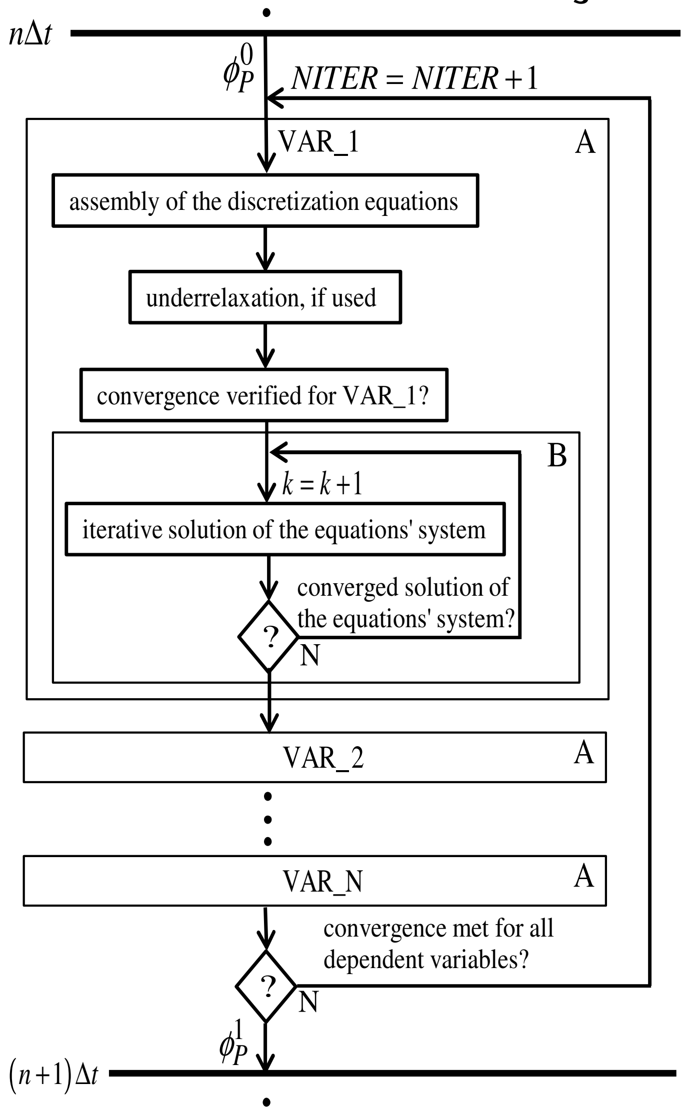
$$t_d\sim\frac{\rho\times\Delta^2}{\Gamma_\phi}\qquad V_d\sim\frac{\Gamma_\phi}{\rho\times\Delta}$$

Geralmente usa-se apenas o método totalmente implícito

Ter presente o sentido físico da condição de estabilidade (ainda que não requerida pelo método totalmente implícito): o intervalo de tempo Δt tem que ser menor que o tempo associado à difusão da informação da variável ϕ ao longo da menor distância entre nós da malha de cálculo.

Difusão em regime transitório

Há um avanço no tempo, de Δt em Δt, em que ao passar de um nível de tempo para outro se deve ter obtido a solução devidamente convergida



Difusão em regime transitório

É necessário reter a solução à medida que o tempo vai evoluindo, pois não importa apenas a solução correspondente ao instante final