Modelação de Sistemas e Controlo Aeroespacial

Capítulo 3

Análise do Comportamento de Sistemas através dos seus Modelos

Telmo Reis Cunha

trcunha@ua.pt

2023/2024

universidade de aveiro

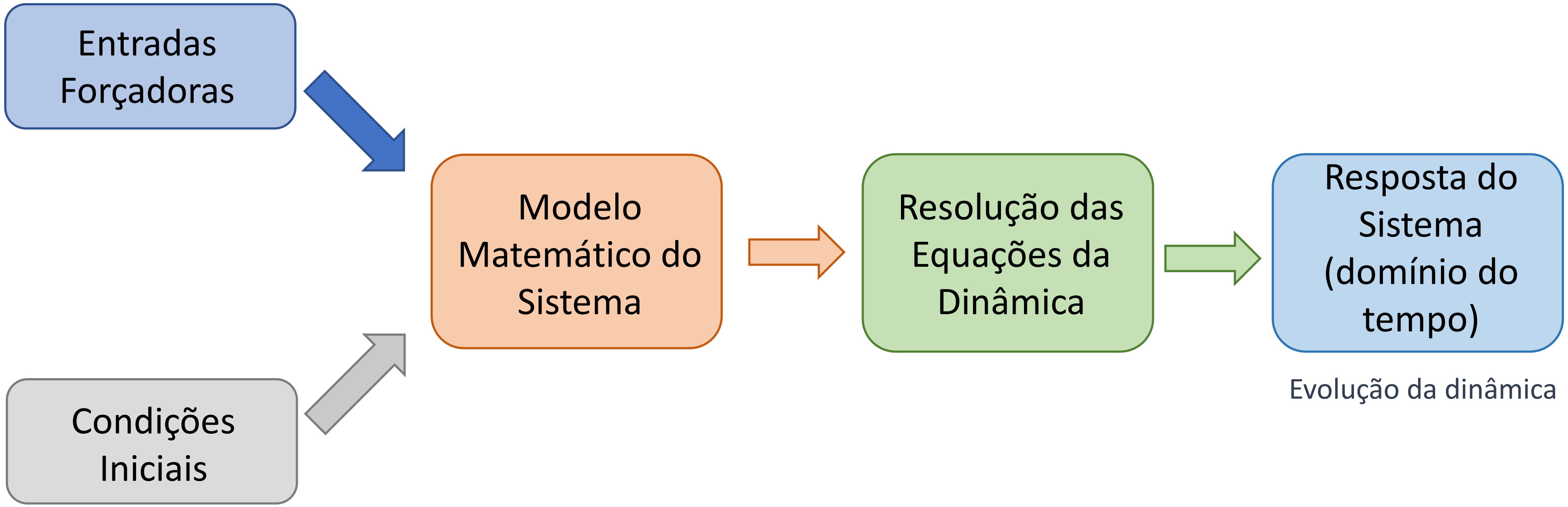
Licenciatura em Engenharia Aeroespacial

Índice

Introdução

Comportamento de um Sistema através do seu Modelo

Anteriormente foram vistas formas distintas de se representar um sistema por um modelo matemático, podendo este ser usado para determinar um sinal do sistema em resposta a um determinado sinal de entrada (com ou sem condições iniciais nulas).



Introdução

Comportamento de um Sistema através do seu Modelo

Com base no comportamento (resposta) do sistema averigua-se a necessidade de o controlar.

São raros os sistemas de controlo realimentado que à partida fornecem um desempenho ótimo.

Definição:

Compensador - componente ou algoritmo matemático que é necessário inserir no sistema para corrigir ou atenuar deficiências de desempenho.

É fundamental definir inicialmente o que se entende por desempenho (performance) do sistema.

(ex.: tempo de resposta, estabilidade, fiabilidade, conforto, segurança, inovação tecnológica, custo, preço, etc.)

Normalmente as especificações são concorrentes, sendo necessário encontrar uma solução de compromisso.

Introdução

Comportamento de um Sistema através do seu Modelo

No caso dos sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI) foi visto que o modelo Função de Transferência pode apresentar polos (e zeros) reais ou complexos (neste último caso surgem aos pares complexos-conjungados).

Aplicando a decomposição em frações simples a uma função de transferência composta por estes tipos de polos, observa-se que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A_{1k}}{(s+p_1)^k} + \cdots + \frac{A_{11}}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_{2,r}+jp_{2,i}} + \frac{A_2^*}{s+p_{2,r}-jp_{2,i}} + \frac{A_3}{s+p_3} + \cdots$$

Logo, sistemas de ordens elevadas podem ser decompostos no paralelo, e na cascata, de sistemas de 1ª ordem e de 2ª ordem.

Importa, portanto, analisar a resposta específica destes sistemas de ordem reduzida, e relacionar o comportamento observado com os parâmetros do seu modelo.

Introdução

Comportamento de um Sistema através do seu Modelo

Esse comportamento dos modelos é usualmente efetuado através da aplicação de Sinais de Teste Padrão, sendo os mais comuns:

- Impulso (não implementável na prática, sendo usado em análises teóricas)
- Degrau (um dos sinais mais usados na prática, em aplicações de controlo)
- Rampa
- Parábola
- Sinusoide (um dos sinais muito usados na prática)

Estes sinais de teste permitem definir as especificações de teste para comparação de desempenho de sistemas.

A análise de sistemas lineares invariantes no tempo é simplificável através do recurso à sua decomposição em subsistemas de ordem mais baixa (normalmente primeira e segunda) e à utilização de sinais de teste padrão.

Introdução

Sinais de Teste Padrão

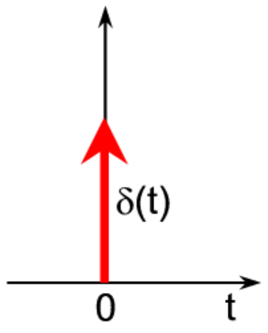
Pode-se comparar o desempenho de dois sistemas através das suas respostas aos mesmos sinais de teste padrão.

Impulso de Dirac (delta de Dirac) - $\boldsymbol{\delta(t)}$

- Definição:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad f(t) = f(t) * \delta(t)$$

O impulso unitário possui amplitude infinita, duração nula e área unitária – não é implementável na prática, mas pode-se aproximar por um pulso de duração não nula.



$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \forall s$$

Introdução

Sinais de Teste Padrão

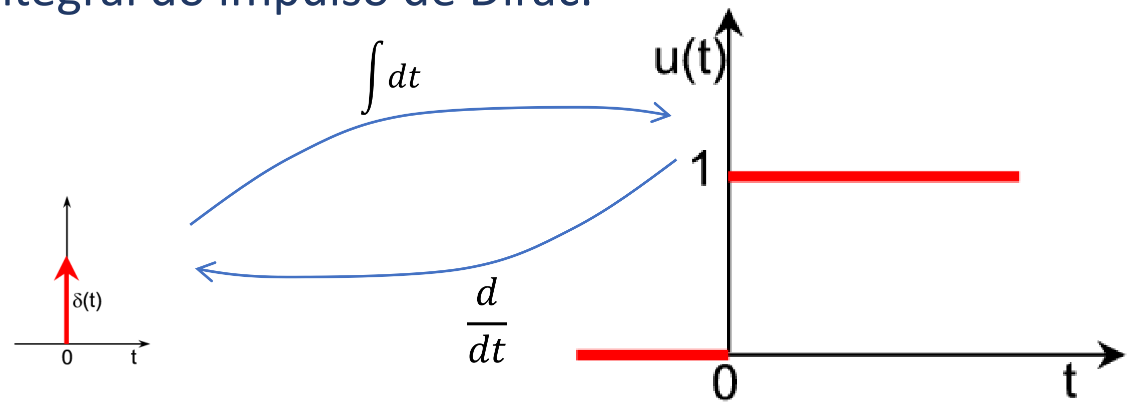
Degrau Unitário (degrau de Heaviside) - *u*(*t*)

- Definição:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \quad t \geq 0 \\ 0 & \Rightarrow \quad t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

O degrau unitário é o integral do impulso de Dirac.



A função degrau constitui um dos sinais de entrada ou referência de uso mais comum nos sistemas de controlo.

Introdução

Sinais de Teste Padrão

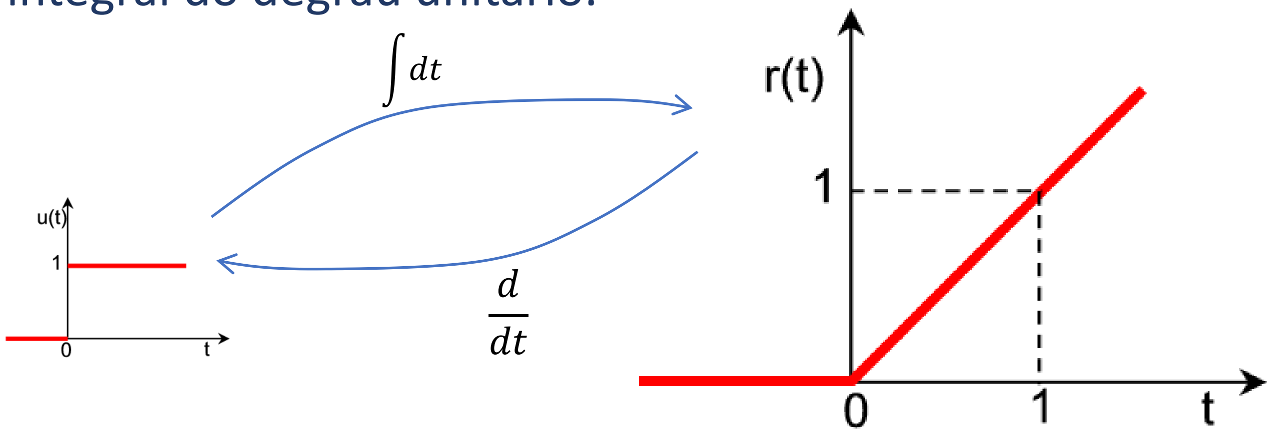
Rampa Unitária - *r*(*t*)

- Definição:

$$r(t) = \begin{cases} t & \Rightarrow & t \geq 0 \\ 0 & \Rightarrow & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

A rampa unitária é o integral do degrau unitário.



Exemplos de aplicação: controlo de ILS, tratamento térmico de aço, etc.

Introdução

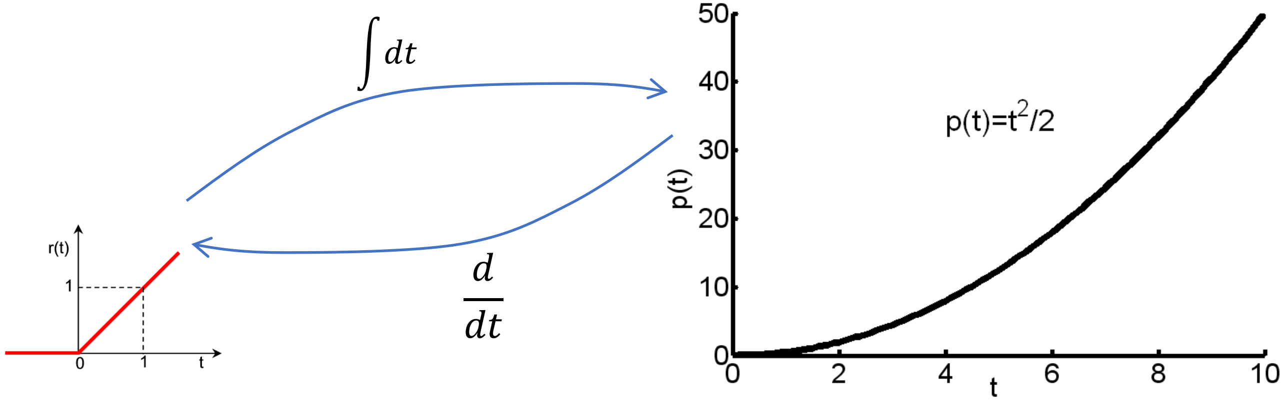
Sinais de Teste Padrão

Parábola Unitária - *p*(*t*)

- Definição:

$$p(t) = \begin{cases} t^2/2 & \Rightarrow \quad t \geq 0 \\ 0 & \Rightarrow \quad t < 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}\{p(t)\} = \frac{1}{s^3}$$

A parábola unitária é o integral da rampa unitária.



Sinal pouco utilizado em controlo.

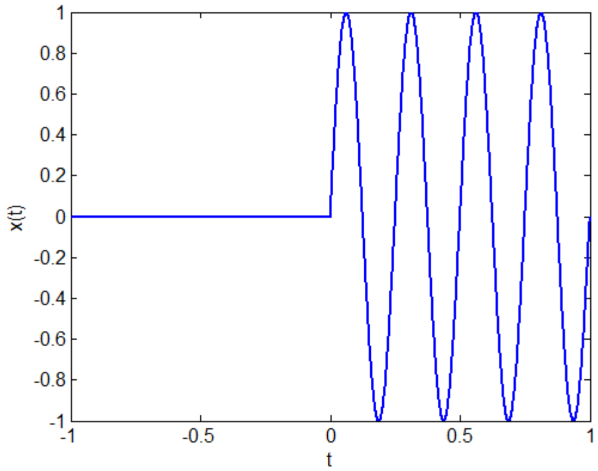
Sinais de Teste Padrão

Sinusoide - *x*(*t*)

- Definição:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \Rightarrow \quad t \geq 0 \\ 0 & \Rightarrow \quad t < 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Embora não seja muito usual ter como sinal de controlo uma sinusoide, é um sinal muito usado na identificação de sistemas no domínio da frequência.



Índice

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

Modelo Matemático

- Domínio do Tempo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- Domínio de Laplace (condições iniciais nulas):

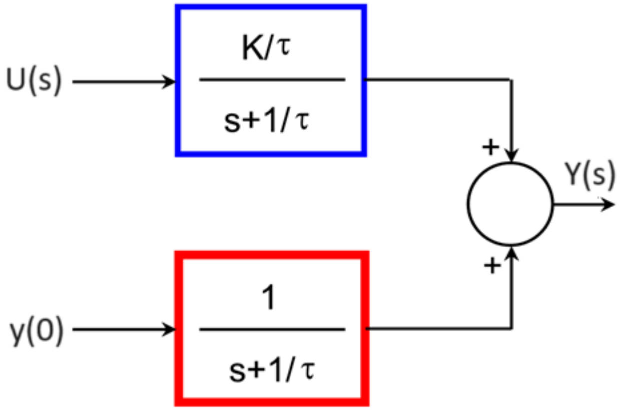
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

- Domínio de Laplace (com condições iniciais):

$$Y(s) = \frac{(K/\tau)}{s + (1/\tau)} U(s) + \frac{y(0)}{s + (1/\tau)}$$

$\tau = \frac{1}{a_0}$ Constante de Tempo

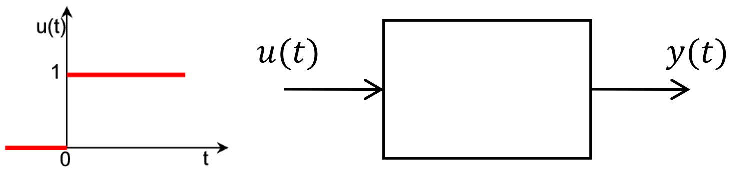
$K = \frac{b_0}{a_0}$ Ganho estático



Impulso no tempo – $y(0)\delta(t)$

Resposta impulsiva da equação homogénea

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

Condições Iniciais Nulas

Resposta ao Degrau Unitário

- Domínio de Laplace:

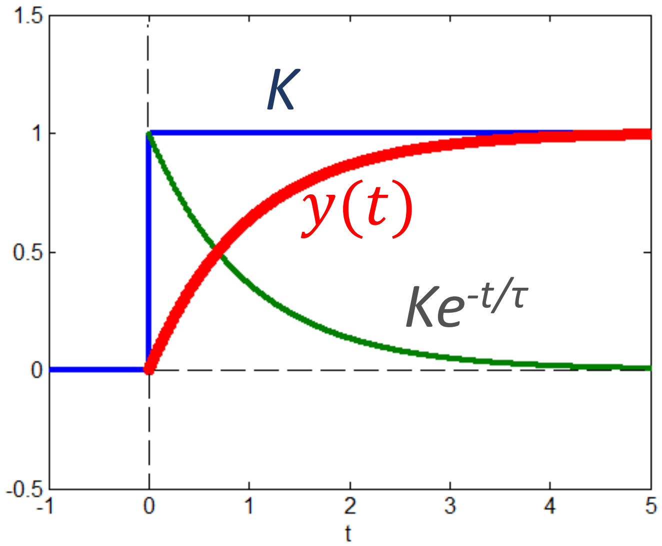
$$Y(s) = \frac{K/\tau}{s[s+(1/\tau)]} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+(1/\tau)}$$

- Domínio do Tempo:

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = K - Ke^{-t/\tau}$$

Componente Estacionária / Permanente

Componente Transitória



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

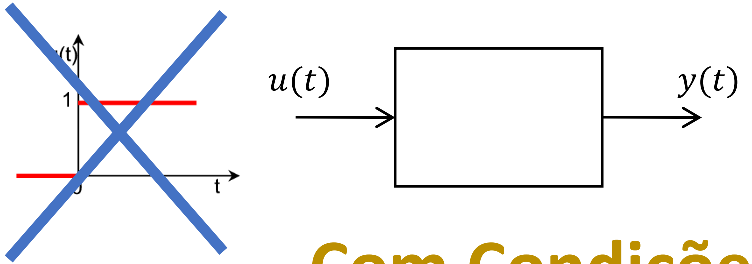
- Domínio de Laplace:

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s + (1/\tau)}$$

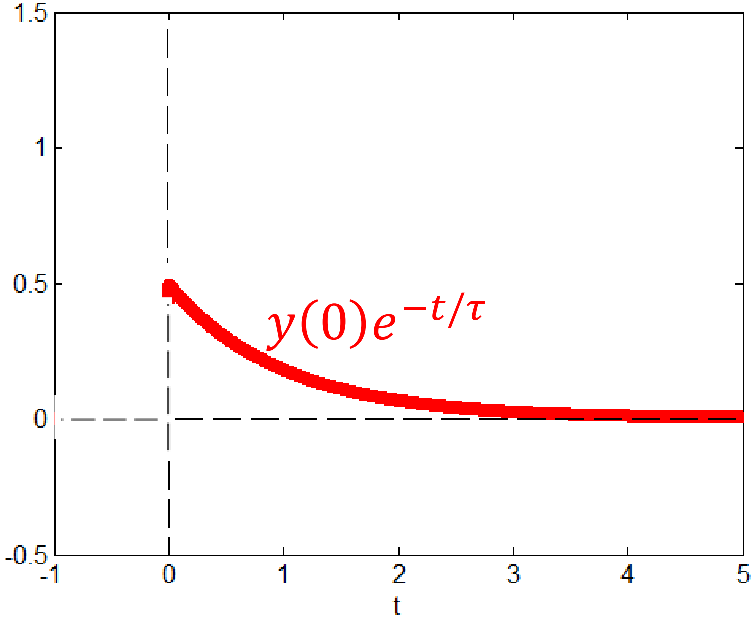
- Domínio do Tempo:

$$y(t) = y(0)e^{-t/\tau}$$

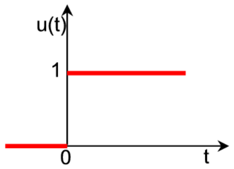
Componente Livre



Com Condições Iniciais; e Entrada Nula



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

Com Condições Iniciais + Entrada

Resposta ao Degrau Unitário

- Domínio de Laplace:

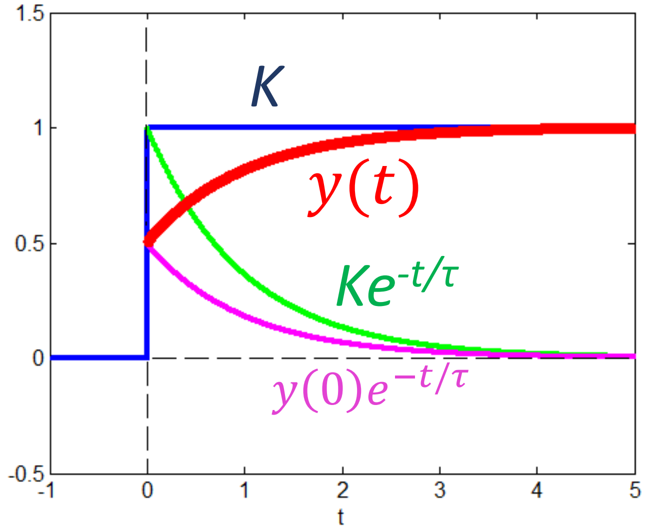
$$Y(s) = \frac{K/\tau}{s[s+(1/\tau)]} + \frac{y(0)}{s+(1/\tau)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+(1/\tau)} + \frac{y(0)}{s+(1/\tau)}$$

- Domínio do Tempo:

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + y(0)e^{-t/\tau} = K - Ke^{-t/\tau} + y(0)e^{-t/\tau}$$

Componente Forçada

Componente Livre



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

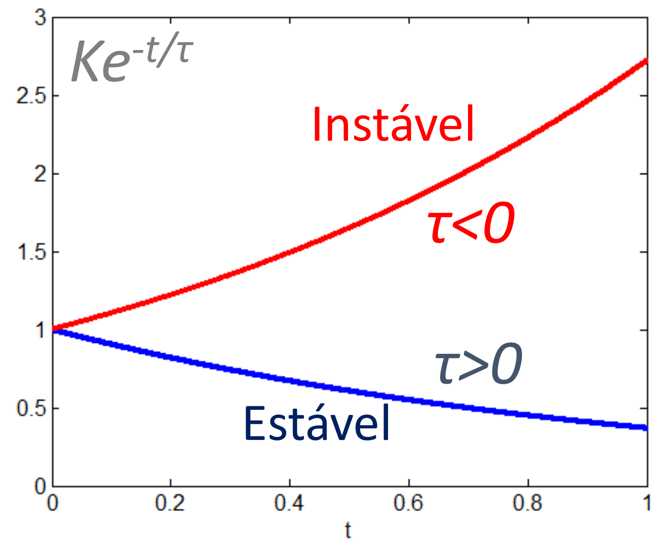
Estabilidade:

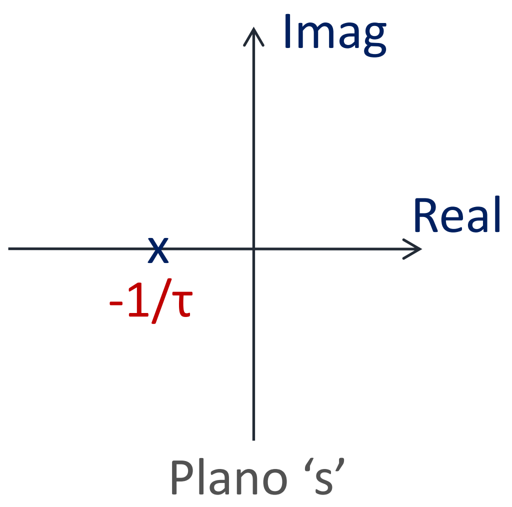
$$Y(s) = \frac{K/\tau}{s + (1/\tau)} U(s) + \frac{y(0)}{s + (1/\tau)}$$

A componente transitória e/ou livre só decai para zero com o tempo se o polo se encontrar do lado esquerdo do plano ‘s’.

Resposta ao degrau:

$$\begin{aligned} y(t) &= K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + y(0)e^{-t/\tau} \\ &= K - Ke^{-t/\tau} + y(0)e^{-t/\tau} \end{aligned}$$





Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

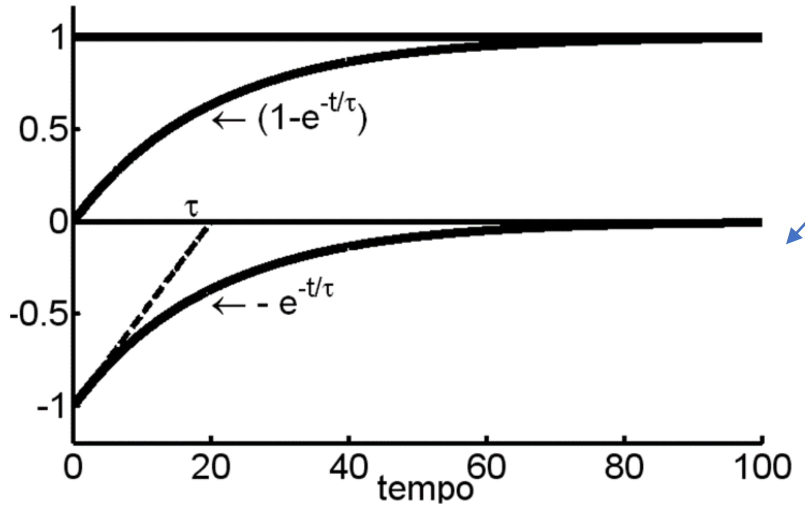
Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

Para além da estabilidade, a **constante de tempo do polo** τ define a velocidade de queda da componente transitória e da componente livre – é uma característica do sistema.

Resposta ao degrau (condições iniciais nulas):

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = K - Ke^{-t/\tau}$$

$$\left.\frac{d\left(-Ke^{-t/\tau}\right)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{K}{\tau}$$



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

Para além da estabilidade, a **constante de tempo do polo** τ define a velocidade de queda da componente transitória e da componente livre – é uma característica do sistema.

Resposta ao degrau (condições iniciais nulas):

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = K - Ke^{-t/\tau}$$

t	**Decaimento do Transitório**
τ	63.2%
2τ	86.5%
3τ	95.0%
4τ	98.2%
5τ	99.3%

Limite Prático

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistemas de 1ª Ordem

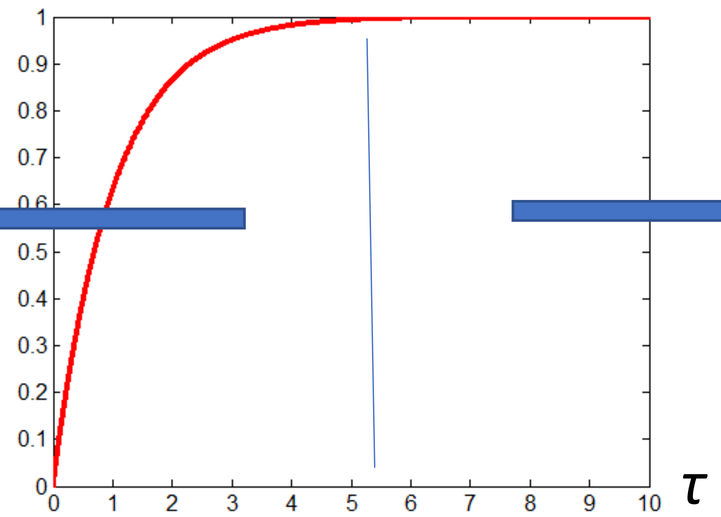
Para além da estabilidade, a **constante de tempo do polo** τ define a velocidade de queda da componente transitória e da componente livre – é uma característica do sistema.

Resposta ao degrau (condições iniciais nulas):

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = K - Ke^{-t/\tau}$$

Regime Transitório

Componente permanente
Componente transitória



Regime Estacionário

Componente permanente
Componente transitória remanescente

Válido para qualquer sistema estável e qualquer sinal.

universidade de aveiro

Resposta no Tempo de Sistemas com vários Polos Reais Distintos

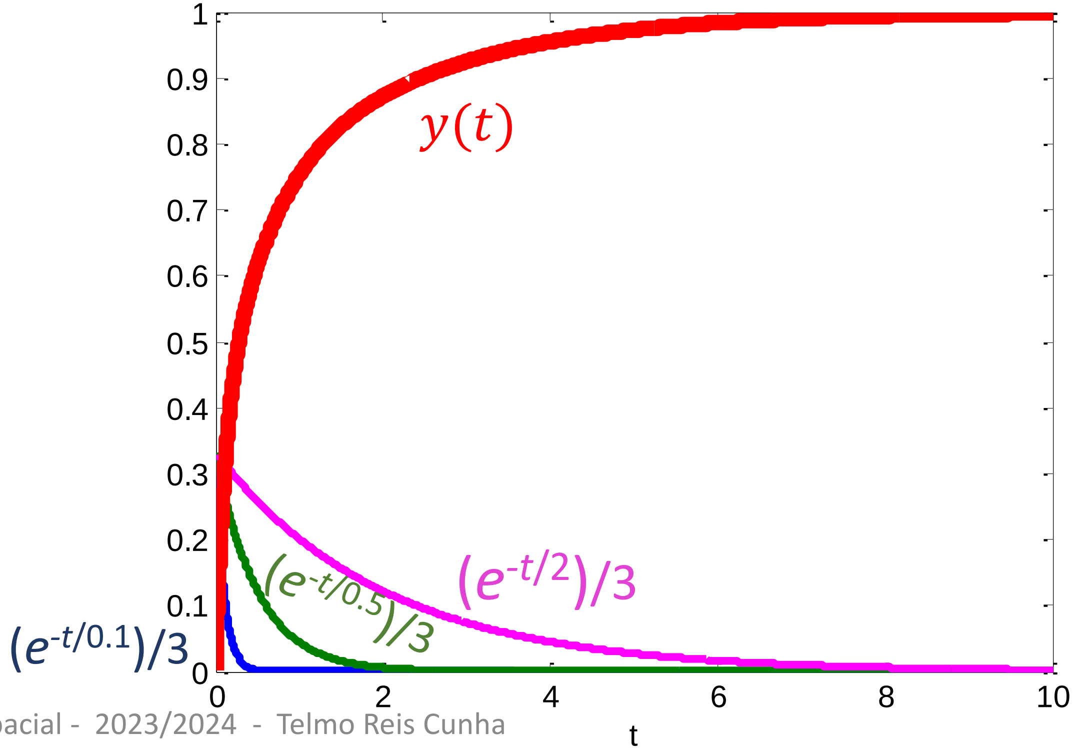
Num sistema com vários polos, as constantes de tempo relevantes são as dos Polos Dominantes.
Definição:

Polos Dominantes – são os que têm as constantes de tempo mais longas (polos próximos do eixo imaginário).

Exemplo:

Resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - \left(e^{-t/0.1} + e^{-t/0.5} + e^{-t/2}\right)/3$$



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 1ª Ordem no Limiar de Estabilidade

Comportamento do sistema no limiar de estabilidade:

Se o polo do sistema estiver sobre o eixo imaginário, a constante de tempo correspondente será infinita!

Resposta ao degrau: $$Y(s) = \frac{K_1}{s}\frac{b_0}{s+0} = \frac{K}{s^2}$$ **É uma rampa!**

Segundo o princípio BIBO, este seria um sistema instável.

Mas se a entrada fosse um impulso:

$$Y(s) = K_1\frac{b_0}{s+0} = \frac{K}{s}$$ **É um degrau!**

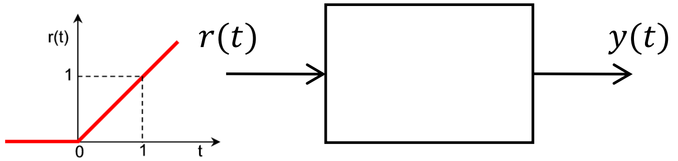
Segundo o princípio BIBO, este seria um sistema estável.

O sistema diz-se, então, de **condicionalmente estável**.

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 1ª Ordem no Limiar de Estabilidade

Resposta à rampa unitária:



$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{K/\tau}{s+(1/\tau)}\frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{K\tau}{s} + \frac{K\tau}{s+(1/\tau)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$c(t) = Kt - K\tau + K\tau e^{-t/\tau}$$

Rampa

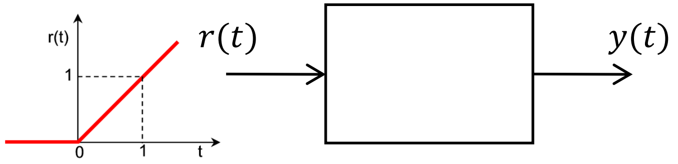
Constante

Exponencial decrescente

A constante de tempo é a mesma pois é definida pela posição do polo, e não pelo sinal de entrada.
Mas a magnitude desta componente depende, agora, também do τ.

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 1ª Ordem no Limiar de Estabilidade

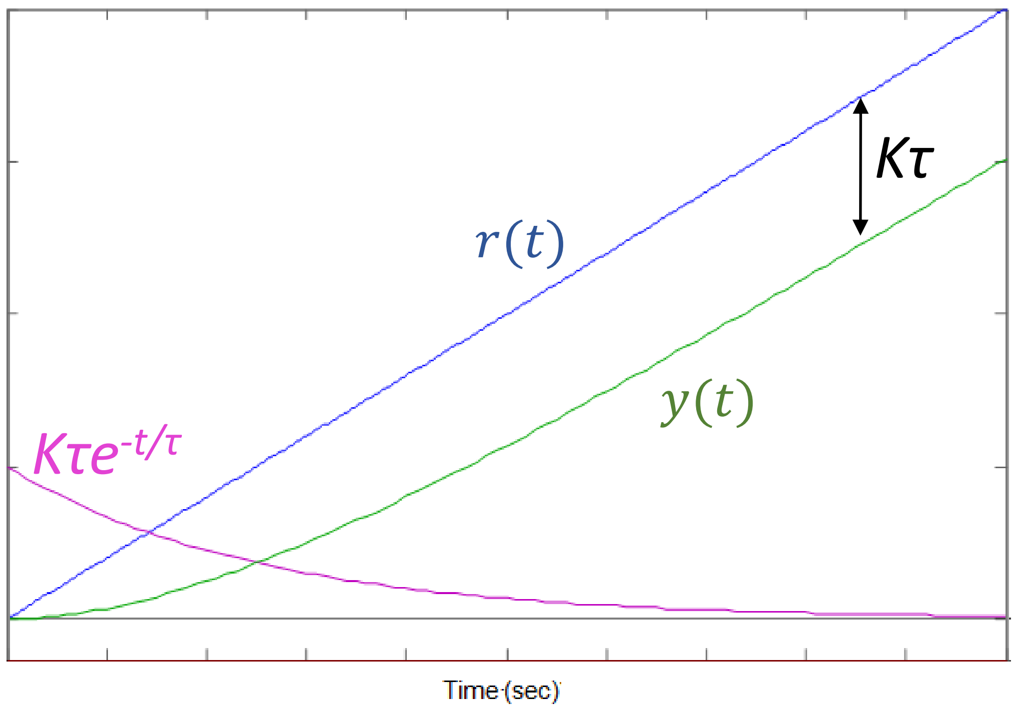


Resposta à rampa unitária:

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{K/\tau}{s + (1/\tau)} \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2} - \frac{K\tau}{s} + \frac{K\tau}{s + (1/\tau)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$\boxed{c(t) = Kt - K\tau + K\tau e^{-t/\tau}}$$



Regime estacionário:

$$y_{ss}(t) = Kt - K\tau$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Modelo Matemático

- Domínio do Tempo: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- Domínio de Laplace (condições iniciais nulas):

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ξ – Relação (Coeficiente) de Amortecimento

ω_n – Frequência Natural Não Amortecida

Um sistema de 2ª ordem tem dois polos reais ou dois polos complexos conjugados:

$$s_{1,2} = \sigma_d \pm j\omega_d$$

Frequência de Neper (é um amortecimento)

Frequência Natural Amortecida

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Equação característica: $\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Polos: $s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \sigma_d \pm j\omega_d$

Tipos de polos possíveis em função de ξ:

$\xi > 1 \longrightarrow s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \longrightarrow$ Polos reais negativos e distintos

$\xi = 1 \longrightarrow s_{1,2} = -\,\omega_n \longrightarrow$ Polos reais negativos e coincidentes

$0 < \xi < 1 \longrightarrow s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \longrightarrow$ Polos complexos conjugados com parte real negativa

$\xi = 0 \longrightarrow s_{1,2} = \pm j\omega_n \longrightarrow$ Polos complexos conjugados sobre o eixo imaginário

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Equação característica: $\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Polos: $\boxed{s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} = \sigma_d \pm j\omega_d$

Tipos de polos possíveis em função de ξ:

$-1 < \xi < 0 \longrightarrow s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \longrightarrow$ Polos complexos conjugados com parte real positiva

$\xi = -1 \longrightarrow s_{1,2} = \omega_n \longrightarrow$ Polos reais positivos e coincidentes

$\xi < -1 \longrightarrow s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \longrightarrow$ Polos reais positivos e distintos

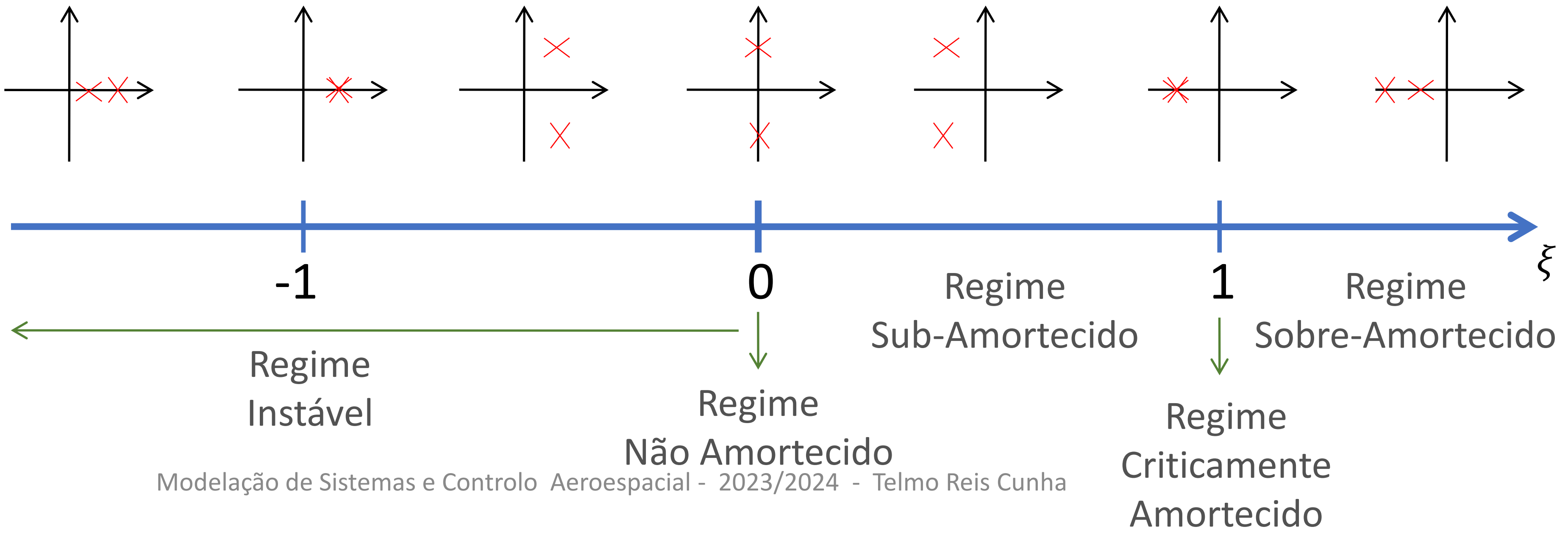
Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

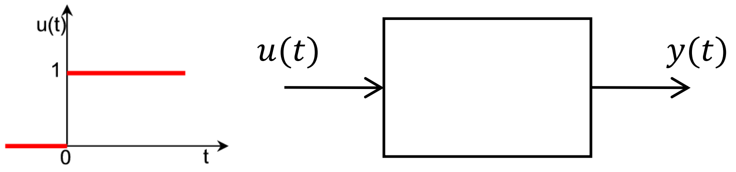
Equação característica: $\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Polos: $s_{1,2} = -\,\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = \sigma_d \pm j\omega_d$

Tipos de polos possíveis em função de ξ:



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

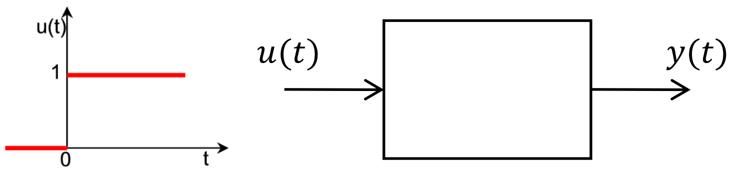
Resposta ao Degrau Unitário

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s) = \frac{b_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b_0}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

A resposta, no domínio do tempo, obtém-se via Teorema dos Resíduos.

Mas tal implica saber de que tipo são os polos de $G(s)$.

Como os polos dependem de $\boldsymbol{\xi}$, iremos analisar a resposta ao degrau para os diferentes regimes de operação do sistema.



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sobre-Amortecido: $\xi > 1$

- Polos reais e distintos no semiplano esquerdo ($-p_1$ e $-p_2$).

$$Y(s) = \frac{b_0}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{b_0}{s(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2}$$

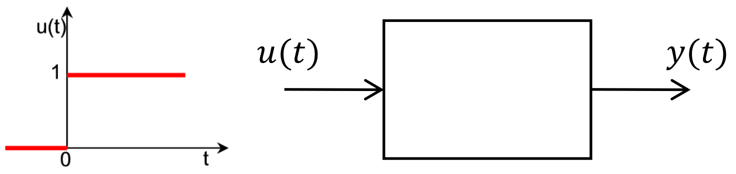
- Logo, a resposta no domínio do tempo é:

$$y(t) = A_0 + A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t}$$

O regime transitório é composto por duas exponenciais decrescentes (p_1 e p_2 são positivos).

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} + 1\right) e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} - 1\right) e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}$$

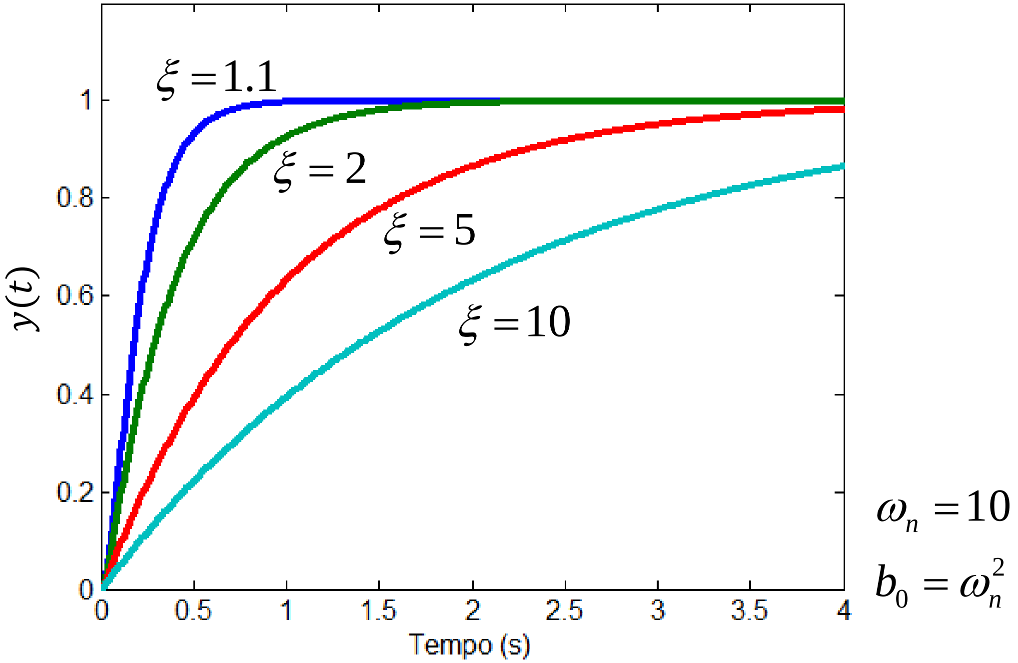
Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

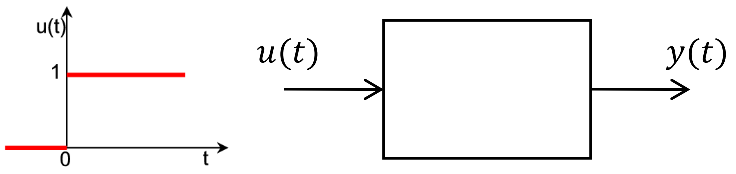
Regime Sobre-Amortecido: $\xi > 1$



A resposta parte da origem tangencialmente ao eixo dos tempos:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Criticamente Amortecido: $\xi = 1$

- Polo real duplo no semiplano esquerdo ($-p_1 = -p_2 = -\omega_n$).

$$Y(s) = \frac{b_0}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{b_0}{s(s+p)^2} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_{11}}{(s+p)^2} + \frac{A_{12}}{s+p}$$

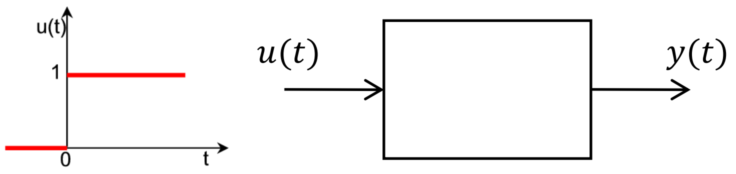
- Logo, a resposta no domínio do tempo é:

$$y(t) = A_0 + A_{12}e^{-pt} + A_{11}te^{-pt} = A_0 + (A_{12} + A_{11}t)\ e^{-pt}$$

Uma das componentes exponenciais decrescentes é agora multiplicada por t.

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

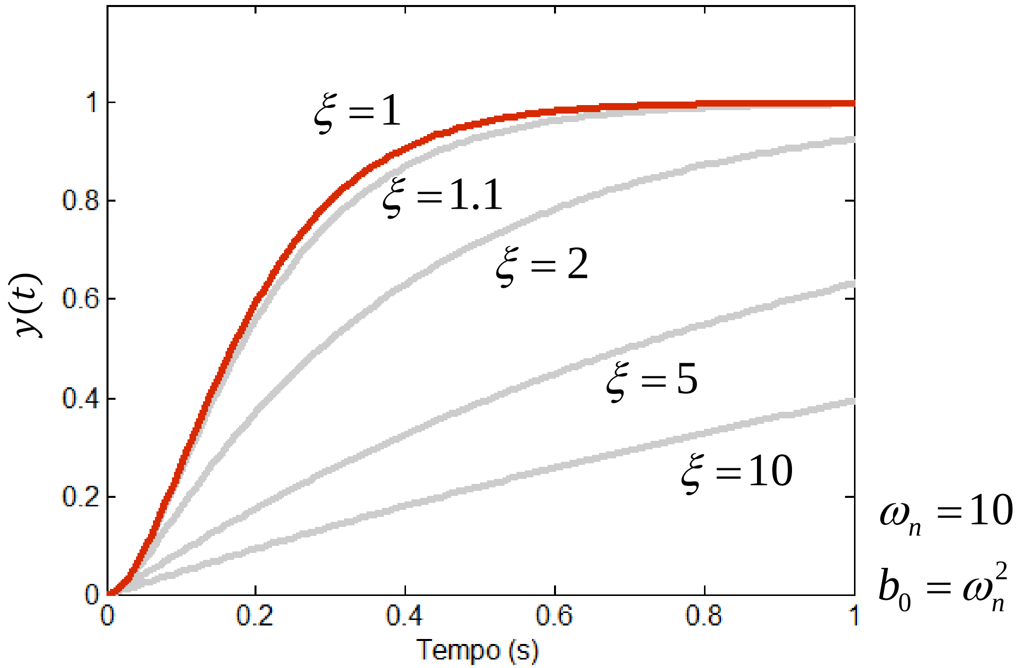
Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

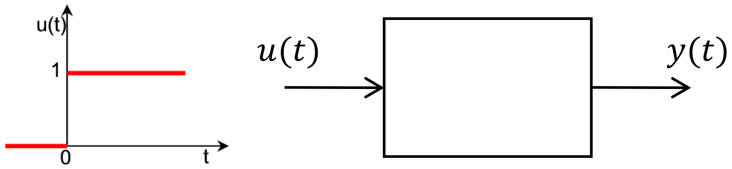
Regime Criticamente Amortecido: $\xi = 1$



A resposta parte da origem tangencialmente ao eixo dos tempos:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$

- Polos complexos conjugados no semiplano esquerdo.

$$Y(s) = \frac{b_0}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{b_0}{s(s-p)(s-\bar{p})} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p} + \frac{\bar{A}_1}{s-\bar{p}}$$

- Logo, a resposta no domínio do tempo é:

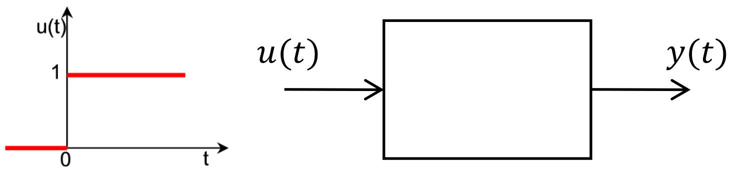
$$y(t) = A_0 + A_1 e^{(\sigma_d + j\omega_d)\, t} + A_1^* e^{(\sigma_d - j\omega_d)\, t}$$

- Pela fórmula de Euler: $e^{j\theta} = \cos\ \theta + j \sin\theta$

$$y(t) = A_0 + [\underbrace{(A_1 + A_1^*)}_{\text{real}} \cos(\omega_d t) + \underbrace{j(A_1 - A_1^*)}_{\text{real}} \sin(\omega_d t)] e^{\sigma_d t}$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem



Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

onde

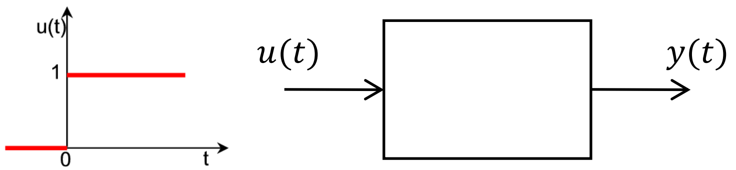
$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

A componente transitória é uma sinusoide à frequência natural amortecida (ω_d) e fase θ (que só depende de ξ), e cuja amplitude decresce exponencialmente.

A constante de tempo da amplitude exponencial é o inverso do módulo da parte real dos polos:

$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

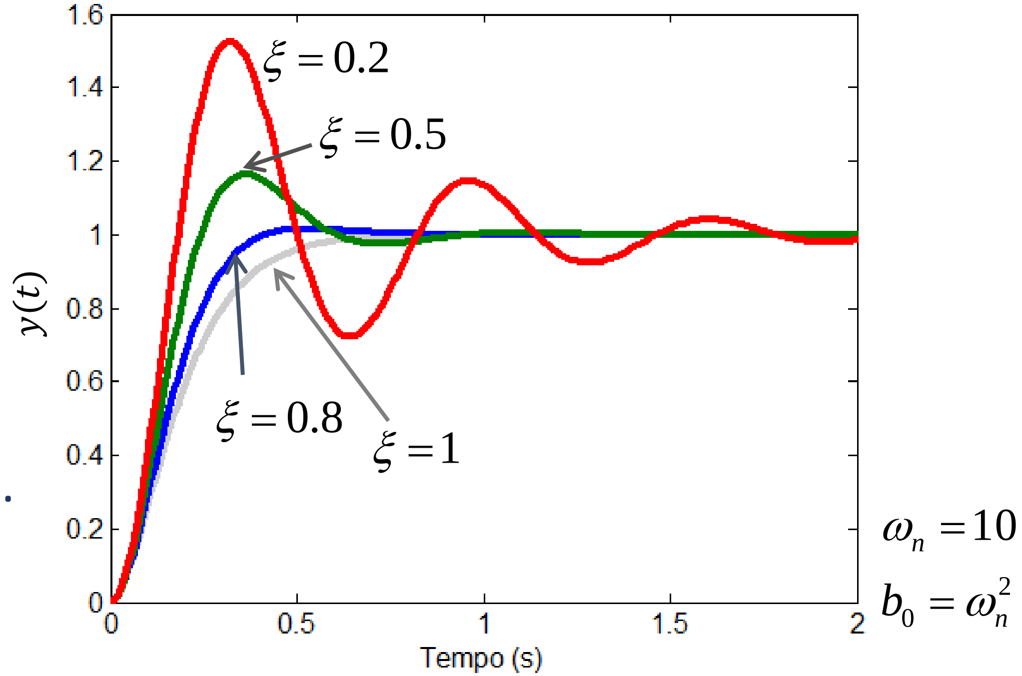
Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

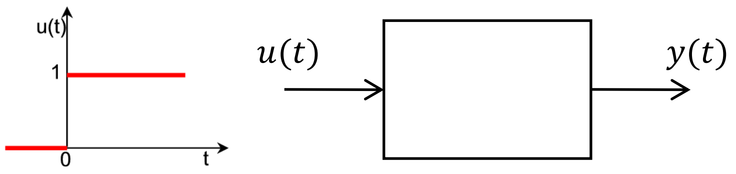
Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$



Com a diminuição de ξ (e ω_n constante):
- A frequência da oscilação aumenta;
- A amplitude da oscilação aumenta;
- A velocidade de crescimento da resposta aumenta.

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

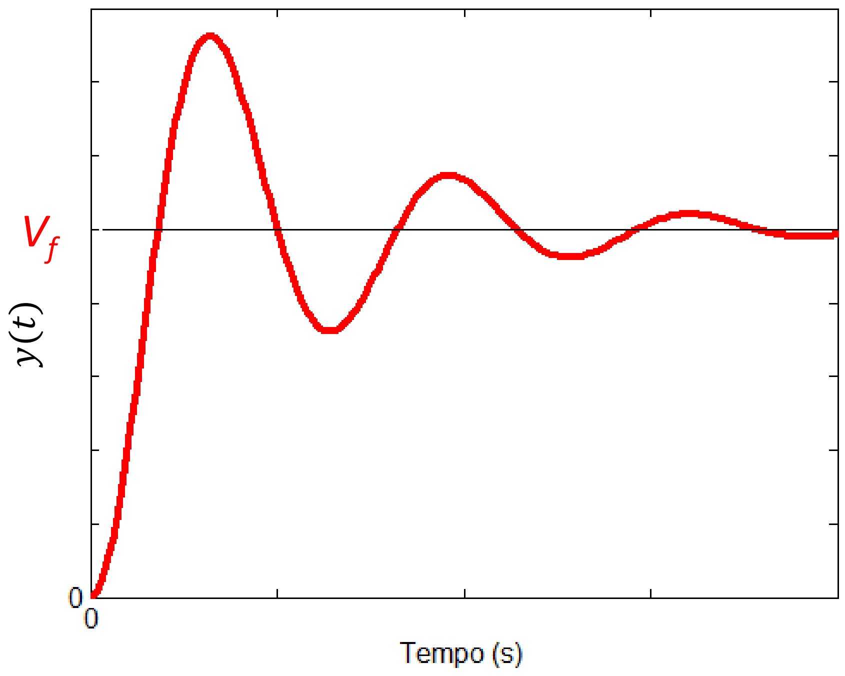


Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $$0 < \xi < 1$$

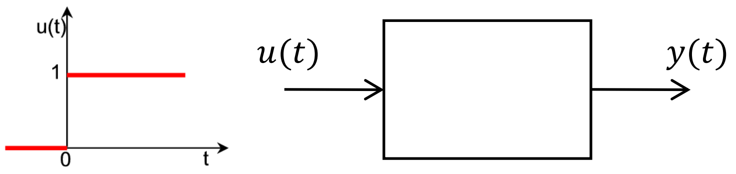
Características da Resposta:



Valor Final (V_f):

$$V_f = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{b_0}{\omega_n^2}$$

Não depende de ξ.

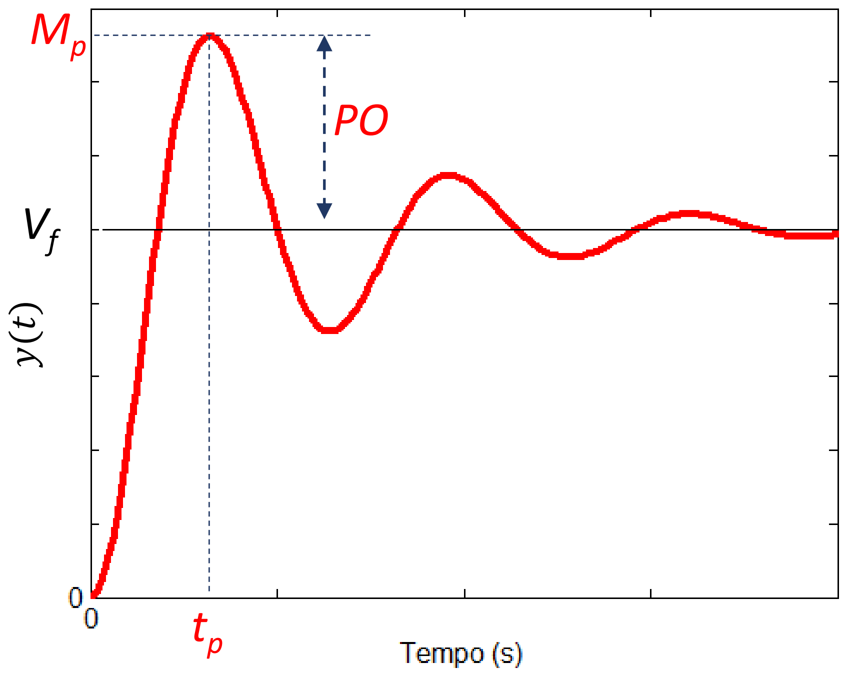


Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$

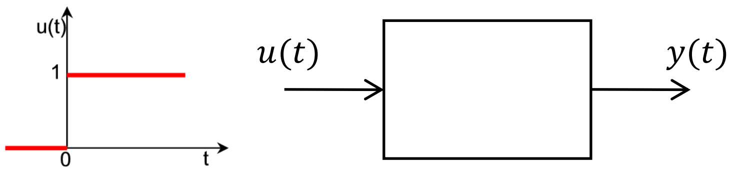
Características da Resposta:



Instante de Pico (t_p), Valor de Pico (M_p), Sobrelevação (PO):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad M_p = V_f\left(1 + e^{-\left(\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}\right) \qquad PO = 100\ e^{-\left(\pi\ \xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

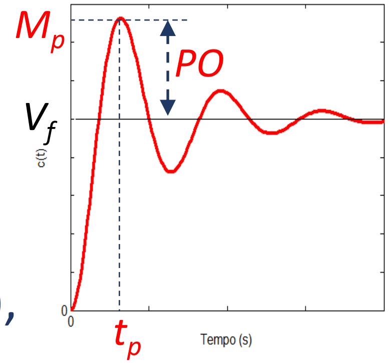


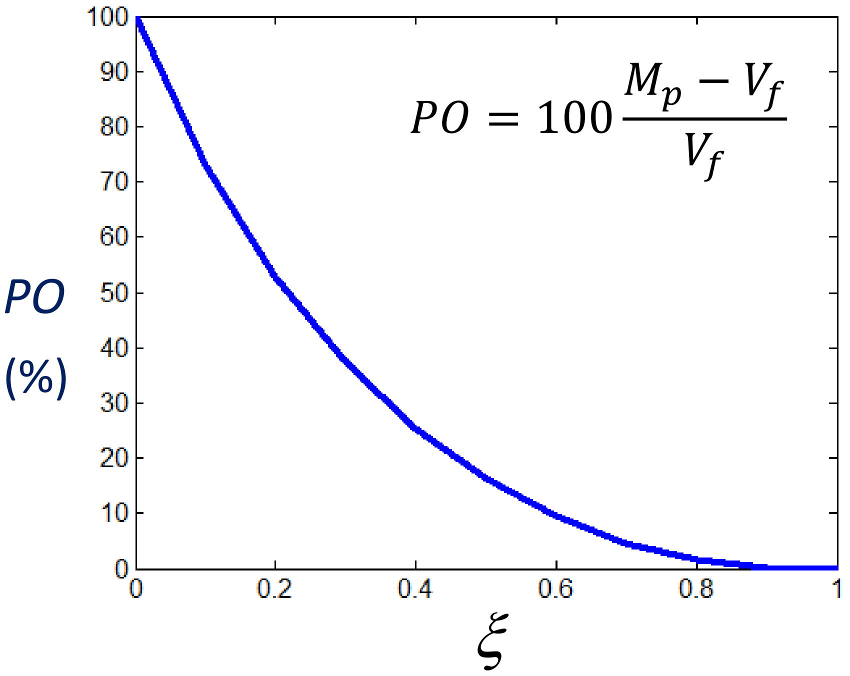
Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $$0 < \xi < 1$$

Características da Resposta:

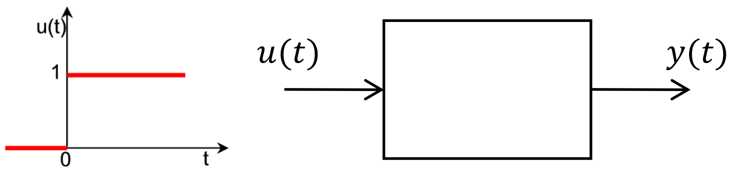




Instante de Pico (t_p), Valor de Pico (M_p), Sobrelevação (PO):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad M_p = V_f\left(1 + e^{-\left(\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}\right) \qquad PO = 100\ e^{-\left(\pi\ \xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

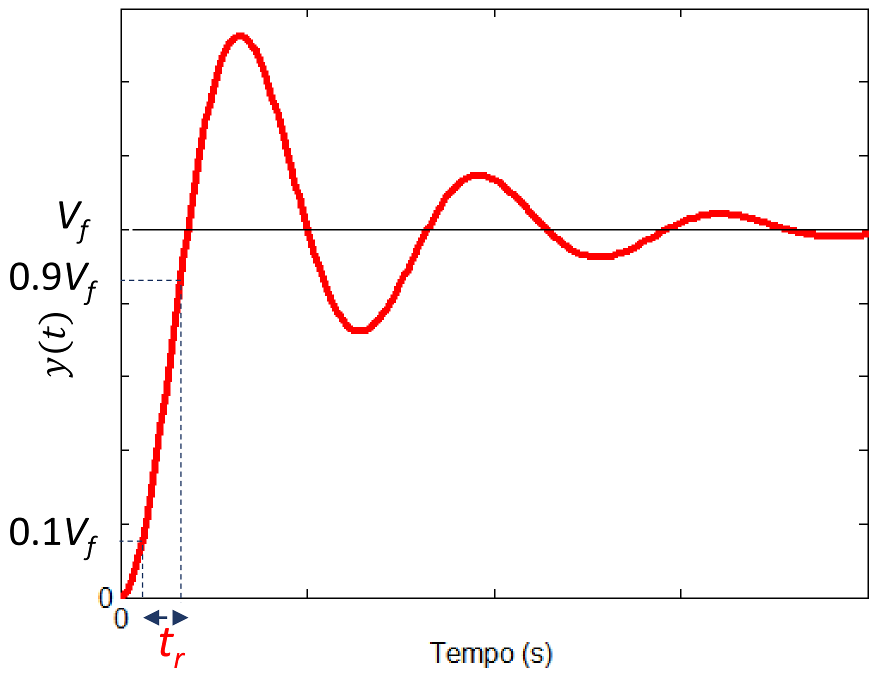


Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$

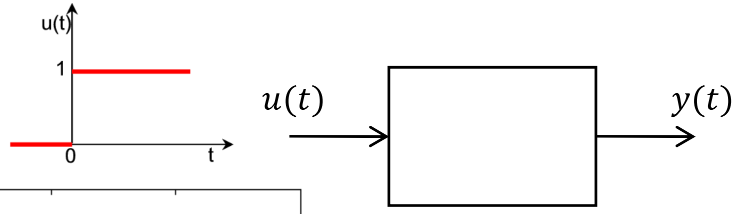
Características da Resposta:



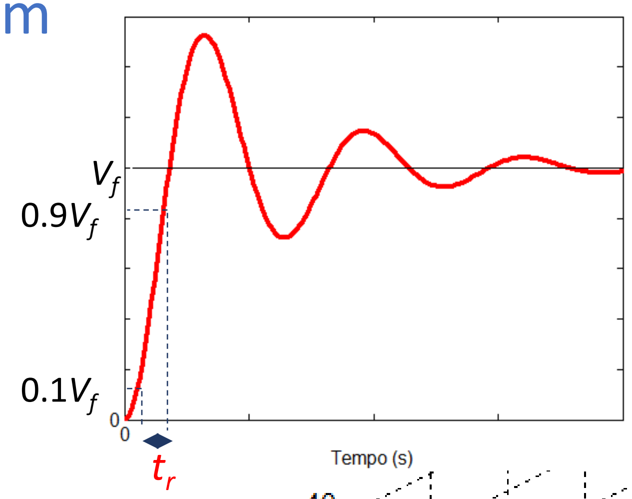
Tempo de Subida (“*rise time*”) (t_r):

$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n}$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



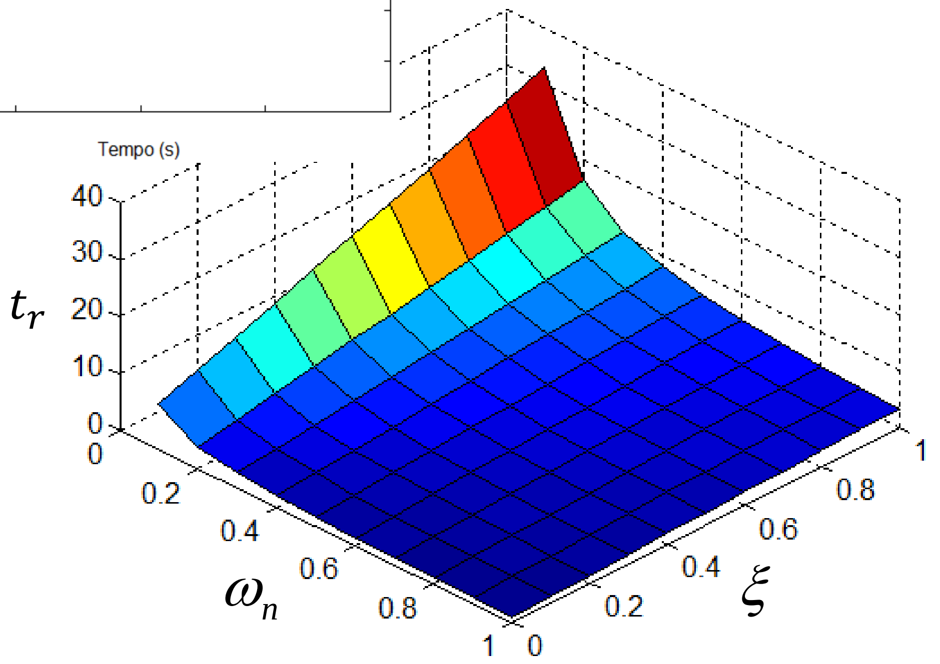
Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem



Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$

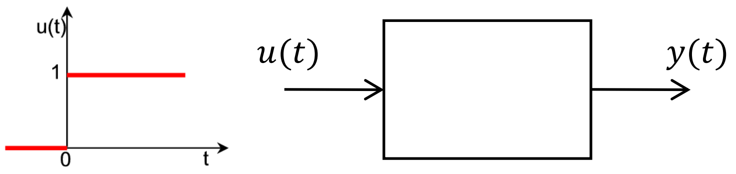
Características da Resposta:



Tempo de Subida ("*rise time*") (t_r):

$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n}$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

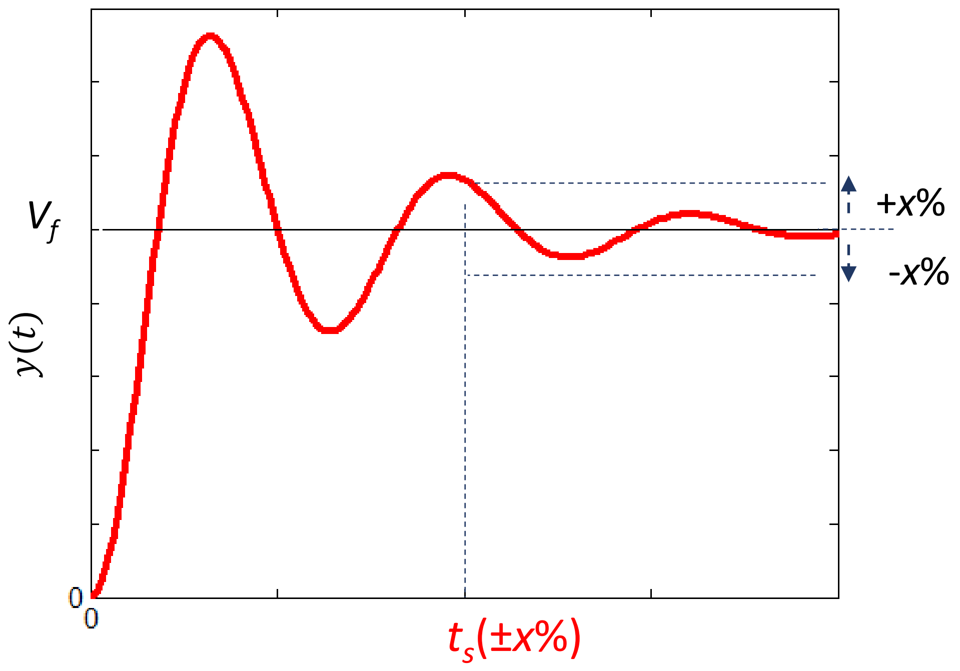


Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Sub-Amortecido: $0 < \xi < 1$

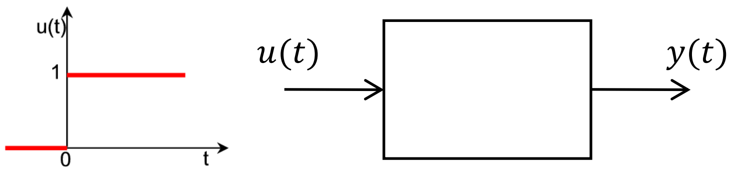
Características da Resposta:



Tempo de Estabelecimento ("*settling time*") (t_s):

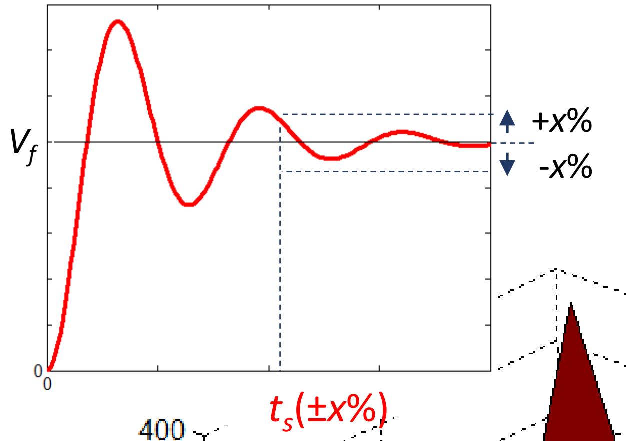
$$t_s(\pm 2\%) \cong \frac{4}{\xi\omega_n} = 4\tau \quad se\ \xi < 0.7 \qquad t_s(\pm 5\%) \cong \frac{3}{\xi\omega_n} = 3\tau$$

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



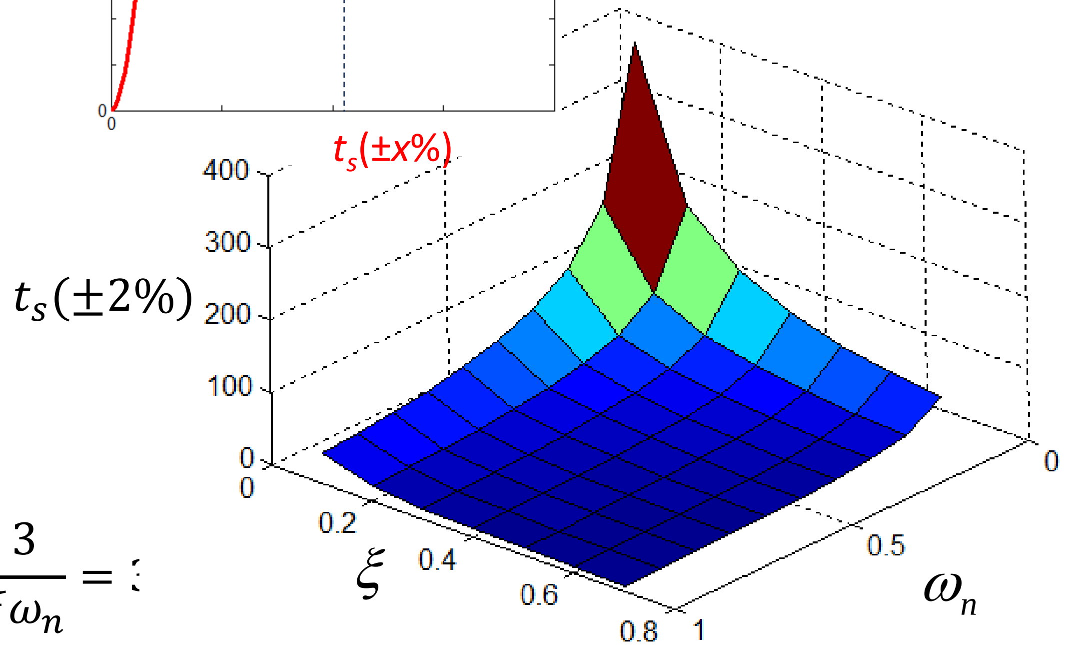
Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário



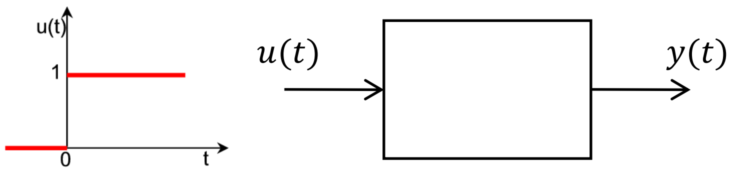
Regime Sub-Amortecido: $$0 < \xi < 1$$

Características da Resposta:



Tempo de Estabelecimento ("*settling time*") (t_s):

$$t_s(\pm 2\%) \cong \frac{4}{\xi \omega_n} = 4\tau \quad se\ \xi < 0.7 \qquad t_s(\pm 5\%) \cong \frac{3}{\xi \omega_n} = 3$$



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário

Regime Não Amortecido: $\xi = 0$

- Polos complexos conjugados no eixo imaginário.

$$Y(s) = \frac{b_0}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{b_0}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + j\omega_n} + \frac{A_1^*}{s - j\omega_n}$$

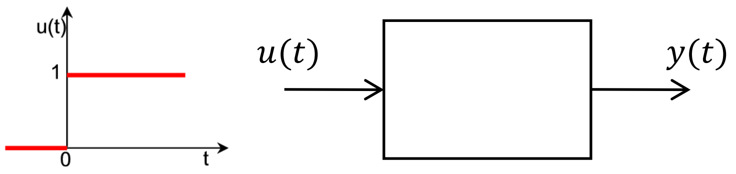
- Logo, a resposta no domínio do tempo é:

$$y(t) = A_0 + A_1 e^{+j\omega_n\, t} + A_1^* e^{-j\omega_n\, t}$$

- Pela fórmula de Euler: $e^{j\theta} = \cos\ \theta + j \sin\theta$

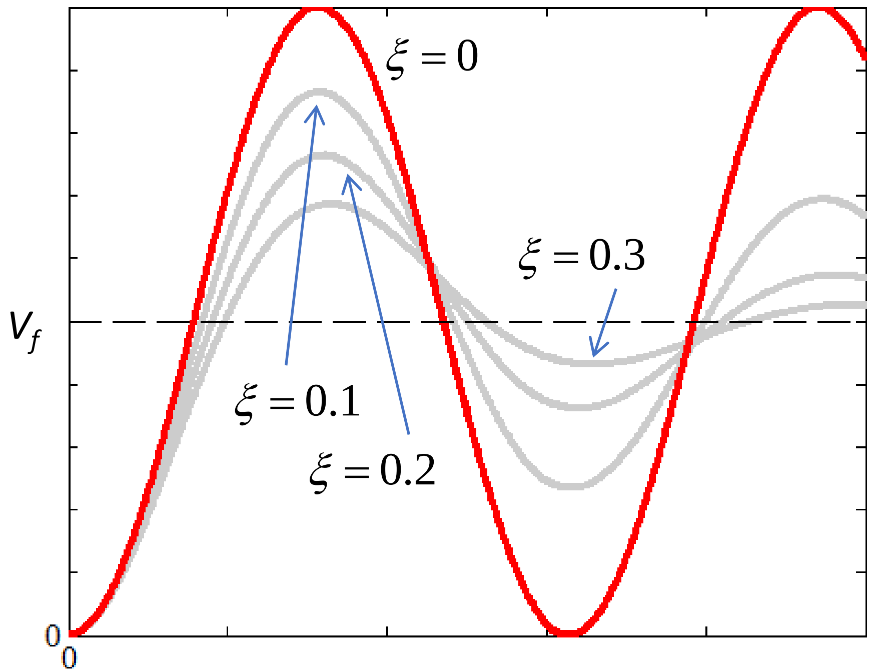
$$y(t) = \frac{b_0}{\omega_n^2} - \frac{b_0}{\omega_n^2}\cos(\omega_n t) = \frac{b_0}{\omega_n^2}[1 - \cos(\omega_n t)]$$

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem



Resposta ao Degrau Unitário

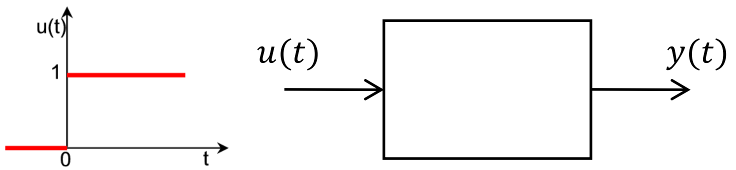
Regime Não Amortecido: $\xi = 0$



O sistema mantêm-se a oscilar indefinidamente em torno da componente permanente.

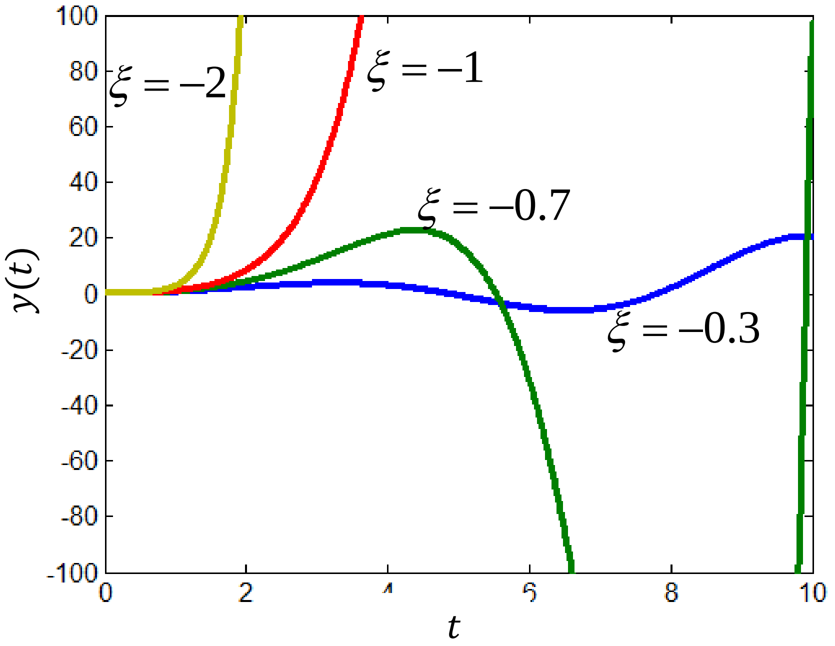
A componente transitória não se amortece para zero.

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema



Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta ao Degrau Unitário



Regime Instável: $\xi < 0$

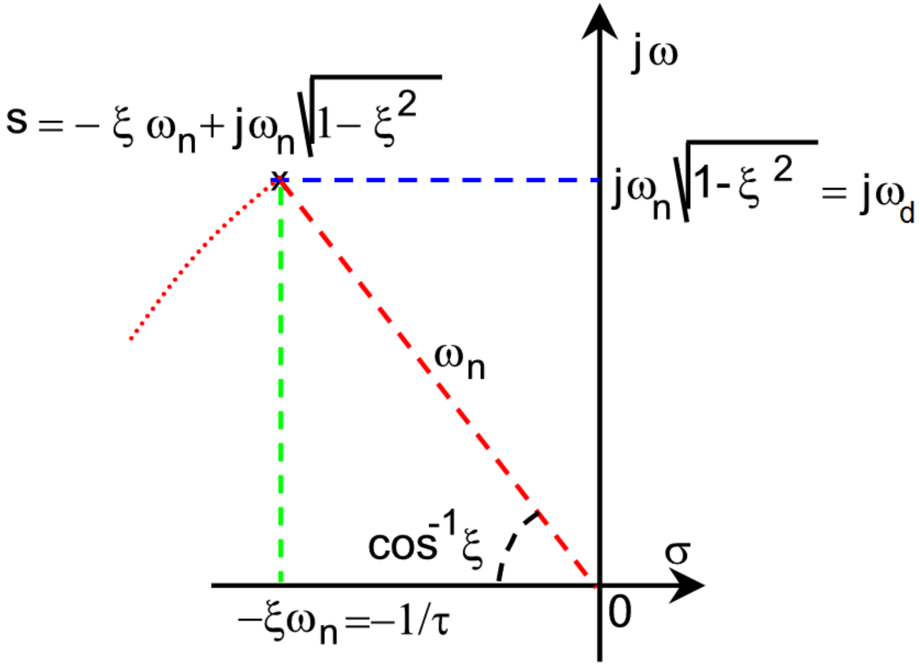
- Polos no semi-plano direito.
- Logo, a resposta no tempo tenderá para infinito!
- Essa tendência será exponencial, com (caso -1<ξ<0) ou sem (caso ξ≤-1) oscilação.

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Parâmetros do Sistema vs. Localização dos Polos no Plano

Através da localização dos polos no plano complexo pode-se obter diretamente os parâmetros:
Isto é importante pois indica como o comportamento do sistema varia se a posição dos polos for alterada (controlo).



Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta à rampa unitária

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + p_1} + \frac{A_3}{s + p_2}$$

$$y(t) = \underbrace{A_0 t + A_1}_{} + \underbrace{A_2 e^{-p_1 t} + A_3 e^{-p_2 t}}_{}$$

Componente estacionária
(rampa “deslocada”)

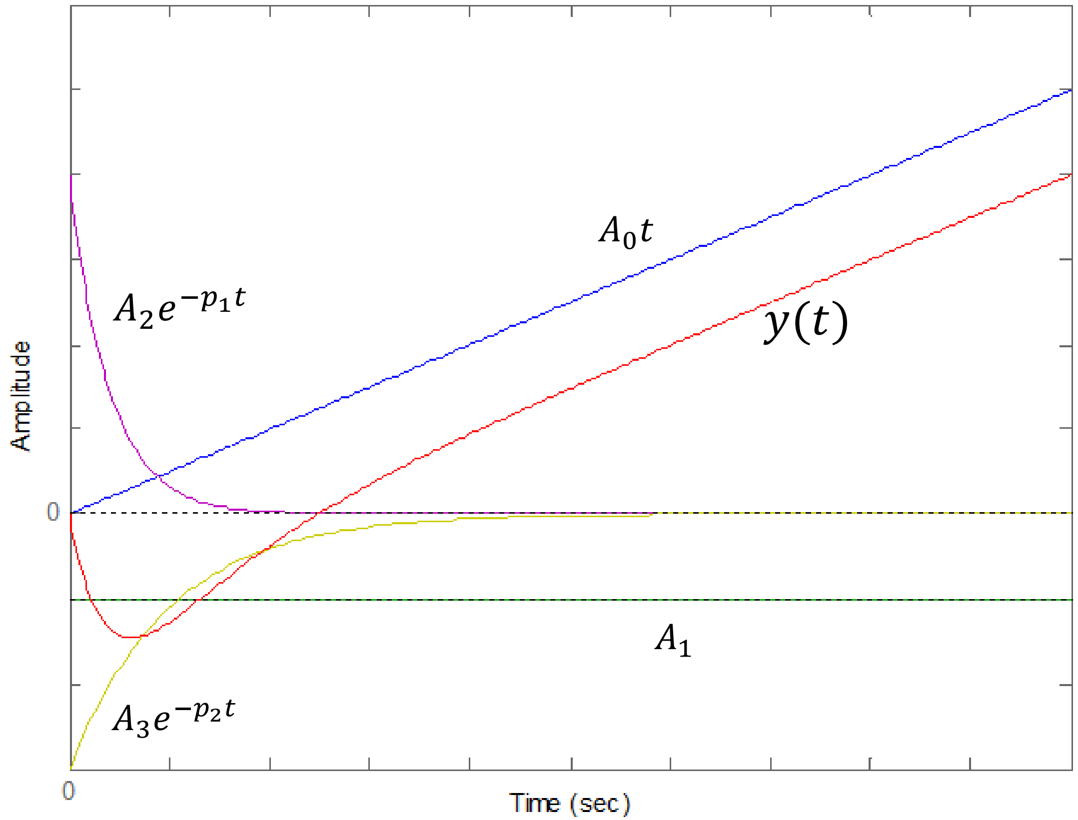
Componente transitória
(tende para zero se $\xi > 0$)

Relação entre Parâmetros do Modelo e Resposta do Sistema

Resposta no Tempo de Sistema de 2ª Ordem

Resposta à rampa unitária

$$y(t) = A_0 t + A_1 + A_2 e^{-p_1 t} + A_3 e^{-p_2 t}$$



Índice

- Introdução
- Relação entre parâmetros do modelo e resposta do sistema
- Regimes transitório e estacionário da resposta de sistemas
- Conceito de estabilidade

Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Transitória

- A componente transitória é, essencialmente, dependente da posição no plano ‘s’ dos polos da função de transferência;
- O simétrico da parte real dos polos representava o inverso da constante de tempo associada ao polo;
- A constante de tempo será tanto mais longa quanto mais perto do eixo imaginário estiver o polo (**polos dominantes**);
- Polos no semiplano direito correspondem a constantes de tempo negativas e componentes transitórias e/ou livres das respostas possuindo exponenciais com expoente positivo, logo “explosivas” com o tempo;

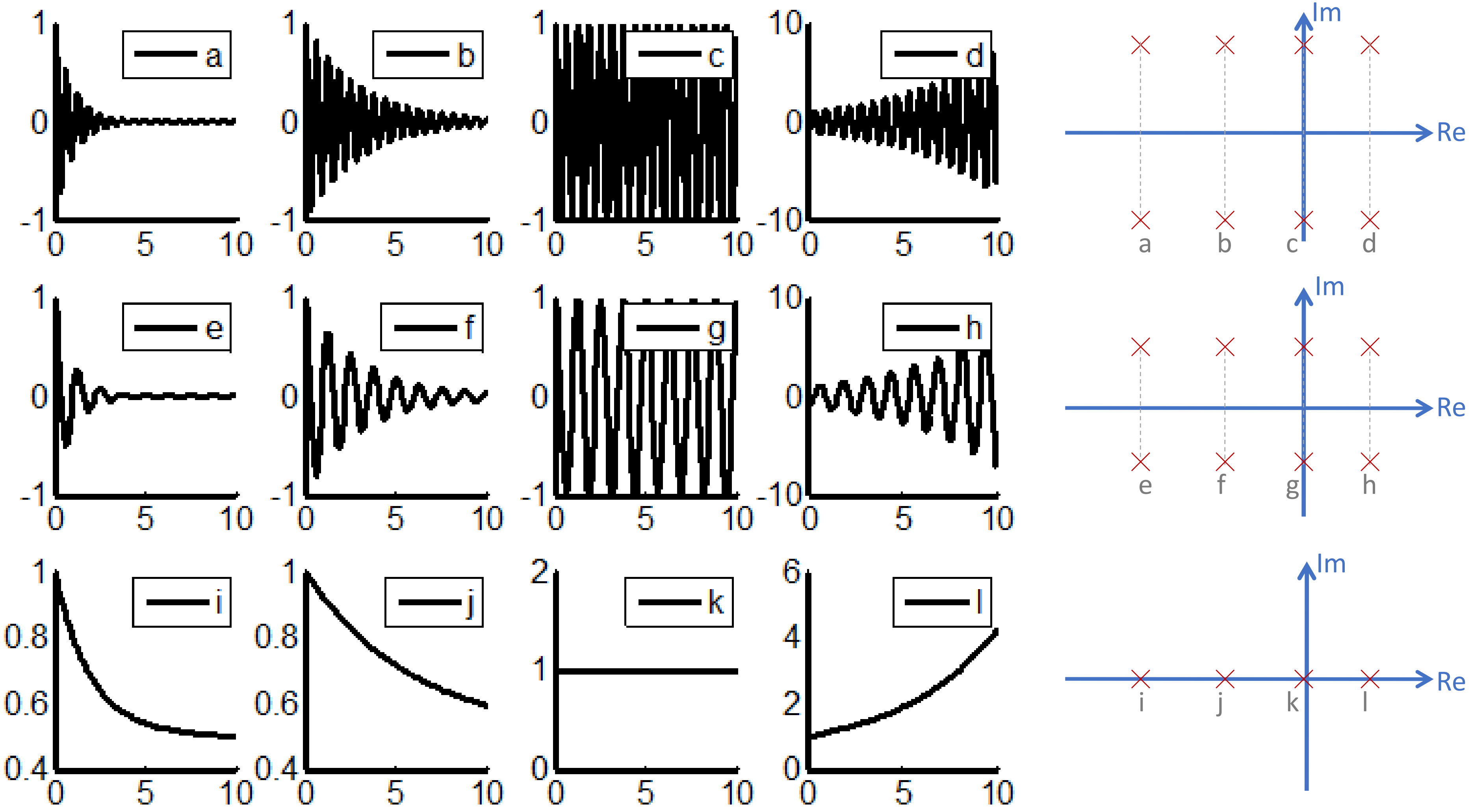
Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Transitória

- Polos complexos (forçosamente conjugados) conduzem a oscilações na resposta de frequência tanto mais elevada quanto mais afastado do eixo real estiverem;
- A evolução da amplitude das oscilações possui como envolvente uma exponencial decrescente (polos no semiplano esquerdo) ou crescente (polos no semiplano direito);
- Sistemas estáveis exigem que os polos da função de transferência se situem do lado esquerdo do plano ‘s’.

Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Transitória (exemplos)



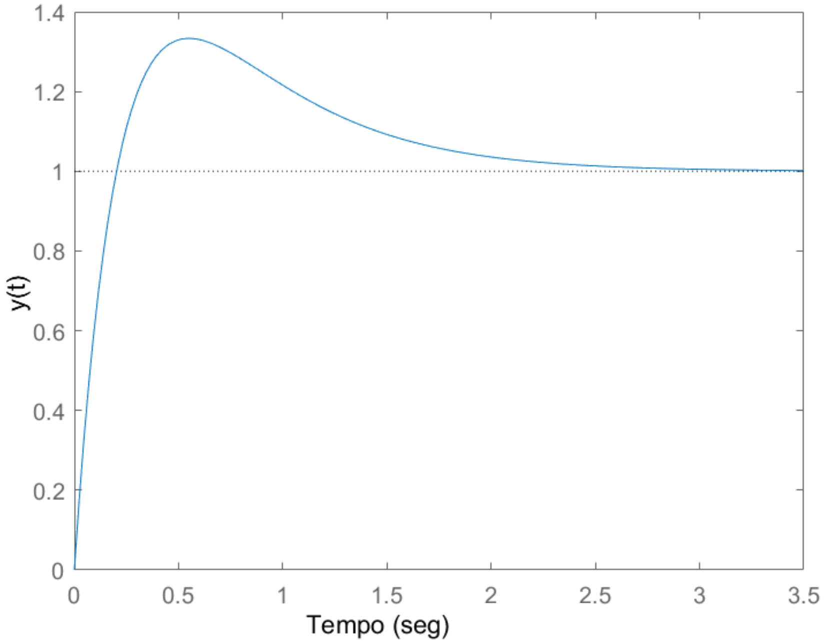
Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Transitória

Os zeros da função de transferência também têm impacto sobre a componente transitória da resposta, podendo inclusivamente conduzir ao aparecimento de sobrelevação mesmo quando os polos são todos reais.

Exemplo:

$$U(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{8(s+1)}{(s+2)(s+4)}} \longrightarrow Y(s)$$



Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Estacionária – Domínio de Tempo Contínuo

A componente estacionária é analisada pelo Teorema do Valor Final, quando se está a operar no domínio de Laplace.

Também pode ser calculada diretamente no domínio do tempo, se se souber, à partida, o estado das variáveis quando em regime estacionário (por exemplo, se o sinal de saída tende para um valor constante, as suas sucessivas derivadas tenderão para zero).

O mesmo raciocínio pode ser, naturalmente, usado no modelo de espaço de estados (que é uma forma alternativa de se representar as equações da dinâmica).

Exercício:

Sabe-se que, na resposta ao degrau unitário, a saída de um determinado sistema tende para um valor constante. Determine esse valor se o modelo do sistema for:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + [0] u(t) \end{cases}$$

Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Estacionária – Domínio de Tempo Discreto

O Teorema do Valor Final no domínio da transformada Z é:

$$y_{ss} = \lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) Y(z)$$

onde $Y(z)$ é a transformada Z da sequência de amostras $y(k)$.

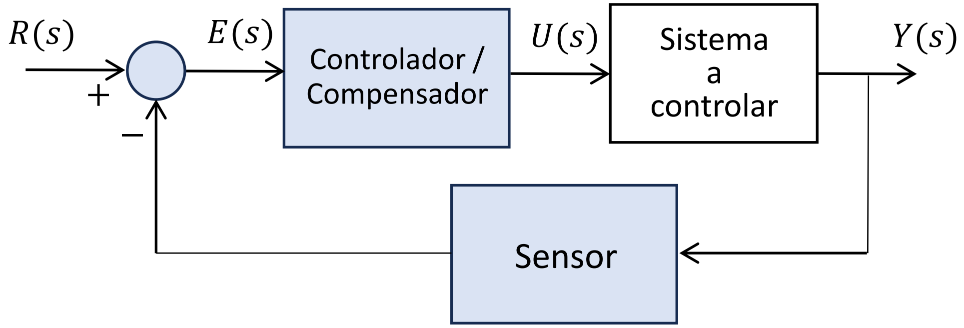
Exercício: Deduzir esta expressão do Teorema do Valor Final.

Também pode ser calculada diretamente através das equações de diferença, se se souber, à partida, o estado das variáveis quando em regime estacionário (por exemplo, se o sinal de saída tende para um valor constante, as suas sucessivas amostras serão todas iguais (sendo este o valor que se pretende calcular)).

O mesmo raciocínio pode ser, naturalmente, usado no modelo de espaço de.

Componente Estacionária – Sistemas em Realimentação Negativa

O esquema de controlo/compensação de sistemas mais usado na prática consiste na colocação do sistema que se pretende controlar/compensar numa malha de realimentação negativa com um elemento controlador/compensador.



$R(s)$ – Sinal de referência (sinal de entrada)

$E(s)$ – Sinal de erro

$U(s)$ – Sinal de controlo

$Y(s)$ – Sinal de saída

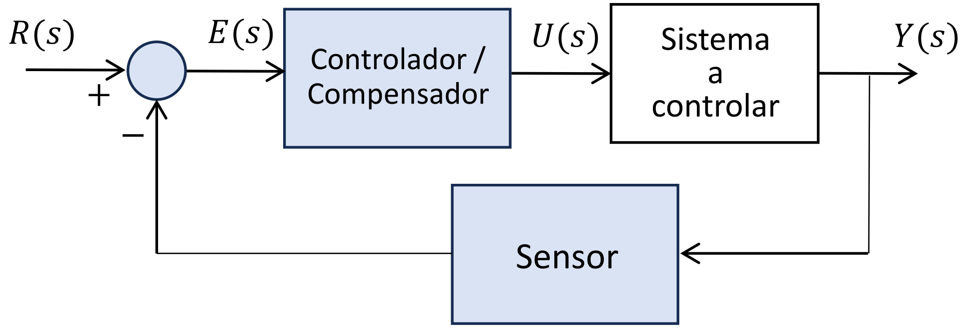
Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas

Componente Estacionária – Sistemas em Realimentação Negativa

A maioria das aplicações deste esquema de realimentação negativa visa conduzir o sinal de saída a apresentar, em regime estacionário, uma réplica do sinal de referência (sendo o controlador, e a realimentação negativa, responsáveis por encontrar autonomamente o sinal de controlo que conduz a essa solução – libertando o operador dessa tarefa, e tornando o comportamento do sistema imune a perturbações externas).

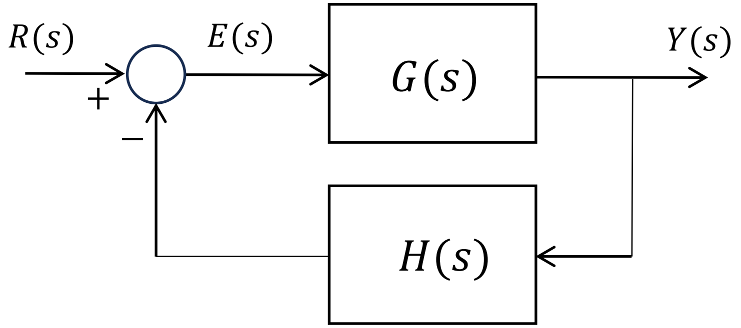
Pretende-se, assim, anular (ou tornar muito reduzido) o sinal de erro.

Convém analisar, então, qual o comportamento do sinal de erro em regime estacionário, para diferentes características do sistema e do sinal de entrada.



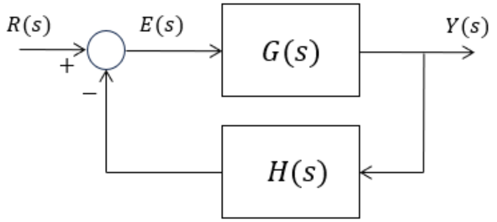
Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

Para tal, considere-se o seguinte sistema realimentado genérico:



Facilmente se verifica que a função de transferência desde o sinal de entrada até ao sinal de erro é:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$



Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

Dado que $G(s)$ e $H(s)$ surgem associados num único termo, considere-se para o seu produto a seguinte representação genérica:

$$G(s)H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{s^p \prod_{j=1}^{n-p}(s+p_j)}$$

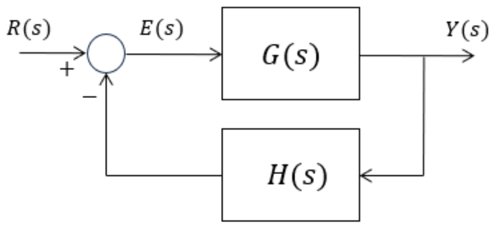
Note-se que se particularizam, nesta análise, os p polos na origem que a função de transferência da malha (i.e., $G(s)H(s)$) apresenta (onde $p \in \{0; 1; 2; \ldots\}$).

Como se irá verificar, os polos na origem da função de transferência da malha têm um papel importante na característica de regime estacionário do sinal de erro.

Aliás, até se define **Tipo** de um sistema realimentado por:

Um sistema realimentado diz-se do Tipo p se existirem p polos na origem ao longo da sua malha.

Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas



Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

Calcule-se, então, o erro em regime estacionário, e_{ss}, quando o sinal de entrada é um degrau de amplitude A:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{1+K\frac{\prod_i (s+z_i)}{s^p\prod_j (s+p_j)}}\frac{A}{\cancel{s}}$$

Sistema do Tipo 0

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K\frac{\prod_i z_i}{\prod_j p_j}}$$

Finito, não nulo.

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

Contante de erro de posição

Sistema do Tipo 1

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K\frac{\prod_i z_i}{0\prod_j p_j}} = 0$$

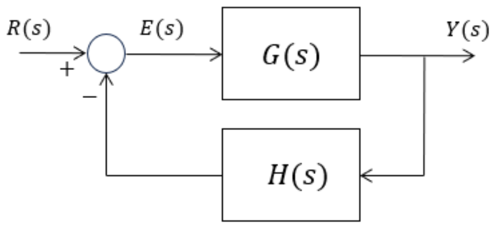
Garantidamente nulo.

Sistema do Tipo 2

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K\frac{\prod_i z_i}{0^2\prod_j p_j}} = 0$$

Garantidamente nulo.

Regimes Transitório e Estacionário da Resposta de Sistemas



Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

Se o sinal de entrada for uma rampa de declive A, a análise do e_{ss} seria:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{1+K\dfrac{\prod_i (s+z_i)}{s^p\prod_j (s+p_j)}}\frac{A}{s^{\cancel{2}}}$$

Sistema do Tipo 0

$$e_{ss} = \frac{A}{0+K\dfrac{\prod_i z_i}{\prod_j p_j}0} = \infty$$

Infinito.

Sistema do Tipo 1

$$e_{ss} = \frac{A}{0+K\dfrac{\prod_i z_i}{\prod_j p_j}}$$

Finito, não nulo.

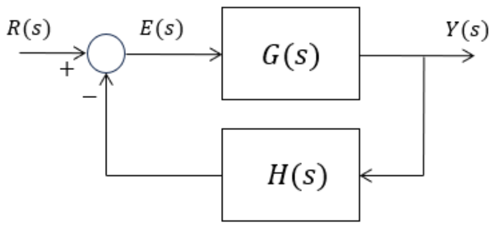
$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$$

Contante de erro de velocidade

Sistema do Tipo 2

$$e_{ss} = \frac{A}{0+K\dfrac{\prod_i z_i}{0\prod_j p_j}} = 0$$

Garantidamente nulo.



Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

E se o sinal de entrada for uma parábola A/s^3, a análise do e_{ss} seria:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{1+K\frac{\prod_i (s+z_i)}{s^p \prod_j (s+p_j)}}\frac{A}{s^{\cancel{3}}}\ 2$$

Sistema do Tipo 0

$$e_{ss} = \frac{A}{0^2 + K\frac{\prod_i z_i}{\prod_j p_j}0^2} = \infty$$

Infinito.

Sistema do Tipo 1

$$e_{ss} = \frac{A}{0^2 + K\frac{\prod_i z_i}{\prod_j p_j}0}$$

Infinito.

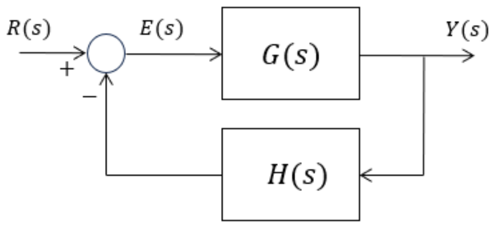
Sistema do Tipo 2

$$e_{ss} = \frac{A}{0^2 + K\frac{\prod_i z_i}{\prod_j p_j}} = 0$$

Finito, não nulo.

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$$

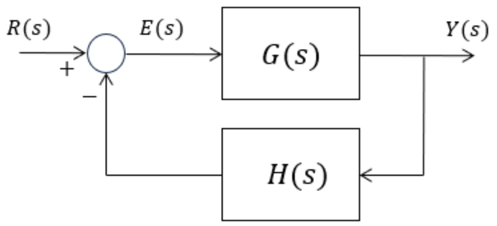
Contante de erro de aceleração



Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

Em resumo:

- O erro em regime estacionário é **nulo** quando o tipo do sistema é **igual ou superior** ao grau da transformada de Laplace do sinal de entrada.
- O erro é **finito** não nulo quando o tipo do sistema **igual ao grau menos um** da transformada de Laplace do sinal de entrada.
- Este erro será tanto menor quanto maior for a constante de erro (K_p, K_v, K_a, etc.) do sistema e é proporcional ao fator de amplitude do sinal de entrada.
- O erro é **infinito** quando o tipo do sistema é **inferior ao grau menos um** da transformada de Laplace do sinal de entrada.



Componente Estacionária – Análise do Erro em Regime Estacionário

Conclusões adicionais:

- Depreende-se, desta análise, que se um sistema realimentado necessitar de melhorar o seu comportamento em regime estacionário (devendo a saída aproximar-se do indicado pelo sinal de referência), então a inclusão de polos na origem na malha (tipicamente, no elemento controlador/compensador) vem definitivamente contribuir para esse objetivo.
- Contudo, como se irá verificar mais tarde, a inclusão de polos na origem na malha tem também por consequência a deterioração do regime transitório (o sistema fica mais lento, com componentes transitórias dos sinais a demorar mais tempo a desvanecer, assim como surge uma tendência para o aparecimento de sobrelevações elevadas).

Chama-se a atenção para que toda esta análise pressupõem que o sistema terá, efetivamente, um regime estacionário, assumindo-se à partida que se trata de um sistema estável.

Índice

Conceito de Estabilidade

Conceito BIBO (Bounded Input – Bounded Output)

Já foi referido anteriormente que o conceito de estabilidade mais usado na análise de sistemas lineares é o BIBO (existem outros conceitos e definições de estabilidade):

Um sistema é considerado estável se responder com um sinal limitado em amplitude quando se aplica na entrada um sinal limitado em amplitude.

Foi visto, também, que para um sistema ser estável, segundo o conceito BIBO, bastará que:

- (Tempo Contínuo – Transformada de Laplace): Todos os polos do modelo do sistema se situem no semiplano esquerdo do referencial complexo (todos os polos têm parte real negativa).
- (Tempo Discreto – Transformada Z): Todos os polos do modelo do sistema se situem dentro do círculo unitário do referencial complexo (todos os polos têm módulo inferior a 1).

Conceito de Estabilidade

Técnicas de Análise de Estabilidade

Em vários casos torna-se necessário efetuar a análise da estabilidade de sistemas em função de parâmetros ajustáveis que o sistema possua, por exemplo, para se saber à partida (sem experimentar) quais os valores desses parâmetros que garantem que o sistema é estável.

Para estes casos existem ferramentas que permitem fazer essa análise:

- (Tempo Contínuo – Transformada de Laplace): Critério de Routh-Hurwitz.
- (Tempo Discreto – Transformada Z): Teste de Estabilidade de Jury.

NOTA: No domínio do tempo discreto pode-se aplicar, também, o Critério de Routh-Hurwitz (que é menos complexo que o Teste de Jury), desde que se efetue previamente uma mudança de variável:

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

Conceito de Estabilidade

Critério de Routh-Hurwitz

Seja a equação característica de um sistema: $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

Contrói-se a Rede de Routh:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$	a_1
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$	a_0
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^1	g_1	g_2			
s^0	h_1				

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}; \quad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}; \quad b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}; \cdots$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}; \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}; \quad c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}; \cdots$$

Elemento Pivot

Conceito de Estabilidade

Critério de Routh-Hurwitz

Condição Necessária e Suficiente de Estabilidade:
Um sistema é estável (segundo o critério BIBO) se não existirem trocas de sinal ao longo da 1ª coluna da rede de Routh – Critério de Routh-Hurwitz.

Cada troca de sinal corresponde à existência de um polo no semiplano direito.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$	a_1
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$	a_0
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^1	g_1	g_2			
s^0	h_1				

Conceito de Estabilidade

Critério de Routh-Hurwitz

Exercícios:

Verifique se o seguinte sistema é estável:

$$F(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 3}$$

Determine os valores do parâmetro K que garantem que o seguinte sistema é estável: