# Modelação de Sistemas e Controlo Aeroespacial

2023/2024

Telmo Reis Cunha

## Caderno de Exercícios

### Exercícios Práticos sobre Composição de Sinais por Sinusoides:

**Exercício 01**

Determine a frequência, o período e o valor máximo (valor de pico) de cada um dos seguintes sinais periódicos. Verifique visualmente no MATLAB.

a) $x(t) = 2\sin(4\pi t)$
b) $y(t) = \sin(10\pi t + \pi/2)$
c) $z(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t)$
d) $w(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t + 0.5)$
e) $q(t) = \sin(4\pi t) + \sin(8\pi t) + \sin(14\pi t)$

**Exercício 02**

Com base no que verificou na alínea 1, obtenha a relação que determina o período de um sinal genérico descrito por:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n).$$

**Exercício 03**

Determine a potência associada a cada um dos sinais representados no exercício 01. Desenvolva uma função no MATLAB que determina a potência associada ao sinal periódico $x(t)$, de período $T$, quando este é representado pelo vetor $x$ contendo as amostras de um número inteiro de períodos de $x(t)$, obtidas com um período de amostragem constante igual a $h$.

**Exercício 04**

Considere um conjunto de sinais definidos pela expressão do exercício 02, onde $N = 3$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, e $f_1 = 1.1 f_2 = 1.2 f_3 = 3\ kHz$. Testando diferentes valores para $\phi_n,\ n = 1,2,3$, determinados aleatoriamente entre $]-\pi;\pi]$, mostre que as realizações obtidas para o sinal $x(t)$ são muito distintas entre si (e que o valor de pico varia notoriamente), mas que todas mantêm a mesma potência.

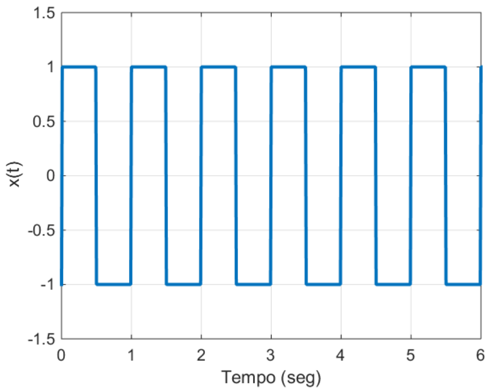
**Exercício 05**

Mostre que as seguintes decomposições de um sinal periódico (de frequência $\omega_0$) em Série de Fourier são equivalentes:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

**Exercício 06**

Determine as expressões de $a_k$ e $b_k$ correspondentes à representação do seguinte sinal em Série de Fourier:




Relembra-se que, para $k > 0$:

$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$ e $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt,$ com $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

**Exercício 07**

Desenvolva uma função em MATLAB que produza o sinal resultante da série de Fourier que é gerada a partir da seguinte informação:

- $h$: Período de amostragem, em segundos;
- $f_0$: Frequência do sinal composto, em Hz;
- $N_p$: Número de períodos a considerar para o sinal resultante;
- $a_k$: Vetor ($K$x1) com os valores de $a_k$ da série;
- $b_k$: Vetor ($K$x1) com os valores de $b_k$ da série.

Experimente esta função para os valores dos coeficientes do exercício 06, e veja como progressivamente o resultado se vai aproximando do sinal representado nesse exercício.

**Exercício 08**

Use a função desenvolvida no exercício 07 para verificar que um sinal periódico par (i.e., com simetria relativamente ao eixo das ordenadas) tem todos os coeficientes $b_k$ nulos, e que um sinal periódico ímpar (i.e., simétrico relativamente à origem do referencial) tem todos os coeficientes $a_k$ nulos.

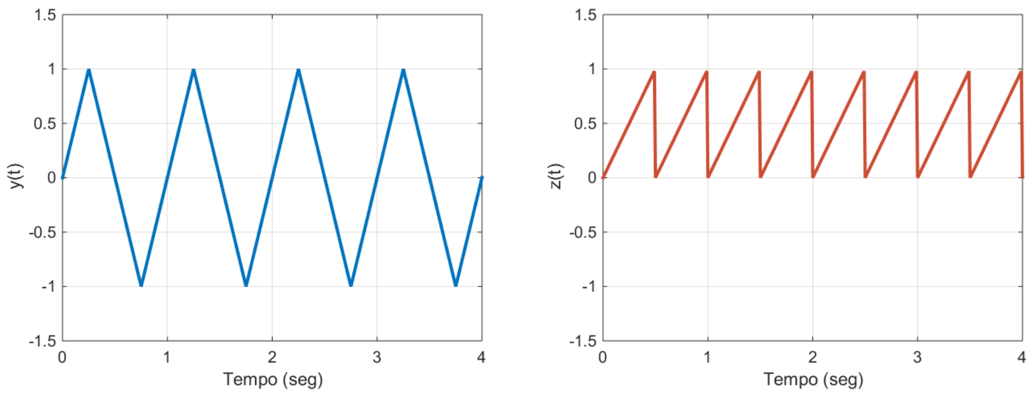
**Exercício 09**

Desenvolva uma função em MATLAB que calcule os coeficientes $a_k$ e $b_k$ de um sinal periódico $x(n)$. Essa função deverá receber como argumentos de entrada:

- $h$: Período de amostragem, em segundos;
- $T$: Período do sinal, em segundos;
- $x$: Vetor ($N$x1) com as amostras sucessivas do sinal a decompor (deverá ser passado um número inteiro de períodos deste sinal, não devendo o último período ficar truncado);
- $K$: Número de harmónicas a considerar na decomposição.

**Exercício 10**

Teste a função desenvolvida no exercício 09 para decompor os seguintes sinais (e, depois, reconstrua estes sinais usando a função desenvolvida no exercício 07):




## Exercícios Práticos sobre Amostragem e Transformada Discreta de Fourier (DFT):

**Exercício 11**

Desenvolva a função ***ReconstroiSinal*** que, recebendo o vetor de amostras de um sinal, $\mathbf{x}$, e o período de amostragem, $h$, considerado nesse processo de amostragem, produz o gráfico do sinal temporal que dera origem às amostras.

$$\boldsymbol{ReconstroiSinal}(\mathbf{x}, h)$$

A reconstrução deverá ser efetuada com base no seno cardinal:

$$sinc(f_s t) = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t}, \qquad f_s = \frac{1}{h}$$

e o sinal reconstruído (que terá que ser, ele também, amostrado) deverá considerar uma frequência de amostragem igual a $100 f_s$.

**Exercício 12**

Teste a função desenvolvida no ponto anterior com as seguintes sequências de amostras, e explique o resultado observado.

a) $x(t) = \sin(2\pi t)$, amostrado com $h = 0.2$ seg., observado durante 5 seg.
b) $y(t) = \sin(10\pi t) + \cos(12\pi t) + \cos(14\pi t - \pi/4)$, registado durante 5 seg, com $h = 0.04$ seg.
c) $z(t) = sinc(5t)$, registado no intervalo $[-5;\ +5[$ seg. com $h = 0.1$ seg.

**Exercício 13**

Com base na função ***fft*(.)**, desenvolva uma função no MATLAB, denominada ***DFT***, que retorna e apresenta o espetro de um sinal (sendo este sinal especificado através do seu vetor de amostras, $\mathbf{x}$) amostrado com período de amostragem $h$. O gráfico do espetro (que apresenta apenas a amplitude do espetro) deve apresentar no eixo das abcissas a frequência em Hz, desde $-f_s/2$ a $+f_s/2$, onde $f_s = 1/h$.

$$\text{function } [\mathbf{X}, \mathrm{f}] = DFT\ (\mathbf{x}, h)$$

$\mathbf{X}$ – vetor da mesma dimensão de $\mathbf{x}$, com os coeficientes complexos da DFT de $x(t)$.

$f$ – vetor da mesma dimensão de $\mathbf{x}$, com as frequências (em Hz) de cada componente de $\mathbf{X}$.

**Exercício 14**

Teste a função desenvolvida no exercício anterior, representando o espectro dos seguintes sinais:

a) $x(t) = \sin(2\pi t)$, registado durante 10 períodos.
b) $y(t) = \sin(10\pi t) + \cos(12\pi t) + \cos(14\pi t - \pi/4)$, registado durante 5 seg.
c) $z(t)$ – onda quadrada entre 0 e 1, de frequência 1 Hz, registada durante 5 seg.
d) $q(t)$ – onda triangular entre -1 e 1, de frequência 1 Hz, registada durante 5 seg.

**Exercício 15**

Acrescente a possibilidade de a função ***DFT***, desenvolvida no exercício 13, poder implementar ***windowing***, para analisar o conteúdo espetral de sequências de amostras não periódicas. Para tal, adicione um terceiro parâmetro de entrada, *w*, que, se for diferente de zero, aplica uma janela de Blackman à sequência de amostras antes de operar a ***fft***.

**Exercício 16**

Teste a função do exercício anterior para criar o espetro de um sinal composto por:

- 500 amostras;
- período de amostragem igual a 1 ms;
- o somatório de 20 sinais sinusoidais, cada um de amplitude unitária, cujas frequências são determinadas aleatoriamente entre 1 e 20 Hz (com distribuição de probabilidade uniforme);

- a fase de cada sinusoide é também determinada aleatoriamente.

Compare os espetros obtidos com e sem ***windowing***.

**Exercício 17**

Desenvolva, agora, a função ***IDFT*** que efetua a operação inversa da função desenvolvida no exercício 13 (i.e., recebendo o vetor $\mathbf{X}$ da representação em Fourier, determina a sequência de amostras do sinal no domínio do tempo, $\mathbf{x}$, visualizando, depois, o sinal neste domínio). Teste a função com os dados obtidos nos exercícios anteriores.

**Exercício 18**

Usando uma frequência de amostragem de $f_s = 10\ Hz$, crie o sinal seguinte no MATLAB e obtenha o seu espetro. Comente e explique o resultado obtido.

Sinal:

$$x(t) = \sin(4\pi t) + \cos(12\pi t)$$

Repita o procedimento usando, agora, uma frequência de amostragem de $f_s = 14\ Hz$.

**Exercício 19**

Considere o seguinte sinal, composto por uma componente determinística (sinusoide de 1 Hz) e uma outra estocástica ($r(t)$) que representa ruído que foi adicionado ao sinal determinístico (por algum processo inerente ao sistema):

$$x(t) = \sin(2\pi t) + r(t)$$

O sinal de ruído $r(t)$ é simulado pela seguinte expressão:

$$r(t) = 0.5\sin\big(20\pi t + 10\phi_1(t)\big) + 0.5\sin\big(24\pi t + 10\phi_2(t)\big)$$

onde $\phi_k(t), k = 1{,}2$, é o resultado da integração (ao longo do tempo) de uma variável aleatória de distribuição normal, de média nula e desvio padrão igual a $\pi$.
Crie a função $[\mathbf{x},\mathbf{t}] = \boldsymbol{GeraSinal}(N,h)$ que gera a sequência de $N$ amostras do sinal definido anteriormente, considerando o período de amostragem $h$ (devolvendo no vetor $\mathbf{x}$ os valores das amostras, e no vetor $\mathbf{t}$ os respetivos instantes de tempo). Essa função deverá, também, representar num gráfico o sinal criado. Observe como varia o espetro do sinal gerado à medida que são obtidas diferentes realizações do mesmo, e conclua sobre a localização na frequência das componentes (determinística e ruído) desse sinal.

**Exercício 20**

Com base no que observou no exercício anterior, desenvolva um filtro a ser aplicado sobre o espetro (i.e., um filtro que opera no domínio da frequência) que permita filtrar (i.e., reduzir ou eliminar) a componente de ruído associada ao sinal gerado. Aplique esse filtro e, usando a função ***IDFT*** (desenvolvida no exercício 17), obtenha o sinal filtrado no domínio do tempo e visualize-o (sobrepondo-o ao sinal original). Repita o processo, criando agora um filtro que permita obter apenas a componente de ruído do sinal gerado; aplique esse filtro e observe, no domínio do tempo, o sinal de ruído resultante deste processo de filtragem.

Fazendo uso da informação gerada neste exercício, e também da função ***Potencia*** desenvolvida no exercício 03, determine a relação sinal-ruído (SNR) do sinal gerado no exercício anterior (expressando-a na escala natural e, também, em decibéis, dB). Verifique o resultado para diferentes realizações do sinal.

## Exercícios Práticos sobre Modelos no Domínio de Tempo Contínuo e sua Simulação:

### Exercício 21

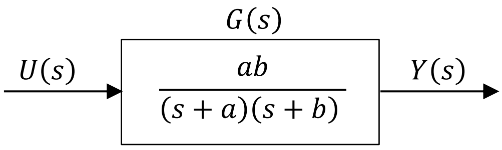
Sabe-se que um determinado filtro passa-baixo pode ser modelado pela seguinte equação diferencial, onde $u(t)$ é o sinal de entrada e $y(t)$ o sinal de saída:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = au(t), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

a) Determine a expressão do sinal de saída (resposta do sistema) quando a entrada comuta repentinamente de 0 para 1, permanecendo depois neste valor (i.e., a entrada é um degrau unitário). Assuma que, no instante da transição, o filtro não tinha energia interna acumulada (i.e., condições iniciais nulas).
b) No teste anterior, para que valor tende o sinal de saída?
c) Considerando alguns valores para o parâmetro $a$ (por exemplo, {0.1; 1; 10}), visualize a evolução deste sinal no MATLAB, constatando que se trata de um filtro passa-baixo. Qual é o papel do parâmetro $a$ no comportamento do filtro?

### Exercício 22

Considere um sistema que é modelado pela seguinte função de transferência $G(s)$:

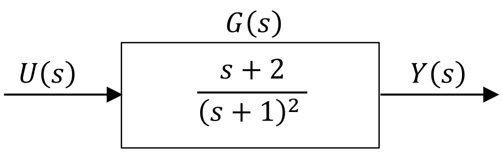



$a, b \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq b$

a) Determine a expressão da resposta do sistema a um degrau unitário. Assuma condições iniciais nulas.
b) No teste anterior, para que valor tende o sinal de saída?
c) Simule o sistema para $\{a, b\} = \{0.1; 0.2\}, \{1; 2\}, \{10; 12\}$ e identifique semelhanças e diferenças na forma das respostas observadas no exercício 21.
d) Porque é que a abordagem seguida nas alíneas anteriores não pode considerar o caso em que $a = b$? O que teria que ser feito neste caso?

### Exercício 23

Considere um sistema que é modelado pela seguinte função de transferência $G(s)$:



a) Determine a expressão da resposta do sistema a um degrau unitário. Assuma condições iniciais nulas.
b) No teste anterior, para que valor tende o sinal de saída?
c) Visualize, no MATLAB, o sinal de saída obtido no referido teste e identifique semelhanças e diferenças na forma das respostas observadas nos exercícios 21 e 22.

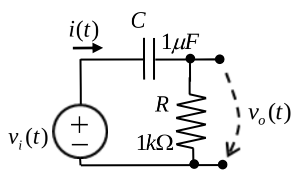
**Exercício 24**

Determine a solução da seguinte equação diferencial que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 3$ e $\dot{y}(0) = 2$:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$$

**Exercício 25**

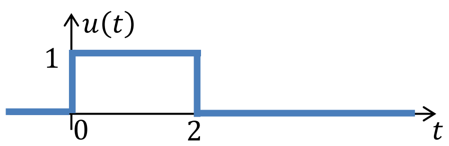
Considere o seguinte filtro RC passa-alto:

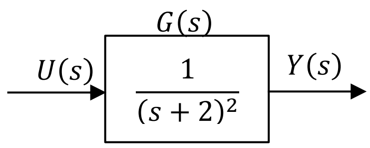



a) Determine a equação diferencial da dinâmica deste sistema, onde apenas $v_o(t)$ figura como variável dependente.
b) Assumindo que, antes do instante $t = 0$ segundos, o sinal de entrada $v_i(t)$ é 0 V e o condensador não tem carga armazenada, determine a expressão da evolução de $v_o(t)$ a partir de $t = 0$, instante em que se aplica em $v_i$ uma tensão constante de 5 V.
c) No teste anterior, para que valor tende $v_o(t)$?
d) Visualize o sinal $v_o(t)$ no MATLAB.
e) Considere, agora, o mesmo teste mas assumindo que o condensador apresenta aos seus terminais, em $t = 0$, uma tensão de $1\ V$ (do terminal esquerdo para o direito) devido à carga que tem acumulada nesse instante. Repita as alíneas anteriores.

**Exercício 26**

Aplicou-se o sinal $u(t)$ da figura da esquerda a um sistema modelado pela função de transferência à direita (sistema esse que não tinha, inicialmente, energia acumulada).



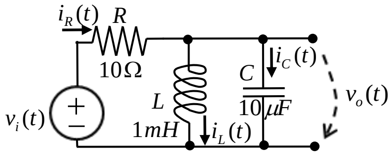

a) Determine a expressão do sinal $y(t)$.
b) Visualize $u(t)$ e $y(t)$ no MATLAB, sobrepostos.

**Exercício 27**

Verifique as respostas obtidas nos exercícios 25 e 26 através do uso das funções *step* e *lsim*.

**Exercício 28**

Considere o seguinte filtro RLC:

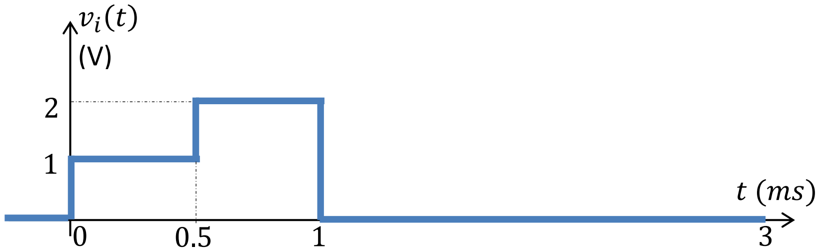



a) Determine a equação diferencial da dinâmica deste sistema, onde apenas $v_o(t)$ figura como variável dependente.

b) Determine a função de transferência $G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

c) Assumindo condições iniciais nulas, represente a resposta do circuito quando, no instante $t = 0$ segundos, se aplica na entrada uma tensão constante de 2 V.

d) Repita a alínea anterior para o caso em que se aplica o seguinte sinal:

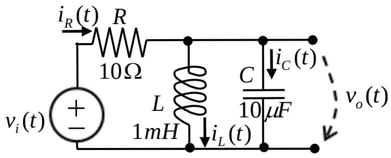



e) Repita, ainda, para o caso em que o sinal de entrada é uma sinusoide de amplitude unitária, e cuja frequência adquire os seguintes valores: 100 Hz, 1 kHz, 1.6 kHz, 3 kHz e 16 kHz.

f) Represente o Traçado de Bode (apenas em amplitude) deste circuito.

**Exercício 29**

Considere o filtro RLC do exercício 28 da aula anterior:

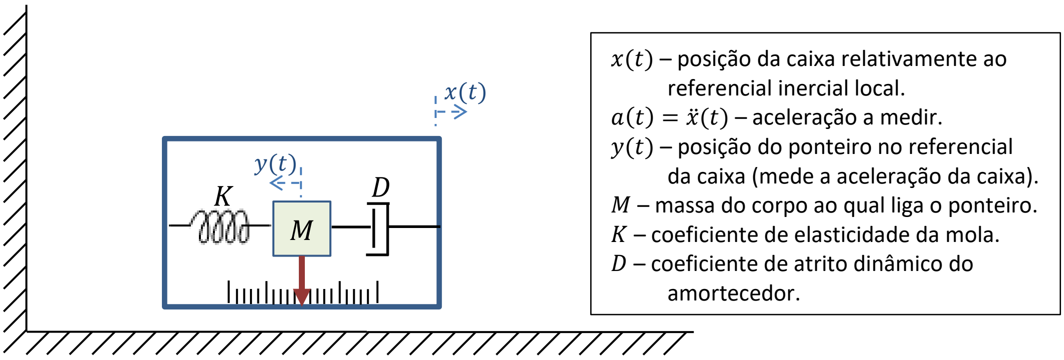



a) Implemente um modelo deste circuito, no SIMULINK, usando apenas blocos de ganho, somadores e integradores. Simule a sua resposta ao degrau de 2 V de amplitude, verificando que este modelo produz o mesmo resultado que a simulação da aula anterior.

b) Prepare um modelo de SIMULINK para obter a resposta deste filtro a uma onda sinusoidal de amplitude unitária (e de frequência configurável). Desenvolva um script no MATLAB que permita obter a resposta em frequência (traçado de Bode, apenas ganho) deste filtro através da simulação do modelo do SIMULINK na resposta a várias sinusoides, de diferentes frequências. Compare com o resultado obtido na última aula.

**Exercício 30**

Considere o seguinte acelerómetro mecânico, cuja equação da dinâmica é: $\ddot{y} + \frac{D}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = a$.

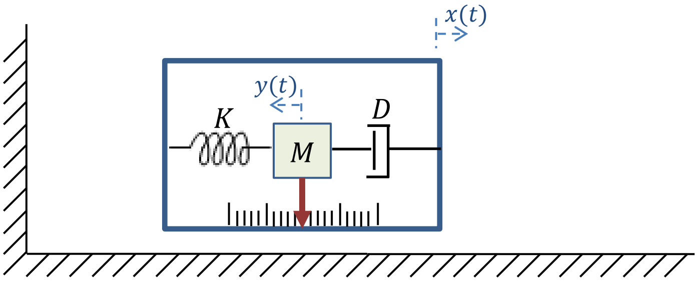



a) Represente-o por um diagrama de blocos que use apenas blocos de ganho, somadores e integradores.
b) Simule o seu comportamento no SIMULINK quando submetido a uma aceleração constante de $1\,m/s^2$, considerando: $K = 1$; $M = 1$; $D = \{1; 2; 4\}$. Interprete os distintos comportamentos do ponteiro para os três coeficientes de atrito considerados.
c) Simule, agora, a função de transferência do acelerómetro, confirmando os resultados da alínea anterior.
d) Demonstre que, nos testes anteriores, a posição final do ponteiro não depende do coeficiente de atrito dinâmico, $D$.

### Exercícios sobre Representação em Espaço de Estados e sua Simulação:

**Exercício 31**

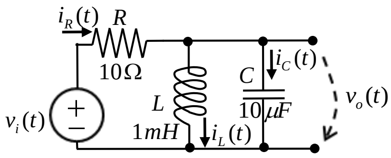
Considere, novamente, o acelerómetro mecânico do exercício 30, cuja equação da dinâmica é: $\ddot{y}(t) + \frac{D}{M}\dot{y}(t) + \frac{K}{M}y(t) = a(t)$, com $a(t) = \ddot{x}(t)$.



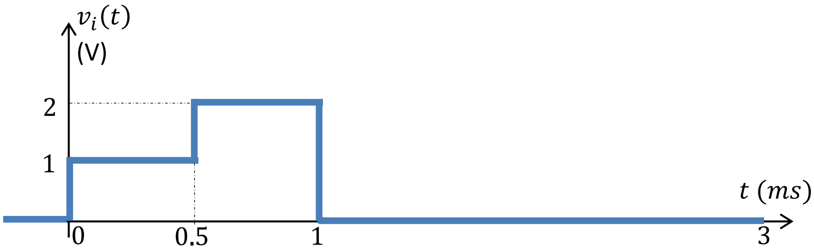

a) Represente-o através de um modelo de espaço de estado.
b) Simule este modelo no Matlab, quando, partindo do repouso, é submetido a uma aceleração constante de $1\,m/s^2$. Assuma $M = 1$, $K = 1$, e teste três valores diferentes para o coeficiente de atrito dinâmico, $D = \{1; 2; 4\}$. Verifique que os resultados observados são iguais aos obtidos no exercício 30.
c) Pretende-se, agora, visualizar em simultâneo a evolução, ao longo do tempo, da posição e da velocidade do ponteiro, na experiência anterior. Modifique a simulação para este efeito.

**Exercício 32**

Considere o seguinte circuito elétrico (que é o dos exercícios 28 e 29):



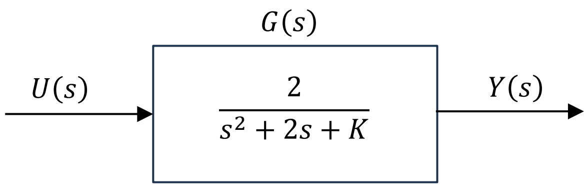

a) Represente-o através de um modelo de espaço de estados onde as variáveis de estado são a tensão no condensador e a corrente na bobine.
b) Assumindo condições iniciais nulas, represente a resposta do circuito quando, no instante $t = 0$ segundos, se aplica na entrada uma tensão constante de 2 V.
c) Repita a alínea anterior para o caso em que se aplica o seguinte sinal:




d) Represente o sistema, agora, por um outro modelo em espaço de estados onde as variáveis de estado são escolhidas segundo o método de Kelvin-Thomson. Repita as simulações das alíneas b) e c), verificando que este modelo produz a mesma saída que o modelo anterior.
e) Simule (com os sinais das alíneas b) e c)) o modelo da alínea a) através do SIMULINK, usando um bloco "*State-Space*", considerando que, no instante inicial a corrente na bobine era nula mas o condensador apresentava uma tensão de $-2\ V$.

**Exercício 33**

Um determinado sistema é modelado pela seguinte função de transferência (contendo um parâmetro real positivo ajustável, $K$):




a) Desenhe, sobre o plano complexo cartesiano, o trajeto seguido pelos polos do sistema à medida que o parâmetro $K$ varia.
b) Obtenha uma representação em espaço de estados que represente este sistema.
c) Usando o anterior modelo de espaço de estados, obtenha a resposta ao degrau unitário do sistema quando $K = 0.5$, $K = 1$ e $K = 2$, e conclua sobre as diferenças observadas.
d) Com base no modelo de espaço de estado, determine a expressão do valor final da saída na resposta ao degrau unitário.
e) A partir da representação em espaço de estados obtenha a expressão dos polos do sistema e compare com a observada na alínea a).

**Exercício 34**

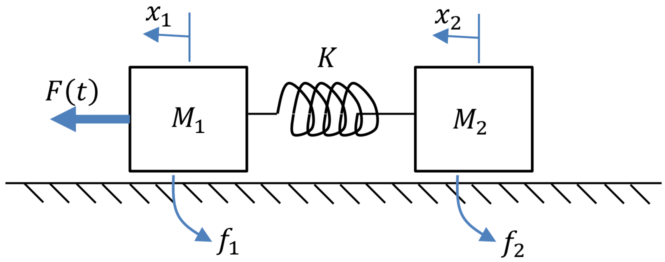
Um determinado sistema é modelado pela seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + [0] u(t) \end{cases}$$

a) Obtenha a função de transferência do sistema, $G(s) = Y(s)/U(s)$.
b) Determine os polos do sistema e conclua quanto à estabilidade do sistema.
c) Represente o sistema por uma outra representação em espaço de estados onde a variável de estado $z_k(t)$ seja igual à derivada da variável de estado $z_{k-1}(t)$, $k = 2,3$.
d) Verifique que esta nova representação apresenta os mesmos valores próprios da matriz da dinâmica.

**Exercício 35**

Considere o seguinte sistema mecânico, onde uma força externa $F(t)$ é aplicada ao corpo de massa $M_1$, colocando-o em movimento (a sua posição relativamente ao seu ponto de repouso é parametrizada por $x_1(t)$). O corpo de massa $M_1$ encontra-se ligado a um outro corpo, de massa $M_2$, através de uma mola (a posição do corpo de massa $M_2$ é parametrizada pela variável $x_2(t)$, considerada em relação à posição de repouso deste corpo). Modele a força produzida pela mola pelo produto da diferença de posição dos seus terminais pela constante de elasticidade da mola, $K$ (lei de Hooke). O movimento dos corpos realiza-se com atrito, sendo este modelado pelo produto da diferença de velocidade entre as superfícies em fricção pelo coeficiente de atrito dinâmico, $f_1$ e $f_2$, respetivamente para cada corpo.




a) Obtenha uma representação em espaço de estados para este sistema, sendo a entrada a força externa $F(t)$ e as saídas as posições dos dois corpos, $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
b) Assumindo que o sistema parte do repouso, simule o modelo anterior quando se aplica uma força externa de $2\,N$ durante $5$ segundos. Considere os seguintes valores dos parâmetros:

$$M_1 = 1\,Kg \quad M_2 = 2\,Kg \quad K = 1\,N/m \quad f_1 = f_2 = 0.8\,Ns/m$$

c) Assuma, agora, a seguinte experiência (assumindo os valores dos parâmetros da alínea b)): no início, o corpo de massa $M_2$ é mantido fixo na sua posição de repouso, e o corpo de massa $M_1$ é deslocado de $80\,cm$ para a esquerda, permanecendo fixo nessa posição. No instante $t = 0$, ambos os corpos são libertados. Simule a evolução da posição dos dois corpos ao longo do tempo.

d) Na experiência da alínea c), determine a expressão da posição final de ambos os corpos em função dos parâmetros do sistema, e confronte com o resultado obtido na simulação.

## Exercícios sobre Modelação e Simulação no Domínio do Tempo Discreto:

**Exercício 36**

Considere o sistema do exercício 35, com os valores dos parâmetros indicados na alínea b) desse exercício.

a) Usando a aproximação *Backward Euler*, modele esse sistema através de equações de diferenças, assumindo um período de amostragem genérico, $h$.

b) Simule o modelo obtido na alínea anterior, produzindo a evolução das posições dos dois corpos quando se aplica uma força $F(t)$ igual a 2 $N$ durante 5 segundos. Sobreponha os resultados considerando os seguintes valores para o período de amostragem, e conclua: $h = 0.001; 0.01; 0.1; 0.5$ segundos.

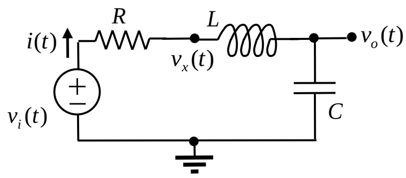
c) Repita, agora, as duas anteriores alíneas, mas considerando a aproximação *Forward Euler*. Conclua sobre os resultados observados.

d) Represente no domínio Z a relação $G(z) = \frac{X_1(z)}{F(z)}$ proveniente do modelo de tempo discreto obtido pela aproximação *Forward Euler*, e averigue a posição dos polos desse modelo para o caso em que $h = 0.5$ segundos, relacionando a posição desses polos com o observado na simulação da alínea c).

e) Usando novamente a aproximação *Backward Euler*, represente agora o sistema por um modelo de espaço de estados no domínio do tempo discreto e execute as mesmas simulações da alínea b), verificando que, com uma implementação menos complexa, se obtém os mesmos resultados.

**Exercício 37**

Pretende-se simular o comportamento do circuito elétrico representado na figura quando se aplica na sua entrada $v_i(t)$ uma onda quadrada de amplitude 1 V, valor médio nulo e frequência 1 kHz.




a) Obtenha um modelo deste sistema na forma de equação diferencial (relacionando os sinais $v_o(t)$ e $v_i(t)$).

b) Transforme o modelo anterior numa representação em espaço de estados.

c) Obtenha um outro modelo de espaço de estados em que as variáveis de estado sejam a tensão de saída, $v_o(t)$, e a corrente no circuito, $i(t)$.

d) Aplicando a aproximação bilinear (trapezoidal) ao modelo da alínea c), obtenha o modelo de espaço de estados no domínio do tempo discreto, considerando o período de amostragem constante, $h$.

e) Simule o sistema da alínea d) no Matlab e visualize simultaneamente o sinal de entrada, $v_i$, e o sinal de saída, $v_o$, durante os 4 primeiros períodos do sinal $v_i$. Assuma diferentes valores para o período de amostragem, e compare com os resultados de simulação do modelo de tempo contínuo da alínea b). Considere $R = 10\ \Omega$, $L = 3\ mH$, e $C = 10\ \mu F$.

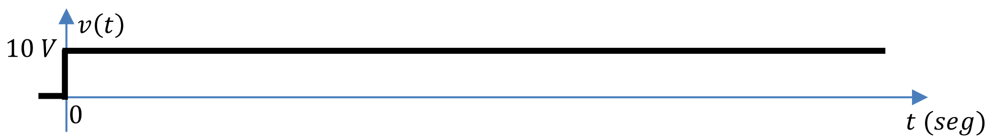
**Exercício 38**

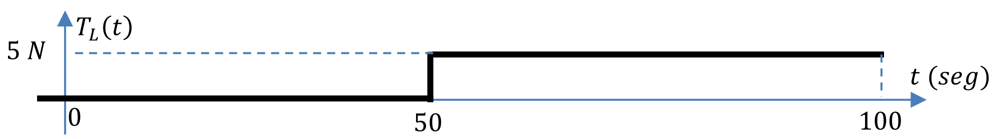
Um motor elétrico DC é controlado através da tensão elétrica, $v(t)$, aplicada ao enrolamento do seu rotor, fazendo com que a velocidade de rotação do seu veio, $\omega(t)$, varie ao longo do tempo. Assuma que ao veio deste motor se encontra aplicada uma carga mecânica que aplica sobre o veio um binário $T_L(t)$ que se opõe ao movimento do rotor. Sabe-se que este motor pode ser modelado pelas seguintes equações (cujos parâmetros têm os valores apresentados à direita do modelo), onde $i(t)$ é a corrente elétrica fornecida ao motor pela fonte de tensão que aplica a tensão $v(t)$.

| | |
|---|---|
| $\begin{cases} J\dfrac{d\omega(t)}{dt} + D\omega(t) = K_m i(t) - T_L(t) \\ v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_g\omega(t) \end{cases}$ | $J = 1.1$ $\quad R = 1.3$ $\quad L = 0.2$ <br> $K_m = 1$ $\quad K_g = 0.1$ $\quad D = 0.1$ |

a) Represente este sistema através de um modelo de espaço de estados, no domínio de tempo contínuo.

b) Simule o modelo da alínea a) (observando a evolução da velocidade de rotação e a corrente que o motor consome) quando, partindo do repouso, se aplicam ao motor os seguintes sinais:



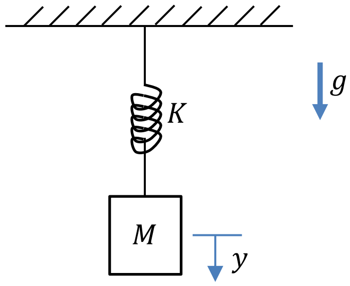




c) Usando o método de *Forward Euler*, obtenha um modelo em espaço de estados, no domínio de tempo discreto, que aproxime o comportamento deste sistema, averiguando qual o período de amostragem a partir do qual essa aproximação é razoável (quando efetuando a simulação da alínea b)).

d) Repita, agora, o procedimento da alínea c), considerando a aproximação *Backward Euler*, e compare os valores do período de amostragem obtidos (quando conduzem a soluções com o mesmo nível de aproximação).

**Exercício 39**

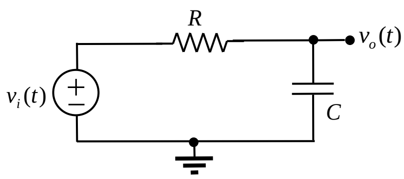
Seja o típico sistema oscilador harmónico mecânico representado na seguinte figura. Assume-se que, até ao instante $t = 0$, um mecanismo (não representado) mantém fixo o corpo de massa $M$, libertando-o nesse instante. Assuma que existe atrito dinâmico entre o ar e o corpo de massa $M$, de coeficiente $f$.



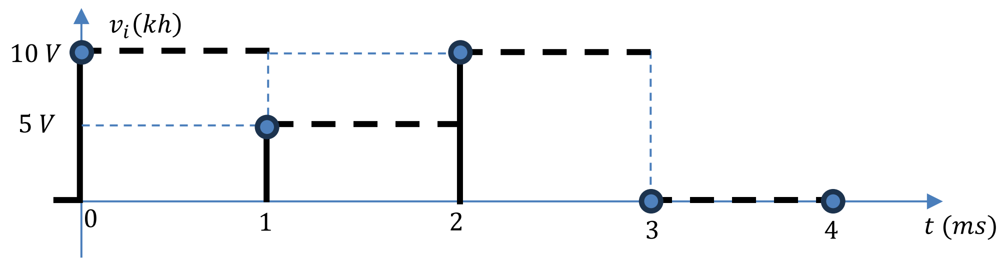

a) Deduza a equação diferencial que representa este sistema, em ordem à posição do corpo, $y(t)$.
b) Obtenha um modelo deste sistema na forma de uma função de transferência no domínio de Laplace.
c) Simule o sistema, assumindo os seguintes valores para os parâmetros:
$$M = 2\,kg \qquad K = 10\,N/m \qquad f = 0.5\,Ns/m \qquad g = 9.8\,m/s^2$$
d) Aproxime, agora, o modelo anterior por uma função de transferência no domínio Z, usando o método de *Backward Euler*, e compare o resultado da alínea c) com o resultado deste novo modelo quando se consideram os seguintes períodos de amostragem: $0.001$, $0.01$, $0.1$ e $1.0$ segundos.
e) Repita a alínea d), agora para aproximação de *Forward Euler*.
f) Repita novamente a alínea d), considerando agora a aproximação Bilinear.

**Exercício 40**

O seguinte filtro passa-baixo recebe um sinal de tensão, $v_i(t)$, oriundo de um processador digital cujo sinal analógico é determinado por um conversor digital-analógico (DAC) terminado por um *Zero-Order Hold* (ZOH). O DAC/ZOH opera a uma frequência de amostragem de 1 kSps.




a) Obtenha uma função de transferência, no domínio Z, que represente com exatidão (i.e., sem considerar qualquer aproximação) o comportamento do sistema, desde as amostras do sinal gerado pelo processador, até às amostras do sinal $v_o(t)$.
b) Para verificar que o modelo da alínea a) produz uma solução exata, obtenha, agora, a função de transferência do circuito no domínio de Laplace (i.e., assumindo a operação em tempo contínuo), e compare a saída de ambos os modelos quando as amostras consecutivas geradas pelo processador são representadas na seguinte figura:



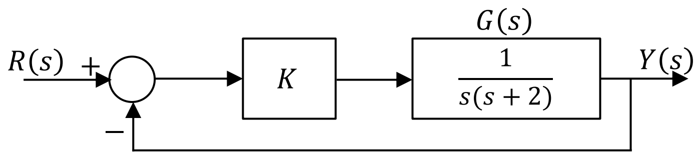

Assuma, nesta simulação, os seguintes valores para os componentes do circuito:

$$R = 1\ k\Omega \qquad C = 1\ \mu F$$

**Exercícios sobre Compensação por Realimentação Negativa:**

**Exercício 41**

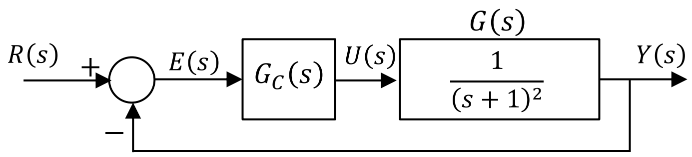
Considere o seguinte sistema realimentado que contém o parâmetro ajustável $K \in \mathbb{R}^+$.




a) Desenhe o trajeto seguido pelos polos do sistema à medida que o parâmetro $K$ varia o seu valor.
b) Identifique os regimes de operação deste sistema em função do parâmetro $K$, e visualize a resposta ao degrau do sistema em cada um desses regimes.
c) Determine o valor de $K$ para o qual a resposta ao degrau do sistema atinge uma sobrelevação de $PO = 30\%$. Verifique por simulação no MATLAB.
d) Verifique que o tempo de estabelecimento (a $\pm 2\ \%$) na resposta ao degrau permanece aproximadamente constante à medida que o valor de $K$ aumenta, no regime sub-amortecido.

**Exercício 42**

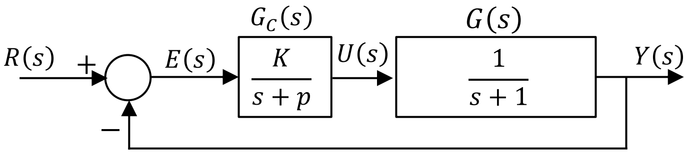
Considere o seguinte sistema de controlo cujo controlador tem uma função de transferência $G_C(s)$ costumizável. O sinal de controlo a aplicar ao sistema não poderá estar fora da gama $[-10;\ +10]$ por limitação da entrada desse sistema. Pretende-se que o sistema controlado tenha os polos dominantes em $-2 \pm j$. O sinal de teste é o degrau unitário.




a) Mostre que um controlador proporcional não é suficiente para este objetivo.
b) Introduza, agora, uma ação derivativa no controlador (mantendo também a ação proporcional). Ou seja, considere $G_C(s) = K_P(s+z)$. Averigue da possibilidade de este controlador conduzir à especificação desejada.
c) Projete, agora, o controlador $G_C(s) = K_P\frac{s+z}{s+p}$. Conclua sobre esta implementação e a da alínea anterior.

**Exercício 43**

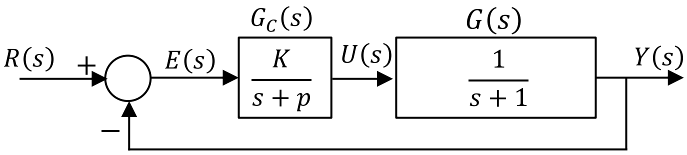
Considere o seguinte sistema com um controlador apresentando dois parâmetros ajustáveis $K, p \in \mathbb{R}^+$, sendo este submetido a um degrau unitário.




a) Determine a gama de valores que a saída do sistema pode adquirir quando em regime estacionário.
b) Demonstre, ainda, que a saída apresenta sempre sobrelevação quando $p = 1$ (independentemente do valor do parâmetro $K$).
c) Mostre que quanto menor for $p$, menor será o erro em regime estacionário, porém a duração do regime transitório e a sobrelevação tenderão a aumentar.

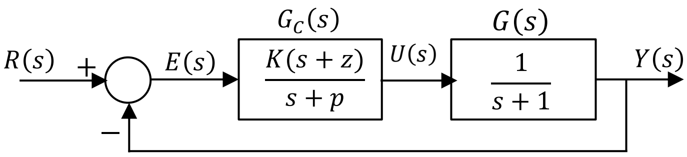
**Exercício 44**

Considere o seguinte sistema com dois parâmetros ajustáveis $K, p \in \mathbb{R}^+$. Determine os valores de $K$ e $p$ por forma a que a resposta do sistema ao degrau unitário apresente uma sobrelevação de 10%, com um erro em regime estacionário ($e_{ss}$) igual a 0.2. Verifique o resultado por simulação no MATLAB e relacione cada resposta ao degrau observada com a posição dos polos do sistema.




**Exercício 45**

Considere o seguinte controlador $G_C(s)$, com parâmetros ajustáveis $K, p, z \in ]0; 10[$, que pretende ser




a) Projete os parâmetros do controlador por forma a que, na resposta ao degrau, a resposta apresente um erro em regime estacionário inferior a 2%, e um tempo de estabelecimento (a $\pm 2\%$) inferior a 3 segundos.
b) Simule o sistema projetado na alínea anterior, na resposta ao degrau unitário, observando também a evolução do sinal de controlo, $u(t)$. Comente.
c) Determine o gráfico do trajeto seguido pelos polos, no plano complexo cartesiano, à medida que se varia o parâmetro $K$ (assumindo os valores calculados na alínea a) para

os parâmetros $z$ e $p$). Este gráfico denomina-se Lugar de Raízes do sistema realimentado (em ordem ao parâmetro $K$).

**Exercícios sobre Compensação por Realimentação de Estado:**

**Exercício 46**

Pretende-se compensar o desempenho de um sistema físico para o qual foi determinado o seguinte modelo de espaço de estados, tendo este um comportamento muito próximo do referido sistema físico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + [0] u(t) \end{cases}$$

a) Verifique se o sistema a compensar é estável ou instável.
b) Determine a matriz de realimentação de estado que faz com que o sistema compensado adquira polos em $-2 \pm 2j$.
c) Simule o comportamento do sistema compensado na resposta ao degrau unitário e conclua sobre o comportamento que este adquiriu.

**Exercício 47**

Pretende-se implementar uma malha de controlo que determine autonomamente a tensão a aplicar a um motor elétrico DC para que a sua velocidade de rotação atinja um determinado valor (especificado pela entrada do sistema de controlo) num intervalo de tempo adequado. Sabe-se que o motor DC pode ser modelado com precisão suficiente através do seguinte modelo:

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + K_g\omega(t) \\ J\dfrac{d\omega(t)}{dt} = K_m i(t) - D\omega(t) \end{cases}$$

onde:

$v(t)$: Tensão elétrica aplicada ao motor.

$i(t)$: Corrente elétrica consumida pelo motor.

$\omega(t)$: Velocidade de rotação do motor.

Parâmetros do motor:

$J = 0.01 \qquad D = 0.001$

$R = 0.5 \qquad L = 0.15$

$K_m = 0.05 \qquad K_g = 0.05$

A tensão aplicada ao motor não pode, em qualquer momento, ultrapassar 25 V.

a) Observe as características do comportamento deste motor quando, partindo do repouso, se aplica uma tensão constate de 10 V à sua entrada.
b) Colocando o motor numa malha de realimentação negativa com controlador proporcional, ajuste o valor desse controlador por forma a minimizar a duração do tempo de estabelecimento, quando se pretende (partindo do repouso) colocar o motor à velocidade de rotação verificada na alínea anterior (em regime estacionário). Comente sobre as características do sistema controlado obtido.

c) Projete, agora, uma matriz de realimentação de estado que coloque o sistema compensado (quando num esquema de realimentação de estado, e assumindo que todas as variáveis de estados são diretamente mensuráveis) com polos dominantes em $-2 \pm j$. Observe o comportamento do sistema compensado (incluindo o do sinal de controlo) e compare com o comportamento do sistema da alínea anterior.

d) Repita a alínea anterior mas com o objetivo de colocar os polos dominantes em $-5 \pm j$. Conclua sobre a viabilidade deste esquema de controlo.

**Exercício 48**

Seja um sistema modelado adequadamente pelo seguinte modelo de espaço de estados. O sistema contém um parâmetro ajustável, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$. Pretende-se compensar o desempenho deste sistema através de um esquema de realimentação de estado (em que se assume que as duas variáveis de estado são diretamente mensuráveis).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + [0] u(t) \end{cases}$$

a) Verifique se o sistema é controlável.

b) Determine a matriz de realimentação de estado que faz com que o sistema compensado adquira um polo dominante em $-2$.

c) Com $\beta = 2$, simule o comportamento do sistema compensado (observando também o sinal de controlo) na resposta ao seguinte sinal de referência, comparando o comportamento transitório do sistema compensado com o do sistema sem compensação (quando submetido a um degrau na sua entrada).


**Exercício 49**

Considere um sistema modelado adequadamente pelo seguinte modelo de espaço de estados.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + [0] u(t) \end{cases}$$

a) Mostre eu o sistema é controlável e observável sem recorrer às matrizes de controlabilidade e observabilidade de Kalman.

b) Determine a matriz de realimentação de estado que faz com que o sistema compensado adquira polos dominantes em $-2 \pm j3$.

c) Simule o comportamento do sistema compensado (observando também o sinal de controlo) na resposta ao degrau unitário, comparando o comportamento transitório do sistema compensado com o do sistema sem compensação (quando também submetido a um degrau na sua entrada).

**Exercício 50**

Considere o sistema duplo-integrador representado no domínio de tempo discreto pela seguinte representação em espaço de estados (assumindo um período de amostragem genérico $h$):

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix} u(k)$$

Pretende-se implementar um sistema regulador colocando este duplo integrador de tempo discreto numa malha de realimentação de estado, com matriz de realimentação de estado $K = [K_1 \quad K_2]$.

a) Obtenha a expressão geral do polinómio característico deste sistema regulador.
b) Seja a seguinte a expressão do polinómio característico pretendido para o sistema realimentado:
$$P(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$
Obtenha a expressão dos parâmetros $K_1$ e $K_2$, em função de $\alpha_1$ e $\alpha_0$, por comparação direta deste polinómio característico com o obtido na alínea a).
c) Obtenha o mesmo resultado por aplicação da Fórmula de Ackermann.