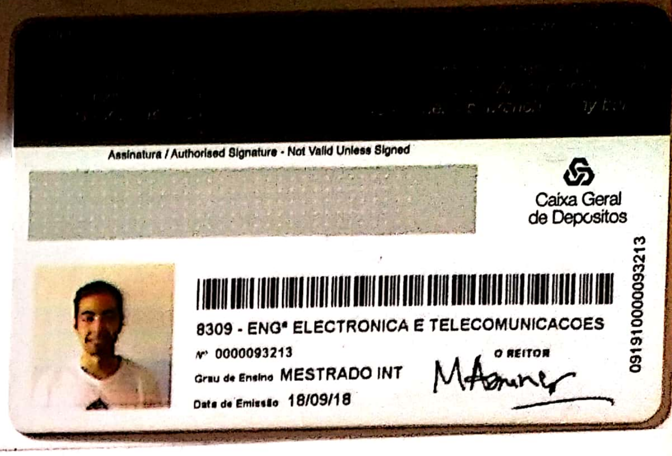
Miguel Caça Coelho - 93213

Sistemas e Controlo - 16/Fev/2021



1. $y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} + 2u(t) + 1$

$\downarrow \mathcal{L}$

$y(s) = 3s\,U(s) + 2U(s) + 1$

$(=)\ y(s) = U(s)(3s+2) + 1$

Para ser linear tem de verificar estas condições: $\begin{cases} y(x_1+x_2) = y(x_1) + y(x_2) \\ y(\alpha x) = \alpha y(x) \end{cases}$

$y(\alpha s) = U(\alpha x)(3\alpha s + 2) + 1 \neq \alpha\left(U(s)(3s+2)+1\right)$

Logo o modelo ñ é linear.

2. $G_s = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{A}{(s+a)(s+b)}$ resposta a um ~~degrau~~ impulso $U(s)$ $\longrightarrow U_f = 1 = y_{ss}$

$y(s) = \frac{A}{(s+a)(s+b)}\,U(s)$

~~$y_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{A}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{ab}$~~ $\quad 1 = \frac{A}{ab} \Rightarrow A = ab$.

$y(s) = \frac{A}{(s+a)(s+b)} = \cancel{\frac{A_1}{s}} + \frac{A_2}{(s+a)} + \frac{A_3}{(s+b)}$

$A_2 = \left[(s+a)\,y(s)\right]_{s=-a} = \frac{A}{-a+b}$

$A_3 = \left[(s+b)\,y(s)\right]_{s=-b} = \frac{A}{-b+a}$

~~$A_1 = \left[s \cdot y(s)\right]_{s=0} = \frac{A}{ab}$~~

~~$A_2 = \left[(s+a)\,y(s)\right]_{s=-a} = \left[\frac{A}{s(s+b)}\right]_{s=-a} = \left[\frac{A}{-a(-a+b)}\right] = \frac{A}{a^2-ab}$~~

~~$A_3 = \left[(s+b)\,y(s)\right]_{s=-b} = \left[\frac{A}{s(s+a)}\right]_{s=-b} = \frac{A}{-b(-b+a)} = \frac{A}{b^2-ab}$~~

Logo ~~$y(s) = \left(\frac{A}{ab}\cdot\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{A}{a^2-ab}\cdot\frac{1}{(s+a)}\right) + \left(\frac{A}{b^2-ab}\cdot\frac{1}{(s+b)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{A}{ab} + \frac{A}{a^2-ab}e^{-at} + \frac{A}{b^2-ab}e^{-bt}$~~

Por análise do gráfico sabemos que $y(1) = 0{,}5$ e sabemos também que $A = ab$, então

~~$y(1) = \frac{ab}{ab} + \frac{ab}{-a(-a+b)}e^{-a} + \frac{ab}{-b(-b+a)}e^{-b(1)} = 0{,}5$~~

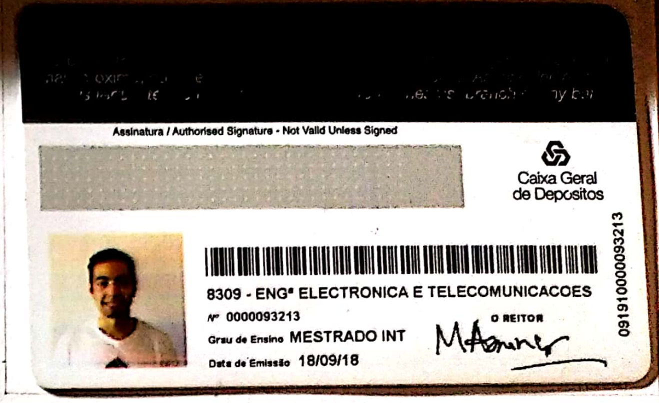
$y(s) = \frac{A}{-a+b}\cdot\frac{1}{(s+a)} + \frac{A}{-b+a}\cdot\frac{1}{(s+b)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{A}{-a+b}e^{-at} + \frac{A}{-b+a}e^{-bt}$

$y(1) = \frac{ab}{-a+b}e^{-a} + \frac{ab}{-b+a}e^{-a} = 0{,}5$

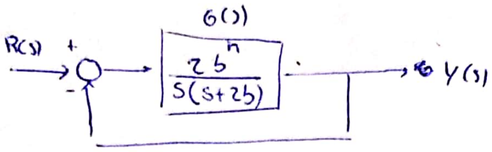
$\frac{ab}{-a+b}e^{-a} = 0{,}25 \Rightarrow \wedge\ \frac{ab}{-b+a} = 0{,}25$.

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e controlo - 16/Fev/2021



3.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{2b^n}{s(s+2b)+2b^n} = \frac{2b^n}{s^2+2bs+2b^n} = \frac{A}{s^2+2s\xi w_n + w_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi w_n = 2b \\ w_n^2 = 2b^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi w_n = b \\ w_n = \sqrt{2b^n} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{b^n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^n} = b \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^n}} \end{cases}$$

Para ter sobreelevação $\longrightarrow$ regime subamortecido, ou seja $0 < \xi < 1$

logo $0 < \frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^n}} < 1$

Sabemos também que sobreelevação $= P_o = 100\, e^{\left(\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$

Como ξ depende do valor de b, a sobreelevação também vai depender de b.

Então, como o nosso objectivo é termos uma sobreelevação independente de $b \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{b^n}} = 1$

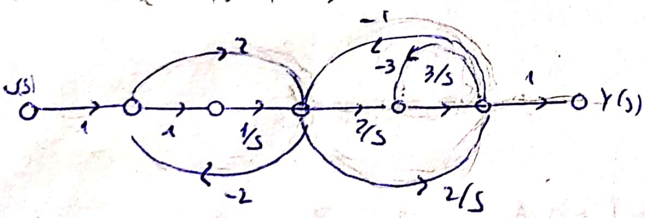
Logo $n = 2$ $\left(\frac{b}{\sqrt{b^2}} = 1\right)$

Portanto

$0 < \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. ✓

$P_o = 100\, e^{-3{,}14} \simeq 4{,}32\,\%$

4.



$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

Caminho para a frente

$T_1 = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s}\cdot\frac{3}{s}\cdot 1 = \frac{6}{s^3}$

$T_2 = 1\cdot 2\cdot\frac{2}{s}\cdot\frac{3}{s}\cdot 1 = \frac{12}{s^2}$

$T_3 = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s}\cdot 1 = \frac{2}{s^2}$

$T_4 = 1\cdot 2\cdot\frac{2}{s}\cdot 1 = \frac{4}{s}$

Cofatores

$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$

$\Delta_2 = 1 - 0 = 1$

$\Delta_3 = 1 - 0 = 1$

$\Delta_4 = 1 - 0 = 1$

Malhas

1 a 1

$L_{11} = 1\cdot\frac{1}{s}\cdot(-2) = -\frac{2}{s}$

$L_{12} = 2\cdot(-2) = -4$

$L_{13} = \frac{2}{s}\cdot\frac{3}{s}\cdot(-1) = -\frac{6}{s^2}$

$L_{14} = -1\cdot(2/s) = -\frac{2}{s}$

$L_{15} = -3\cdot\frac{3}{s} = -\frac{9}{s}$

malhas 2 a 2

$L_{21} = \left(\frac{3}{s}\cdot(-3)\right)\cdot\left(\frac{1}{s}\cdot(-2)\right) = \frac{18}{s^2}$

$L_{22} = \left(\frac{3}{s}\cdot(-3)\right)\cdot(-4) = \frac{36}{s}$

malhas 3 a 3 ñ há!

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e Controlo - 16/Fev/2021

Determinante

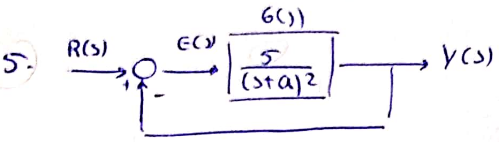
$$\Delta = 1 - \left(-\frac{2}{s} - 4 - \frac{6}{s^2} - \frac{2}{s} \cdot \frac{9}{s}\right) + \left(\frac{16}{s^2} + \frac{36}{s}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{s} + 4 + \frac{6}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{9}{s} + \frac{16}{s^2} + \frac{36}{s}$$

$$= \frac{24}{s^2} + \frac{49}{s} + 1 = \frac{24 + 49s + s^2}{s^2}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{6}{s^3} + \frac{12}{s^2} + \frac{2}{s^2} + 4/s}{\frac{24 + 49s + s^2}{s^2}} = \frac{\frac{6 + 14s + 4s^2}{s^3}}{\frac{24s + 49s^2 + s^3}{s^3}} = \frac{4s^2 + 14s + 6}{24s + 49s + s^3}$$

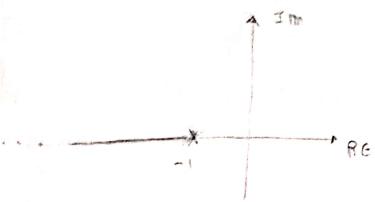
5.



Polo duplo em (-a)

Aplicar Regra de Evans

Para a



6. ~~usar~~ $K=3 \Rightarrow$ limiar de estabilidade

$$G(s)\underbrace{H(s)}_{1} = \frac{A(s+2)^3}{(s-1)(s+1)(s+3)}$$

n° de assintotas $= \underbrace{n}_{n^{\circ} \text{ de zeros}} - \underbrace{m}_{n^{\circ} \text{ de polos}}$

Como o n° de assintotas $= 0$

$\Rightarrow n^{\circ}$ de zeros $= n^{\circ}$ de polos $= 3$

Ponto de partida

$$W(s) = \frac{1}{G(s)H(s)} = \frac{(s-1)(s+1)(s+3)}{(s+2)^3} = \frac{(s^2+1)(s+3)}{(s^2+4s+4)(s+2)} = \frac{s^3+3s^2+s+3}{s^3+2s^2+4s^2+6s+4s+8} = \frac{s^3+3s^2+s+3}{s^3+6s^2+12s+8}$$

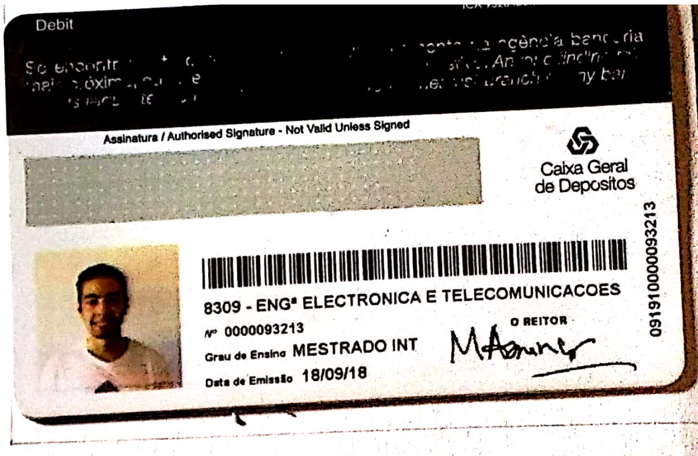
$$\frac{dW(s)}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left[\frac{s^3+3s^2+s+3}{s^3+6s^2+12s+8}\right] = \frac{(3s^2+6s+1)(s^3+6s^2+12s+8) - (3s^2+12s+12)(s^3+3s^2+s+3)}{(s^3+6s^2+12s+8)^2}$$

$$= (\cancel{3s^5} + 18s^4 + \cancel{36s^3} + 24s^2 + 18s^4 + 36s^3 + 72s^2 + 48s + s^3 + 6s^2 + 12s + 8) - 3s^5 - 9s^4 - 3s^3 - 9s^2 - 12s^3 - 36s^3 - 12s^2 - 36s$$

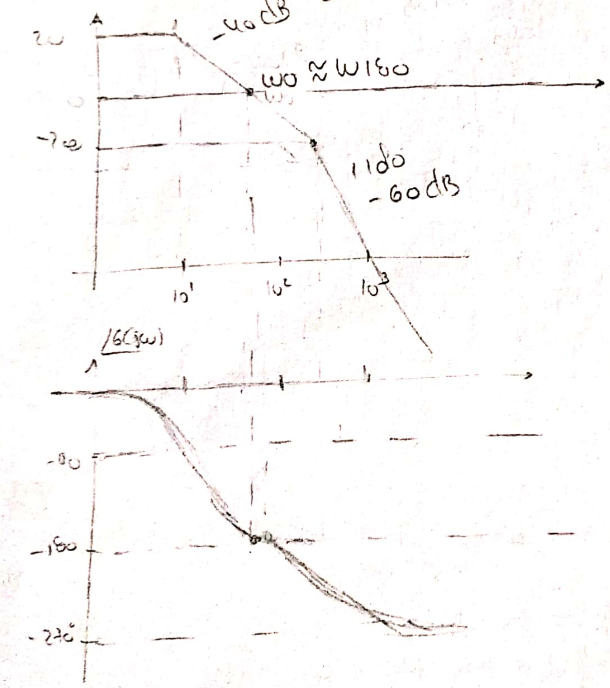
=

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e Controlo - 16/Fev/2021



7. $\omega_z = 20\pi$ rad/s (+do duplo)



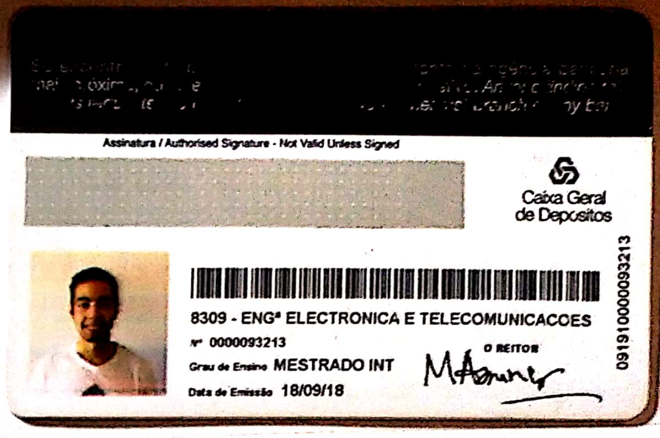
→ Para $\omega_z = -20$dB, verificamos que o sistema é instável

Para ser estável $|G(j\omega)| < 0$dBs (Margem de ganho) e a margem de fase (MF) tem de ser positiva.

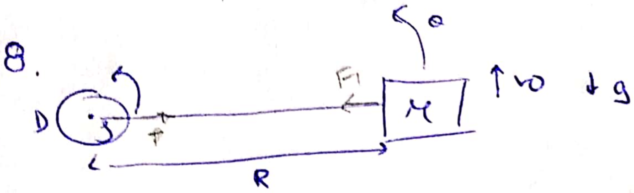
• Mas se ω_z estiver afastado tanto para a esquerda como para a direita de (20π rad/s), vai implicar com que a margem de ganho seja positiva, assim como a margem de fase, e portanto o sistema torna-se estável

Miguel Calça Coelho - 93213

Sistemas e Controlo - 16/Fev/2021



8.



$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{\theta} R$

$T = F_1 R$

Corpo M: $M\ddot{x} = +v_0 - Mg - F_1$

Cil: $J\ddot{\theta} = -B(\dot{\theta}) - \overbrace{F_1 R}^{T}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M(\ddot{\theta} R) = v_0 - Mg - F_1 \\ J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = F_1 R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = v_0 - Mg - MR(\ddot{\theta}) \\ J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = (v_0 - Mg - MR\ddot{\theta}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}(J + MR) + B\dot{\theta} = v_0 - Mg$$