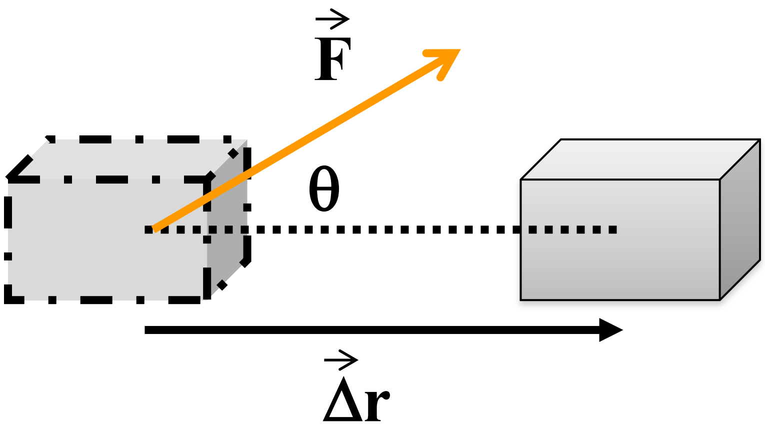
Capítulo 4

Sumário:

Cap. 4 :

Trabalho. Forças conservativas. Gradiente, divergência, rotacional e laplaciano.
Energia potencial. Conservação da energia mecânica.
Pontos de equilíbrio estáveis e instáveis.

Trabalho de uma força constante



$$W = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right| \cos\theta$$

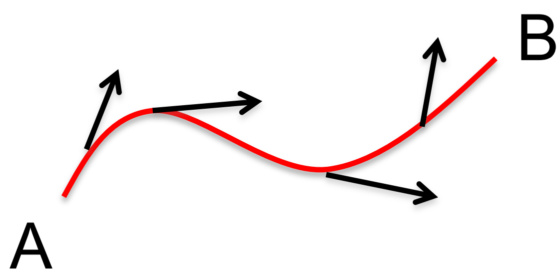
$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$$

Trabalho

Trabalho realizado por uma força ***F***:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

(integral de linha)



Notas

- $$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

- d***r*** tangente à trajectória

- ***F*** resultante

exemplo

Dado o campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(x^2 + y\right)\hat{i} + yx\ \hat{j}$$

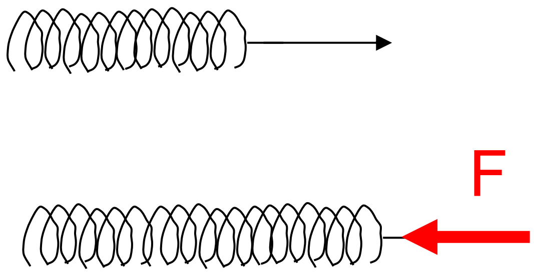
calcule o trabalho de ***F*** ao longo da parábola y=x^2 desde o ponto (0,0) até (2,4).

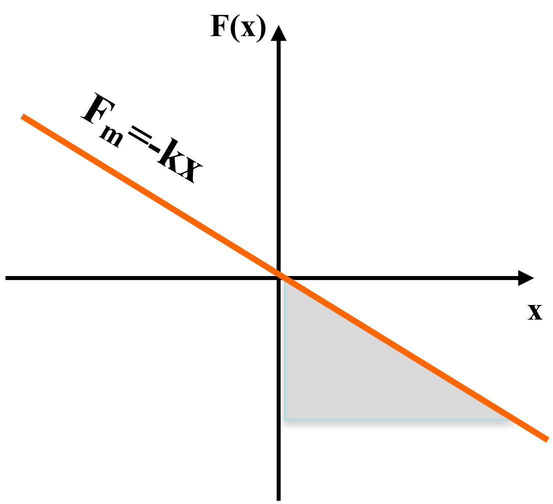
solução

$$W = \int_{x=0}^{x=2} \left(x^2 + x^2 \right) dx + \int_{y=0}^{y=4} \left(y \times \sqrt{y} \right) dy =$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} 2x^2 dx + \int_{y=0}^{y=4} y^{3/2} dy = \frac{272}{15}$$

outro exemplo: mola





<u>trabalho realizado por uma mola:</u>

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx$$

$$= -k\int_{x_i}^{x_f} xdx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

relação entre trabalho e energia cinética

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt =$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{d\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right)}{dt} dt$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{d\left(v^2\right)}{dt} dt = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

relação entre trabalho e energia cinética

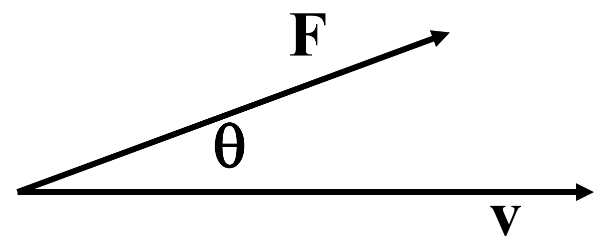
$$W_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_2{}^2 - v_1{}^2\right) = T_2 - T_1$$

Energia cinética:

Potência de uma força

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

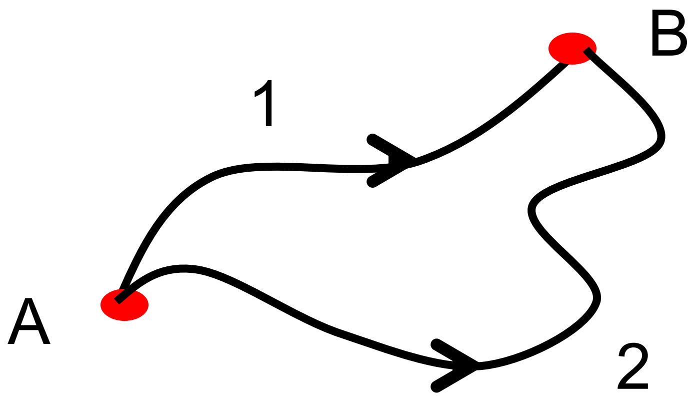
$$\boxed{\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\ P &= \left|\vec{F}\right| v \cos\theta \end{aligned}}$$



unidade S.I: Watt = Js^{-1}

Forças Conservativas

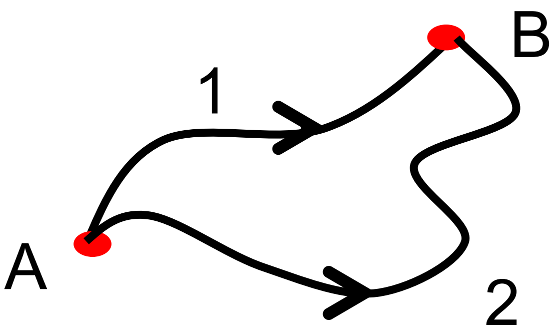
Uma força é conservativa se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for independente do caminho seguido entre esses pontos



$$W_{AB}(caminho\ 1) = W_{AB}(caminho2)$$

Forças Conservativas

O trabalho realizado por uma força conservativa ao longo dum trajecto fechado é nulo



$$W_{AA}(\text{caminho fechado}) = W_{AB}(1) + W_{BA}(2)$$

$$W_{BA}(2) = -W_{AB}(2)$$

$$W_{AA}(\text{caminho fechado}) = 0$$

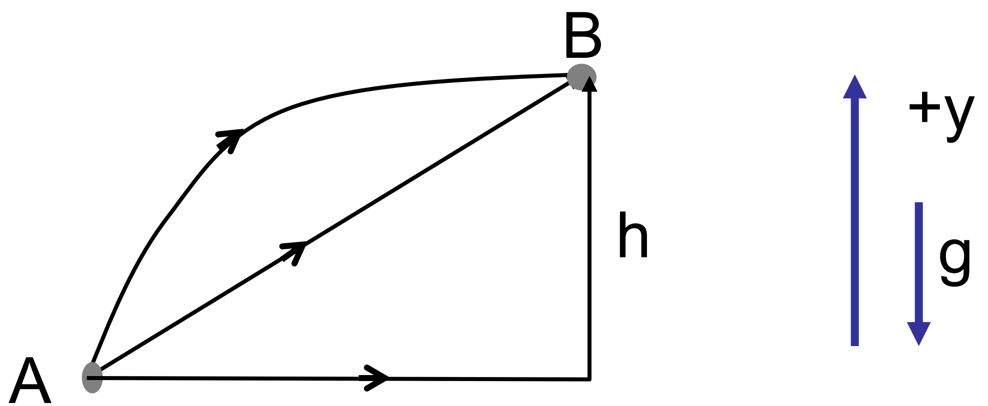
Exemplos de forças conservativas

- *Gravítica*
- *Electrostática*
- *Elástica duma mola*

Forças não-conservativas: atrito

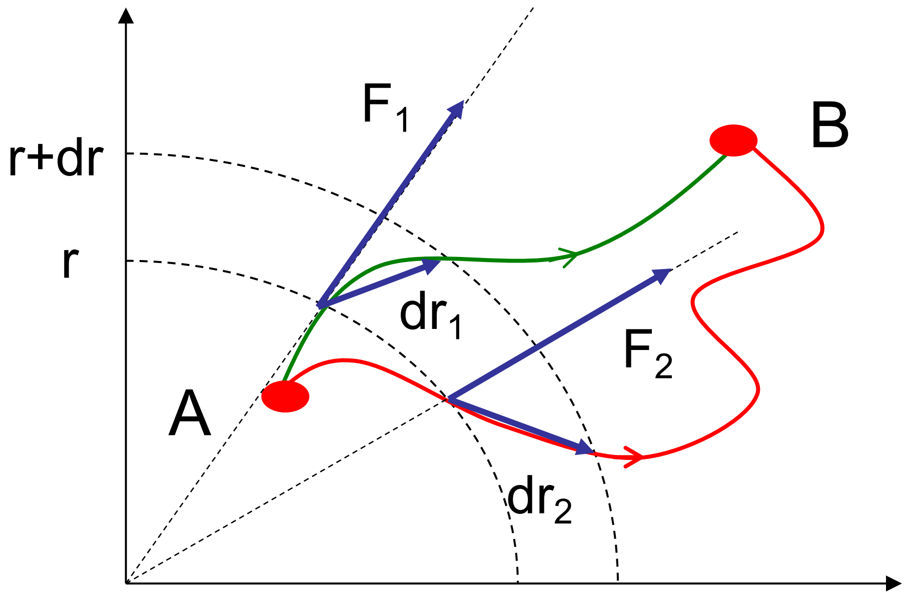
- No caso de forças não-conservativas, o trabalho realizado num trajecto fechado não é nulo

trabalho da força gravítica



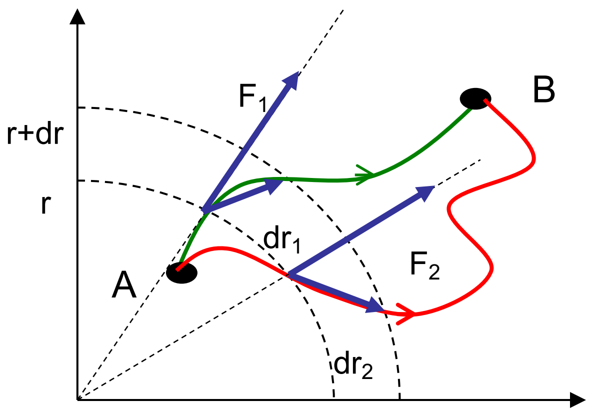
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B F_y dy = \int_A^B -mg\, dy = -mg\left(y_B - y_A\right)$$

caso importante: forças centrais



caso importante: forças centrais

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r \Rightarrow \vec{F}_1 \text{ e } \vec{F}_2 \text{ têm a mesma magnitude e direcções radiais}$$



$$\Rightarrow \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_1 = F\, dr$$

Gradiente

ϕ função da posição: $\phi(x,y,z)$ Ex: temperatura

Diferencial total:

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)dz$$

$$= \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\cdot\left(dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

Gradiente

$$\boxed{\nabla \phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

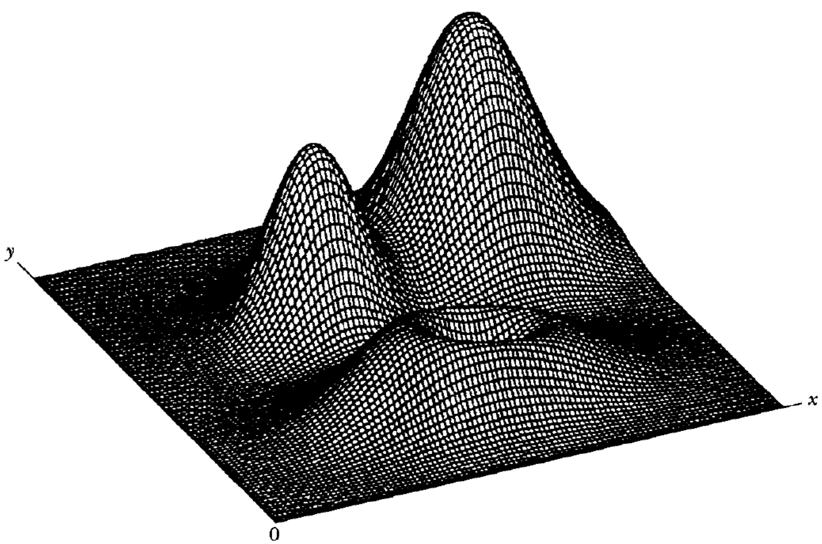
Nota: dada uma variação de posição *d**s***

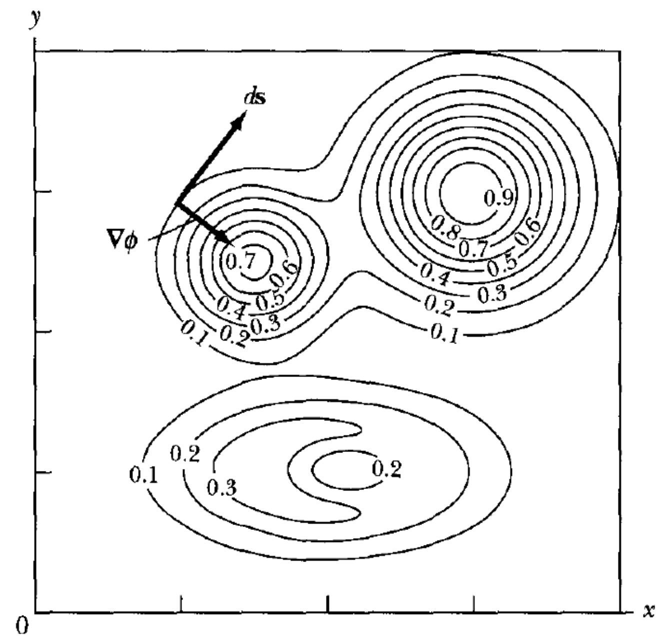
$$(d\phi)_{\max} = |\nabla\phi|\, ds, \quad \text{for} \quad \nabla\phi \parallel d\mathbf{s}$$

$$|\nabla\phi| = \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_{\max}$$

propriedades do gradiente

O gradiente aponta na direcção de máximo aumento da função *f*





Superfície equipotencial: $df = 0$

$\nabla f = 0 \longrightarrow$ pontos estacionários

Exercício

Ache o gradiente de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

<u>solução:</u>

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

Operador nabla

$$\nabla \phi = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \right)\phi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla = \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}}$$

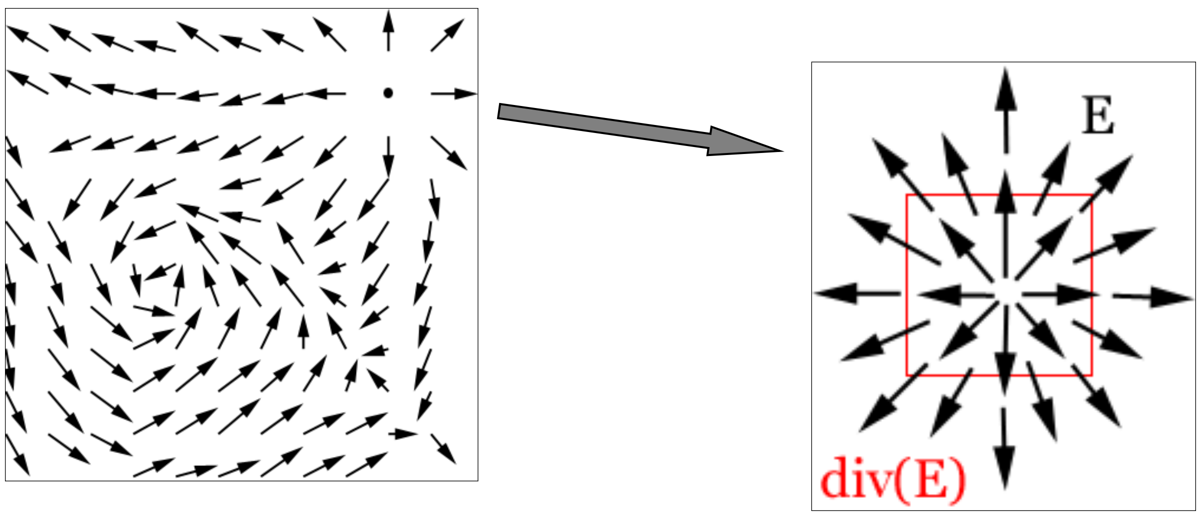
Divergência

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_x, F_y, F_z)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

Interpretação da divergência

a divergência de um campo vectorial dá-nos o fluxo que surge num determinado volume.



Exemplo

Calcule a divergência de $\vec{v}(t) = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3zx\hat{k}$

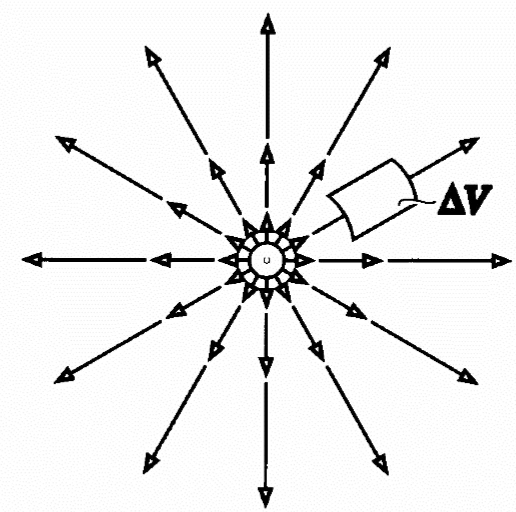
Solução:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(2yz)}{\partial y} + \frac{\partial(3zx)}{\partial z} = y + 2z + 3x$$

Outro exemplo

Calcule a divergência de $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3.$

Solução: $$\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

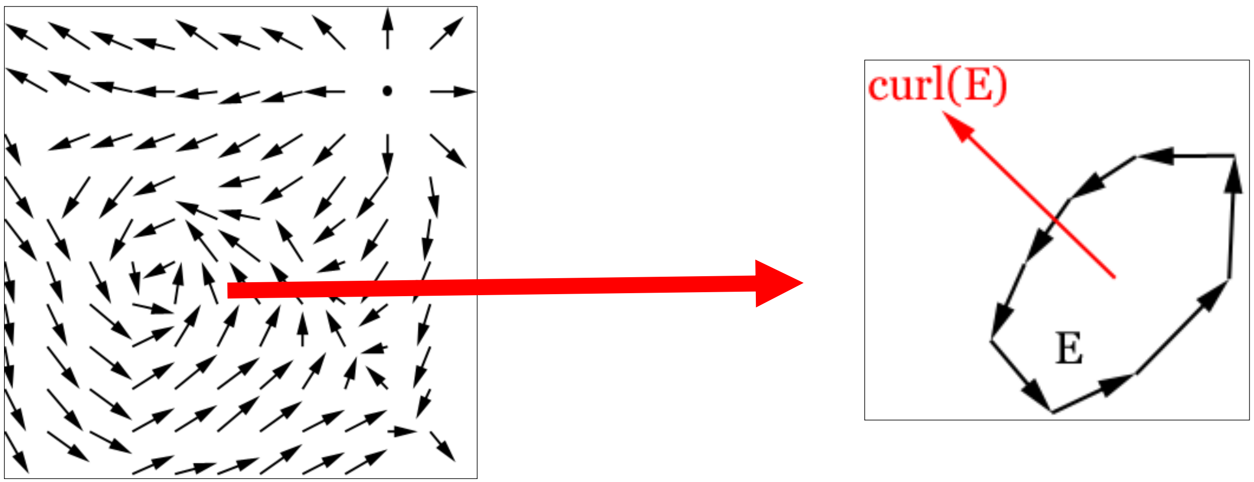


Rotational

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

interpretação do rotational



O rotacional de um campo vectorial dá-nos a circulação numa determinada região

Exemplo

Calcule o rotacional de $\vec{v}(t) = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$

Solução:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + (1+1)\hat{\mathbf{k}} = 2\hat{\mathbf{k}}$$

Laplaciano

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

$$= \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla}$$

Exercício

Seja $\nabla\varphi = (1 + 2xy)\,\mathbf{e}_x + (x^2 + 3y^2)\,\mathbf{e}_y$.

Determine o campo escalar φ

Solução

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1 + 2xy) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x, y) = x + x^2 y + f_1(y),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (x^2 + 3y^2) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x, y) = x^2 y + y^3 + f_2(x).$$

Por comparação:

$$f_1(y) = y^3 + C_1, \qquad f_2(x) = x + C_2;$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\varphi(x, y) = x + x^2 y + y^3 + C\,.}$$

exercícios

14. Determine os gradientes das seguintes funções:

    (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$;
    (b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$;

16. Calcule a divergência das funções vectoriais seguintes:

    (a) $\mathbf{v}_a = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$.

Exercício

20. Uma partícula tem movimento helicoidal, $\mathbf{r}(t) = r\cos(\omega t)\mathbf{i} + r\sin(\omega t)\mathbf{j} + b\,\omega t\mathbf{k}$, com velocidade angular ω e raio r constantes. b é uma constante.

    (a) Determine a velocidade da partícula.

    (b) Determine a aceleração.

Energia potencial

Dada uma força conservativa ***F,*** define-se energia potencial num ponto A por

$$U(A) = -\int_P^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

P - ponto de referência arbitrário

Assim

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^P \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_P^B \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= U(A) - U(B)) = -\Delta U$$

Notas

Energia potencial = capacidade de realizar trabalho

Equivalência importante:

Uma força ***F*** é conservativa se e só se existe uma função U(***r***) diferenciável tal que $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

verificação: $$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \nabla U \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU$$
$$= U(A) - U(B)) = -\Delta U$$

Notas

Outra equivalência importante:

Uma força ***F*** é conservativa se e só se $\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$

equivalências:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

circulação

exemplos

Energia potencial gravítica: $E_{Pg} = mgy$

Energia Potencial Elástica: $E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$

exercício

4. Considere a força $\mathbf{F}$ tal que

$$\mathbf{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\mathbf{k}.$$

(a) Mostre que a força é conservativa.

(b) Ache a expressão para a energia potencial correspondente a esta força.

(c) Existem pontos de equilíbrio?

conservação da Energia Mecânica.

Suponhamos que uma partícula sofre apenas a acção de uma força conservativa ***F*** num deslocamento duma posição P_i para P_f.

$$W_{i\to f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

$$W_{i\to f} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{cf} - E_{ci}$$

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

conservação da Energia Mecânica.

energia mecânica: $E_M = E_c + E_P$

$$E_{Mi} = E_{Mf} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta E_M = 0$$

Sob a acção de uma força conservativa ***F***, a energia mecânica é conservada

forças conservativas e não-conservativas

$$\vec{F}_{res} = \sum_{variasEp} \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{NC}$$

trabalho total:

$$W_{i\to f}\left(Fres\right) = \Delta E_C$$

$$W_{i\to f}\left(Fres\right) = W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) + W_{i\to f}\left(F_{NC}\right)$$

forças conservativas e não-conservativas

trabalho das forças conservativas:

$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = -\sum \Delta E_P$$

trabalho das forças não conservativas:

$$W_{i\to f}\left(F_{NC}\right) = W_{i\to f}\left(Fres\right) - W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) =$$

$$= \Delta E_C - \left(-\sum \Delta E_P\right) =$$

$$= \Delta E_C + \sum \Delta E_P = \Delta E_M$$

$$\Rightarrow \quad W_{i\to f}\left(F_{NC}\right) = \Delta E_M$$

Sumário

$$W_{i\to f}\left(Fres\right)=\Delta E_C$$

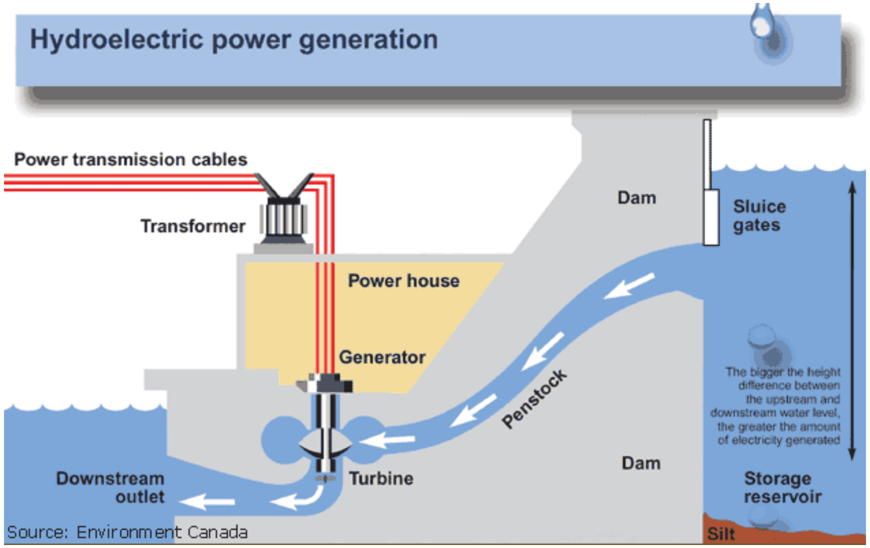
$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right)=-\sum \Delta E_P$$

$$W_{i\to f}\left(F_{NC}\right)=\Delta E_M$$

exercício

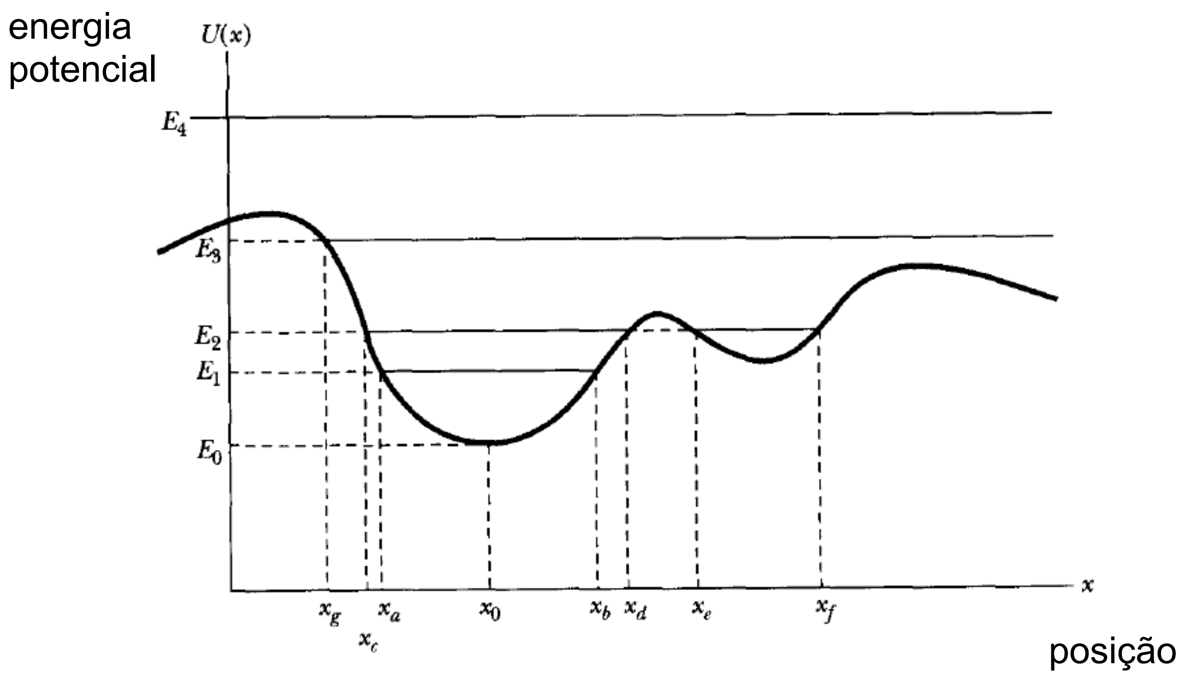
Numa barragem, uma tonelada de água atravessa as turbinas por segundo. A água desce 100 metros antes de atingir as turbinas.

Qual é a potência máxima que a turbina pode gerar? Compare com a potência de consumo de uma lâmpada.

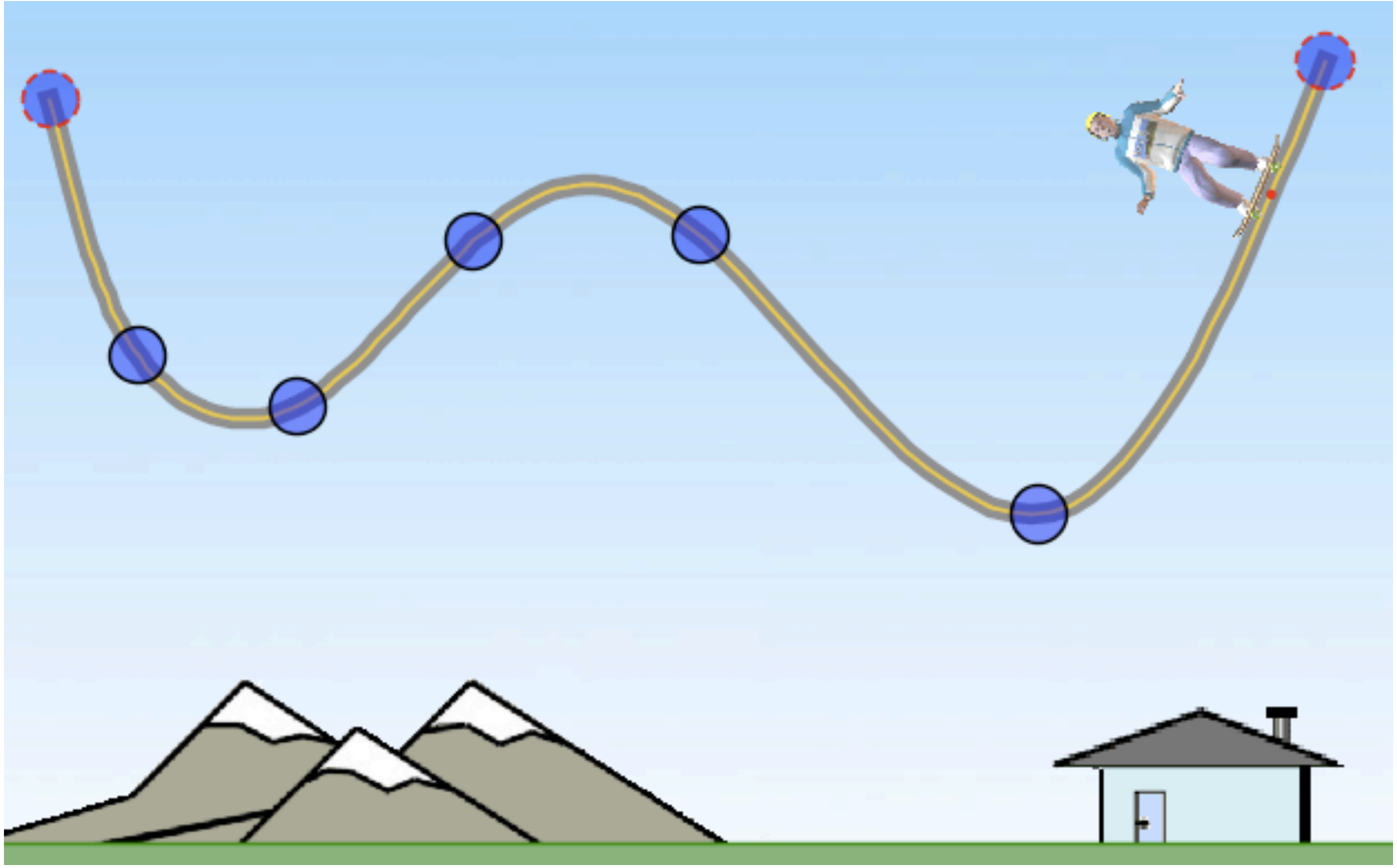


Equilíbrio instável e estável

partícula com mov. a uma dimensão:



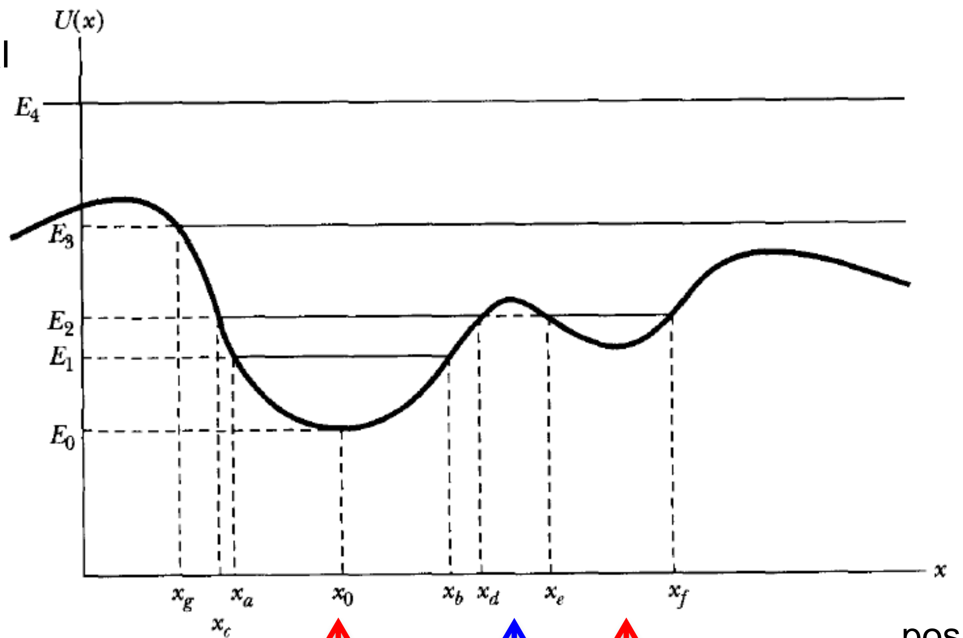
Equilíbrio instável e estável



http://phet.colorado.edu/new/simulations/sims.php?sim=Energy_Skate_Park

Equilíbrio instável e estável

energia
potencial



posição

ponto de
equilíbrio
estável

ponto de
equilíbrio
instável

ponto de
equilíbrio
estável

pontos de equil. estável e instável

definição:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_a} = 0 \Rightarrow x_a \text{ ponto de equilíbrio}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_a} > 0 \Rightarrow x_a \text{ ponto de equilíbrio estável}$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_a} < 0 \Rightarrow x_a \text{ ponto de equilíbrio instável}$$

ponto de equil. estável

expansão em série de Taylor:

$$U(x) \approx U(x_a) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_a} (x - x_a) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_a} (x - x_a)^2 + \cdots$$

$$\approx U(x_a) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_a} (x - x_a)^2$$

movimento oscilatório de período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_a}}}$$

oscilador harmónico:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

tempo para partícula se deslocar de x_a a x_b

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \qquad \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_B - t_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}}$$

exercício

3. Considere a montagem representada na figura. O fio tem comprimento b e os pontos A e B estão a uma distância $2d$. Determine a distância x_1 tal que o sistema está em equilíbrio. Demonstre que o equilíbrio é estável.