

Modelação de Sistemas e Controlo Aeroespacial

Capítulo 5

Técnicas de Determinação da Posição e da Atitude de Veículos

Telmo Reis Cunha

trcunha@ua.pt

2023/2024

Índice

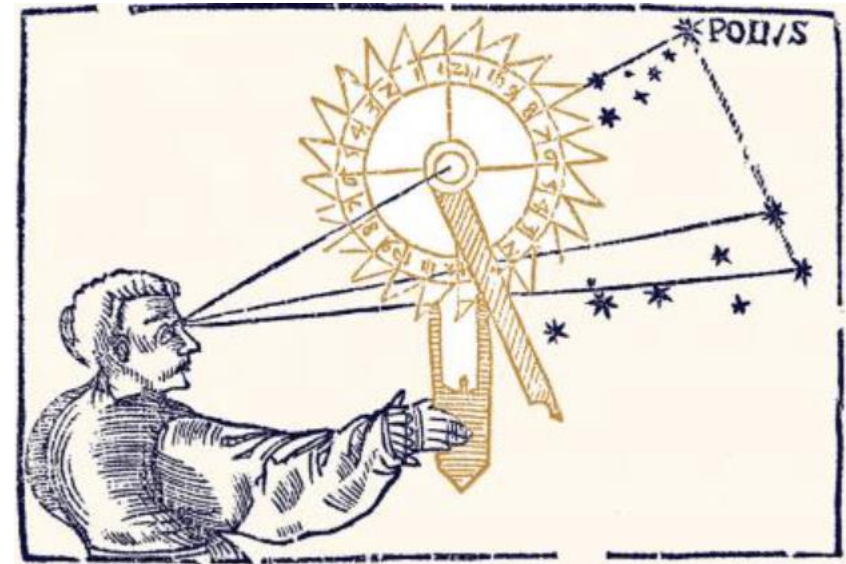
- Introdução
- Sistemas inerciais
- Técnicas de posicionamento por satélite

Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

Desde que se iniciaram as viagens de longo curso (por terra, por mar, pelo ar, e para o espaço), surgiu a necessidade de se conhecer, em cada instante de tempo, a localização e a orientação de pessoas e veículos.

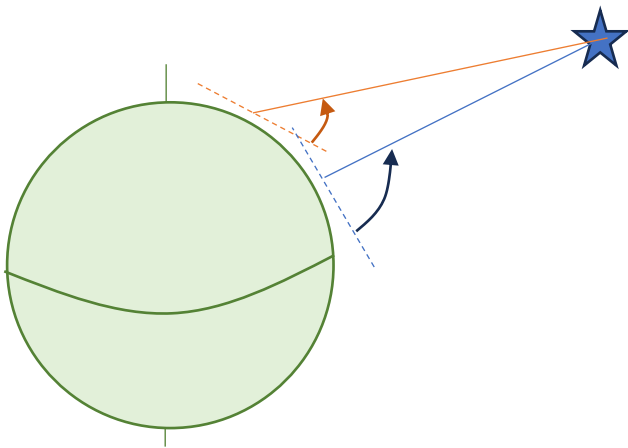
Ao se observar que o céu noturno apresenta diferenças quando observado de vários pontos do planeta, os antigos navegantes desenvolveram técnicas para se guiarem pelas estrelas e astros celestes (referem-se registos de há mais de 4000 anos), uma arte conhecida genericamente por Navegação Celeste.



Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

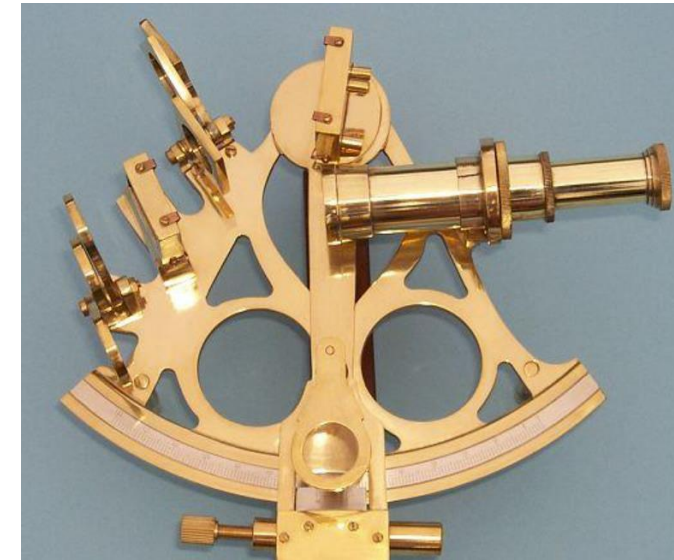
Com a necessidade de se aumentar a precisão das estimativas de localização, surgiram técnicas e instrumentos especializados na medição de ângulos entre uma determinada linha de referência (tipicamente, a horizontal local, e a linha que une o observador a um determinado astro).



A necessidade de medir o tempo com precisão tornou-se igualmente relevante.



Astrolábio
(c. 200 a.C.)



Sextante
(séc. XVIII)

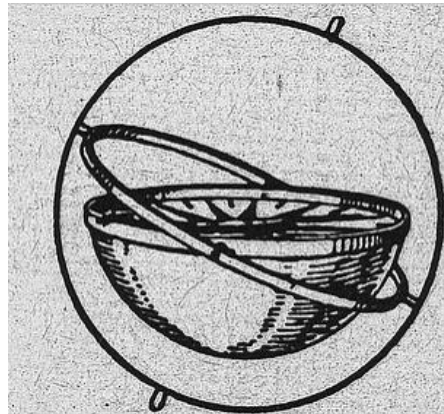
Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

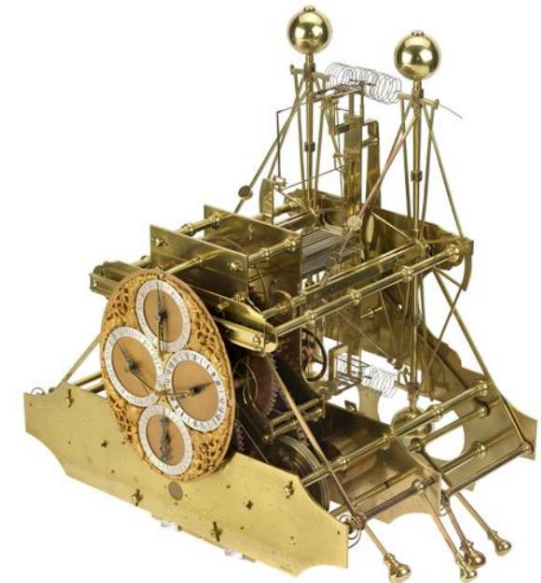
A invenção da bússola (China) e de cronómetros (por exemplo, o de John Harrison, séc. XVIII) vieram a trazer um incremento substancial da precisão de posicionamento, especialmente para embarcações que faziam travessias oceânicas, e outras viagens de longo curso sem referências terrestres visíveis. Estes instrumentos criam medidas referidas a pontos consistentes de referência globais.



Bússola
(c. 200 a.C.)



Bússola náutica
(séc. XVI)



Cronómetro náutico de
John Harrison (séc. XVIII)

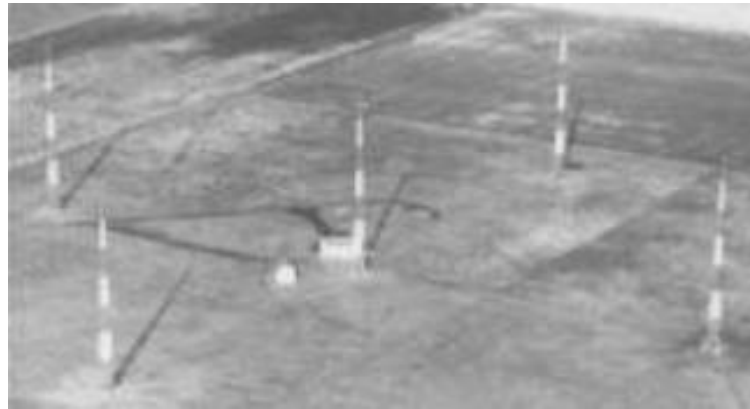
Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

Com a descoberta/dedução das ondas eletromagnéticas e respetiva propagação (transição entre o séc. XIX e o séc. XX), vários sistemas de navegação (especialmente para aeronaves e embarcações) foram desenvolvidos permitindo uma maior precisão a longas distâncias. Os pontos de referência passam a ser criados pelo Homem.



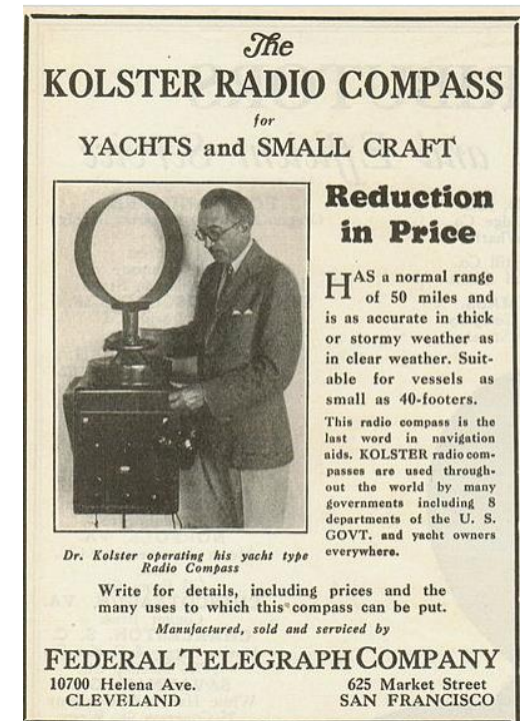
Estação VOR



Estação LFR



Estação ILS



(1930)

Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

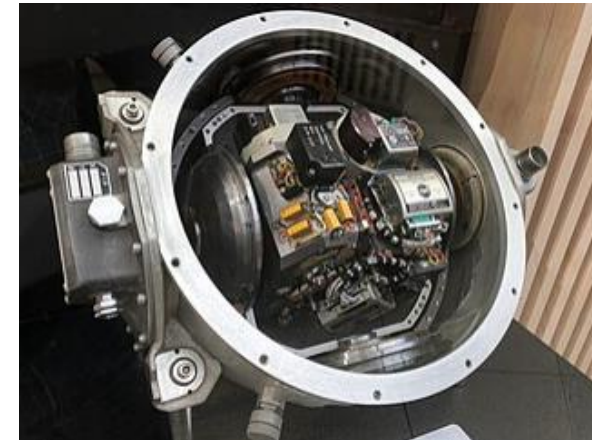
A qualidade da construção de sensores (acelerómetros e giroscópios) e a capacidade de processamento dos dados por estes gerados permitiram, no séc. XX, a criação de Sistemas Inerciais de Navegação (*Inertial Navigation Systems* – INS), que ainda hoje determinam a posição e orientação (atitude) de aeronaves, embarcações e veículos espaciais.



INS



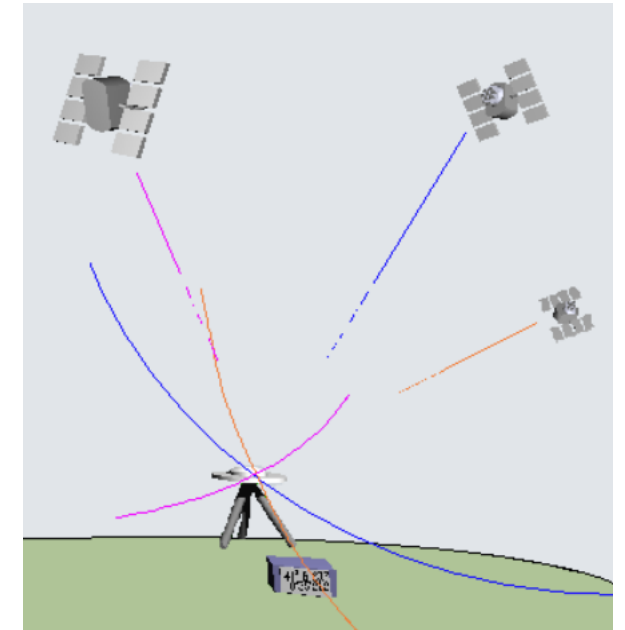
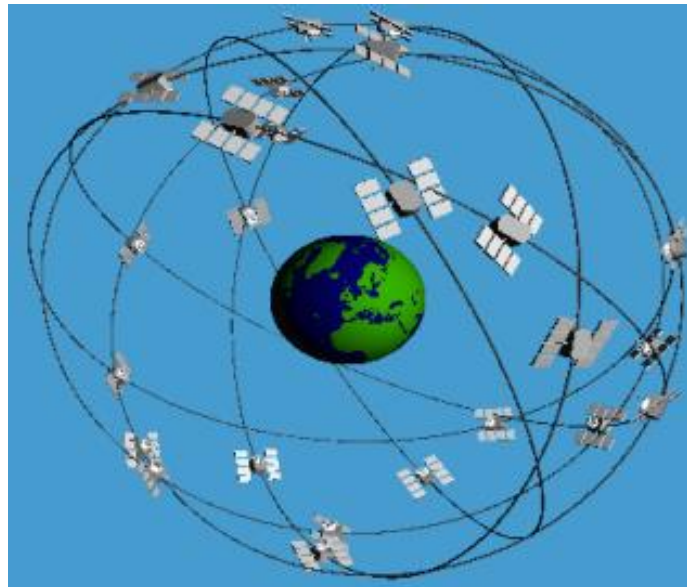
IMU em plataforma estabilizadora
(*gimballed*) das missões Apollo



Introdução

Sistemas de Navegação/Posicionamento

Mais recentemente, introduzidos nas últimas décadas do séc. XX, surgiram os Sistemas de Posicionamento por Satélite (*Global Navigation Satellite Systems* – GNSS) que mais uma vez fazem uso de sinais eletromagnéticos de referência, agora colocados em satélites que circundam a Terra.



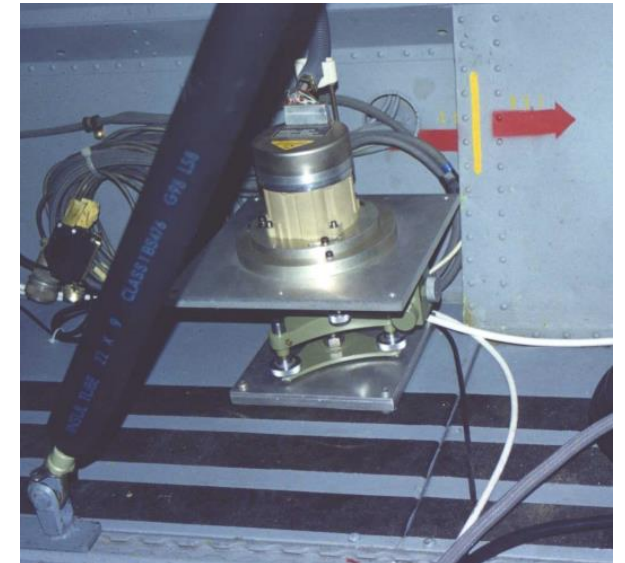
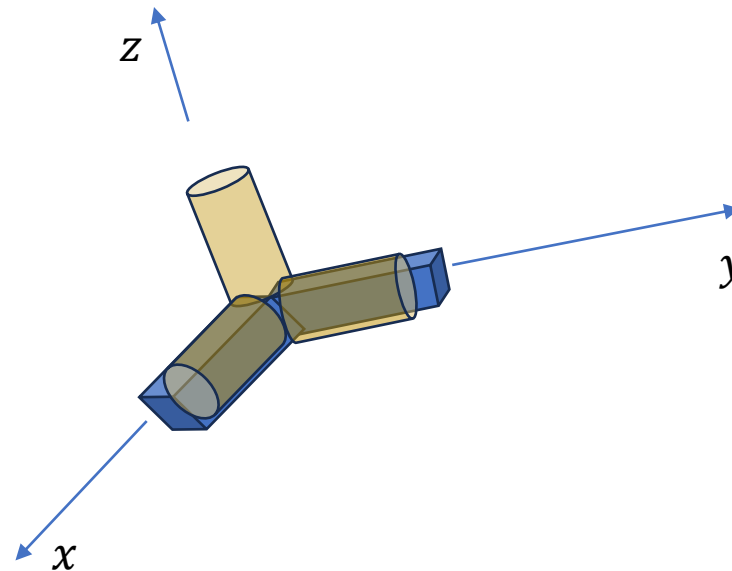
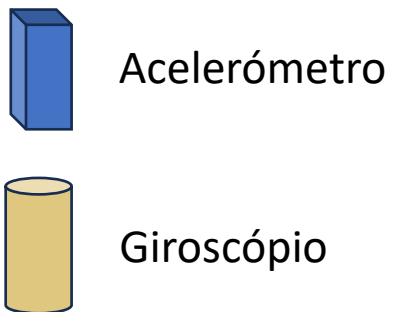
Índice

- Introdução
- **Sistemas inerciais**
- Técnicas de posicionamento por satélite

Sistemas Inerciais

Arquitetura

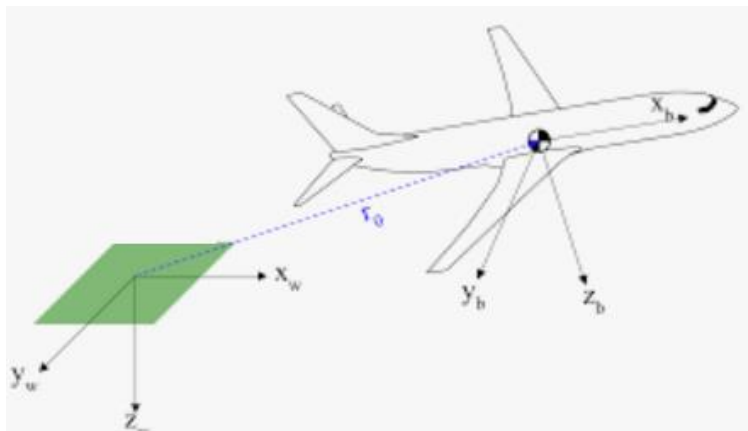
Os sistemas inerciais de navegação (INS) são constituídos por um núcleo de sensores (três pares acelerómetro-giroscópio), denominado por IMU (*Inertial Measurement Unit*), que proporciona (com uma frequência de amostragem elevada, tipicamente da ordem das dezenas ou centenas de medidas por segundo) medidas de aceleração linear e angular ao longo de três eixos ortogonais entre si.



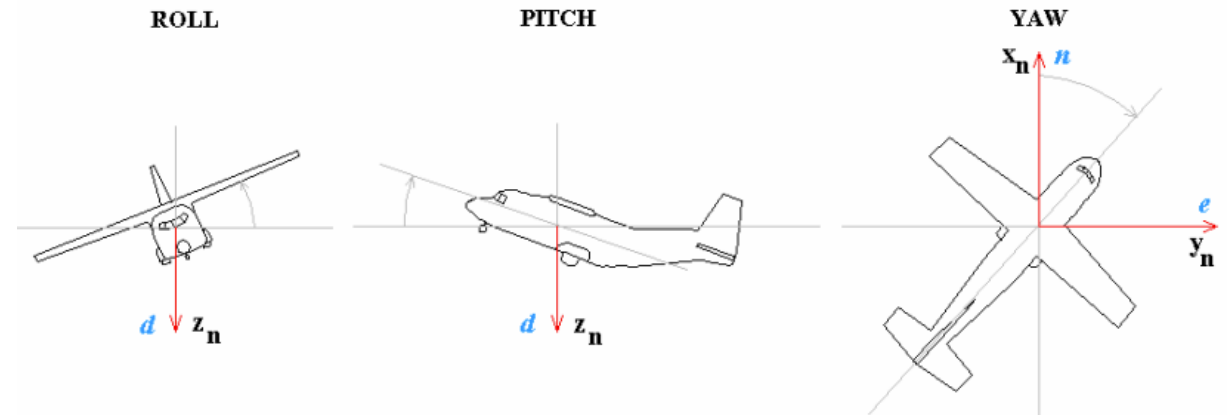
Sistemas Inerciais

Arquitetura

As medidas produzidas pelo IMU são processadas em tempo real por algoritmos de processamento de sinal dedicados (e complexos) por forma a traduzir as acelerações medidas em posição e atitude do veículo ao qual o INS se encontra acoplado.



Determinação da Posição



Determinação da Atitude

Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

Os resultados de posição gerados pelos sistemas inerciais são sempre relativos a uma posição inicial (que não pode ser determinada pelo próprio sistema). Ou seja, o INS não descobre por si só onde se encontra no instante em que é iniciado – esta informação tem que lhe ser fornecida. O INS é, assim, classificado como um sistema de *dead reckoning*.

Para descrever o princípio de funcionamento dos sistemas inerciais, considere-se inicialmente o problema de posicionamento a uma dimensão (1D), baseado na medida de aceleração proporcionada por um acelerómetro linear (assumido, para já, como um sensor ideal).



Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

A determinação da posição, $x(t)$, a partir das medidas de aceleração, $a(t)$, do acelerómetro é efetuada, naturalmente, através da dupla integração ao longo do tempo (como já foi visto, esta operação é efetuada, no domínio do tempo discreto, através de uma aproximação):

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \int_0^\tau a(\sigma) d\sigma d\tau$$

Nota: Assumiu-se $x(0) = 0$.



$$\text{Modelo: } \ddot{x}(t) = a(t)$$

Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

Nos sistemas reais existe sempre a presença de ruído, assim como de pequenos desvios do comportamento ideal dos sensores (*offsets*, *drifts*, variação com a temperatura, ...). Assumindo que estas perturbações, $d(t)$, se manifestam aditivamente às medidas do sensor, observar-se-ia o seguinte resultado:

$$x(t) = \int_0^t \int_0^\tau (a(\sigma) + d(\sigma)) d\sigma d\tau$$

Esta dupla integração, ao longo de muito tempo, das perturbações da medida conduz a um desvio sucessivo da posição do veículo, relativamente à sua trajetória real.

Este constitui o principal problema associado aos sistemas de navegação baseados em sensores inerciais.

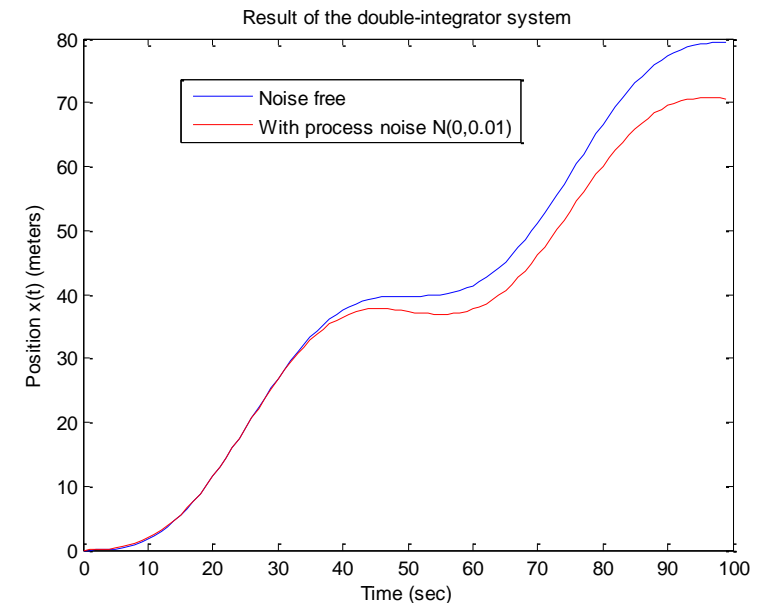
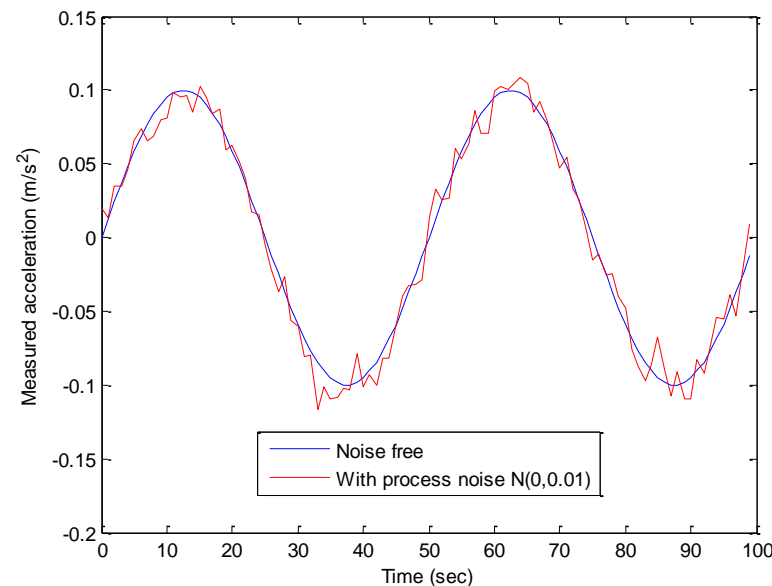
Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 1D)

Para ilustrar, considere-se o exemplo de posicionamento 1D modelado em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Ba(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

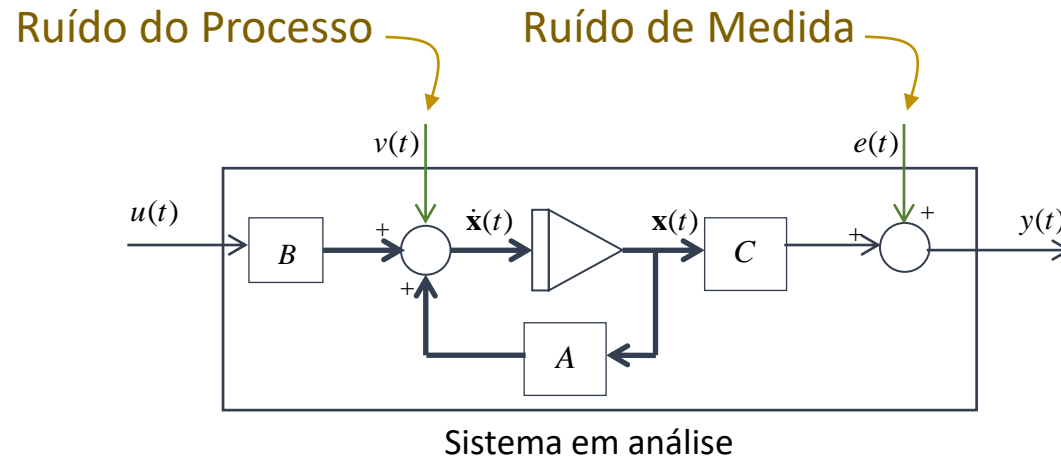
Submetendo o veículo a uma aceleração sinusoidal de 0.1 m/s^2 , e assumindo que o acelerómetro produz medidas perturbadas com ruído branco gaussiano de média nula e desvio padrão igual a 0.01 m/s^2 :



Sistemas Inerciais

Modelação das Fontes de Ruído

Usualmente, consideram-se duas fontes de ruído genéricas: ruído do processo e ruído de medida. Estas são usualmente modeladas através da representação do sistema em espaço de estados:



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + e(t) \end{cases}$$

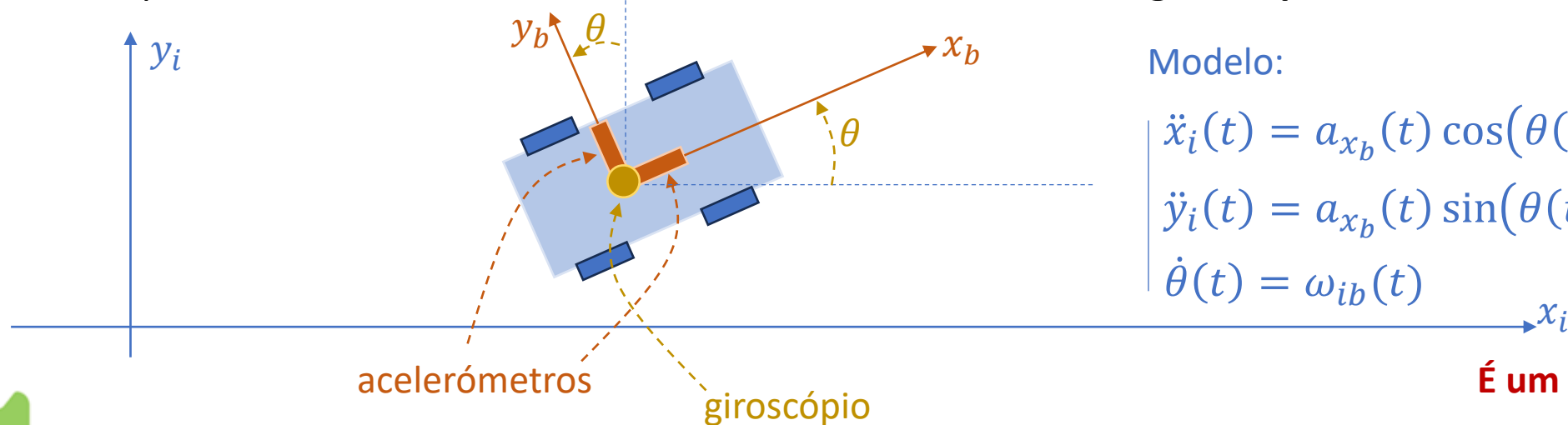
O ruído de medida pressupõe a existência de uma forma alternativa de observação da saída do modelo (através de outros sensores, por exemplo), observações essas que apresentam ruído.

Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

Estendendo ao plano o exemplo do posicionamento de um veículo, com base agora em dois acelerómetros dispostos perpendicularmente, torna-se necessário saber, também, qual a orientação que estes sensores vão adquirindo ao longo do movimento do veículo (i.e., as direções segundo as quais são medidas as acelerações lineares).

Para tal, torna-se necessário adicionar um terceiro sensor que meça a aceleração angular sofrida pelo sistema de eixos associado aos acelerómetros: um **giroscópio**.



Modelo:

$$\ddot{x}_i(t) = a_{x_b}(t) \cos(\theta(t)) - a_{y_b}(t) \sin(\theta(t))$$

$$\ddot{y}_i(t) = a_{x_b}(t) \sin(\theta(t)) + a_{y_b}(t) \cos(\theta(t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega_{ib}(t)$$

É um problema não linear!

Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

A forma usual de se resolver este modelo é considerando a linearização destas equações não lineares em torno do ponto considerado como atual:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{u}}(t)) + \dots$$

onde $\hat{\cdot}$ representa a estimativa atual para a variável considerada.

Logo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - f(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)) \approx \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{x}(t)} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \Delta \mathbf{x}(t) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mathbf{u}(t)} \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \Delta \mathbf{u}(t) \rightarrow$$
$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t)$$

**O erro é modelado por
uma modelo de espaço de
estados linear!**

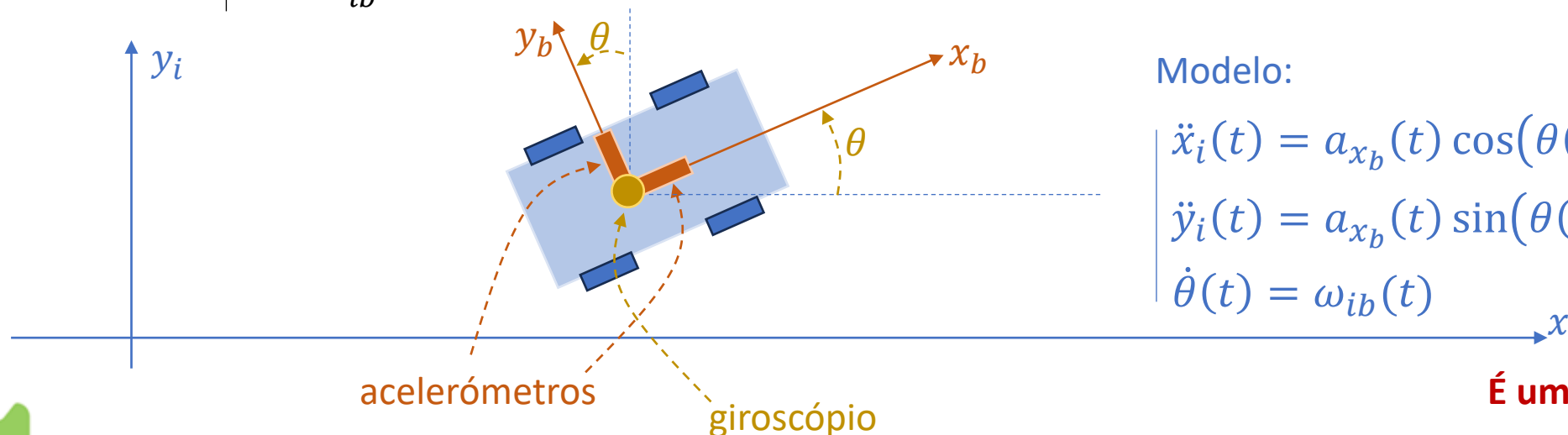
Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

O modelo de propagação dos erro ficaria, assim:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_{x_i} \\ \dot{v}_{x_i} = a_{x_b} \cos(\theta) - a_{y_b} \sin(\theta) \\ \dot{y}_i = v_{y_i} \\ \dot{v}_{y_i} = a_{x_b} \sin(\theta) + a_{y_b} \cos(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega_{ib} \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_i \\ v_{x_i} \\ y_i \\ v_{y_i} \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_{x_b} \\ \Delta a_{y_b} \\ \Delta \omega_{ib} \end{bmatrix}$$



Modelo:

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) = a_{x_b}(t) \cos(\theta(t)) - a_{y_b}(t) \sin(\theta(t)) \\ \ddot{y}_i(t) = a_{x_b}(t) \sin(\theta(t)) + a_{y_b}(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) = \omega_{ib}(t) \end{cases}$$

É um problema não linear!

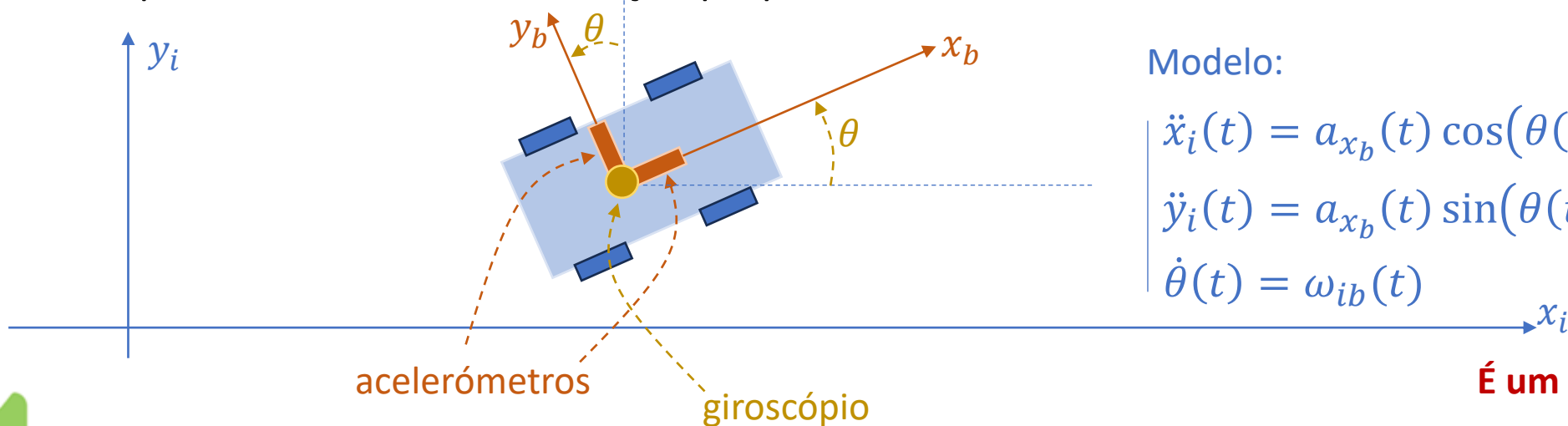
Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D)

Os erros associados aos sensores (acelerómetros e giroscópio) afetam o cálculo da posição em ambas as coordenadas.

Os erros de offset (*biases*) nas medidas geradas pelos acelerómetros propagam-se para erros de posicionamento com evolução proporcional a t^2 .

Os erros de offset (*biases*) nas medidas geradas pelo giroscópio propagam-se para erros de posicionamento com evolução proporcional a t^3 .



Modelo:

$$\ddot{x}_i(t) = a_{x_b}(t) \cos(\theta(t)) - a_{y_b}(t) \sin(\theta(t))$$

$$\ddot{y}_i(t) = a_{x_b}(t) \sin(\theta(t)) + a_{y_b}(t) \cos(\theta(t))$$

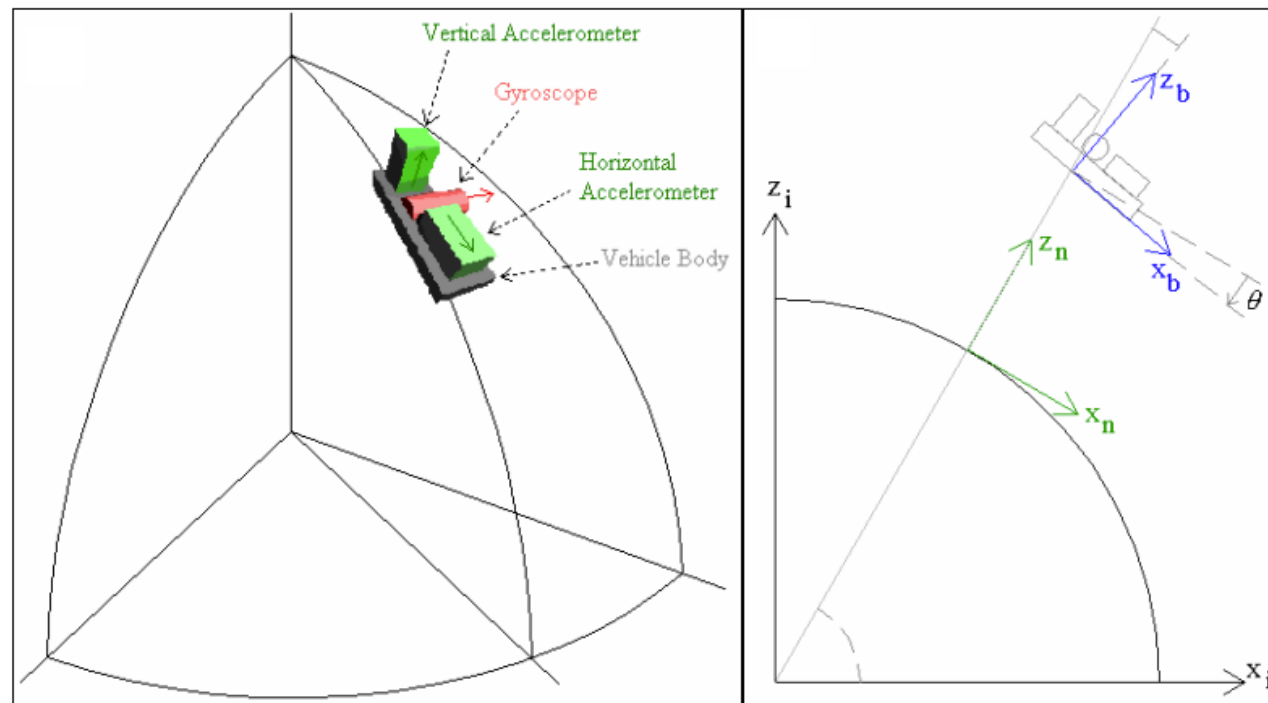
$$\dot{\theta}(t) = \omega_{ib}(t)$$

É um problema não linear!

Sistemas Inerciais

Princípio de operação (exemplo de posicionamento 2D na superfície terrestre)

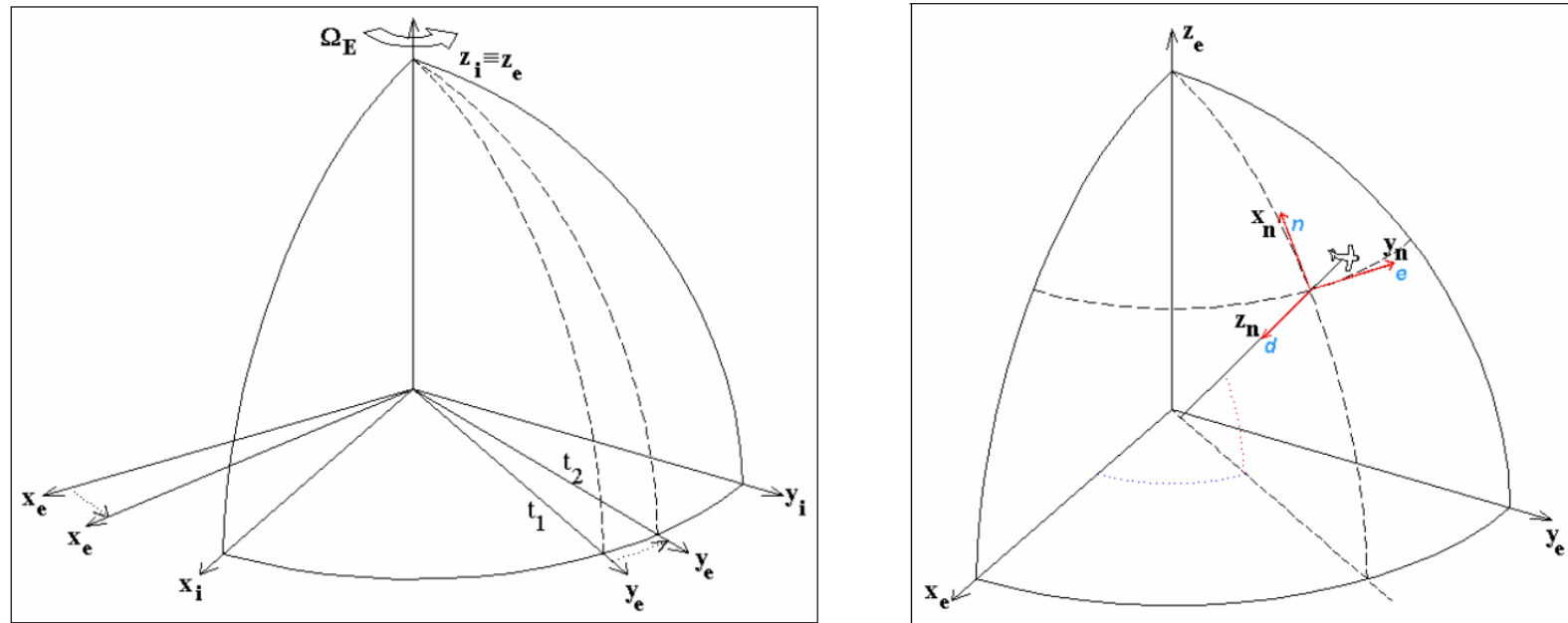
Considerando o movimento ao longo da superfície terrestre (ou perto desta), torna-se necessário incluir mais um referencial (referencial local, ou referencial de navegação), assim como se tem que incluir a aceleração gravítica (que é sentida pelos acelerómetros).



Sistemas Inerciais

Princípio de operação (posicionamento 3D na superfície terrestre)

Finalmente, para o caso do posicionamento 3D junto à superfície terrestre, não só cada referencial adquire uma terceira coordenada, como é necessário adicionar mais um referencial (o referencial terrestre) uma vez que o movimento de rotação da Terra tem que ser incluído. O sensor inercial tem, agora, que incluir três acelerómetros e três giroscópios.



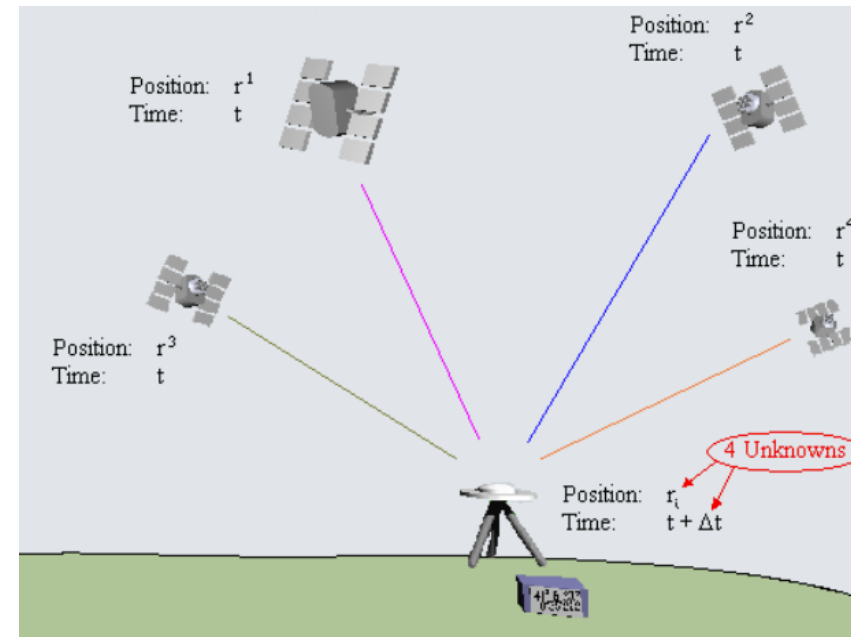
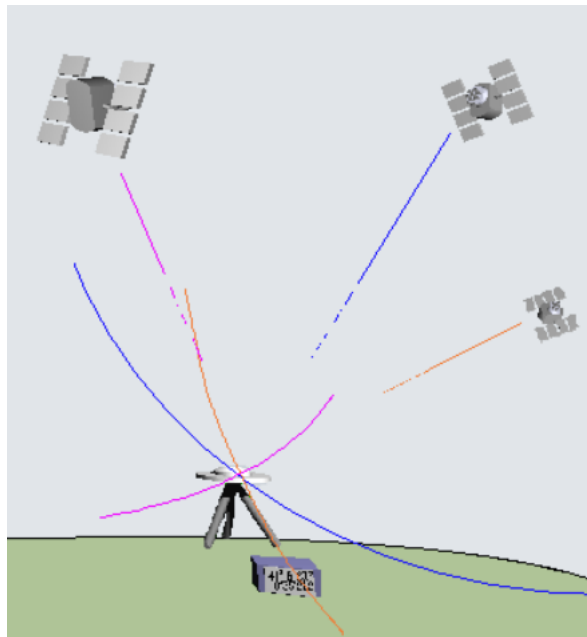
Índice

- Introdução
- Sistemas inerciais
- Técnicas de posicionamento por satélite

Técnicas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

O princípio de funcionamento consiste em determinar a interseção entre superfícies esféricas, centradas nas posições atuais dos satélites, cujo raio (distância satélite-recetor) é necessário aferir:



Técnicas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

Para tal, os recetores podem adquirir dois tipos de medidas, a partir da qual estimam as distâncias para os satélites que estão em linha de vista:

Medida de Pseudo-distância:
$$P_i^k(t) = \rho_i^k(t, t - \tau_i^k) + (dt_i - dt^k) \cdot c + I_i^k + T_i^k + (d_i + d^k) \cdot c + \varepsilon_i^k$$

Medida de Fase da Portadora:
$$\begin{aligned} \Phi_i^k(t) = \lambda \phi_i^k(t) = & \rho_i^k(t, t - \tau_i^k) + (dt_i - dt^k) \cdot c - \\ & - I_i^k + T_i^k + (\delta_i + \delta^k) \cdot c + \lambda \cdot (\phi_i(t_o) - \phi^k(t_o)) + \\ & + \lambda \cdot N_i^k + \varepsilon_i^k \end{aligned}$$

Técnicas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

Medida de Pseudo-distância:

$$P_i^k(t) = \rho_i^k(t, t - \tau_i^k) + (dt_i - dt^k) \cdot c + I_i^k + T_i^k + (d_i + d^k) \cdot c + \varepsilon_i^k$$

Valor de pseudo-distância (em metros) medido pelo recetor i relativa ao satélite k (em cada instante de medição)

Valor real da distância entre o recetor i (no instante de receção, t) e o satélite k (no instante de transmissão, $t - \tau_i^k$)

Atraso (expresso em metros) induzido pela ionosfera à medida que o sinal enviado pelo satélite k (em direcção ao recetor i) atravessa essa camada

Atraso (expresso em metros) induzido pela troposfera à medida que o sinal enviado pelo satélite k (em direcção ao recetor i) atravessa essa camada

Tempo de propagação entre o plano de referência de geração do sinal no satélite k e a sua antena

Tempo de propagação entre a antena do recetor i e o plano de referência de receção do sinal

Ruído aleatório

Desvio do relógio do recetor i , relativamente ao tempo de referência

Desvio do relógio do satélite k , relativamente ao tempo de referência

c – velocidade da luz no vácuo

Técnicas de Posicionamento por Satélite

Princípio de operação

Medida de Fase da Portadora:

$$\Phi_i^k(t) = \lambda \phi_i^k(t) = \rho_i^k(t, t - \tau_i^k) + (dt_i - dt^k) \cdot c - I_i^k + T_i^k + (\delta_i + \delta^k) \cdot c + \lambda \cdot (\phi_i(t_o) - \phi^k(t_o)) + \lambda \cdot N_i^k + \varepsilon_i^k$$

Número de ciclos (períodos) da portadora enviada pelo satélite k que vão sendo contados (acumulados) pelo recetor i , sendo este valor registado em cada instante de amostragem (instante de medida)

Ambiguidade de Fase – é o número inteiro de ciclos da portadora que existia no percurso entre o satélite k e o recetor i no instante de tempo em que o recetor começou a fazer o seguimento da fase da portadora

Tempo de propagação entre o plano de referência de receção/geração do sinal e a antena do recetor i /satélite k

Valor inicial assumido para a fase do recetor i e do satélite k , no início do seguimento da fase da portadora enviada pelo satélite (normalmente, o hardware do recetor faz com que estas fases iniciais sejam nulas)

λ – comprimento de onda da portadora, no vácuo

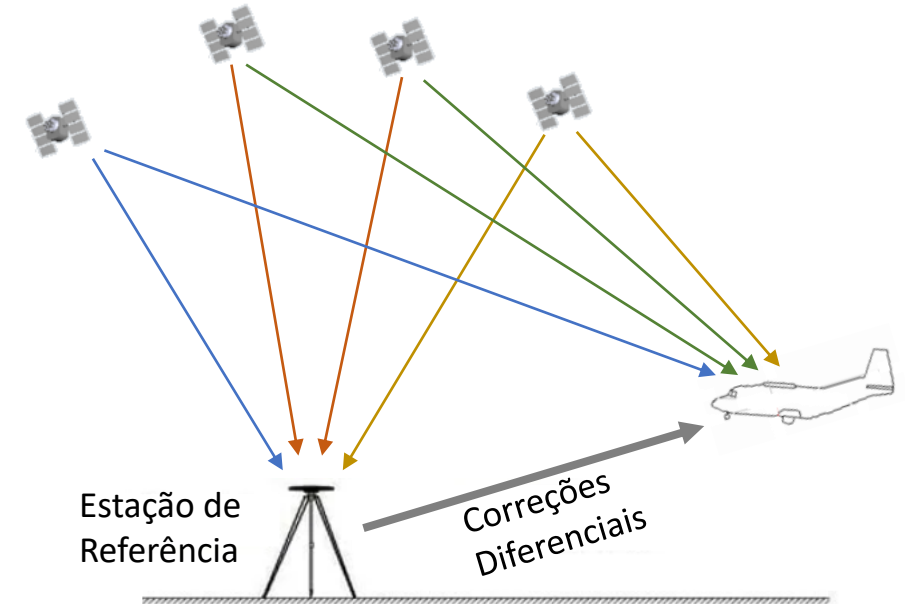
Técnicas de Posicionamento por Satélite

Processamento

As medidas de pseudo-distância estão presentes em todos os recetores.

Com as medidas de pseudo-distância, num determinado instante, provenientes de quatro ou mais satélites obtém-se um sistema de equações que permite determinar (tipicamente através do método dos mínimos quadrados) a posição 3D da antena do recetor (3 incógnitas) e o desvio do relógio do recetor (4ª incógnita).

As perturbações introduzidas pela ionosfera, troposfera e pelo desvio do relógio do satélite podem ser reduzidas através de modelos existentes para o efeito, ou praticamente cancelados através do uso de **Técnicas Diferenciais**: coloca-se um segundo recetor num ponto estático próximo mas de coordenadas conhecidas, sendo este usado para estimar as perturbações.



Técnicas de Posicionamento por Satélite

Processamento

As medidas de pseudo-distância permitem calcular posições em tempo-real com uma precisão da ordem de alguns metros (a precisão depende de várias condições, desde a geometria dos satélites visíveis nesse instante até à existência de objetos nas proximidades do recetor que perturbem a receção dos sinais ou que produzam reflexões dos sinais emitidos pelos satélites (fenómeno designado por *multipath*)).

As medidas de fase da portadora podem conduzir a precisões de posicionamento em tempo-real da ordem de poucos centímetros (em modo diferencial). Contudo, estas necessitam de recetores dedicados que tenham o hardware necessário ao seguimento da fase das portadoras, assim como os algoritmos de processamento destas medidas requerem um método que determine com robustez as ambiguidades de fase (este método é complexo e é vulgarmente designado de **Fixação de Ambiguidades**).

Técnicas de Posicionamento por Satélite

Processamento

O posicionamento em tempo real é muitas vezes complementado com a assunção de um modelo da dinâmica do veículo (tipicamente, um modelo em espaço de estados), o que permite separar melhor o efeito das perturbações no cálculo das posições – o processamento é usualmente efetuado através de um estimador denominado **Filtro de Kalman**.

Através da colocação de recetores em vários pontos fixos de coordenadas conhecidas, espalhados por uma determinada região, torna-se possível estudar os efeitos das camadas da ionosfera e da troposfera (por exemplo, averiguar a presença de vapor de água, nuvens, ...).

A camada da ionosfera é dispersiva para as frequências usadas nos sistemas de posicionamento por satélite, pelo que o uso de recetores capazes de captar sinais dos satélites enviados a diferentes frequências permite distinguir melhor os efeitos introduzidos pela ionosfera.

A captura de medidas por recetores estáticos, durante longos períodos de tempo (várias horas ou dias) permite o cálculo de coordenadas com precisões da ordem dos milímetros.