UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
3810-193 AVEIRO

Mecânica Clássica

Ano letivo 2020/21
2º Semestre
Data: 23 de Julho 2021
Hora: 9h30
Duração: 2h 00m

Cotação:
I – 5 valores
II - 5 valores
III - 4 valores
IV - 6 valores

I

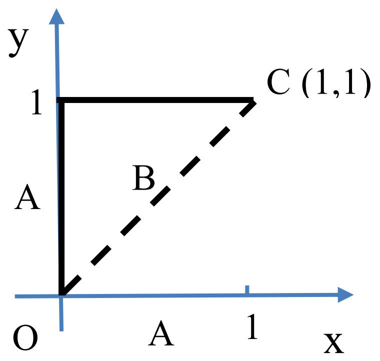
Considere a força $\vec{F}$ dada por

$$\vec{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

a) A força é conservativa? Justifique.

b) Calcule explicitamente os integrais de caminho correspondentes ao trabalho desta força no percurso OC (no plano *xy*) segundo o trajeto A [percurso vertical a partir da origem até ao ponto (0,1) e depois horizontal até ao ponto (1,1)] representado na figura seguinte (unidades SI).

c) Determine a variação da energia cinética de uma partícula de massa 2kg que se desloca de O para C ao longo do percurso B (recta *y*=*x* a tracejado).



II

Um oscilador amortecido, com m = 4 kg (massa do sistema), move-se ao longo da direção do eixo do *xx* sob a influência de uma força restauradora com a magnitude 4.x N e de uma força de amortecimento proporcional ao módulo da velocidade instantânea, sendo de 8 N quando a velocidade era de 10 ms^{-1}.

a) Determine a frequência de oscilação deste sistema.

b) Indique, justificando, se o oscilador é subamortecido, amortecido criticamente ou sobreamortecido.

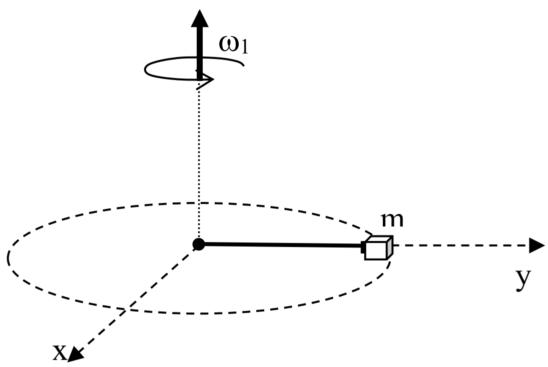
c) Assuma que o oscilador é acionado por uma força sinusoidal $F = F_0 \cos(\omega t)$ de valor máximo 5 N e cuja frequência angular ω é 1/100 da frequência natural do oscilador (sem amortecimento).

i) Qual é a amplitude das oscilações?

ii) Tendo em conta o baixo valor da frequência angular da força *F*, qual é a relação entre a força restauradora e esta força? Usando esta relação, escreva a posição do oscilador em função do tempo.

III

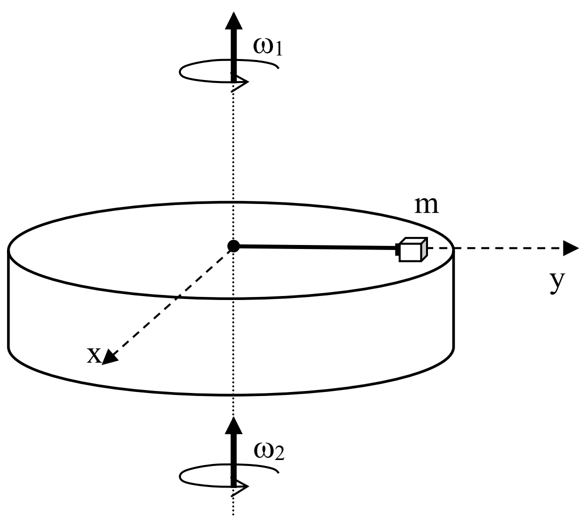
Uma massa de 2kg presa a um fio tem movimento circular uniforme (em relação ao referencial do laboratório) com velocidade angular $\boldsymbol{\omega_1}=2\mathbf{k}$ (rad/s), como mostra a figura seguinte. No instante t=0s, o vetor posição da massa é $\mathbf{r}=10\,\mathbf{j}$.



a) Determine o vetor velocidade da massa no instante t=0s no referencial do laboratório.

b) Determine o vetor aceleração da massa no referencial do laboratório no instante t=0s.

Considere agora que, por debaixo da massa, uma plataforma circular roda no sentido anti-horário com velocidade angular $\boldsymbol{\omega_2}=1\mathbf{k}$ (rad/s), como mostra a figura seguinte. Não há atrito entre a massa e a plataforma. Assumimos que os sistemas de eixos no referencial do laboratório e no referencial da plataforma coincidem para t=0s.



c) Determine o vetor velocidade da massa no instante $t=0s$ no referencial da plataforma.

d) Determine a aceleração de Coriolis (direção, sentido e módulo) no instante t=0s no referencial da plataforma.

IV

Um anel, de raio R e massa m, rola sem escorregar num plano horizontal com velocidade v_0 (velocidade do centro de massa) na direção de um plano **A**, inclinado de um ângulo θ como mostra a figura. No plano **A** o anel rola sem escorregar. Ambos os planos têm o mesmo coeficiente de atrito μ.

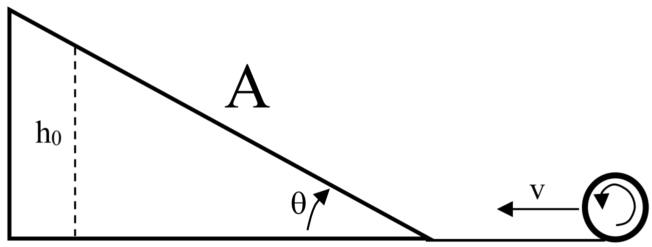
a) Esboce o diagrama das forças que atuam sobre o anel: i) quando este rola no plano horizontal; ii) quando este rola no plano inclinado;

b) Determine a energia cinética do anel no plano horizontal em função da velocidade do centro de massa v_0, do raio R e da massa m.

c) O anel sobe o plano inclinado **A** e atinge uma altura máxima h_0. Determine h_0.

d) Determine o trabalho realizado pela força de atrito neste percurso.

e) Se não existisse atrito no plano inclinado, h_0 será maior ou menor? Justifique.



Formulário

$$x = \rho\cos(\phi)$$
$$y = \rho\sin(\phi)$$
$$z = z$$

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{w}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\right)\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$= \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$Mdv = -v_e dM$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

$$\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P} + \sum_i \vec{r}_i^{\,'}\times\vec{p}_i^{\,'}$$

$$T = \tfrac{1}{2}MV^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_i v'^2_i$$

$$T_1^i + T_2^i + Q = T_1^f + T_2^f$$

$$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$$

$$I \equiv \int r^2 dm$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$I_c = \frac{ML^2}{12} \qquad I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I = I_{CM} + Md^2$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$Q = 2\pi\left(\frac{E}{|\Delta E|}\right)_{\text{ciclo}}$$

$$\log\frac{x_n}{x_{n+1}} = \gamma T$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\delta = \arctan\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$E = E_0 e^{-(b/m)t}$$

$$R = \frac{v_0^{\,2}}{g}\sin 2\theta_0$$

$$v^2 = v_0^2 - 2a\Delta x$$

$$y(x) = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2$$

$\boxed{\text{I}}$

a) $$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \left(0 - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - 0\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$= \vec{0} \Rightarrow$ conservativa

b) $(0,0) \rightarrow (1,0)$:

$$W_1 = \int_{(0,0)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_y \, dy = \int_0^1 y \, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1/2 \text{ J}$$

$(0,1) \longrightarrow (1,1)$:

$$W_2 = \int_{(0,1)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x \, dx = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \text{ J}$$

$W_{total} = W_1 + W_2 = 1 \text{ J}$ //

c) $W_B = \Delta E_c$, mas $W_A = W_B$ pois $\vec{F}$ conservativa

Logo $\Delta E_c = 1 \text{ J}$

$\boxed{\text{II}}$ Dados:

- $m = 4$ kg

a) • $F = 4x$ (N) $\Rightarrow K = 4$ N/m

• $F_r = bv$ com $8 = b\,10 \Rightarrow b = 0{,}8 \frac{Ns}{m}$

$= \frac{4}{5} \frac{Ns}{m}$

coef. amort.: $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{4/5}{2 \times 4} = \frac{1}{10}\, s^{-1}$

$= 0{,}1\, s^{-1}$

freq. natural: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$ rad/s

freq. de oscil:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{10^2}} = \sqrt{\frac{99}{100}} \text{ rad/s}$$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \ldots$

b)

$\omega_0^2 > \gamma^2 \Rightarrow$ subamortecimento

c) i) Amplitude:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{1}{100^2} - 1\right)^2 + 4 \times \frac{1}{10^2} \times \frac{1}{100^2}}} \simeq \frac{F_0/m}{\sqrt{1}} = \frac{5}{4} \text{ m}$$

ii) Para $\omega \ll \omega_0$, temos um oscilador em quasi-equilíbrio pois a sua aceleração é proporcional a ω^2, isto é, é muito pequena. As velocidades tb são pequenas pois são proporcionais a ω.

$$\begin{cases} F + F_{el} \approx 0 \\ F_{res} \simeq 0 \quad (\text{veloc. pequenas}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -F_{el} = F$$

$$\Rightarrow \quad Kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{F_0}{K} \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5}{4} \cos\left(\frac{1}{100} t\right) \quad (m)$$

$\boxed{VI}$

Mov. circ.:

a) $\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} = 2\hat{k} \times 10\hat{y} = -20\hat{i}$ (m/s)

b) Mov. circ. unif:

$\vec{a} = \vec{a}_c = -a_c\hat{y} = -\frac{v^2}{r}\hat{y} = -\omega_1^2 r\hat{y}$

$= -2^2 \times 10\hat{y}$

$= -40\hat{y}$ (m/s²)

c) Ref. da plataforma:

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = -20\hat{i} - \hat{k} \times 10\hat{y}$

$= -20\hat{i} + 10\hat{i}$

$= -10\hat{i}$ (m/s)

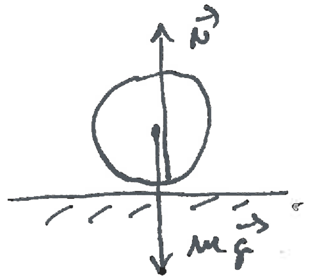
d) Acel. de Coriolis:

$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}' = -2\hat{k} \times (-10\hat{i})$

$= 20\hat{y}$

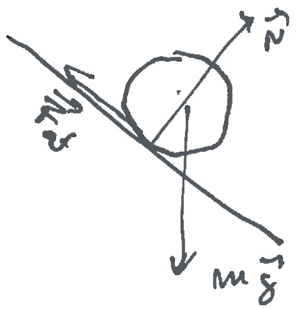
IV

a) Plano horizontal:



não há força de atrito

Plano inclinado:



b) E_c:

$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$, com $\begin{cases} I = mR^2 \\ v = \omega R \end{cases}$

$= \frac{1}{2} mR^2\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$

$= m v^2$

c) Cons. da E_m:

$$E_{ci} + \cancel{E_{pi}} = \cancel{E_{cf}} + E_{pf}$$

$$\underset{0}{} \qquad \underset{0}{}$$

$$\Rightarrow m v_0^2 = m g h_0 \quad \Rightarrow h_0 = \frac{v_0^2}{g}$$

d) $W_{F_a} = 0$, pois rola sem deslizar

e) Menor, pois a energia cinética de rotação permaneceria constante e apenas a energia cinética de translação se converteria em energia potencial gravítica

$$E_{pf} = E_{ci}\ (\text{Transl})$$

$$\Rightarrow m g h_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Rightarrow h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$$