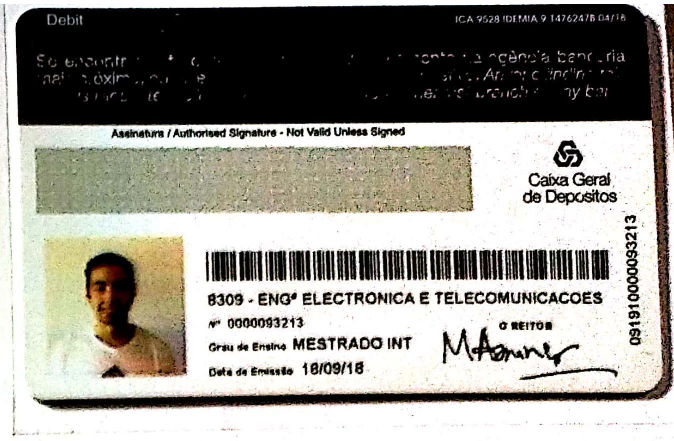
Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e controlo — 02/MAR/2021



1. $t_1 \rightarrow$ entrada nula

Se por exemplo, aplicarmos um degrau à entrada, a sua entrada não passará imediatamente de 'o' para '1', irá demorar "algum tempo" até o sistema ficar a '1'.

O mesmo se aplica quando fazemos o inverso, ou seja, quando passamos de '1' para 'o', o sistema irá demorar "tempo" para ficar a zero. Pelo que se a entrada é nula em t_1, a saída será nula para $t_2 \geq t_1$.

2.

degrau unitário

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = A\,\frac{s+a}{s+b}$$

$y_{ss} = 3$

$$y(s) = \frac{A(s+a)}{s+b}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\lim_{s\to 0} s\cdot y(s) = s\cdot\frac{A(s+a)}{s+b}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A\cdot a}{b}$$

$$\frac{A\cdot a}{b} = 3 \Leftrightarrow A\cdot a = 3b$$

$$y(s) = \frac{A(s+a)}{s\cdot(s+b)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+b)}$$

$$A_1 = \left[s\cdot y(s)\right]_{s=0} = \frac{A\cdot a}{b}$$

$$A_2 = \left[(s+b)\,y(s)\right]_{s=-b} = \frac{A(-b+a)}{-b}$$

Como o parâmetro A faz apenas "movimentar" o gráfico "para cima ou para baixo" da saída, então, neste caso $\underline{A=1}$

$a = 3b$

$$A_1 = \frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3$$

$$A_2 = \frac{-b+a}{-b} = \frac{-b+3b}{-b} = -2$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{3}{s} - 2\cdot\frac{1}{(s+b)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 3 - 2e^{-bt}$$

Sabemos que para $t=1$ $y(1)=2$, então

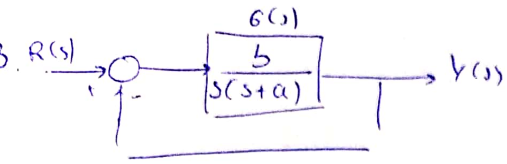
$$2 = 3 - 2e^{-b} \Leftrightarrow e^{-b} = -\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = -\ln(0{,}5)$$

então $\begin{cases} a = -3\ln(0{,}5) \\ b = -\ln(0{,}5) \\ A = 1 \end{cases}$

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e controlo - 02/Mar/2021

3.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b}{s(s+a)+b} = \frac{b}{s^2+as+b}$$

vértices

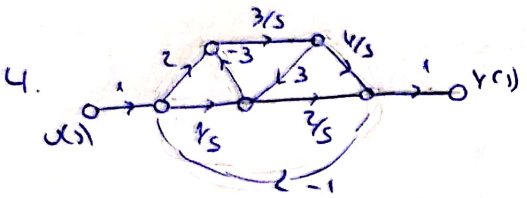
$s^2+as+b=0 \longrightarrow s = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$

pólos complexos conjugados

$P_{1,2} = a \pm j b$

$P_1, P_2 = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ou seja $a^2-4b<0 \Leftrightarrow a^2 < 4b \Leftrightarrow a < 2\sqrt{b}$

4.



$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

sistema instável

Caminho para a frente

$T_1 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s} \cdot 1 = \frac{2}{s^2}$

$T_2 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{s} \cdot \frac{4}{s} \cdot 1 = \frac{24}{s^2}$

$T_3 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{s} \cdot 3 \cdot \frac{2}{s} \cdot 1 = \frac{36}{s^2}$

$T_4 = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot (-3) \cdot \frac{3}{s} \cdot \frac{4}{s} \cdot 1 = -\frac{36}{s^3}$

cofatores

$\Delta_1 = 1-0 = 1$

$\Delta_2 = 1-0 = 1$

$\Delta_3 = 1-0 = 1$

$\Delta_4 = 1-0 = 1$

malhas

$L_1 = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s}(-1) = -\frac{2}{s^2}$ $\quad L_4 = 2 \cdot \frac{3}{s} \cdot 3 \cdot \frac{2}{s} \cdot (-1) = -\frac{36}{s^2}$

$L_2 = 2 \cdot \frac{3}{s} \cdot \frac{4}{s}(-1) = -\frac{24}{s^2}$

$L_3 = -3 \cdot \frac{3}{s} \cdot (3) = \frac{27}{s}$

malhas 2 a 2

não há

Determinante

$\Delta = 1 + \frac{2}{s^2} + \frac{24}{s^2} - \frac{27}{s} + \frac{36}{s^2}$

$= \frac{62}{s^2} - \frac{27}{s} + 1$

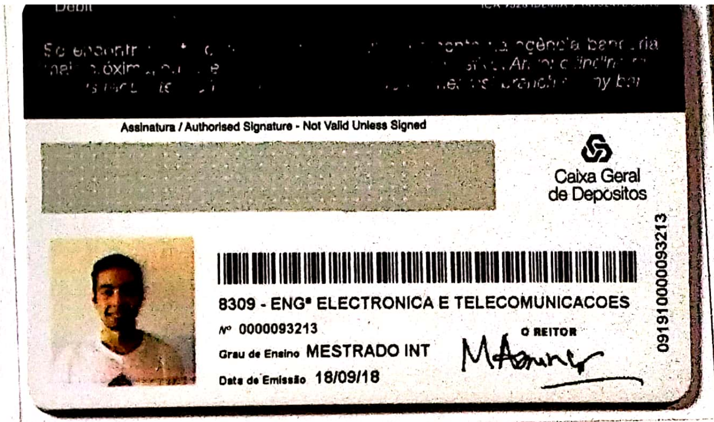
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2}{s^2} + \frac{24}{s^2} + \frac{36}{s^2} - \frac{36}{s^3}}{\frac{62}{s^2} - \frac{27}{s} + 1}$$

$$= \frac{\frac{62}{s^2} - \frac{36}{s^3}}{\frac{62}{s} - \frac{27}{s} + 1}$$

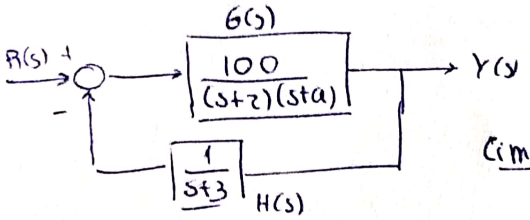
$$= \frac{62s - 36}{s^3 - 27s^2 + 62s}$$

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e controlo - 02/mar/2021



5.



Limiar da estabilidade

↳ polos sobre o eixo imaginário

$$G(s)H(s) = \frac{100}{(s+2)(s+a)(s+3)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100}{(s+2)(s+a)(s+3)+100}$$

Eq. característica

$$(s+2)(s+a)(s+3)+100=0$$

$$\Leftrightarrow (s^2+s(2+a)+2a)(s+3)+100=0$$

$$\Leftrightarrow s^3+3s^2+s^2(2+a)+3s(2+a)+2as+6a+100=0$$

$$\Leftrightarrow s^3+s^2(3+(2+a))+s(3(2+a)+2a)+6a+100=0$$

$$\Leftrightarrow s^3+s^2(5+a)+s(6+5a)+6a+100=0$$

$s = j\omega cr$

$s^2 = -\omega cr^2$

$s^3 = -j\omega cr^3$

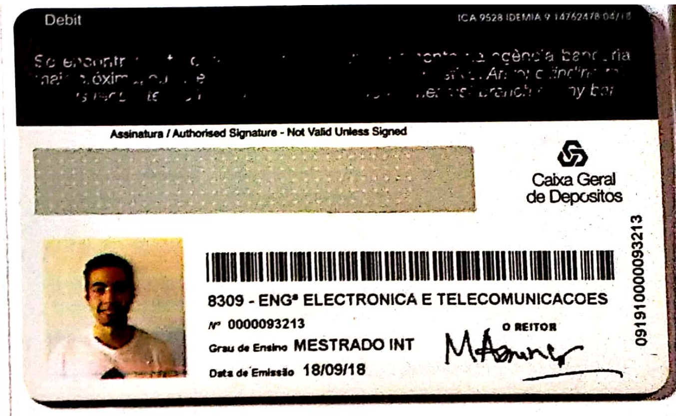
$$\Rightarrow -j\omega cr^3 - \omega cr^2(s+a) + j\omega cr(6+5a)+6a+100=0$$

Part. Real $\Rightarrow -\omega cr^2(5+a)+6a+100=0 \Leftrightarrow \omega cr^2 = \dfrac{6a+100}{5+a} \Leftrightarrow \omega cr = \sqrt{\dfrac{6a+100}{5+a}}$

Part. im $\Rightarrow -\omega cr^3+\omega cr(6+5a)=0$

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e controlo -



6. $\lim_{s\to 0} G(s) = 9$

$K \rightarrow P_1 = -1{,}5 \pm j\,1{,}94$

$P_2 = -3{,}5 \pm j\,0{,}65$

$G(s) = ?$

polo duplo + polo duplo(-4)
zerodulo (

angulo = 90°

$\gamma = \dfrac{180^\circ(2k+1)}{n-m}$ se $k=0$ $\gamma = 90^\circ$

então $90 = \dfrac{180^\circ}{n-m} \longrightarrow n-m=2$

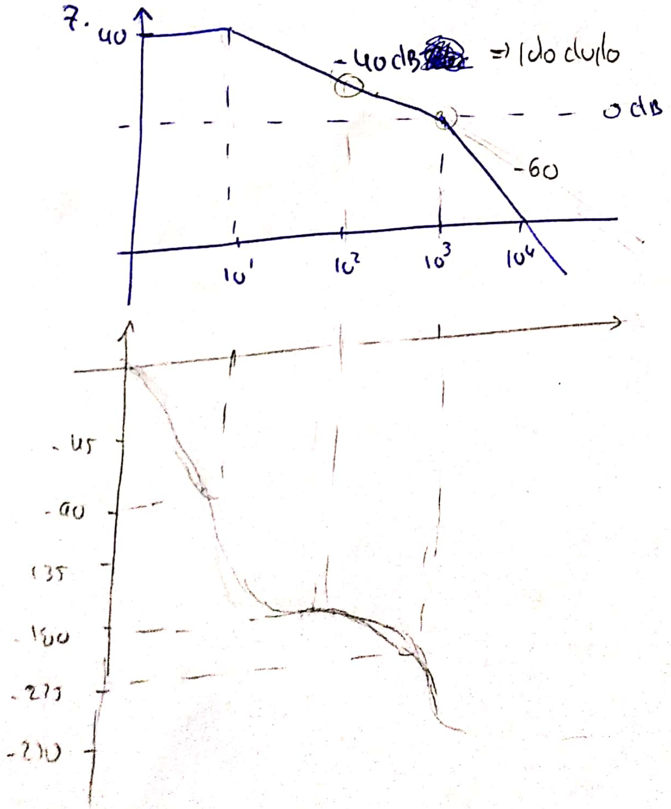
$4-2=2$ ✓

centroid = -2

$\sigma_0 = \dfrac{\sum Re(P_i) - \sum Re[Z]}{2}$ $\Leftrightarrow -2 = \dfrac{\sum Re[P] + \sum Re[Z]}{2} \Leftrightarrow \sum Re[P] - \sum Re[Z] = -4$

$G(s) = A\dfrac{(s+z)^2}{(s+p_1)^2(s+4)^2}$ $\lim_{s\to 0} G(s) = \dfrac{A z^2}{(P_1^2)(16)} \Leftrightarrow$

7.



Limiar de estabilidade ⇒ $|G(j\omega)| = 0\,dB$

$40 = 20\log_{10}(A) \Rightarrow A = 10^2$

$G(j\omega) = \dfrac{A}{\left(\frac{j\omega}{\omega p}\right)^3}$ se $\omega_p = 10$ ⇓ polo triplo

$\angle G(j\omega) = -3\arctan\left(\frac{\omega}{\omega p}\right)$

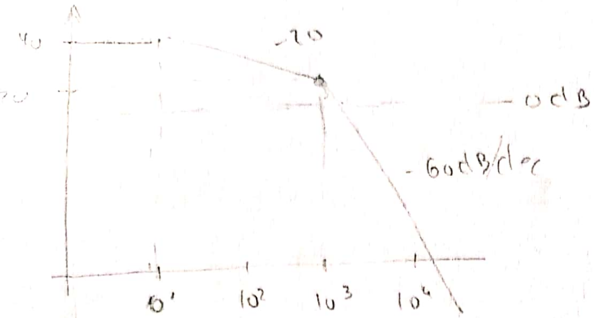
$\Leftrightarrow -180 = -3\arctan\left(\frac{\omega_{180}}{\omega p}\right) \Rightarrow \omega_{180} = \sqrt{3}\,\omega p$

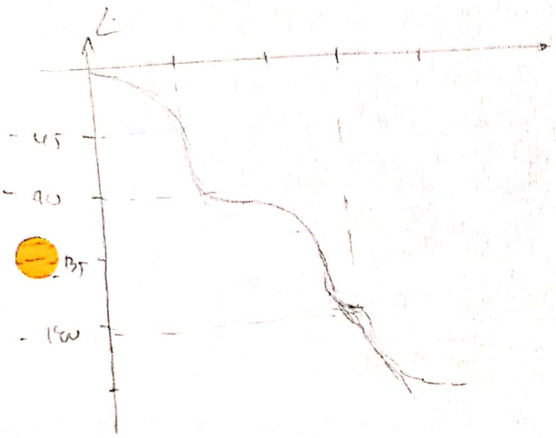
$|G(j\omega)| = \dfrac{A}{\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega p}\right)^2+1}\right)^3} = \dfrac{A}{(\sqrt{3+1})^3} = \dfrac{A}{2^3} = \dfrac{10^2}{8} > 1$

instável

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e Controlo — 02/Mar/2021





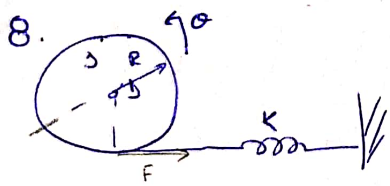
Para estar no limiar da estabilidade

$$\Downarrow$$

$$|G(j\omega)| = 0dB$$

$\omega_p > 10^3$ para estar no limiar da estabilidade

8.



. Primeira fase

$J\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - FR$

$\hookrightarrow J\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - KR^2\theta$ //

sendo $F = K(R\theta - 0)$

. Segunda fase

↳ nenhuma força aplica, apenas atrito (b)

$J\ddot{\theta} = -b\dot{\theta}$ //