Modelação de Sistemas e Controlo Aeroespacial

Capítulo 2

Técnicas de Modelação de Sistemas Lineares

Telmo Reis Cunha

trcunha@ua.pt

2023/2024

universidade de aveiro

Licenciatura em Engenharia Aeroespacial

Índice

Introdução às Técnicas de Representação

Contexto

Na modelação de sistemas é importante que os modelos adotados sejam:

- Adequadamente precisos
- Suportados por técnicas e ferramentas de simulação e análise
- Especificados por técnicas padronizadas que permitam a troca de informações entre engenheiros, técnicos, operadores, …

Assim, é necessário definir técnicas de representação úteis e bem definidas.
Existem várias formas padronizadas de representação de sistemas.
Apresentam-se as seguintes (e algumas das ferramentas associadas):

- Equação da dinâmica
- Função de Transferência
- Diagrama de Blocos
- Espaço de Estados

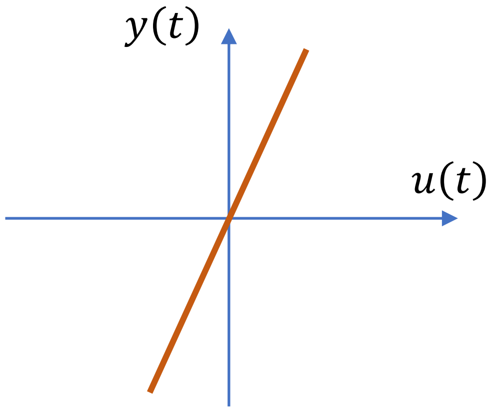
Índice

Equação Diferencial da Dinâmica

Sistemas Estáticos

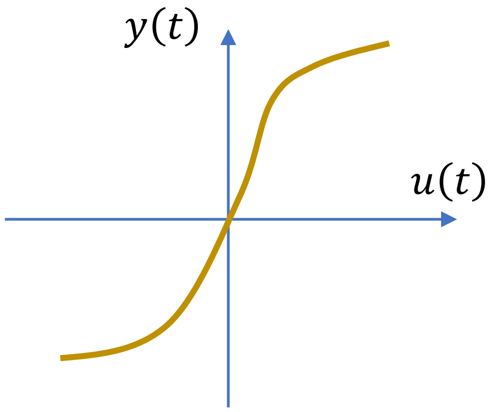
Os sistemas estáticos respondem apenas ao valor instantâneo que o sinal de entrada apresenta.
A saída não é influenciada pela evolução passada (recente ou longínqua) do sinal de entrada.
São modelados, naturalmente, por funções matemáticas estáticas.

Exemplos:



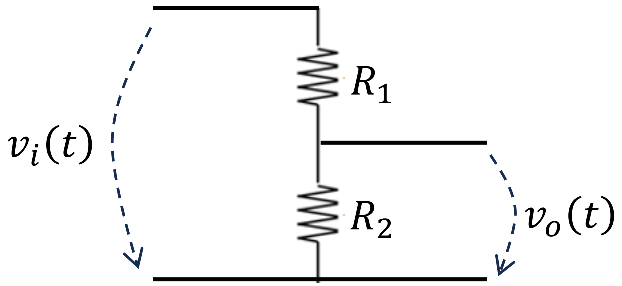
$$y(t) = Ku(t)$$

Sistema Linear Estático



$$y(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + \cdots$$

Sistema Não-Linear Estático



$$v_o(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$

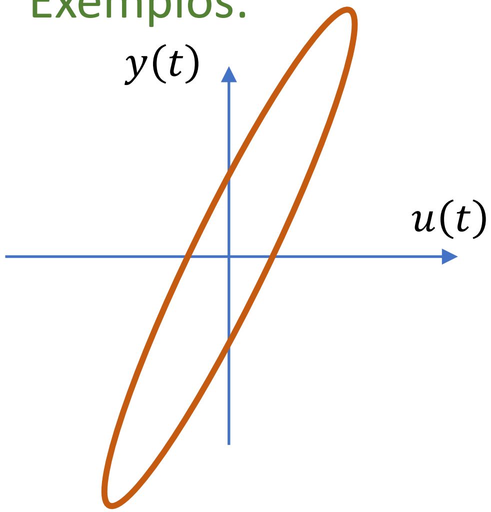
Sistema Linear Estático

Equação Diferencial da Dinâmica

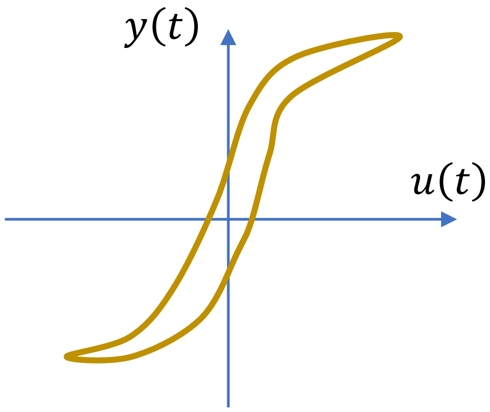
Sistemas Dinâmicos

Os sistemas dinâmicos têm a capacidade de armazenar energia, pelo que reagem não só ao valor instantâneo atual do sinal de entrada, como também à evolução que esse sinal apresentou no passado (nota: a dependência dinâmica pode ser referida, também, ao próprio sinal de saída, nos sistemas realimentados).

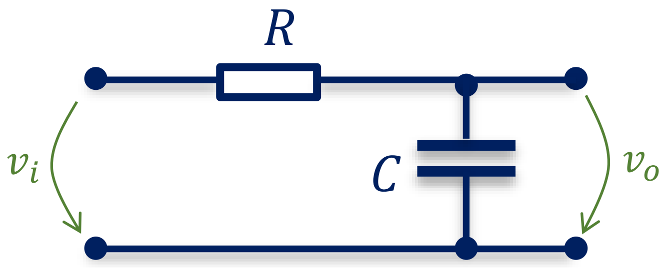
Exemplos:



Sistema Linear Dinâmico



Sistema Não-Linear Dinâmico



$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = \frac{1}{RC} v_i(t)$$

Sistema Linear Dinâmico

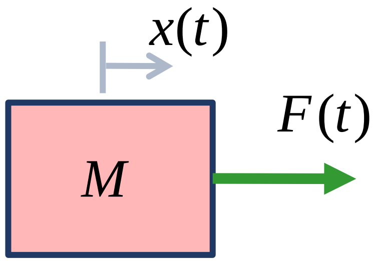
Equação Diferencial da Dinâmica

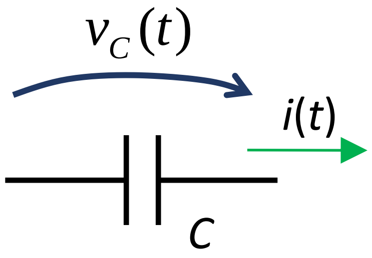
Sistemas Dinâmicos

Os comportamento dinâmicos, associados aos processos de armazenamento de energia que os sistemas possuem internamente, produzem, assim, uma dependência no passado, pelo que se atribui aos sistema dinâmicos o conceito de memória.

O armazenamento de energia nos componentes lineares é representado pelo integral, ao longo do tempo, de um determinado sinal (a operação integração é linear e representa o processo de acumular algo).

Exemplos:





$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{1}{M}\int_0^t F(\tau)d\tau$$

2ª Lei de Newton (1687)

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} \;\Rightarrow\; v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

Coulomb (1785), e outros

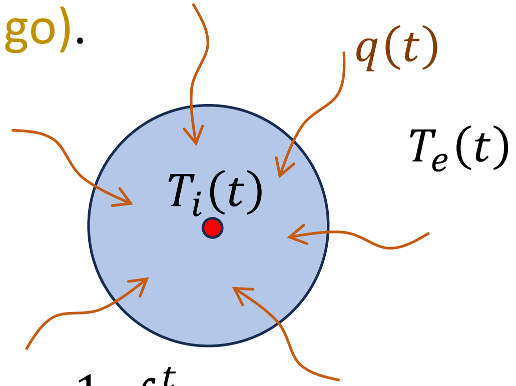
Equação Diferencial da Dinâmica

Sistemas Dinâmicos

Os comportamento dinâmicos, associados aos processos de armazenamento de energia que os sistemas possuem internamente, produzem, assim, uma dependência no passado, pelo que se atribui aos sistema dinâmicos o conceito de memória.

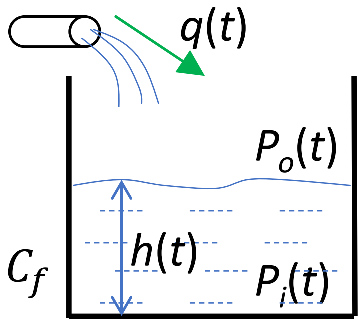
O armazenamento de energia nos componentes lineares é representado pelo integral, ao longo do tempo, de um determinado sinal (a operação integração é linear e representa o processo de acumular algo).

Exemplos:



$$T_i(t) = \frac{1}{C_T}\int_0^t q(\tau)d\tau + T_i(0)$$

Lei de Fourier (1822)



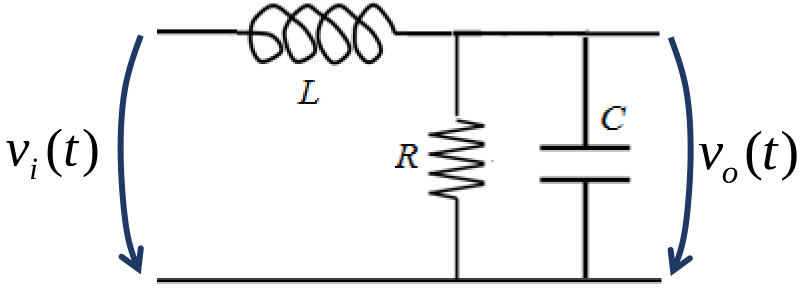
$$P_i(t) - P_o(t) = \frac{\rho g}{C_f}\int_0^t q(\tau)d\tau$$

Equação Diferencial da Dinâmica

Sistemas Dinâmicos

Por cada elemento num sistema com a propriedade de armazenar energia de forma independente surge, na representação do comportamento do sistema, um integral.

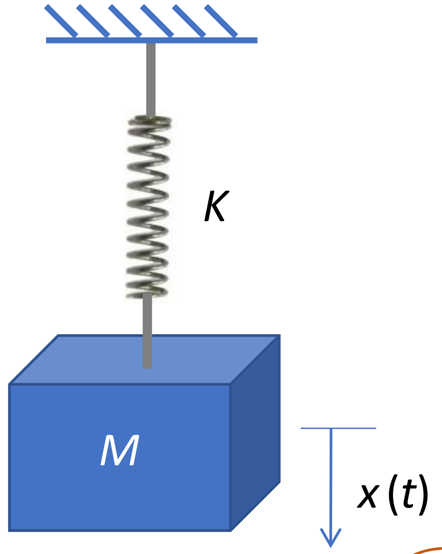
Exemplos:



Condensador

Bobina

$$v_o(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \left(\frac{1}{L}\int_0^\tau \big(v_i(\sigma) - v_o(\sigma)\big)d\sigma - \frac{1}{R}v_o(\tau) \right) d\tau$$



Corpo com massa

Mola

$$v(t) = \frac{1}{M}\int_0^t \left(Mgh(\tau) - K\int_0^\tau v(\sigma)d\sigma \right) d\tau$$

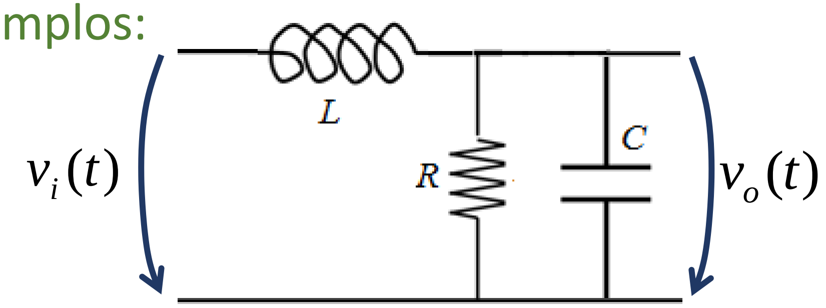
$h(t)$: degrau unitário (início da simulação)

Equação Diferencial da Dinâmica

Sistemas Dinâmicos

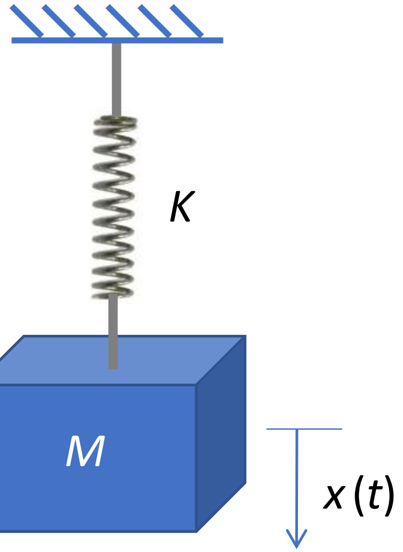
Derivando (em ordem ao tempo) as equações integrais o número de vezes suficiente (igual ao número de integrais sucessivos, que é igual ao número de elementos com capacidade de armazenamento de energia, de forma independente), obtém-se a **equação diferencial da dinâmica**:

Exemplos:



$$\frac{d^2v_o(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_o(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_o(t)=\frac{1}{LC}v_i(t)$$

NOTA: Deixa de ser necessário representar explicitamente as condições iniciais.



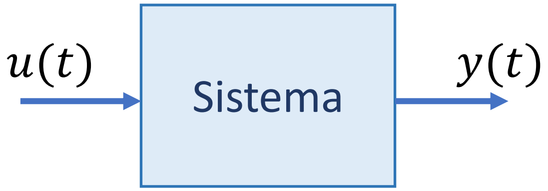
$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{K}{M}v(t)=g\frac{dh(t)}{dt}\rightarrow\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{K}{M}x(t)=gh(t)$$

$h(t)$: degrau unitário (início da simulação)

Equação Diferencial da Dinâmica

Equação Diferencial da Dinâmica

Os sistemas lineares invariantes no tempo (LTI), representáveis por modelos de parâmetros concentrados, assumem, então, a **Equação Diferencial da Dinâmica** como modelo geral:



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t)$$

Este modelo permite determinar o sinal de saída para um determinado sinal de entrada.
Mas, para tal, é necessário resolver uma equação diferencial…

Índice

Função de Transferência em Laplace

Resolução da Equação Diferencial da Dinâmica

A Transformada de Laplace é uma ferramenta muito útil na resolução de equações diferenciais, pois transforma-as em equações algébricas:

Definição: $$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

Propriedades: $$\mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = a\mathcal{L}\{x(t)\} + b\mathcal{L}\{y(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s+a)\} = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{-at}y(t)$$

Teorema do Valor Final

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \quad \text{(se existir)}$$

• • •

Função de Transferência em Laplace

Resolução da Equação Diferencial da Dinâmica

Assumindo condições iniciais nulas e aplicando a Transformada de Laplace à equação diferencial da dinâmica:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t)$$

$\mathcal{L}$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = G(s)}$$

Função de Transferência

Polos – Raízes do denominador da função de transferência

Zeros – Raízes do numerador da função de transferência

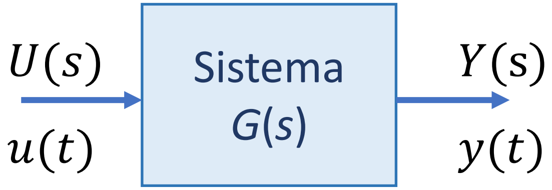
Equação Característica: $s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$

Função de Transferência em Laplace

Resolução da Equação Diferencial da Dinâmica

- Seja um modelo de um sistema linear na forma de função de transferência, $G(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



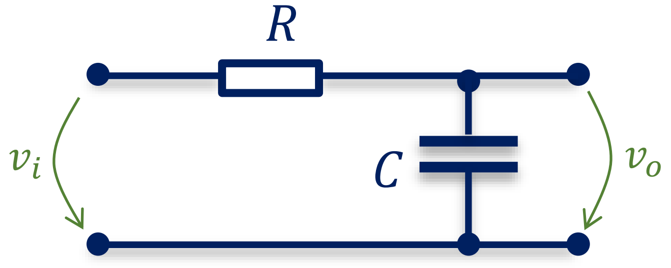
- Seja um sinal de entrada especificado, $u(t)$.
- Para se determinar a resposta do sistema (modelo), $y(t)$:
  - Determina-se a transformada de Laplace de *u*(*t*): $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$
  - Calcula-se o sinal de saída, em Laplace: $Y(s) = G(s)U(s)$
  - Determina-se a transformada inversa de Laplace de *Y*(*s*): $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

    Este último passo (o mais complexo) é usualmente auxiliado pela decomposição em frações simples (Teorema dos Resíduos), pelas propriedades da Transformada de Laplace, ou por tabelas.

Função de Transferência em Laplace

Resolução da Equação Diferencial da Dinâmica

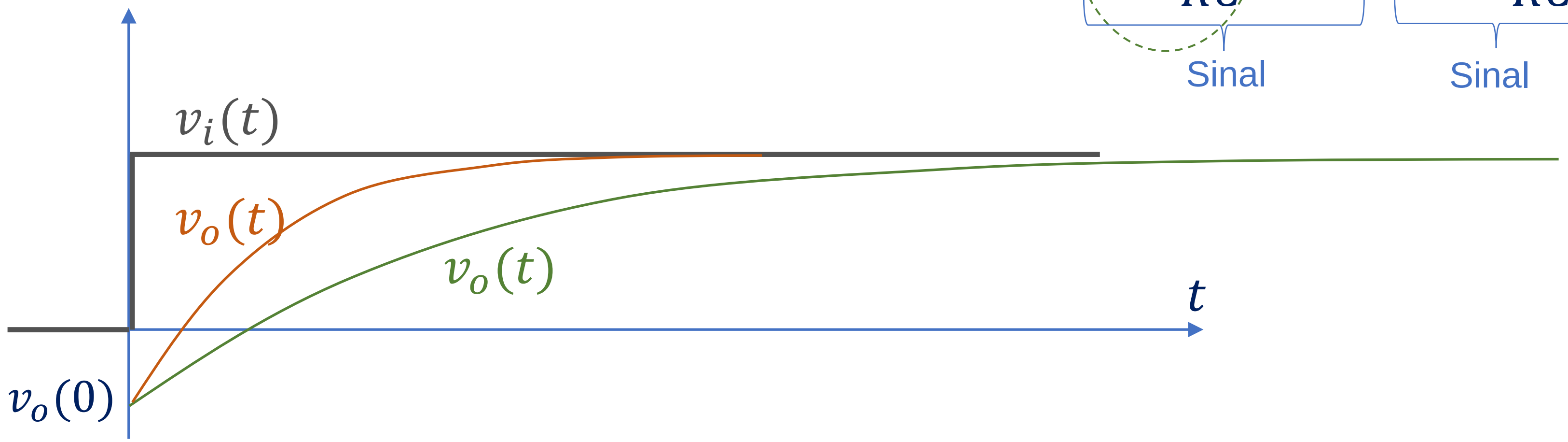
Exemplo: Circuito RC passa-baixo



Com condições iniciais não nulas:

Função de Transferência

$$V_o(s) = \underbrace{\frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} V_i(s)}_{\text{Sinal}} + \underbrace{\frac{v_o(0)}{s + \frac{1}{RC}}}_{\text{Sinal}}$$

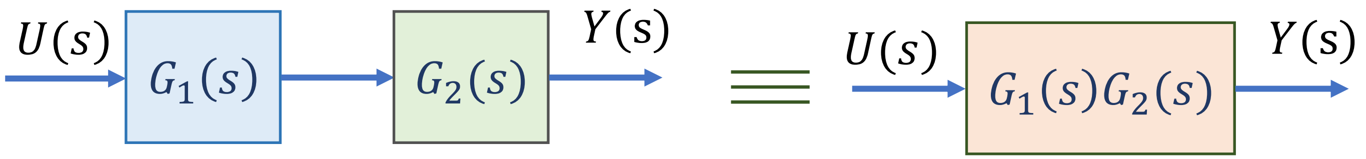


Função de Transferência em Laplace

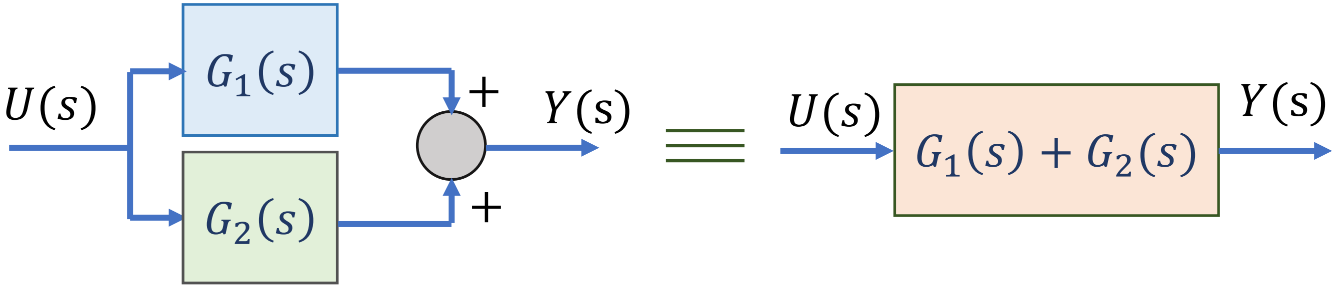
Representação de Sistemas Compostos

A representação de sistemas em Laplace permite, também, uma sistematização simplificada da análise de sistemas compostos por subsistemas interligados.

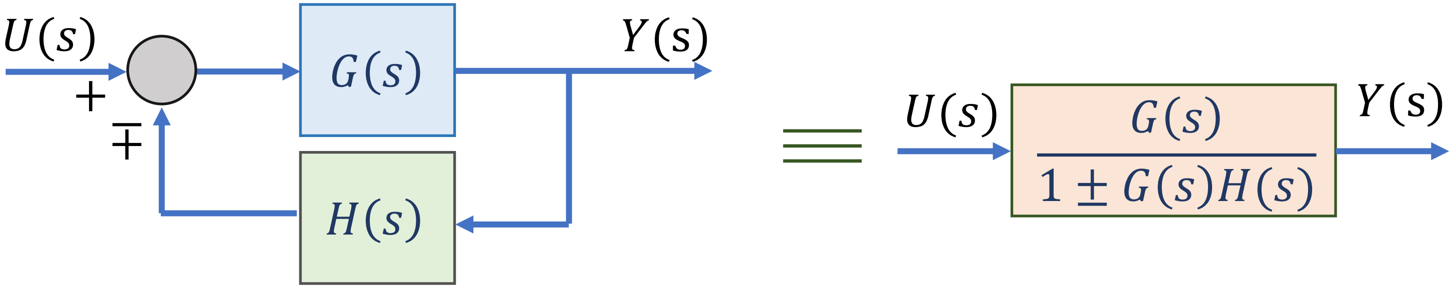
Ligação em Série:



Ligação em Paralelo:



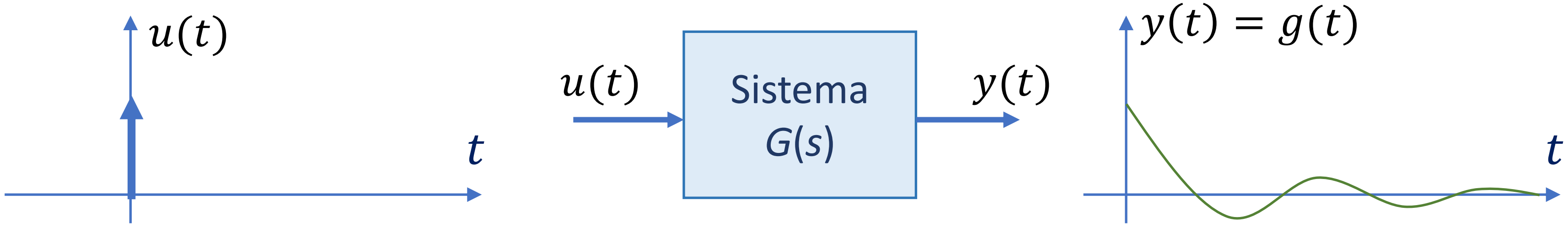
Realimentação:



Função de Transferência em Laplace

Resposta Impulsional

Um sistema linear é totalmente descrito pela sua resposta a um impulso de Dirac (resposta impulsional, ou resposta impulsiva).



Por outro lado, também é totalmente descrito pela função de transferência em Laplace.

Existe, naturalmente, uma relação entre ambas:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Função de Transferência em Laplace

Características da Função de Transferência

Os polos e os zeros de uma função de transferência são números complexos (relembrar que a variável independente s do domínio de Laplace é uma entidade complexa: $s = \sigma + j\omega$).

Se o modelo de um sistema **real** apresenta um polo (ou um zero) complexo (i.e., com parte imaginária não nula), então esse modelo terá um outro polo (ou zero) igual ao complexo conjugado do anterior.

Exercício: Mostrar que a resposta ao degrau do modelo $G(s) = \frac{2}{s+\sigma_p+j\omega_p}$ é um sinal não real, mas que o modelo $F(s) = \frac{2}{(s+\sigma_p+j\omega_p)(s+\sigma_p-j\omega_p)}$ produz um sinal real.

Função de Transferência em Laplace

Impacto dos Polos da Função de Transferência na Análise de Estabilidade

Existem várias definições de estabilidade de sistemas.
Usualmente, para sistemas lineares, considera-se o **critério BIBO** (bounded input – bounded output):

Um sistema é considerado estável se responde a entradas limitadas em amplitude com sinais também limitados em amplitude.

Uma noção intuitiva deste conceito consiste na avaliação da correlação entre o sinal de saída e o sinal de entrada (num sistema instável, estes não apresentam correlação aparente).

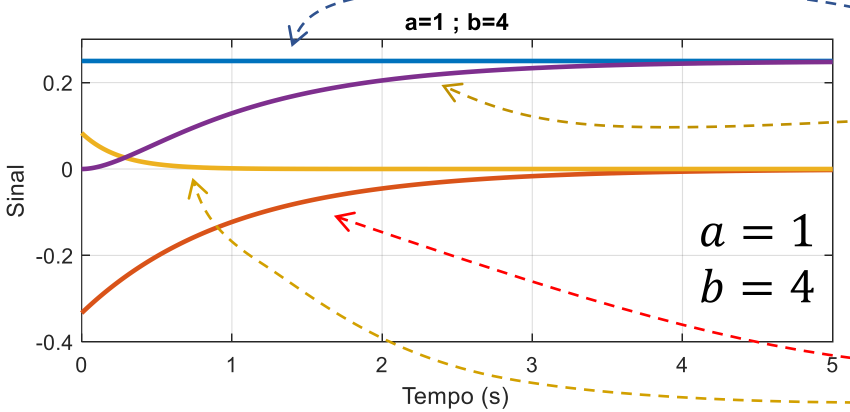
Impacto dos Polos da Função de Transferência na Análise de Estabilidade

Exemplo:

Analise-se a resposta ao degrau unitário do seguinte sistema, que contém polos em $-a$ e $-b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, e $a \neq b$:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+a)(s+b)}} \longrightarrow Y(s) \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq b$$

Seja $a = 1$ e $b = 4$ (a saída é limitada em amplitude → sistema estável):



$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{ab}}_{\substack{\text{Componente} \\ \text{Estacionária} \\ \text{(ou Permanente)}}} + \underbrace{\frac{1}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{-bt}}_{\substack{\text{Componente} \\ \text{Transitória}}}$$

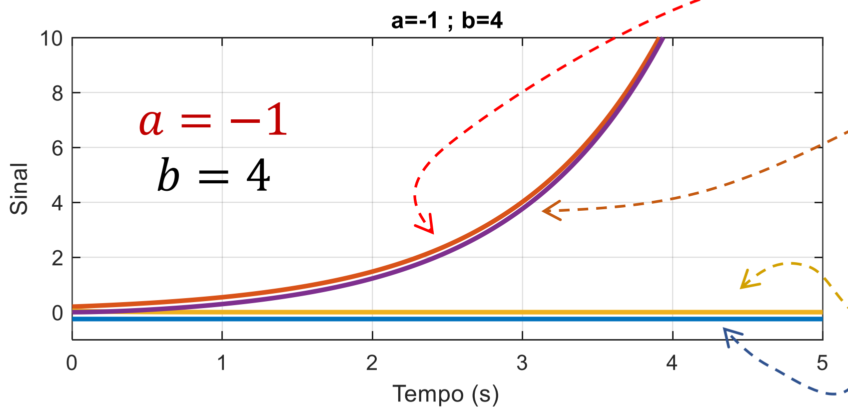
Função de Transferência em Laplace

Impacto dos Polos da Função de Transferência na Análise de Estabilidade

Exemplo:
Analise-se a resposta ao degrau unitário do seguinte sistema, que contém polos em $-a$ e $-b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, e $a \neq b$:

$$U(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{(s+a)(s+b)}} \rightarrow Y(s) \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq b$$

Altere-se, agora, o sinal de a: $a = -1$, $b = 4$ (a saída ilimitada em amplitude → sistema instável):

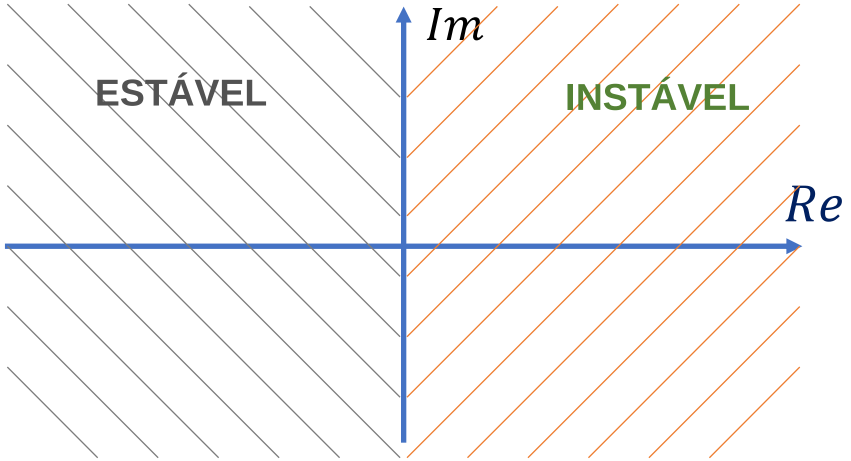


$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{ab}}_{\text{Componente Estacionária (ou Permanente)}} + \underbrace{\frac{1}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{-bt}}_{\text{Componente Transitória}}$$

Função de Transferência em Laplace

Impacto dos Polos da Função de Transferência na Análise de Estabilidade

Verifica-se que se um sistema tiver um ou mais polos no **semiplano direito** do plano complexo cartesiano (i.e., com parte real positiva), então o **sistema será instável** (segundo o critério BIBO).



Exercício: Analisar a resposta ao degrau da função de transferência:

$$G(s) = \frac{2}{(s + \sigma_p + j\omega_p)(s + \sigma_p - j\omega_p)}$$

Note-se que apenas os polos da função de transferência têm impacto na estabilidade do modelo (a localização dos zeros não influencia a estabilidade).

Índice

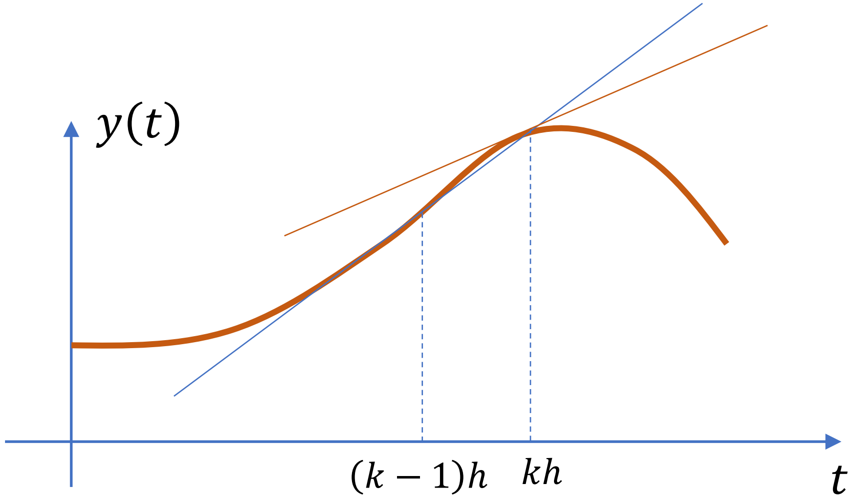
Equação de Diferenças

Modelação no Domínio de Tempo Discreto

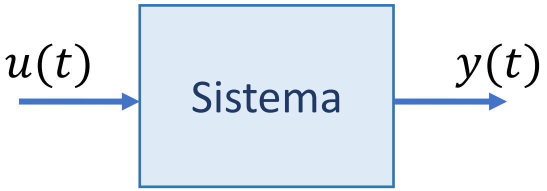
No domínio de tempo discreto, apenas se tem acesso às amostras dos sinais, que ocorrem em instantes bem determinados.
Não é possível, assim, implementar diretamente a derivada do sinal num determinado instante de tempo, mas pode-se aproximá-la através de uma combinação linear das amostras desse instante e dos instantes imediatamente anteriores.

Por exemplo, o método de *Backward Euler* considera:

$$\frac{dy(t)}{dt}_{|t=kh} \approx \frac{y(kh) - y\big((k-1)h\big)}{h} = \frac{y(k) - y(k-1)}{h}$$



Equação de Diferenças



Equação de Diferenças

Substituindo as derivadas da equação diferencial da dinâmica por representações através de combinações lineares de amostras (presentes e passadas) dos sinais de entrada e saída, obtém-se a **Equação de Diferenças**:

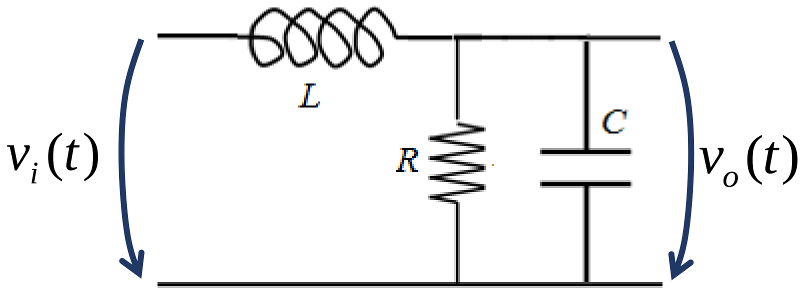
$$y(k) + \bar{a}_1 y(k-1) + \cdots + \bar{a}_n y(k-n) = \bar{b}_0 u(k) + \bar{b}_1 u(k-1) + \cdots + \bar{b}_m u(k-m)$$

NOTA: Os coeficientes $\bar{a}$ e $\bar{b}$ da equação de diferenças são naturalmente distintos dos coeficientes a e b da equação diferencial da dinâmica a que corresponde.

Apesar de se poder obter uma equação de diferenças através de aproximações das derivadas, pode-se obter uma equação de diferenças que produza a solução exata da equação da dinâmica, quando considerada nos instantes de amostragem dos sinais.

Equação de Diferenças

Exercício: Obtenha uma equação de diferenças que aproxime o comportamento do seguinte sistema eletrónico, simulando a sua resposta quando, no instante de tempo $t = 0$, se aplica uma tensão constante $v_i(t) = 5\ V$.



$R = 1\ \Omega$
$L = 10\ \mu H$
$C = 10\ \mu F$
$h = 1\ \mu s$

Índice

- Introdução às técnicas de representação
- Equação diferencial da dinâmica
- Função de transferência em Laplace
- Equação de diferenças
- Função de transferência no domínio Z
- Representação em espaço de estados

Função de Transferência no Domínio Z

Transformada Z

Ao contrário das equações diferenciais, as equações de diferenças são de implementação/simulação muito simples em computador. Contudo, justifica-se também a necessidade de encontrar formulações equivalentes que permitam:

- relacionar características do comportamento do sistema (como a estabilidade) com os parâmetros do modelo;
- analisar, de forma simples, sistemas constituídos por subsistemas interligados;
- projetar/modificar componentes de sistemas para se obter um comportamento específico;
- ...

Para as equações de diferença, a Transformada Z proporciona essas funcionalidades:

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}}$$

$$\mathcal{Z}\{y(k-n)\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{y(k)\} = z^{-n}Y(z)$$

$$\mathcal{Z}\{y(k+n)\} = z^{n}Y(z) - \sum_{j=0}^{n-1} y(j) z^{n-j}$$

Função de Transferência no Domínio Z

Transformada Z

Assumindo condições iniciais nulas, a equação de diferenças pode ser transformada para o domínio Z, conduzindo à correspondente Função de Transferência:

$$y(k) + \bar{a}_1 y(k-1) + \cdots + \bar{a}_n y(k-n) = \bar{b}_0 u(k) + \bar{b}_1 u(k-1) + \cdots + \bar{b}_m u(k-m)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1 z^{-1} + \cdots + \bar{b}_m z^{-m}}{1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} z^{-(n-1)} + \bar{a}_n z^{-n}} U(z) = \frac{\bar{b}_0 z^n + \bar{b}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{b}_m z^{n-m}}{z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} z^{-1} + \bar{a}_n} U(z) = G(z)U(z)}$$

Polos – Raízes do denominador da função de transferência

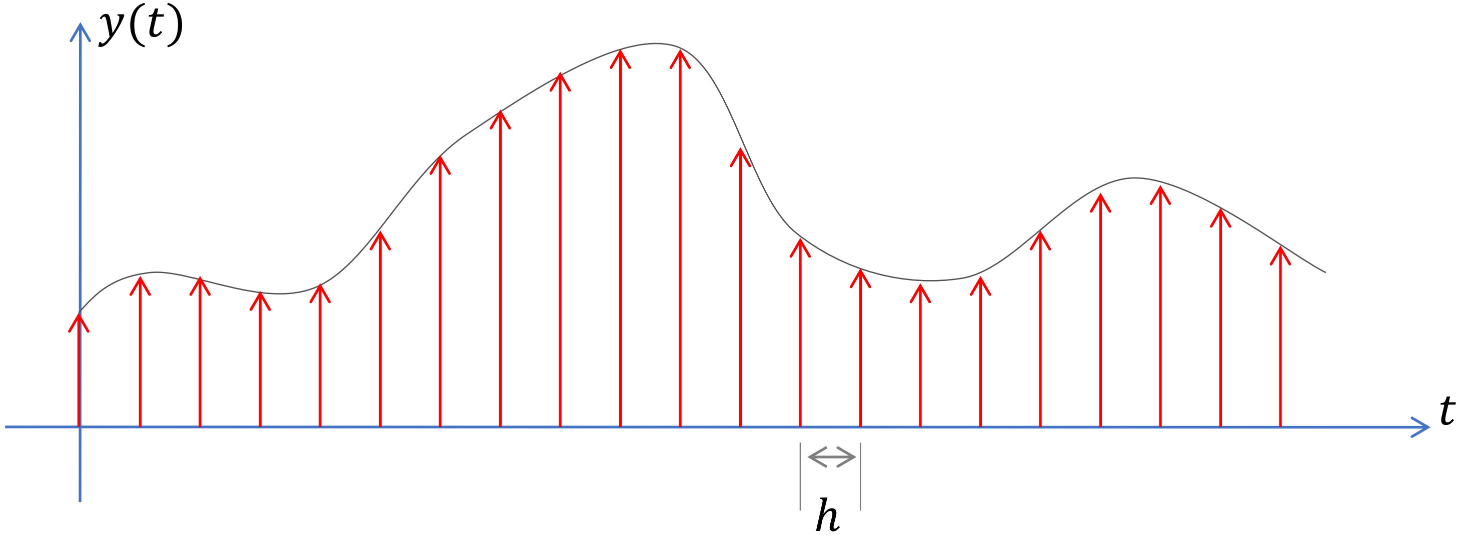
Zeros – Raízes do numerador da função de transferência

Equação Característica: $z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n = 0$

Função de Transferência no Domínio Z

Relação entre o Domínio de Laplace e o Domínio Z

Seja considerado o seguinte processo de discretização temporal de um sinal de tempo contínuo (onde as amostras são obtidas pela multiplicação do sinal por um trem de impulsos de Dirac):



$$y_D(t) = \mathrm{y(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kh) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh)\delta(t - kh)$$

Função de Transferência no Domínio Z

Relação entre o Domínio de Laplace e o Domínio Z

Efetuando a transformada de Laplace do sinal $y_D(t)$ (note-se que este é ainda um sinal de tempo contínuo, sendo nulo em todos os instantes de tempo exceto nos de amostragem):

$$Y_D(s) = \mathcal{L}\{y_D(t)\} = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y(kh)\delta(t-kh)\, e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh)\left[\int_0^{\infty} \delta(t-kh)e^{-st}dt\right] = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh)e^{-khs}$$

Considerando a variável complexa:

$$\boxed{z = e^{hs}}$$

Obtém-se, então, a representação no domínio Z:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

Função de Transferência no Domínio Z

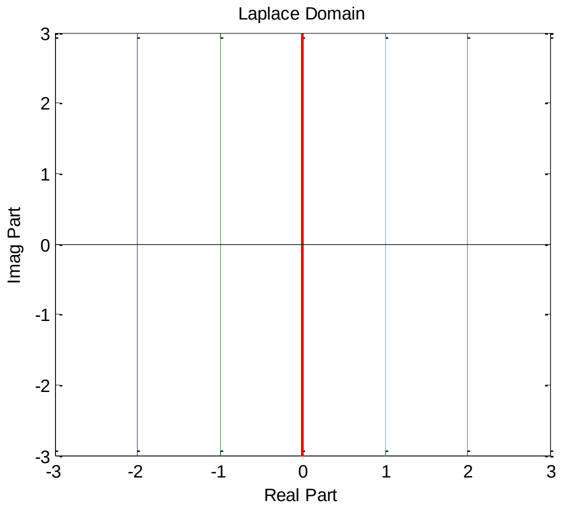
Relação entre o Domínio de Laplace e o Domínio Z

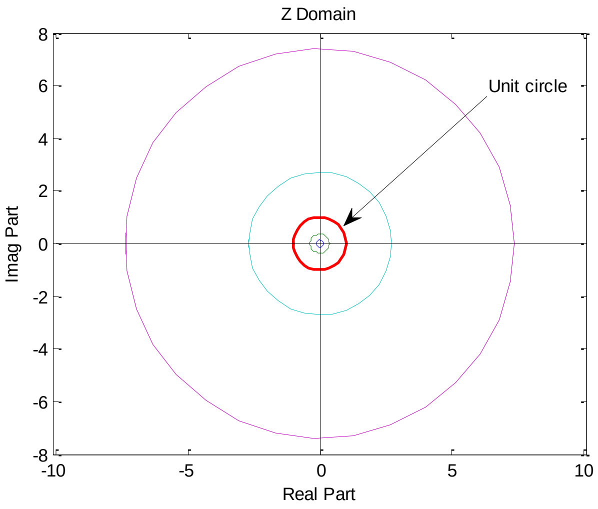
A relação entre o domínio de Laplace e o domínio Z pode, assim, ser efetuada pelo mapeamento:

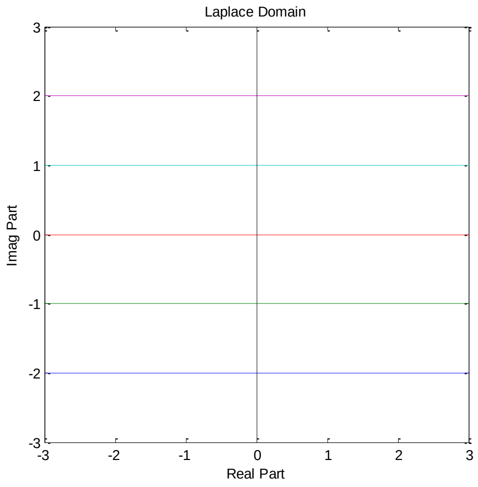
$$z = e^{hs} = e^{h(\sigma + j\omega)} = e^{h\sigma} e^{jh\omega}$$

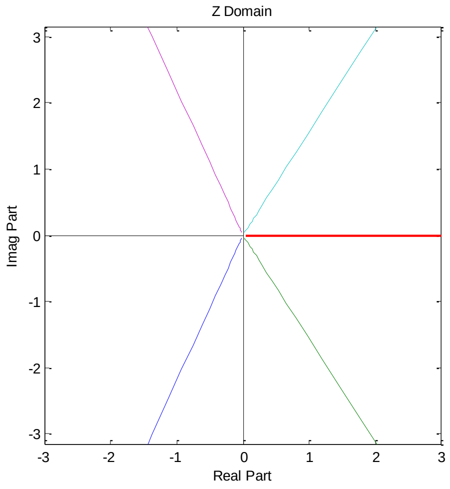
Magnitude

Fase









Função de Transferência no Domínio Z

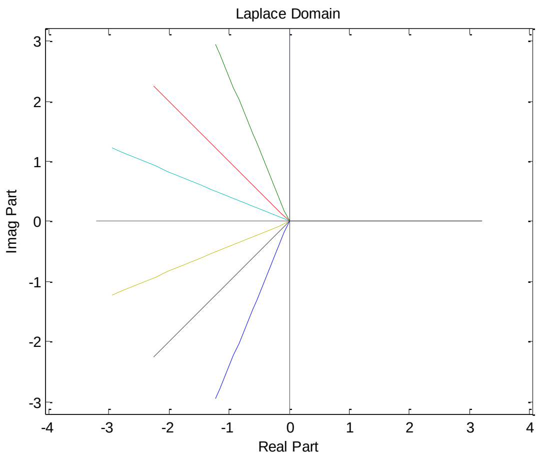
Relação entre o Domínio de Laplace e o Domínio Z

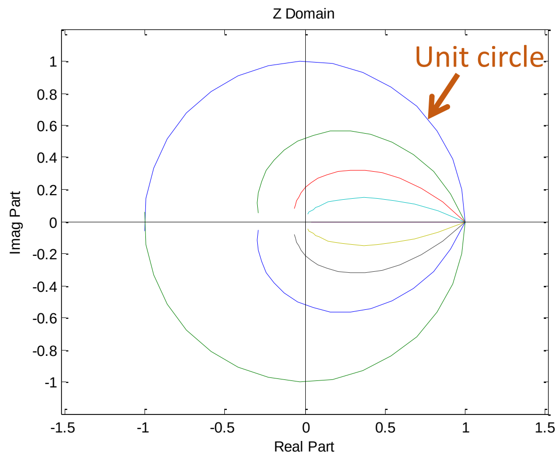
A relação entre o domínio de Laplace e o domínio Z pode, assim, ser efetuada pelo mapeamento:

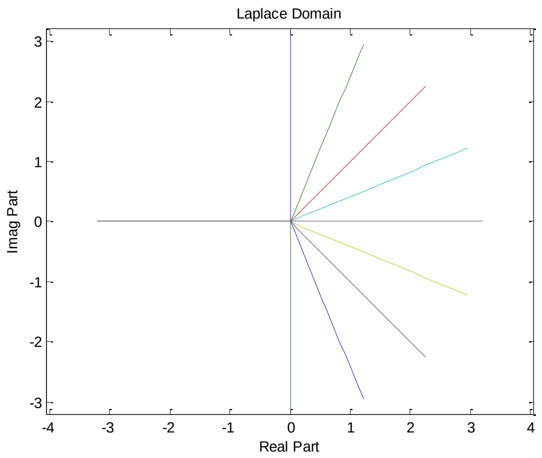
$$z = e^{hs} = e^{h(\sigma + j\omega)} = e^{h\sigma} e^{jh\omega}$$

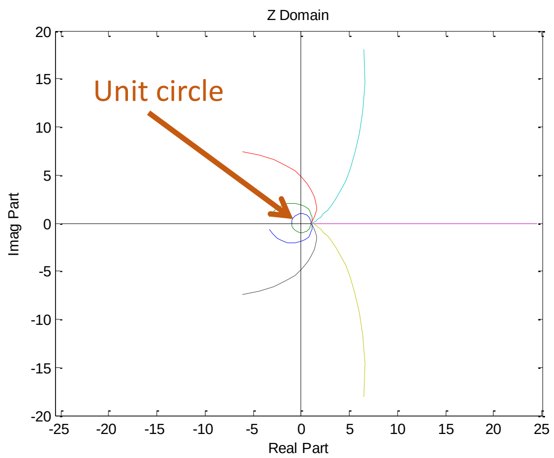
Magnitude

Fase









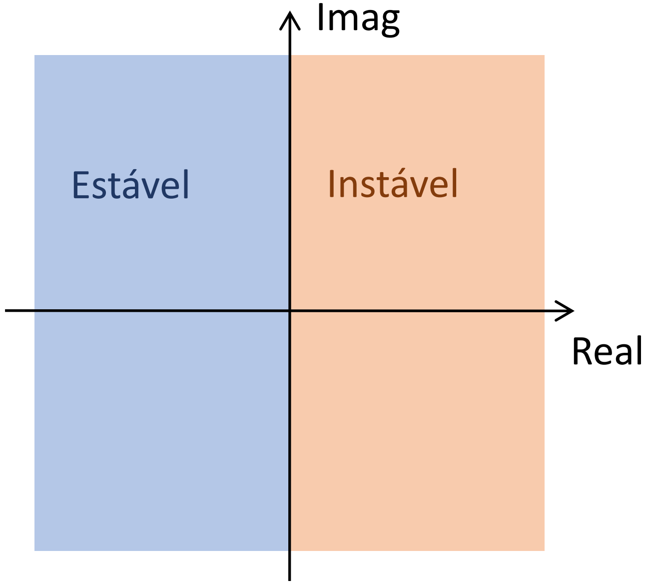
Função de Transferência no Domínio Z

Relação entre o Domínio de Laplace e o Domínio Z

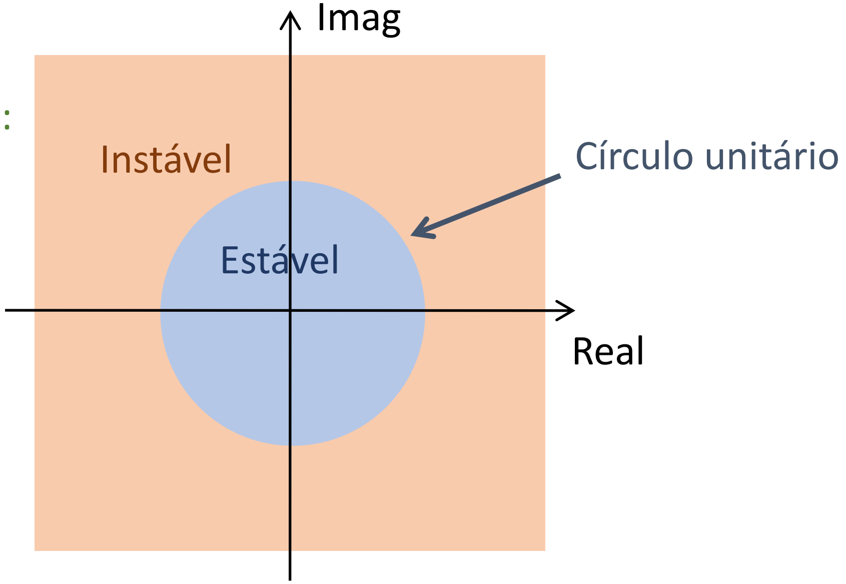
Como se pode observar pelo gráfico anterior, o semiplano esquerdo do domínio de Laplace é mapeado no interior do círculo unitário do domínio Z (o eixo imaginário de Laplace é mapeado na circunferência unitária em Z).

Logo, um modelo representado no domínio Z (tempo discreto) será estável (no conceito BIBO) se todos os polos da função de transferência $G(z)$ estiverem no interior do círculo unitário. Se um ou mais polos estiverem fora do círculo unitário, o sistema será instável.

Domínio de Laplace:



Domínio Z:

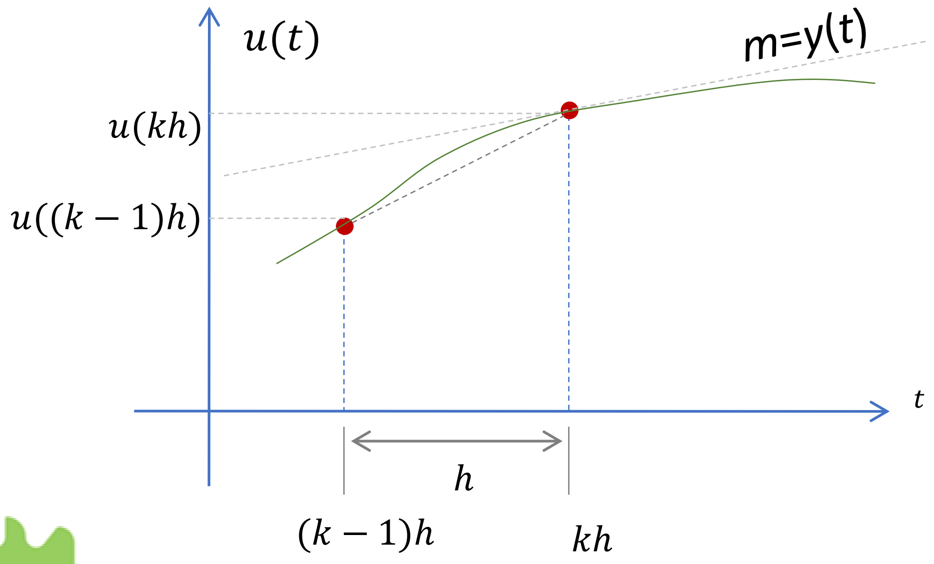


Função de Transferência no Domínio Z

Técnicas de Conversão do Domínio de Laplace para o Domínio Z

As formas de aproximação da derivada de um sinal, na passagem para o domínio de tempo discreto, podem ser diretamente consideradas para converter uma função de transferência em Laplace numa sua aproximação no domínio Z:

Aproximação *Backward Euler*:



No domínio do tempo: $y(kh) = \frac{du(t)}{dt}_{|t=kh} \approx \frac{u(kh) - u((k-1)h)}{h}$

No domínio Z: $Y(z) \approx \left[\frac{1}{h}(1 - z^{-1})\right] U(z)$

Como derivar no tempo corresponde a multiplicar por s em Laplace, esta aproximação consiste em substitui:

$$s \leftrightarrow \frac{1}{h}(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{hz}$$

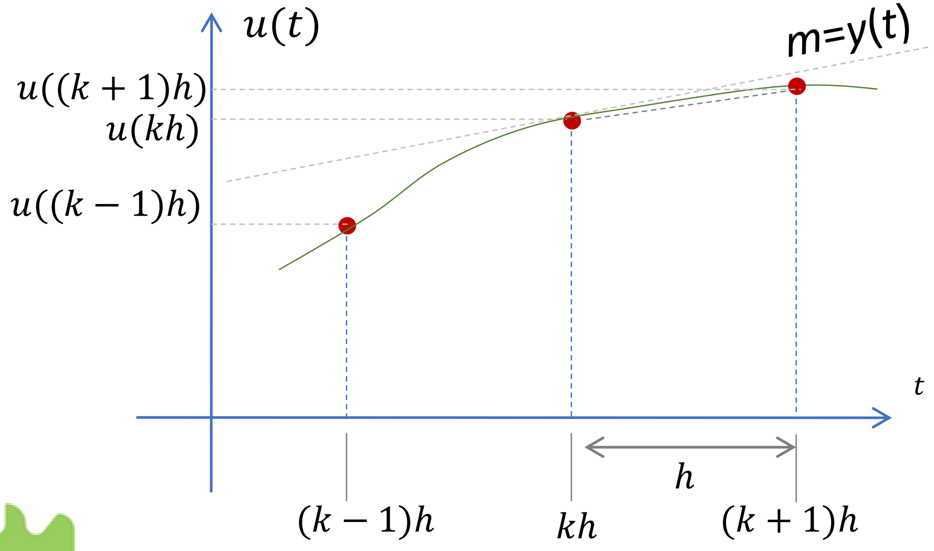
$$z \leftrightarrow \frac{1}{1 - sh}$$

Função de Transferência no Domínio Z

Técnicas de Conversão do Domínio de Laplace para o Domínio Z

As formas de aproximação da derivada de um sinal, na passagem para o domínio de tempo discreto, podem ser diretamente consideradas para converter uma função de transferência em Laplace numa sua aproximação no domínio Z:

Aproximação *Forward Euler*:



No domínio do tempo: $y(kh) = \frac{du(t)}{dt}_{|t=kh} \approx \frac{u\big((k+1)h\big) - u(kh)}{h}$

No domínio Z: $Y(z) \approx \left[\frac{1}{h}(z-1)\right] U(z)$

Como derivar no tempo corresponde a multiplicar por s em Laplace, esta aproximação consiste em substitui:

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{h}$$

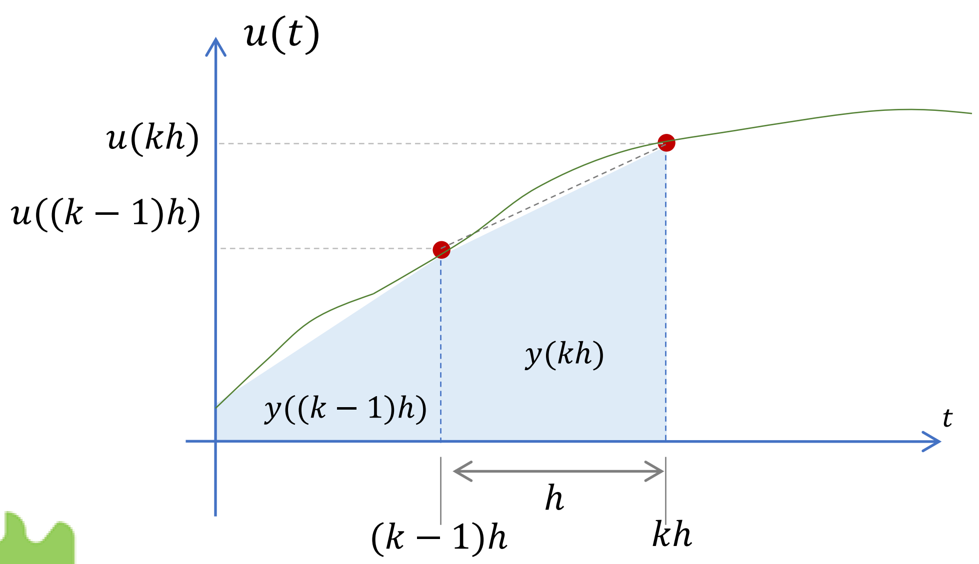
$$z \leftrightarrow 1 + sh$$

Função de Transferência no Domínio Z

Técnicas de Conversão do Domínio de Laplace para o Domínio Z

As formas de aproximação da derivada de um sinal, na passagem para o domínio de tempo discreto, podem ser diretamente consideradas para converter uma função de transferência em Laplace numa sua aproximação no domínio Z:

Aproximação Bilinear (ou Trapezoidal; ou de Tustin):



No domínio do tempo: $$y(kh) = \int_0^{kh} u(t)dt \approx y\big((k-1)h\big) + \frac{h}{2}\big(u(kh) + u((k-1)h)\big)$$

No domínio Z: $$Y(z) \approx \left[\frac{h}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}\right] U(z)$$

Como integrar no tempo corresponde a dividir por s em Laplace, esta aproximação consiste em substitui:

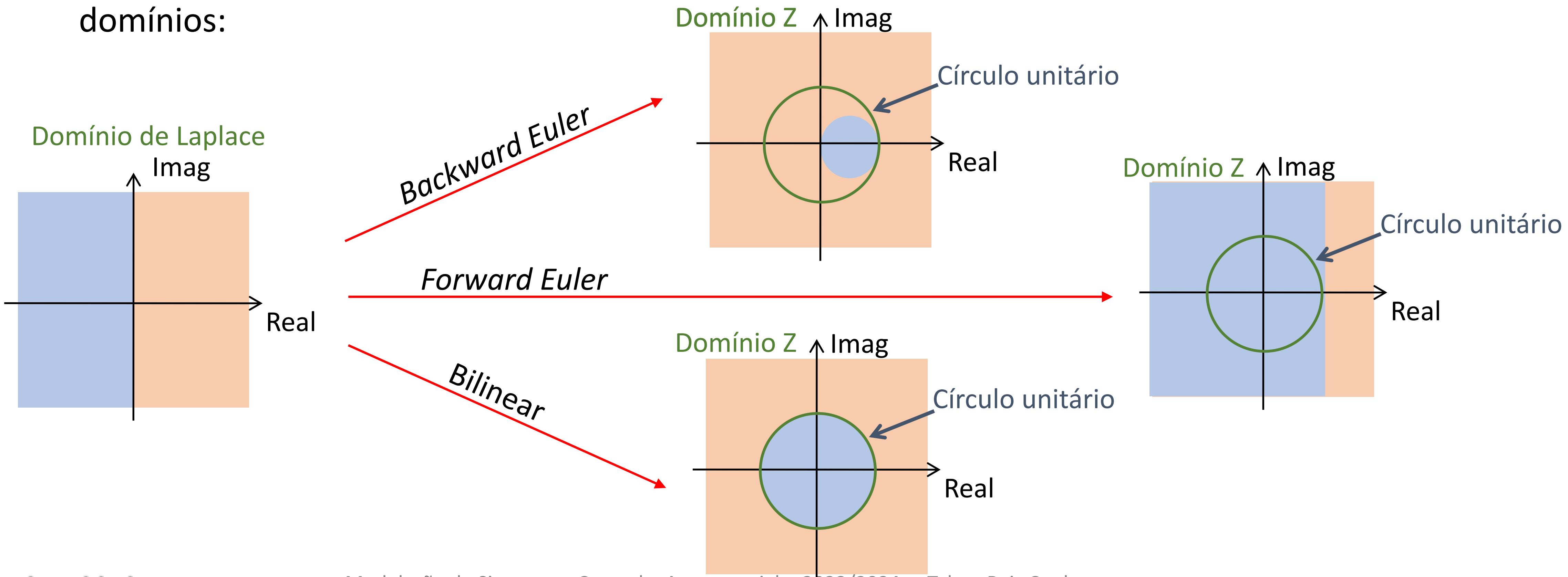
$$s \leftrightarrow \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

$$z \leftrightarrow \frac{h}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Função de Transferência no Domínio Z

Técnicas de Conversão do Domínio de Laplace para o Domínio Z

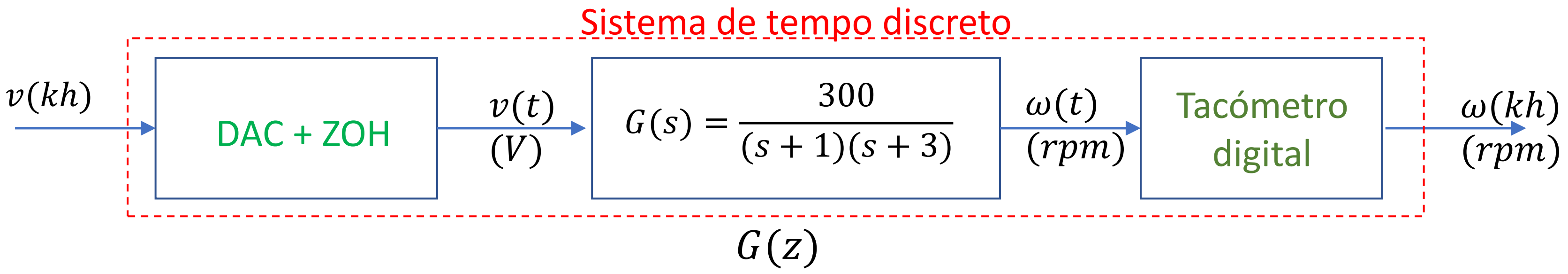
Estas três técnicas de aproximação correspondem aos seguintes mapeamentos entre os dois domínios:



Função de Transferência no Domínio Z

Técnicas de Conversão do Domínio de Laplace para o Domínio Z

Exercício: Considere o seguinte modelo para um motor elétrico, cuja entrada é gerada por um processador digital (sendo esta convertida para tensão elétrica por um conversor Digital-Analógico, DAC, seguido de um *Zero-Order Hold*, ZOH), e a velocidade de rotação do seu eixo é medida por um tacómetro digital (cujas amostras são síncronas com as do sinal de entrada, ambos usando um período de amostragem h):



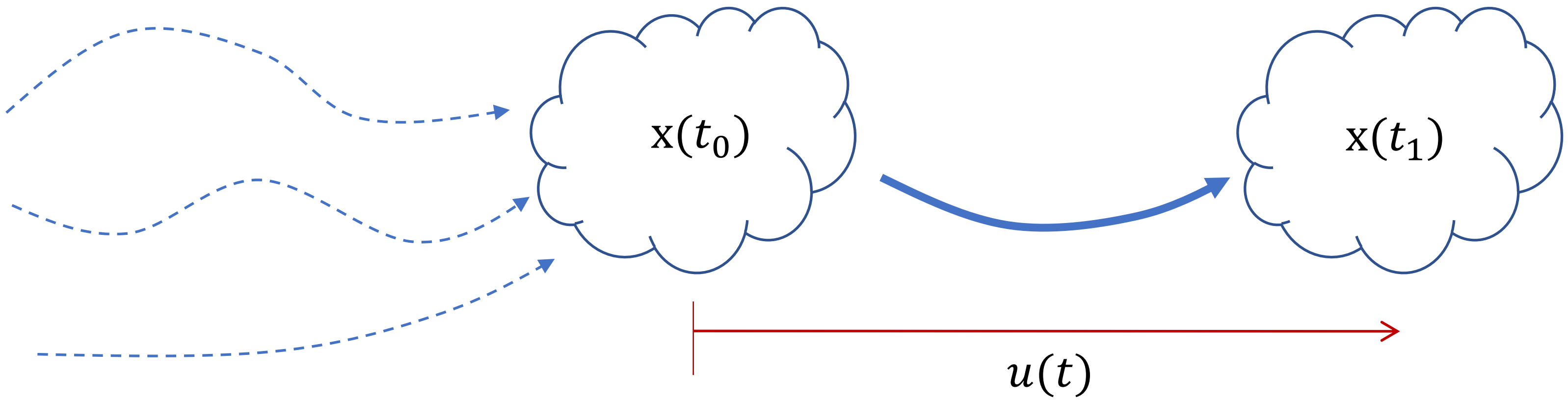
Obtenha três modelos deste sistema, no domínio do tempo discreto, usando cada uma das aproximações anteriores, e simule a resposta de cada um quando se aplica, em $t = 0$, uma tensão de $5\ V$, para os seguintes períodos de amostragem: $h = 0.1\ seg$, $h = 1\ seg$, e $h = 2\ seg$.

Índice

Representação em Espaço de Estados

Noção de Estado e de Variáveis de Estado

As **variáveis de estado** são um conjunto de variáveis que, num determinado instante de tempo t, definem completamente o **Estado** do sistema.
Se se conhecer o estado de um sistema no instante t_0, e sabendo como a entrada evolui de t_0 a t_1, então pode-se determinar o estado do sistema em t_1 (independentemente do que ocorreu antes de t_0).



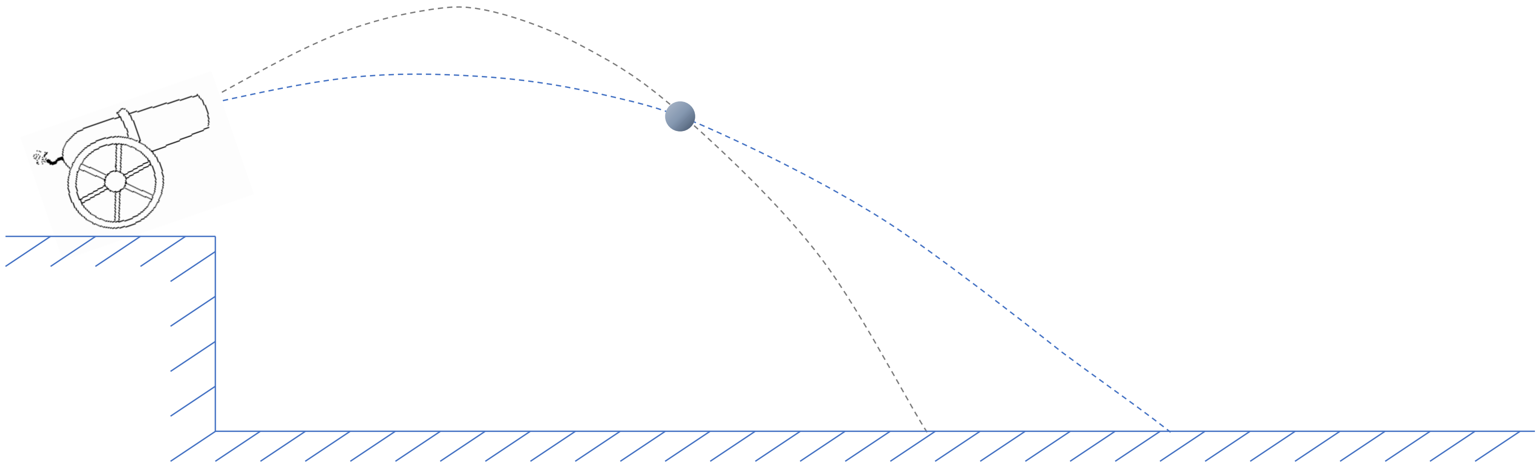
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Vetor de Estado

Representação em Espaço de Estados

Noção de Estado e de Variáveis de Estado

Exemplo: Identificar as variáveis de estado que, após o disparo, definem completamente o estado do seguinte sistema, em cada instante de tempo.



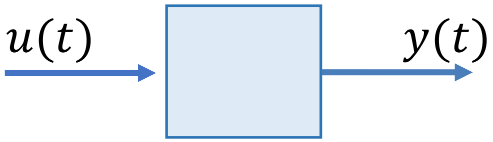
Haverá mais que um conjunto possível de variáveis de estado?

Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Contínuo

O Modelo de Espaço de Estados

Considere-se a seguinte equação da dinâmica de um determinado sistema:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$



Matematicamente, esta equação diferencial de ordem n pode facilmente ser representada por um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_k(t)}{dt} = x_{k+1}(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t) \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-1}x_n(t) + b_0u(t) \end{cases}$$

onde:

$$x_k(t) = \frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}}, k = 1,2,\cdots,n$$

Variáveis de Estado

Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Contínuo

$u(t)$ → □ → $y(t)$

O Modelo de Espaço de Estados

Este sistema de equações pode ser colocado na forma matricial:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_k(t)}{dt} = x_{k+1}(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t) \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-1}x_n(t) + b_0u(t) \end{cases}$$

onde:

$$x_k(t) = \frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}}, k = 1,2,\cdots,n$$

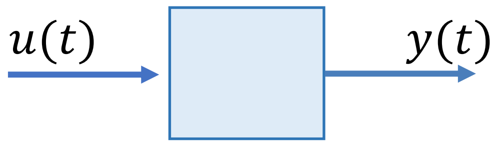
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Vetor de Estado

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t)}$$

Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Contínuo



O Modelo de Espaço de Estados

E o sinal de saída, $y(t)$, pode ser descrito por composição linear das variáveis de estado (e, eventualmente, do sinal de entrada):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_k(t)}{dt} = x_{k+1}(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t) \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-1}x_n(t) + b_0u(t) \end{cases}$$

onde:

$$x_k(t) = \frac{d^{k-1}y(t)}{dt^{k-1}}, k = 1,2,\cdots,n$$

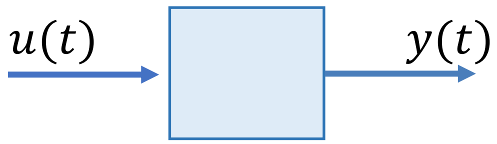
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Vetor de Estado

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\mathbf{x}(t) + [0]u(t)$$

$$\boxed{y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t)}$$

Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Contínuo



O Modelo de Espaço de Estados

A representação matricial completa do Modelo de Espaço de Estados é, então:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \longrightarrow \text{Equação de Estado (ou da Dinâmica)}$$

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \longrightarrow \text{Equação de Saída}$$

$A \longrightarrow$ Matriz da Dinâmica (ou matriz dos Coeficientes)

$B \longrightarrow$ Matriz de Entrada (ou matriz de Controlo)

$C \longrightarrow$ Matriz de Saída (ou matriz de Medida, ou de Observação)

$D \longrightarrow$ Matriz de Transmissão Direta

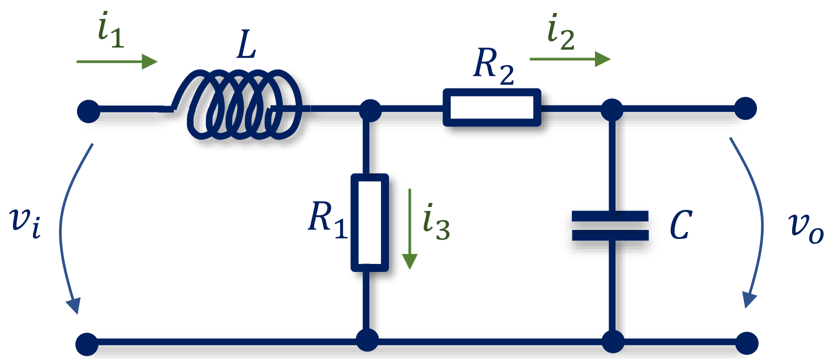
Os valores próprios da matriz da dinâmica são os polos do sistema:

$$|\lambda I - A| = 0 \longrightarrow \text{Equação Característica}$$

O Modelo de Espaço de Estados

O número mínimo de variáveis de estado necessárias para representar um sistema linear é igual à ordem do sistema (i.e., ao número de elementos que podem armazenar energia, de forma independente).

Exercício: Determine duas representações em espaço de estados para o seguinte circuito elétrico:



O Modelo de Espaço de Estados

Existem várias técnicas distintas para se obter uma representação em espaço de estados a partir da equação diferencial da dinâmica.

Exercício: Obtenha um modelo em espaço de estados correspondente às seguintes equações da dinâmica:

a) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0u(t)$$

b) $$\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0u(t)$$

O Modelo de Espaço de Estados

A relação entre o modelo de espaço de estados e a função de transferência em Laplace pode ser facilmente obtida por aplicação direta da transformada de Laplace à representação em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\boxed{Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)}$$

Exercício: Verifique que os polos da função de transferência são iguais aos valores próprios de A.

Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Contínuo

O Modelo de Espaço de Estados

A representação em espaço de estado de um determinado sistema não é única – depende da escolha das variáveis de estado consideradas.

Considere-se uma matriz de transformação (invertível, naturalmente) T, de dimensões $(n \times n)$, que transforma o vetor de estado $\mathbf{z}(t)$ no vetor de estado $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = T\mathbf{z}(t)$$

Então:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T\dot{\mathbf{z}}(t) = AT\mathbf{z}(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT\mathbf{z}(t) + Du(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = [T^{-1}AT]\mathbf{z}(t) + [T^{-1}B]u(t) \\ y(t) = [CT]\mathbf{z}(t) + [D]u(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \bar{A}\mathbf{z}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}\mathbf{z}(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \longrightarrow$$

Representação em espaço de estados alternativa

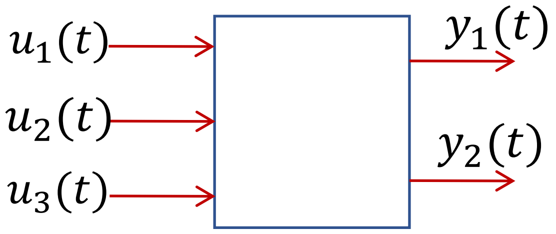
Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Contínuo

O Modelo de Espaço de Estados

A representação em espaço de estado pode ser facilmente estendida para sistemas MIMO.

Exemplo: Considere-se o seguinte sistema 3I2O representado pelas seguintes ODEs:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + a_{11}\dot{y}_1 + a_{10}y_1 = b_{10}u_1 + b_{30}u_3 \\ \ddot{y}_2 + a_{21}\dot{y}_2 + a_{20}y_2 = c_{20}u_2 + c_{30}u_3 \end{cases}$$



Escolhendo como variáveis de estado as duas saídas e as suas sucessivas derivadas:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{10} & -a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_{20} & -a_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & b_{30} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{20} & c_{30} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

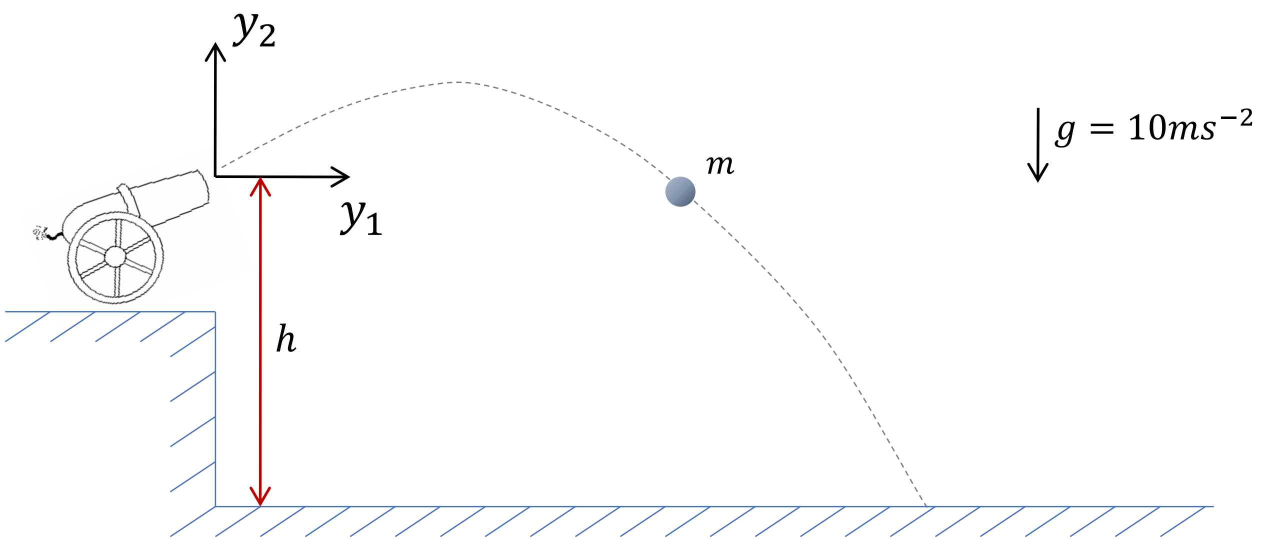
Mantém a mesma formulação!

O Modelo de Espaço de Estados

Exercício: Considere o seguinte problema de balística, com condições iniciais:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_1(0) = v_1 \\ \dot{y}_2(0) = v_2 \end{cases}$$

Modele o atrito através de uma força proporcional à velocidade do projétil relativamente ao ar, sendo f (coeficiente de atrito dinâmico) o fator de proporcionalidade.



a) Obtenha um modelo de espaço de estados para este sistema.

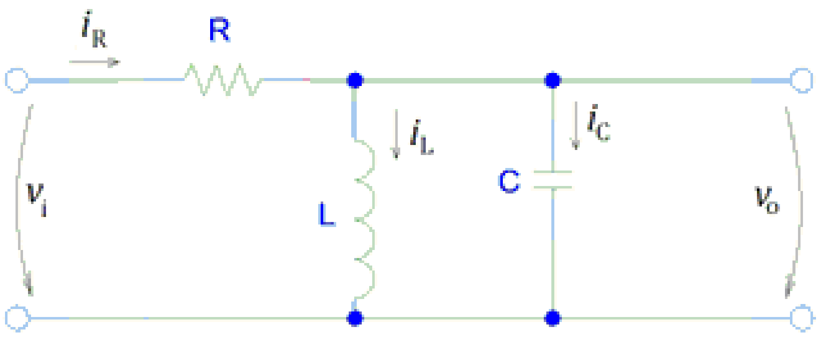
b) Simule o sistema no Matlab, considerando:

$$\begin{cases} v_1 = 20\ ms^{-1} \\ v_2 = 20\ ms^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} m = 1\ kg \\ h = 20\ m \\ f = 0.2\ Nsm^{-1} \end{cases}$$

c) Compare a solução com o caso em que não é considerado o atrito com o ar.

O Modelo de Espaço de Estados

Exercício: Considere o seguinte circuito eletrónico, com condições iniciais nulas:



a) Obtenha um modelo de espaço de estados para este sistema, considerando como variáveis de estado a tensão no condensador e a corrente na bobine.

b) Simule o sistema no Matlab, considerando: $\begin{cases} R = 50\ \Omega \\ L = 2\ mH \\ C = 10\ nF \end{cases}$

quando se aplica à entrada o seguinte sinal de tensão:

Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Discreto

O Modelo de Espaço de Estados

Considere-se, agora, que os sinais (de entrada e de saída) são sincronamente amostrados com período de amostragem constante, h.

Tal como foi apresentada a equação de diferenças, proveniente da equação diferencial da dinâmica (no domínio de tempo contínuo), obtém-se uma representação em espaço de estados para o caso dos sistemas em tempo discreto:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{cases}}$$

Note-se que pode ser obtida uma versão de tempo discreto que produza, nos instantes de amostragem, resultados exatamente iguais (e não apenas aproximados) aos do modelo correspondente no domínio de tempo contínuo.

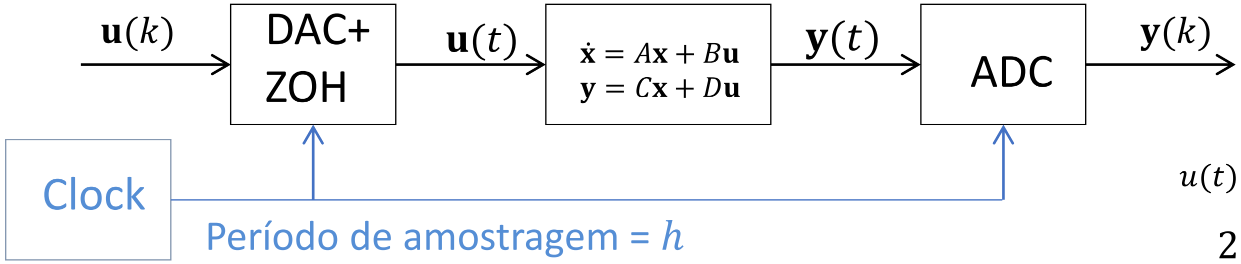
Representação em Espaço de Estados – Domínio de Tempo Discreto

O Modelo de Espaço de Estados

Exercício: O sistema composto por um duplo integrador pode ser representado, no domínio de tempo contínuo, pelo seguinte modelo de espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + [0] \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Assuma-se, agora, que esse sistema é operado através de uma interface digital, onde os sinais de entrada e de saída são amostrados sincronamente com o período de amostragem $h = 1\ seg$. O sinal de entrada é aplicado através de um conversor digital-analógico seguido de um *Zero-Order Hold*, como apresentado na figura:



Obtenha um modelo em espaço de estados, no domínio do tempo discreto, que represente o comportamento deste sistema e simule-o no Matlab para o seguinte sinal de entrada: