universidade de aveiro Departamento de Física

Mecânica Clássica

1ª aula Prática

Sumário:
Tratamento de dados

Bibliografia:
Apontamentos de Instrumentação e Análise de dados Experimentais

Sumário

1. Medições e erros experimentais
   - 1.1 Directas
   - 1.2 Indirectas
   - 1.3 Combinação e propagação dos erros

2. Avaliação de Resultados
   - 2.1 Precisão e Exactidão

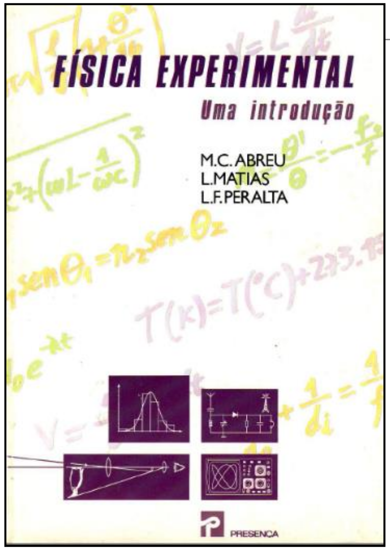
3. Tratamento de dados experimentais
   - 3.1 Grandeza função de outras, não independentes
   - 3.2 Método dos mínimos desvios quadrados (MMDQ)

universidade de aveiro theoria poiesis praxis
Departamento de Física

Instrumentação e Análise de Dados Experimentais

Ano Lectivo de 2019/20

[2] M.C.Abreu, L.Matias e L.F. Peralta, *Física Experimental Uma introdução*, 1ªed, Editorial Presença, Lisboa, 1994.



(29 exemplares na biblioteca da UA)

Recomendações de leitura:

- Introdução (págs. 17-23)
- Leitura 1 - Aquisição, Análise e Tratamento de Dados (págs. 85-98, 107-116, 121-130)
- Tabelas (págs. 275-286)

[5] N.C. Barford, *Experimental measurements: Precision, Error and Truth*, 2ªEd, John Wiley & Sons, New York (1985). (1 exemplar na biblioteca da UA)

[6] G. Almeida, *Sistema Internacional de unidades (SI)-Grandezas e Unidades Física, terminologia, símbolos e recomendações*, 1ªEd., Plátano Editora, Lisboa (1988).

1. Medidas e Erros experimentais

Exemplo de experiência

1. ***Objectivo***

Medir comprimento de pista de bicicletas

2. ***Método experimental. Procedimentos***

Usando uma bicicleta apetrechada com odómetro (medidor de distância), cada um de três ciclistas pedala entre os traços que marcam início e fim da pista.

Cada ciclista faz 10 ensaios, registando o valor indicado em cada ensaio.

3. ***Dados***

Ver Tabela 1., a seguir.

4. Tratamento de dados

1. Medidas e Erros experimentais

3. *Dados. Continuação*

Tabela 1: Comprimento da pista medido com odómetro

Ciclista A $x \pm 0.1$ (m)	Ciclista B $x \pm 0.1$ (m)	Ciclista C $x \pm 0.1$ (m)
600.2	620.0	589.7
593.3	612.4	585.2
582.6	570.0	598.3
584.6	600.8	597.7
586.2	607.2	592.0
590.6	585.8	590.3
591.6	603.8	590.6
587.3	588.6	587.0
593.2	596.4	583.6
592.3	582.2	585.1

erro instrumental ou de leitura

1. Medidas e Erros experimentais

4. Tratamento de *Dados*

Desvio de cada medida em relação à média

Tabela 2

	Ciclista A		Ciclista B		Ciclista C	
	$x \pm 0.1$ (m)	$d = x - \bar{x}$ (m)	$x \pm 0.1$ (m)	$d = x - \bar{x}$ (m)	$x \pm 0.1$ (m)	$d = x - \bar{x}$ (m)
	600.2	+10.0	620.0	+23.3	589.7	-0.3
	593.3	+3.1	612.4	+15.7	585.2	-4.8
	582.6	-7.6	570.0	-26.7	598.3	+8.3
	584.6	-5.6	600.8	+4.1	597.7	+7.7
	586.2	-4.0	607.2	+10.5	592.0	+2.0
	590.6	+0.4	585.8	-10.9	590.3	+0.3
	591.6	+1.4	603.8	+7.1	590.6	+0.6
	587.3	-2.9	588.6	-8.1	587.0	-3.0
	593.2	+3.0	596.4	-0.3	583.6	-6.4
	592.3	+2.1	582.2	-14.5	585.1	-4.9
$\bar{x} = \frac{\sum_i^N x_i}{N}$	590.2		596.7		590.0	

1. Medidas e Erros experimentais

Se N (número de medições de cada ciclista) for pequeno (digamos, $\boldsymbol{N} < \mathbf{10}$), o valor experimental (X) do comprimento da pista obtido por cada ciclista é dado pela média $(\bar{x})$.

A incerta de X é dada pelo maior entre os desvios $(\{Max\, d_i\})$ e o erro de leitura. Neste caso:

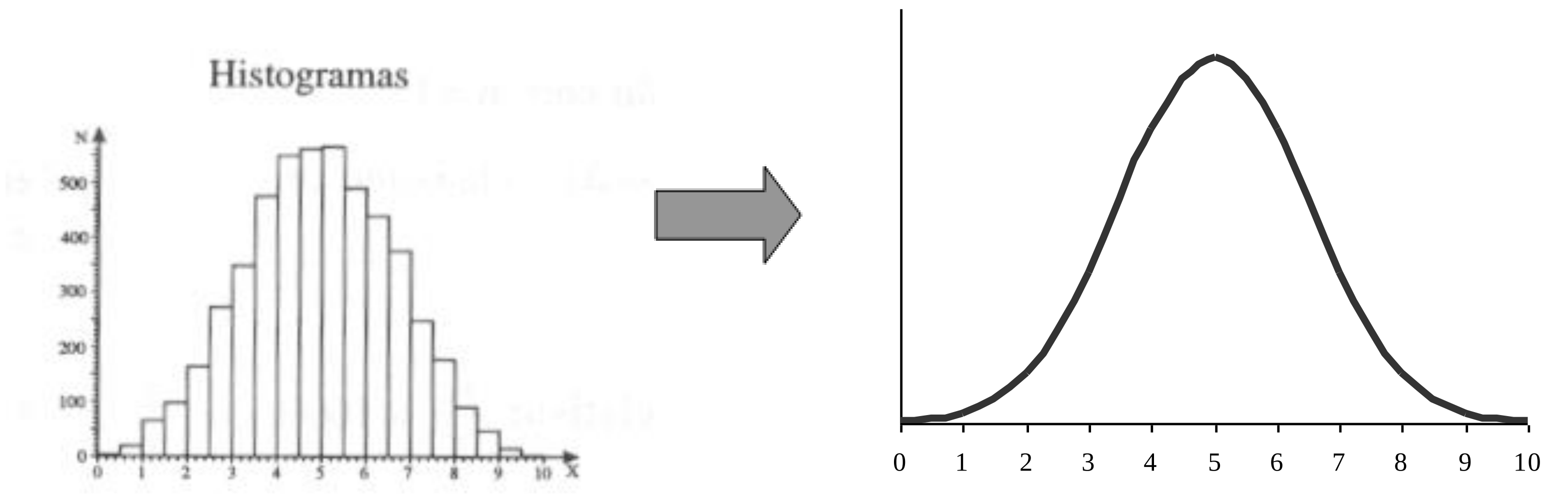
$$\boxed{X \pm \Delta X = \bar{x} \pm \{Max\, d_i\}}$$

O valor experimental duma grandeza (X) nem sempre é dado pela média $(\bar{x})$ de medições directas.

Quando se tem um número maior de medidas (digamos, $N \geq 10$), é mais razoável fazer um tratamento estatístico mais sofisticado.

1. Medidas e Erros experimentais

Aumentando o número de medidas



Distribuição normal ou gaussiana

1. Medidas e Erros experimentais

Distribuição normal ou gaussiana

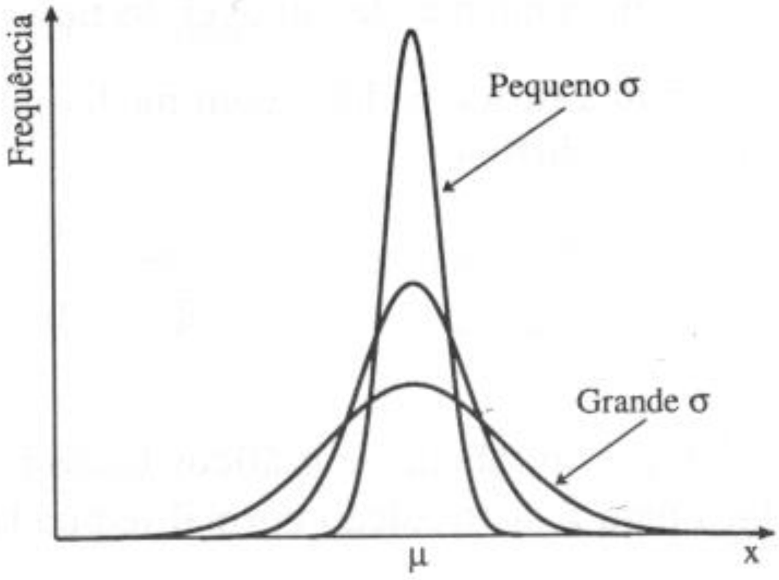
A distribuição de Gauss descreve o comportamento de um grande número de acontecimentos <u>aleatórios</u> com pequenas oscilações à esquerda e à direita do valor esperado.

É simétrica e apresenta uma forma característica de sino, dada por um expressão do tipo

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

1. Medidas e Erros experimentais

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$



σ, o **desvio padrão**, dá informação sobre a dispersão das medidas em torno do valor médio

1. Medidas e Erros experimentais

	Amostra (N pequeno)
Média	$\bar{x}$
Desvio-padrão	σ_{N-1}

Amostra: $\{x_i, \ldots, x_N\}$

Valor Médio da amostra:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_1 + \ldots + x_N}{N}$$

Quando N<10, utiliza-se σ_{N-1}, que mede a PRECISÃO da experiência

Desvio-padrão da amostra:

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Desvio-padrão da média ≡ Erro-padrão da amostra:

$$\Delta\bar{x} = S_{N-1} \equiv \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$$

1. Medidas e Erros experimentais

A MELHOR ESTIMATIVA do “verdadeiro valor” da grandeza que conseguimos numa experiência é X:

$$\boxed{X \pm \Delta X = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} = \bar{x} \pm S_{N-1}}$$

1. Medidas e Erros experimentais

Mas quem sabe qual é "verdadeiro" valor da grandeza?!

~~verdadeiro~~ $\longrightarrow$ ESPERADO

dado por fórmula teórica
tabelado
etc.

Designemos por V o valor esperado da grandeza.

V também é afetado de uma incerteza, que geralmente é menor que a incerteza experimental obtida nos laboratórios comuns.

Exemplo: carga do eletrão

$$V \pm \Delta V = (1{,}60217662 \pm 0{,}00000001) \times 10^{-19}\ \text{C}$$

valor tabelado (que também é experimental!)

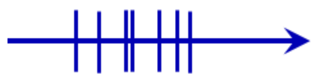
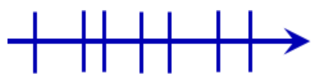
$$X \pm \Delta X = (1{,}6 \pm 0{,}1) \times 10^{-19}\ \text{C}$$

valor experimental obtido num lab de ensino

2. Avaliação de Resultados

A qualidade de um resultado experimental $X \pm \Delta X$ é avaliada pela:

- incerteza experimental
  (pretende-se que $\Delta X/X$ seja pequena)
- proximidade com o valor esperado V (pretende-se que $|V - X|$ seja pequena)

PRECISÃO	**EXACTIDÃO (“accuracy”)**
Mede “espalhamento” das medidas	Mede a diferença entre X e V
 	
Erros aleatórios	Erros sistemáticos
Reprodutibilidade	Falhas do modelo utilizado
Algarismos significativos	
Expressa em percentagem	

2. Avaliação de Resultados

Como se avalia a precisão? Que significa "pequeno $\Delta X/X$" ?

No âmbito dos laboratórios de ensino, tipicamente considera-se que um **erro relativo** $\Delta X/X \leq 10\%$ (que corresponde a uma **precisão $\geq$ 90%**) é aceitável.

Exemplo: carga do eletrão

$$X \pm \Delta X = (1{,}6 \pm 0{,}1) \times 10^{-19}\ \text{C} \Rightarrow \Delta X/X = 6\ \%$$

Este resultado tem um precisão aceitável no âmbito dos laboratórios de ensino. Mas não quando comparado com o valor tabelado:

$$V \pm \Delta V = (1{,}60217662 \pm 0{,}00000001) \times 10^{-19}\ \text{C} \Rightarrow \Delta V/V = 6 \times 10^{-7}\ \%$$

2. Avaliação de Resultados

Como avaliar a exactidão? O que significa "$|V - X|$ pequena"?

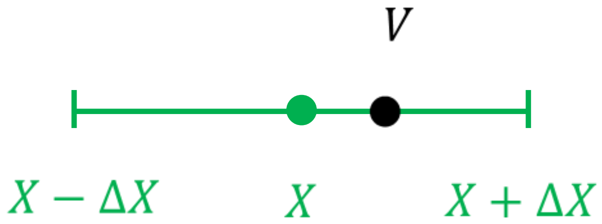
<u>Exemplo: relógio de ponteiros</u>

Se não se atrasa nem se adianta, é um relógio de precisão.

Se for um relógio de precisão e estiver regulado para a hora de verão, no inverno nunca indica a hora exata.

Se estiver "parado" (sem pilhas), dá sempre a hora "exata" duas vezes por dia.

Duas condições, simultaneamente
$$\begin{cases} \dfrac{\Delta X}{X} & \text{o mais pequeno possível} \\ \\ |V - X| < \Delta X & \end{cases}$$



2. Avaliação de Resultados

Para um resultado ser exacto, tem de ser preciso.

Mas pode ser preciso e não ser exacto.

2. Avaliação de Resultados

Algarismos Significativos

Determinação do valor de uma grandeza:

- Medição direta
- Cálculos sobre grandezas medidas.

Valor numérico final

deve exprimir a

imprecisão inerente:

deve conter apenas

algarismos (fisicamente) significativos

2. Avaliação de Resultados

Algarismos Significativos: aqueles cujos valores são conhecidos com certeza, mais o primeiro coberto pelo erro.

<u>Exemplo: Ciclista A</u>

Calculadora: $\begin{cases} \bar{x} = 590{,}19 \text{ m} \\ \Delta\bar{x} = S_{N-1} = 1{,}628462124 \text{ m} \end{cases}$

Resultado final: 590 ± 2 m

2. Avaliação de Resultados

Contagem de algarismos significativos:

- Da esquerda para a direita
- Começa-se pelo primeiro algarismo não-nulo
- Termina-se no primeiro algarismo afetado pela incerteza
- Zeros à esquerda do símbolo decimal não têm significado físico.
- Zeros à direita do símbolo decimal têm significado físico

2. Avaliação de Resultados

Valor	Nº de algarismos significativos	Observações
102 *s*	3	[a] **Representação ambígua** pois o zero pode servir só para posicionar a vírgula (**Não deve ser usada**).
40 *mm*	2 ou 1 (?) [a]	
4.0 *cm*	2	
4 *cm*	1	
4×10^{1} *mm*	1	[b] A redução de unidades deve ser feita usando potências de base 10, para garantir que o n.º de algarismos significativos não é alterado.
0.520 *s*	3	
0.061*s*	2	
2.48 *kg*	3[b]	
2.48×10^{3} *g*	3[b]	
2480 *g*	3 ou 4 (?) [a]	
2.480×10^{-3} *kg*	4	
50000 *m*	1 ou 5 (?) [a]	
50.0×10^{3} *km*	3	

2. Avaliação de Resultados

Arredondamentos

- Ao truncar um número, se o primeiro algarismo desprezado for > 5, o ultimo algarismo significativo que se considera deve ser incrementado de uma unidade e se for <5 não sofre alteração.
- Se o algarismo à direita do último algarismo significativo a reter for = 5 e não existem ou são zero todos os algarismos seguintes, este, aumenta de uma unidade no caso de ser ímpar.
- Nos cálculos intermédios, consideram-se sempre o maior número de algarismo possível para evitar erros de truncatura.

<u>Exemplo</u>:
Se se pretender indicar a área de um disco com 5 algarismos significativos, não se deve usar $\pi = 3{,}14$.

2. Avaliação de Resultados

Exercício

Fazem-se 15 medidas do comprimento de um telemóvel com uma régua graduada em milímetros.

Qual o comprimento do telemóvel?

Erro de leitura: 0,5 mm $\Rightarrow$ medidas podem ter algarismos significativos até à casa das décimas de mm.

Dados (cm):

15,20	15,20	15,25	15,15	15,35
15,25	15,20	15,25	15,15	15,20
15,10	15,30	15,10	15,25	15,25

2. Avaliação de Resultados

Exercício (cont.)

Cálculos: $\bar{x} = 15{,}2133$ cm

$$\sigma = \sigma_{N-1} = 6{,}2396 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\Delta\bar{x} = S_{N-1} = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}} = 0{,}01611 \text{ cm}$$

Resultado final: $15{,}21 \pm 0{,}02$ cm

Comentários:

- Ao repetir a experiência 15 vezes ganhou-se precisão:

1 medida $\Delta X = 0{,}05$ cm (erro de leitura)	⇨	15 medidas $\Delta X = 0{,}02$ cm (erro estatístico)

- A dispersão dos valores tabelados ($\sigma = \sigma_{N-1} = 0{,}06$) é maior do que o erro de leitura de uma só medição e, portanto, existem causas aleatórias que influenciam a medição. Os resultados podem ser melhorados repetindo a experiência.

3. Tratamento de dados experimentais

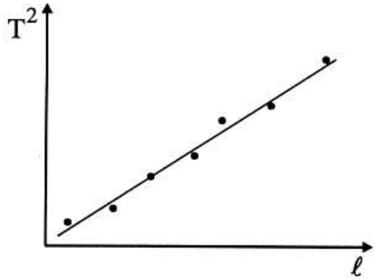
Relações entre grandezas

Um dado fenómeno pode depender de diversas grandezas — p. ex., o período de oscilação de pêndulo simples depende de 2:

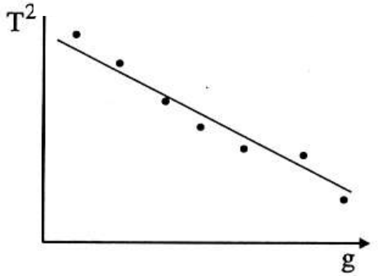
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

As grandezas podem estar correlacionadas:

- Positivamente
  (as grandezas variam no mesmo sentido)



- Negativamente
  (as grandezas variam em sentidos contrários)



3. Tratamento de dados experimentais

Gráficos

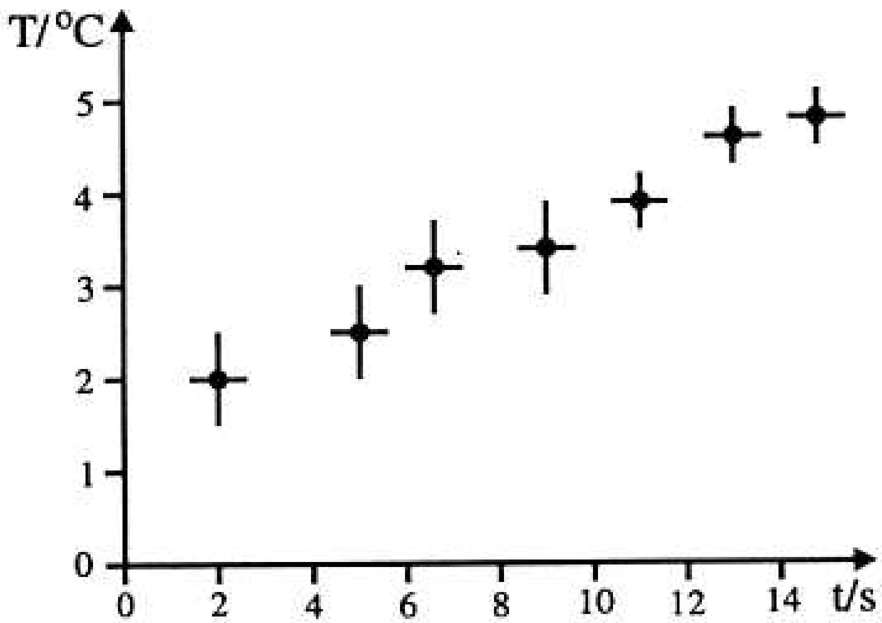
Seu interesse :

- Visualizar como uma grandeza varia em relação a outra, evidenciando:
  - Se a relação é linear ou não.
  - Se a variação é rápida ou lenta.
  - Se existem descontinuidades
  - Se há grandes oscilações no comportamento dos valores experimentais.
- Determinar aproximadamente valores intermédios (interpolar) ou para além da gama de valores (extrapolar).

3. Tratamento de dados experimentais

Qual a linha (função matemática) que descreve o comportamento dos pontos?

$t \pm \Delta t$ (s)	$T \pm \Delta T$ (°C)
2.0±0.6	2.0±0.5
5.0±0.6	2.5±0.5
6.6±0.6	3.2±0.5
9.0±0.6	3.4±0.5
11.0±0.6	3.9±0.3
13.0±0.6	4.6±0.3
14.8±0.6	4.8±0.3



Podem considerar-se várias possibilidades…

3. Tratamento de dados experimentais

A função que melhor descreve o comportamento dos pontos experimentais obtém-se ANALITICAMENTE, a partir da lei física que descreve o fenómeno (p. ex., $T = 2\pi\sqrt{l/g}$).

Se não se conhecer a lei física, arbitra-se uma função para a relação entre x e y, determinando-se os parâmetros dessa função através de um processo estatístico de AJUSTE (em Inglês, *fit*).

3. Tratamento de dados experimentais

Situações mais frequentes de ajustes:

- determinar o melhor valor de uma grandeza medida várias vezes
- determinar a constante de proporcionalidade: $y = kx$
- estabelecer uma relação entre duas grandezas — a mais simples é linear,

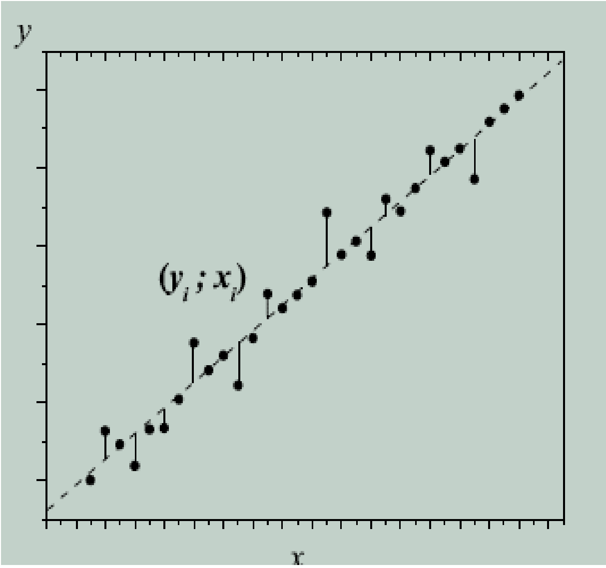
  $y = mx + b$
- determinar os parâmetros de uma relação não-linear (como $y = a + bx^2$ ou $y = ke^{\alpha x}$) fazendo primeiro uma linearização (transformação de variável): $y = a + bz$, com $z \equiv x^2$ ou $\ln y = \ln k + \alpha x$
- determinação de uma dependência funcional não-linearizável, do tipo

$$y = a + bx + cx^2$$

3. Tratamento de dados experimentais

Quando a relação entre duas ou mais grandezas é linear, o processo de estabelecer uma equação que as relacione designa-se REGRESSÃO LINEAR.

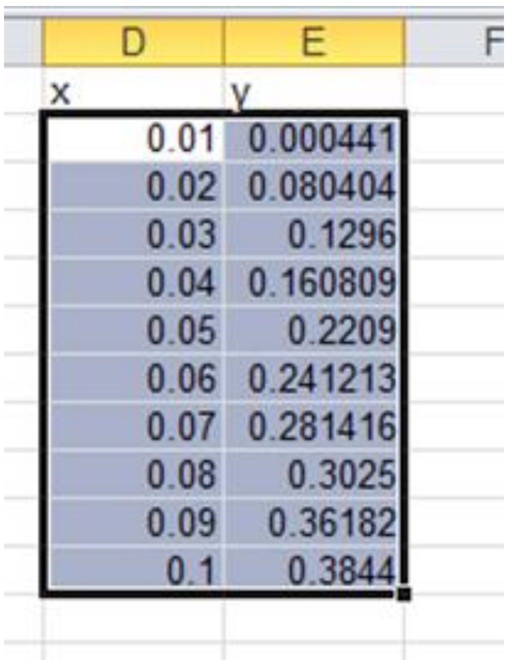
Tendo em atenção os dados experimentais da figura, a relação funcional apresentada é do tipo linear e o bom senso aconselha a que se trace uma reta que minimize a soma dos desvios absolutos dos pontos em relação à reta traçada. Mas, analiticamente, isto é mais complicado do que minimizar a soma dos quadrados dos desvios.



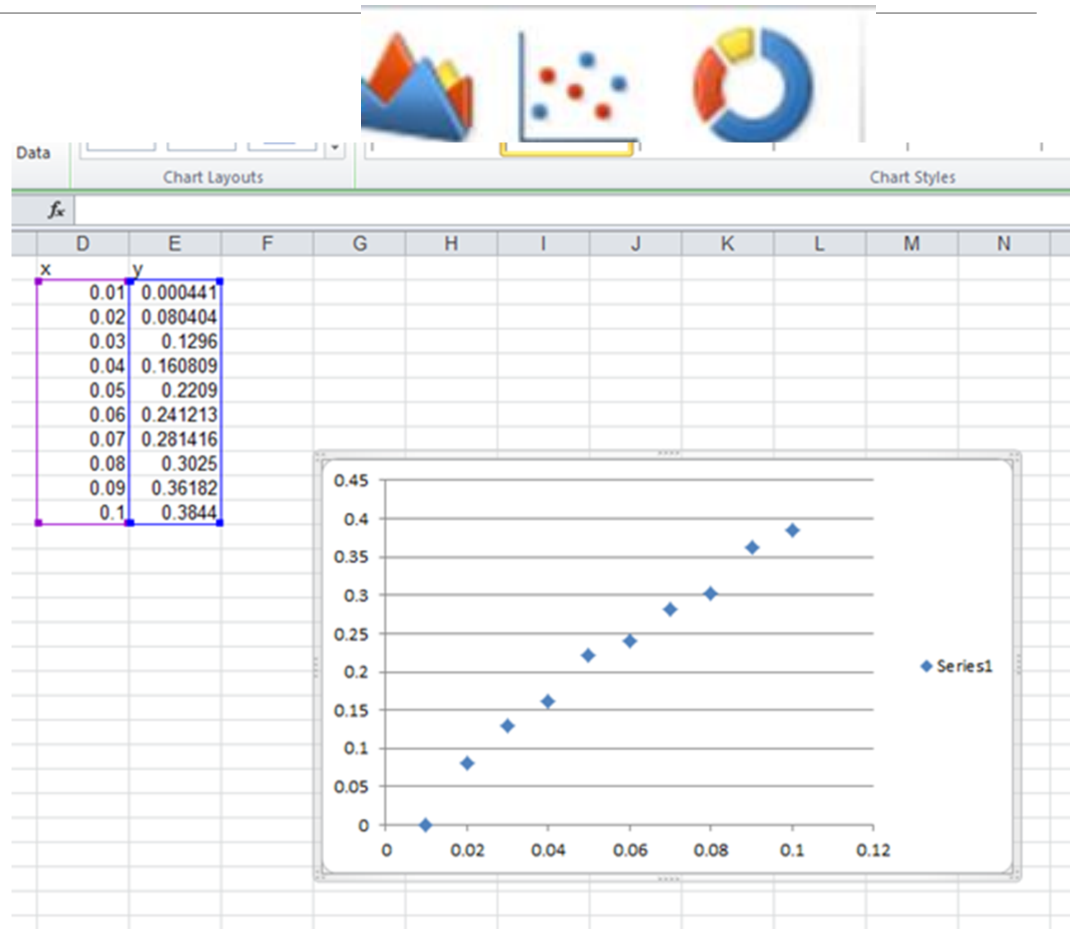
A técnica mais vulgarizada para determinar os parâmetros que melhor adaptam a equação aos valores disponíveis é o **MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS**.

3. Tratamento de dados experimentais

Exemplo utilizando o Excel. Está disponível também o Sci.Davis)



D	E
x	y
0.01	0.000441
0.02	0.080404
0.03	0.1296
0.04	0.160809
0.05	0.2209
0.06	0.241213
0.07	0.281416
0.08	0.3025
0.09	0.36182
0.1	0.3844



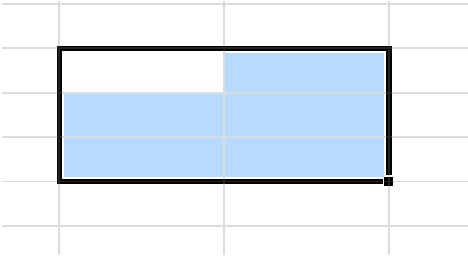
3. Tratamento de dados experimentais

O Excel possui funções para cálculos estatísticos que nos permitem obter facilmente os parâmetros da reta de ajuste.

Em português: *proj.lin(y,x,verdadeiro,verdadeiro)* ou *proj.lin(y,x,1,1)*

Em inglês: *linest(y,x,true,true)* ou *linest(y,x,1,1)*

Selecionar 6 células (3x2 como na figura).



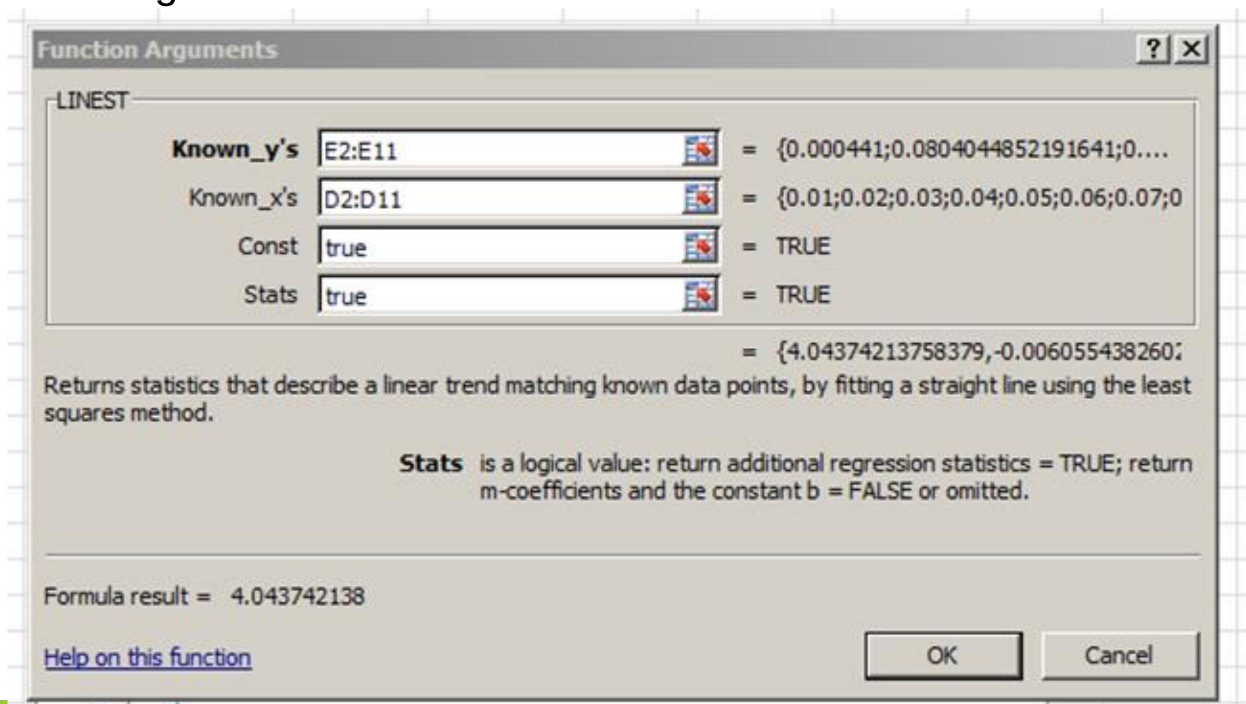
carregar em

Aparecerá, como na figura abaixo, o menu “*function arguments*” onde se tem de inserir os argumentos da função.

Para tal tem de se preencher os vários campos, onde “*known_y’s*” e “*known_x’s*” é a identificação da localização na folha de cálculo dos valores que definimos para Y e X respetivamente.

Nos argumentos “*const*” e “*stats*” é necessário colocar “true” (ou “verdadeiro” em pt).

De seguida carregue em “*OK*”.



3. Tratamento de dados experimentais

colocar o cursor na linha de comando e carregar em

CTRL+SHIFT+ENTER.

Deverá ficar com as células seleccionadas preenchidas:

fx {=LINEST(E2:E11,D2:D11,TRUE,TRUE)}

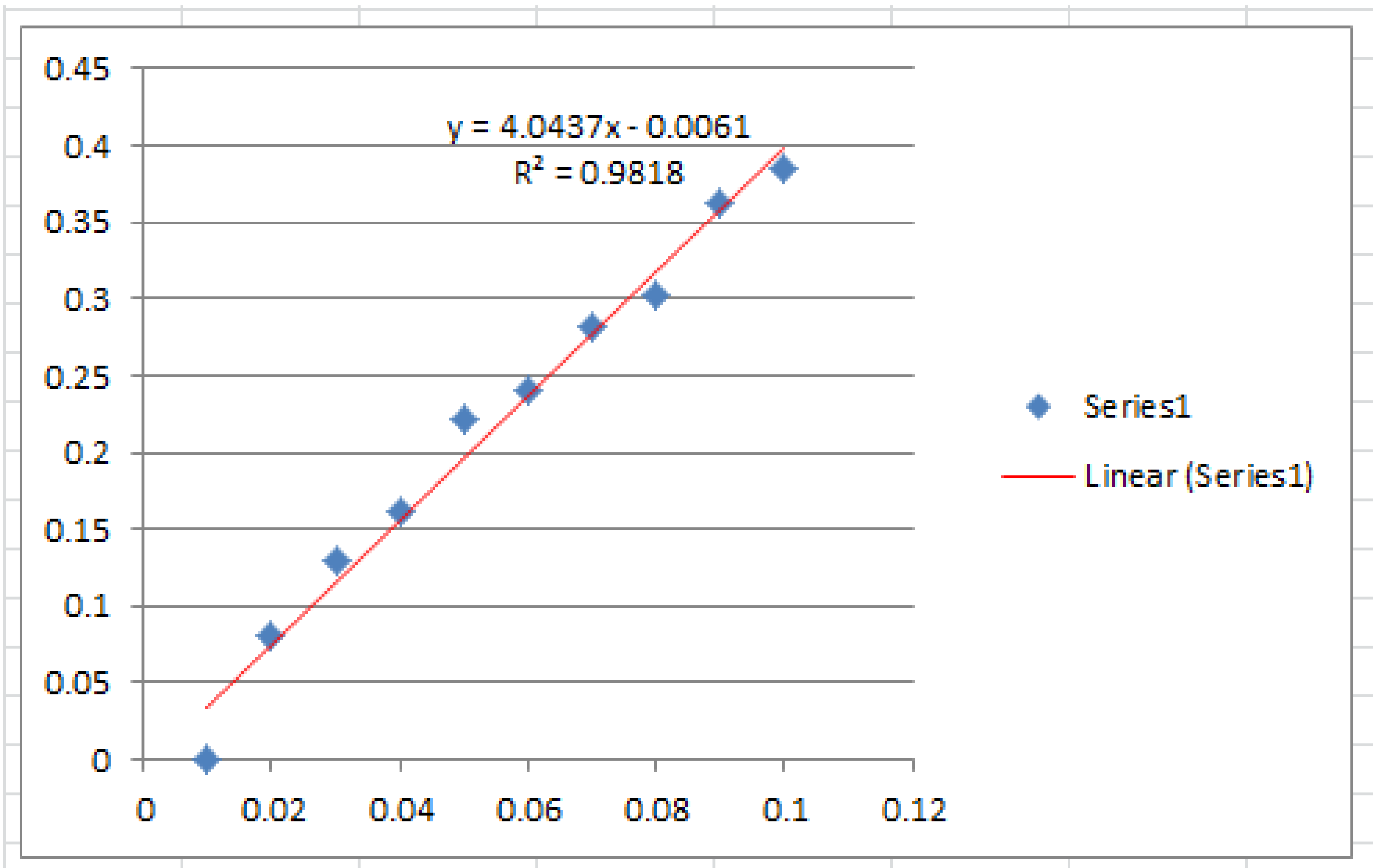
D	E	F	G	H	I	J
x	y					
0.01	0.000441			4.043742	-0.00606	
0.02	0.080404			0.194707	0.012081	
0.03	0.1296			0.98179	0.017685	
0.04	0.160809					
0.05	0.2209					
0.06	0.241213					
0.07	0.281416					

3. Tratamento de dados experimentais

m	4.043742	-0.00606	b
Δm	0.194707	0.012081	Δb
R^2	0.98179	0.017685	

$$\Delta m = |m|\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r^2}-1\right)}{N-2}}$$

3. Tratamento de dados experimentais



3. Tratamento de dados experimentais

Propagação de erros

G: grandeza que só podemos determinar medindo outras grandezas $x, y, z, \ldots$: $G = f(x, y, z, \ldots)$

Exemplo: volume de uma sala

$$V = (comprimento) \times (largura) \times (altura) = c \times l \times a$$

Essas outras grandezas são conhecidas com uma determinada incerteza:

$$x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z, \ldots$$

Estas incertezas vão "propagar-se" até G, ou seja, ΔG depende de $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$

Mas de que maneira? Qual é o "peso" de $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ em ΔG?

3. Tratamento de dados experimentais

$$\Delta G = (\text{maneira como } G \text{ depende de } x) \times \Delta x +$$
$$+ (\text{maneira como } G \text{ depende de } y) \times \Delta y + \cdots$$

A "**maneira como G depende de x**" representa-se por $\frac{\partial G}{\partial x}$, a **derivada <u>parcial</u> em ordem a x**. Calcula-se aplicando as regras de derivação em ordem a uma determinada variável, mas tratando as outras variáveis como constantes.

<u>Exemplo: volume de uma sala</u>

$$V = c \times l \times a$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = l \times a; \ \frac{\partial V}{\partial l} = c \times a; \ \frac{\partial V}{\partial a} = c \times l$$

$$\Delta V = (l \times a)\Delta c + (c \times a)\Delta l + (c \times l)\Delta a$$

Mas, em geral, as derivadas parciais podem ser positivas ou negativas…

Que implicações?

3.Tratamento de dados experimentais

$$\boxed{\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right| \Delta x + \cdots}$$

LIMITE SUPERIOR DO ERRO

- Se o número de medições for pequeno (no limite, apenas uma medição)

A incerteza de x, y, z, etc. é dada (como já sabemos) por:

- Erro de leitura
- Maior desvio, $\{Max\ d_i\}$

A incerteza de G é dada pelo limite superior do erro.

3.Tratamento de dados experimentais

- Número de medições grande (digamos, $N \geq 10$)

Pode-se usar o limite superior do erro ou usar o erro estatístico ou erro-padrão:

$$\boxed{\Delta G = \sqrt{\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2 \Delta x^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2 \Delta y^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|^2 \Delta z^2 + \cdots}}$$ ERRO-PADRÃO

N.B.: Estamos a usar Δ para indicar quer o erro-padrão, quer o limite superior do erro, quer o erro estimado.

Casos particulares	Limite superior do erro	Erro-padrão
$G = x \pm y$	$\Delta G = \Delta x + \Delta y$	$\Delta G = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
$G = x \cdot y$ $G = \frac{x}{y}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \frac{\Delta x}{\lvert x\rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y\rvert}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$
$G = x^n$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \lvert n\rvert \frac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \sqrt{\left(n\frac{\Delta x}{x}\right)^2}$
$G = p \ln x$	$\Delta G = \lvert p\rvert \frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta G}{\lvert G\rvert} = \sqrt{\left(p\frac{\Delta x}{x}\right)^2}$