Cap. 5 - Oscilações

Sumário:

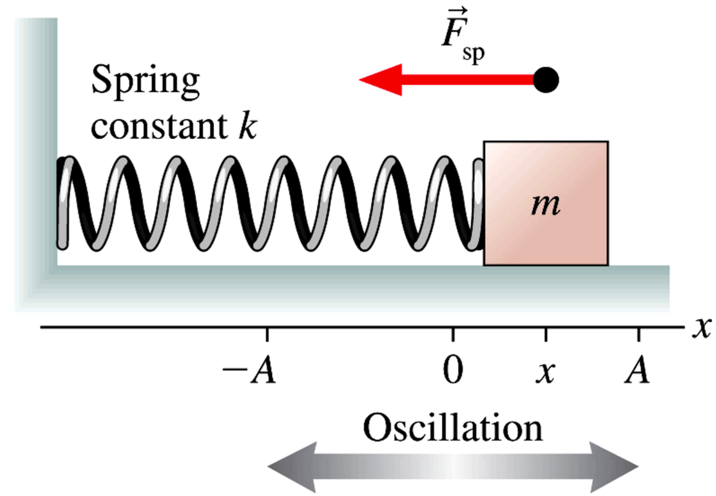
Cap. 5 : Movimento harmónico simples. Oscilações amortecidas. Oscilações forçadas e ressonância.

Bibliografia:

- Caps. 21 e 23, Greiner; Cap. 5 Taylor; Cap. 3 Thornton

Oscilador harmónico simples

<u>Força restauradora</u> *F(x):*



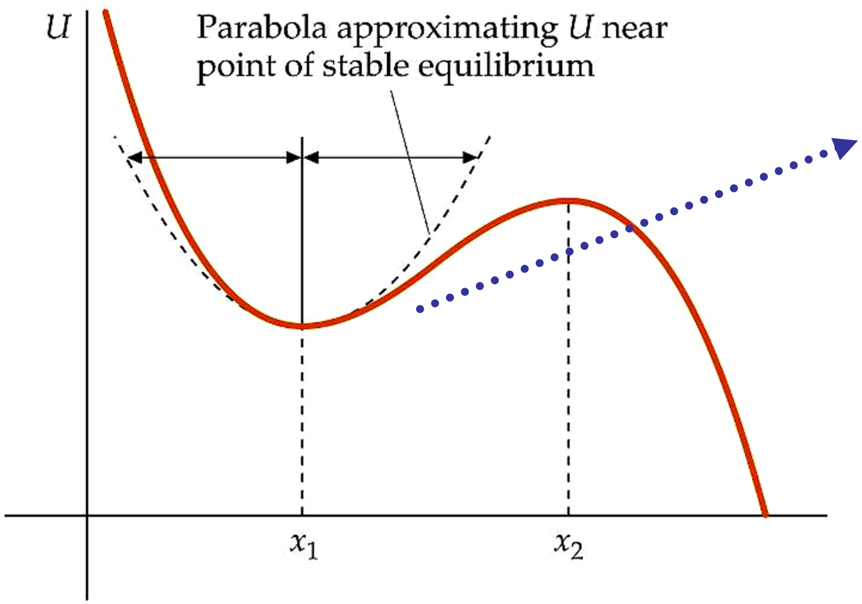
- depende de x
- x=0 posição de equil.

<u>Expansão em série de Taylor</u>:

$$F(x) \approx F(0) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_0 x + \cdots \approx -kx$$

para x pequeno e com $k = -\left.\frac{dF}{dx}\right|_0$

Nota: movimento na vizinhança de um ponto de equil. est.



$$U(x) \approx U(x1) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_a} (x - x_1)^2$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \approx -\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_1} (x - x_1) = -k(x - x_1)$$

$$\text{onde } k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_1}$$

equação do movimento do OHS

$$F = -kx = ma_x \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

equação diferencial linear e homogénea de 2ª ordem

definimos $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ or $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

solução

$$\boxed{x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)}$$

com: A = amplitude

ω = frequência angular

ϕ_o = fase inicial

verificação

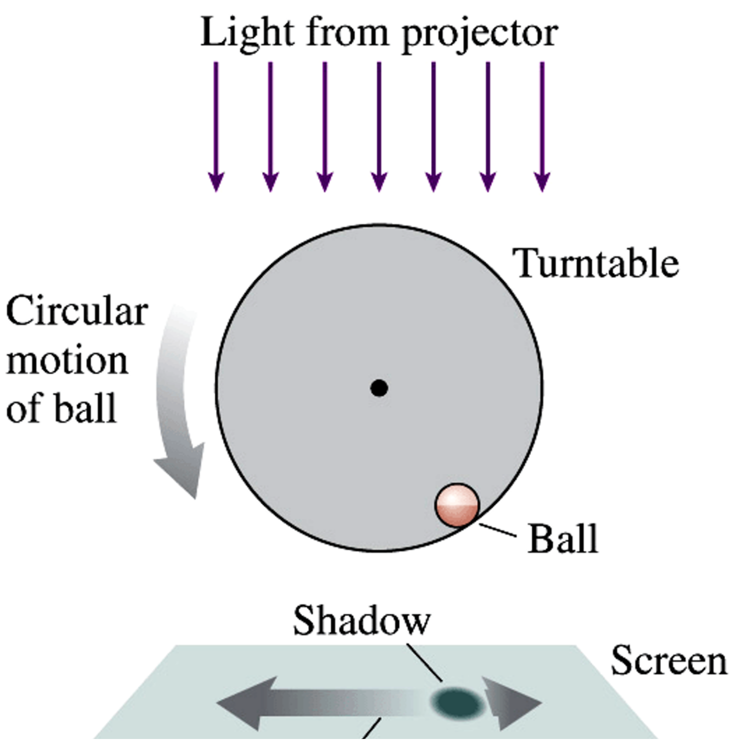
$$\boxed{x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)}$$

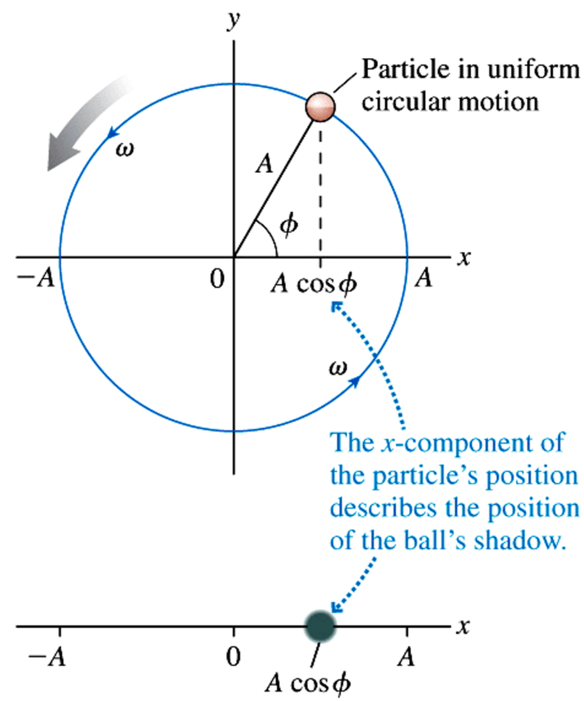
$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{d}{dt}\left[A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)\right] = -\omega A\sin\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left[-\omega A\sin\left(\omega t + \phi_0\right)\right] = -\omega^2 A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\omega^2 A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) + \frac{k}{m}A\cos\left(\omega t + \phi_0\right) = 0$$

relação com o mov. circular





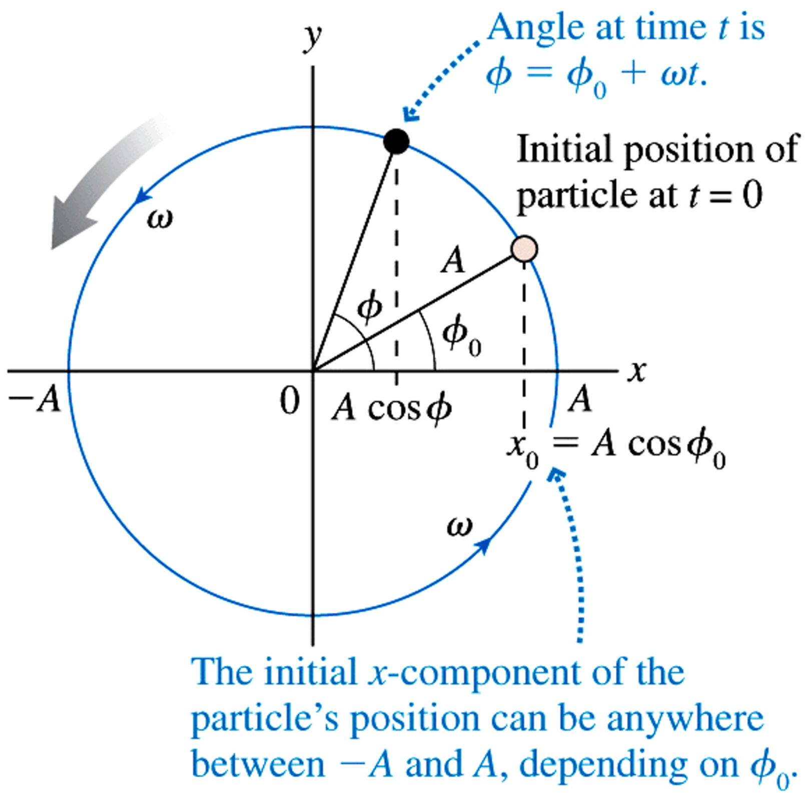
$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = A\cos\omega t}$$

fase inicial

$\underline{t=0}$:

$$x_0 \equiv x(0) = A\cos\phi_0$$

$$v_{0x} \equiv v(0) = -\omega A\sin\phi_0$$



Nota sobre cond. iniciais

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Nota sobre cond. iniciais

$$x_0 = A \cos(\omega \times 0 + \phi_0)$$

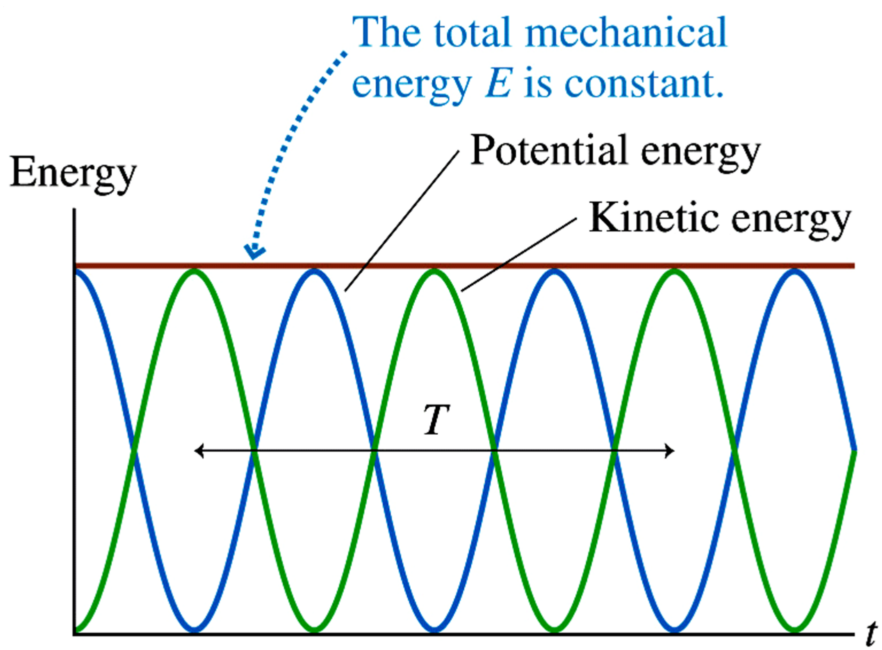
$$v_0 = -\omega A \, sen \, (\omega \times 0 + \phi_0)$$

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega A \, sen\phi_0}{A \cos\phi_0} = -\omega \, tg\phi_0$$

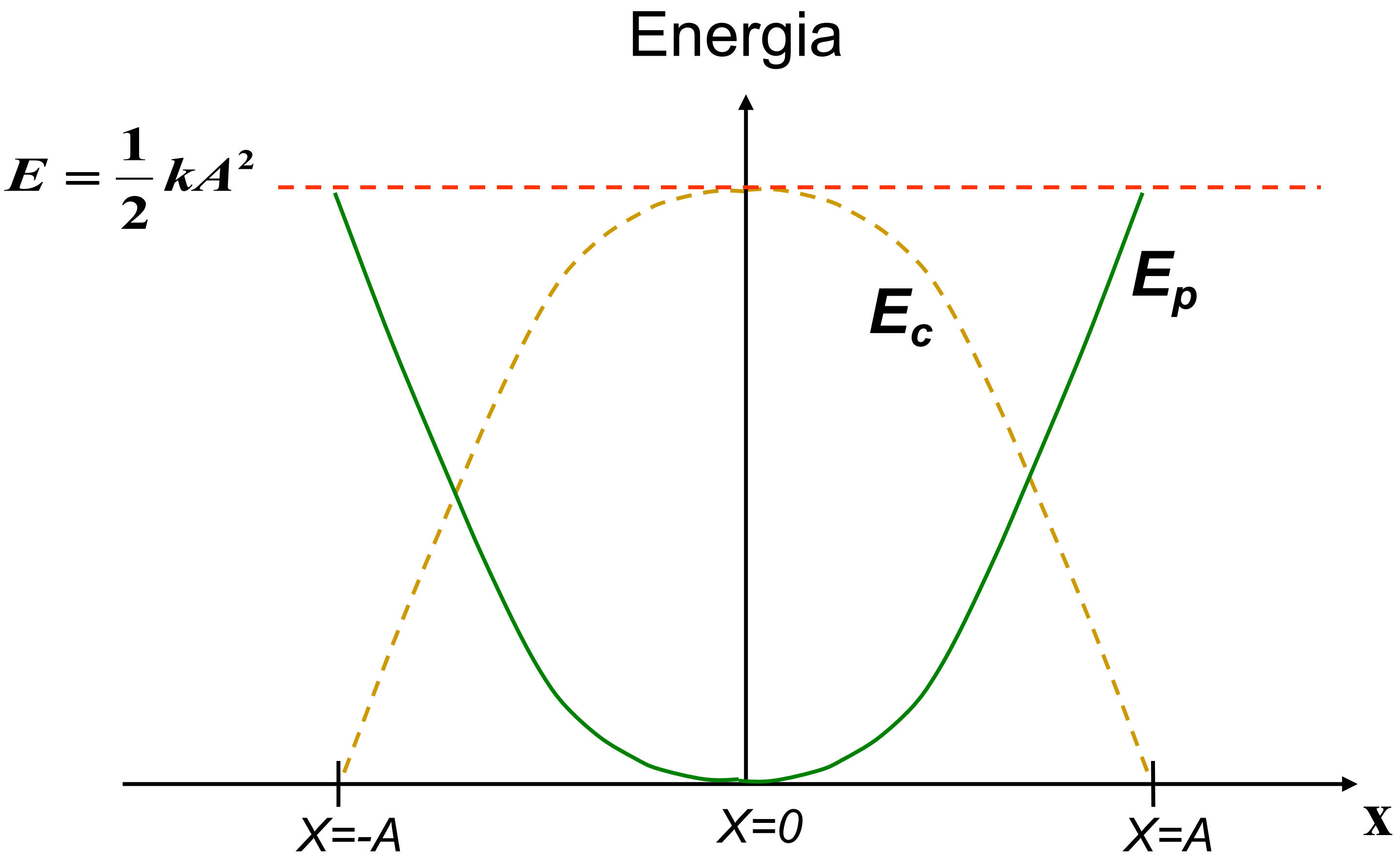
$$\boxed{tg\phi_0 = -\frac{v_0}{\omega \, x_0}}$$

Energia mecânica no OHS

$$E = \frac{1}{2} m v_x{}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}{}^2 = \text{constante}$$



Energia mecânica no OHS



exercício

Um corpo oscila com M.H.S., ao longo do eixo dos xx, de acordo com:

$$x(t) = 4{,}0\, cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(m)}$$

Determine :

a) A amplitude;

b) A frequência e o período do movimento;

c) Posição, velocidade e aceleração no instante t = 1 s;

d) A velocidade e a aceleração máximas;

e) O deslocamento entre 0-1s;

f) A fase em t=2s.

solução

$$x(t) = 4,0\cos(\pi\ t + \frac{\pi}{4})\text{(m)}$$

c) Velocidade, v = ?

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[4,0\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})\right] = -4,0\pi sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(m/s)}$$

Aceleração, a = ?

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-4,0\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})\right] = -4,0\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{ms}^{-2})$$

solução

Posição, velocidade e aceleração no instante t = 1 s

$$x(1) = 4{,}0\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4{,}0\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2{,}8\ \ m$$

$$v(1) = -4{,}0\pi\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 8{,}9\ \ ms^{-1}$$

$$a(1) = -(4{,}0\pi^2)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 27{,}9\ \ \ ms^{-2}$$

solução

d) $x(t) = 4,0\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$ (m)

Velocidade máxima

$$v_{máx} = 4\pi \quad \text{(m/s)}$$

Aceleração máxima

$$a_{máx} = 4\pi^2 \quad \text{(m}^2\text{/s)}$$

e) Deslocamento entre 0-1s

$$\Delta x = x(1) - x(0) \Leftrightarrow$$

$$\Delta x = 4cos\left(\pi.1 + \frac{\pi}{4}\right) - 4cos\left(\pi.0 + \frac{\pi}{4}\right) = -2.83 - 2.83 = 5.66 \ \ m$$

solução

f) $x(t) = 4{,}0\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$ (m)

Fase em t=2s:

$$\pi.2 + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \quad \text{(rad)}$$

Pêndulo simples

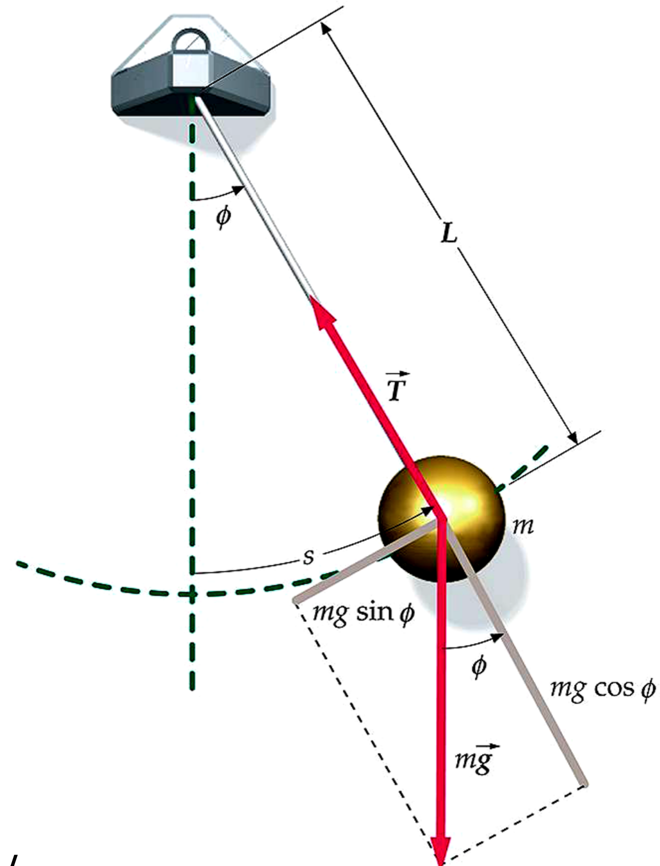
Força restauradora:

$$-mg\sin\phi$$

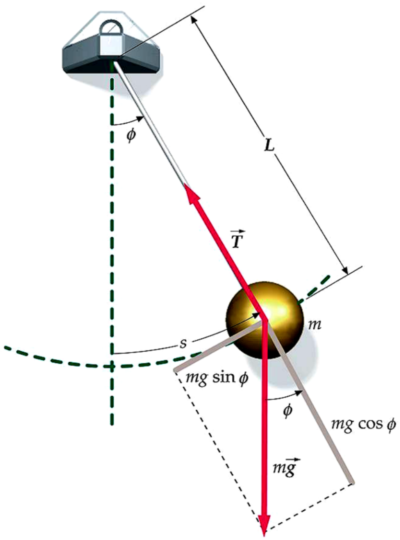
aceleração tangencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$



Pêndulo simples



$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

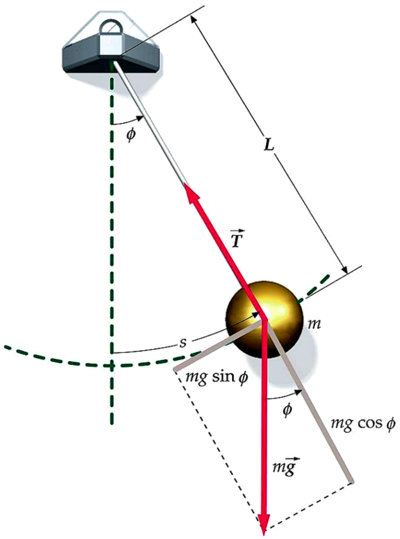
$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi \approx -\frac{g}{L}\phi \quad \text{se} \quad \phi \ll 1$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução: $\phi = \phi_0\cos(\omega t + \delta)$

Pêndulo simples: sumário

pequenas oscilações!



eq. movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução:

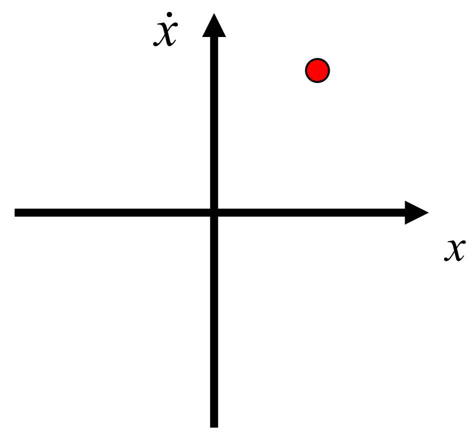
$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

espaço de fase

estado do osc. harm. num dado instante *t* $\Rightarrow$ $\left[x(t), \dot{x}(t)\right]$ (eq. diferencial de 2ª ordem)



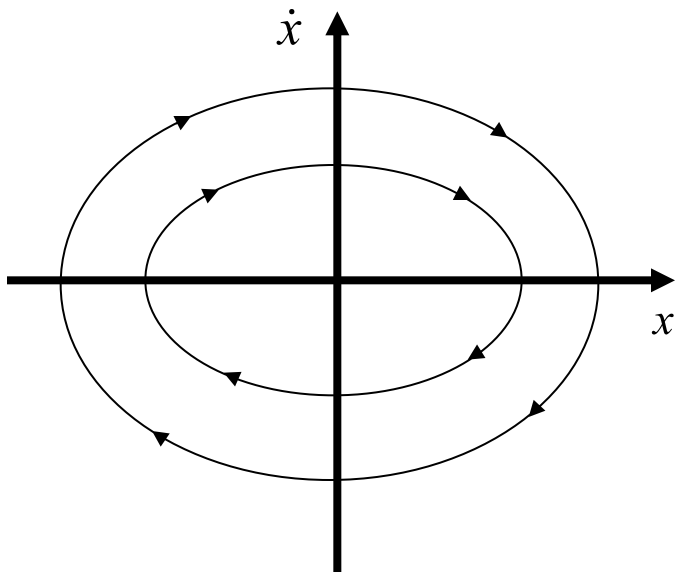
trajectória no espaço de fase

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin\left(\omega t + \phi_0\right)$$

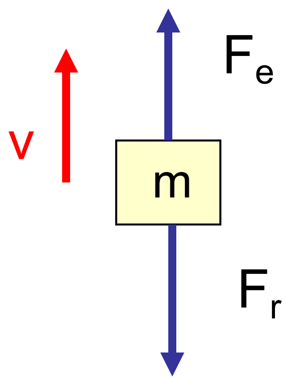
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega A}\right)^2 = 1$$

Elipse!



não há intersecções!

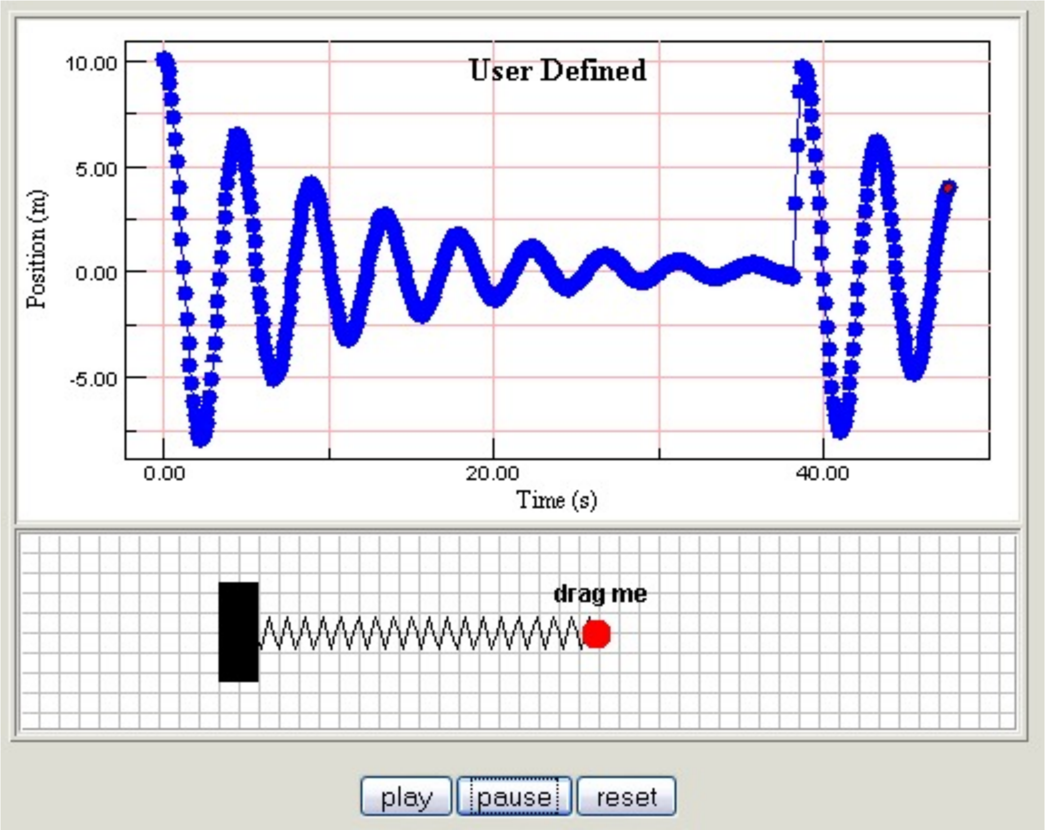
oscilações amortecidas



força elástica: F_e=-kx

força resistíva: F_r=-bv

applet



http://cat.sckans.edu/physics/shm.htm

equação do movimento

$$\sum F = -kx - bv = -kx - b\frac{dx}{dt} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

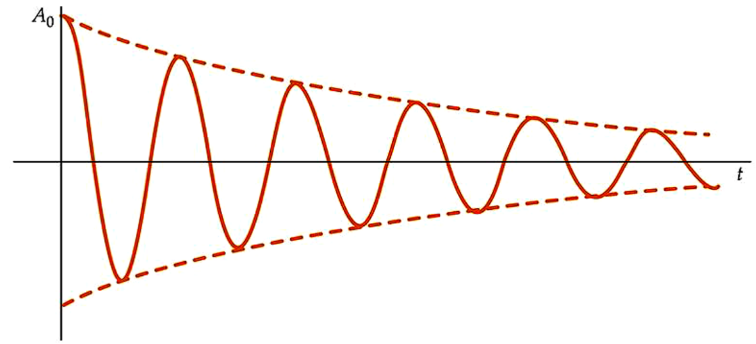
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

com

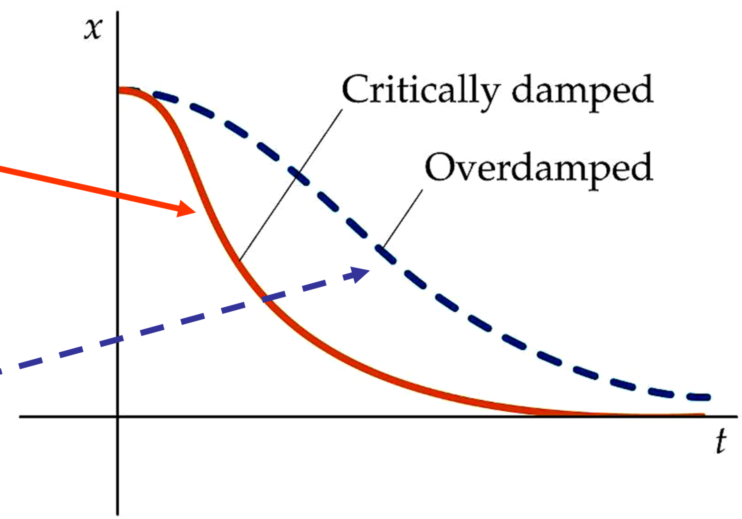
$$\boxed{\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{k}{m}\\ \gamma &= \frac{b}{2m}\end{aligned}}$$

3 regimes

- subamortecimento



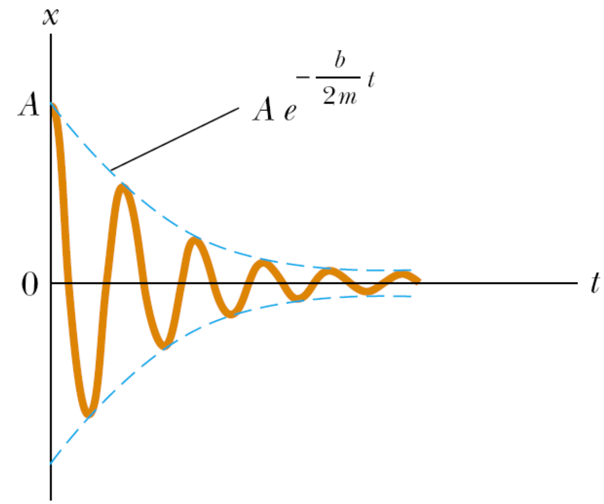
- amortecimento crítico



- sobreamortecimento

subamortecimento

$$\boxed{\gamma^2 < \omega_0^2} \Rightarrow$$



solução: $$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \phi)$$

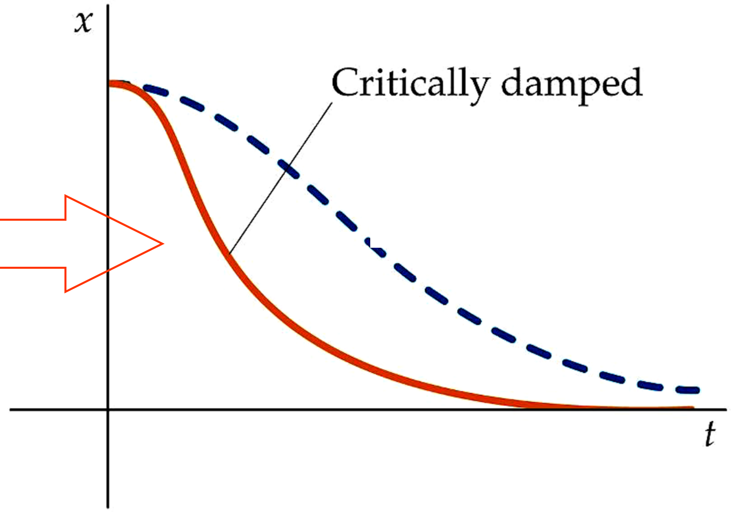
$$= e^{-\gamma t}\left[C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\right]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[C_3 e^{i\omega t} + C_4 e^{-i\omega t}\right]$$

$$\text{com} \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

amortecimento crítico

$$\boxed{\gamma^2 = \omega_0^2}$$



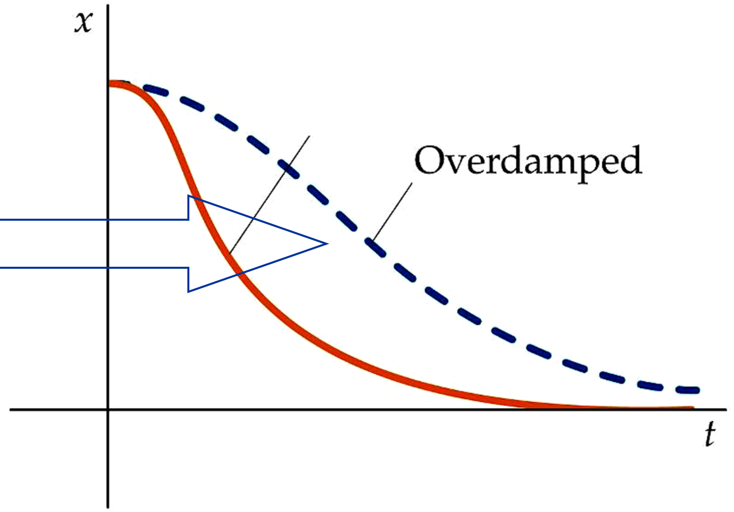
solução:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A + Bt\right]$$

retorno rápido à origem!

sobreamortecimento

$$\boxed{\gamma^2 > \omega_0^2}$$

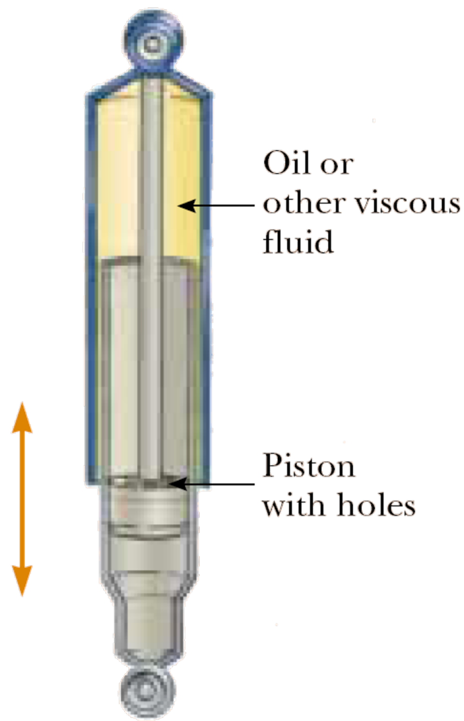


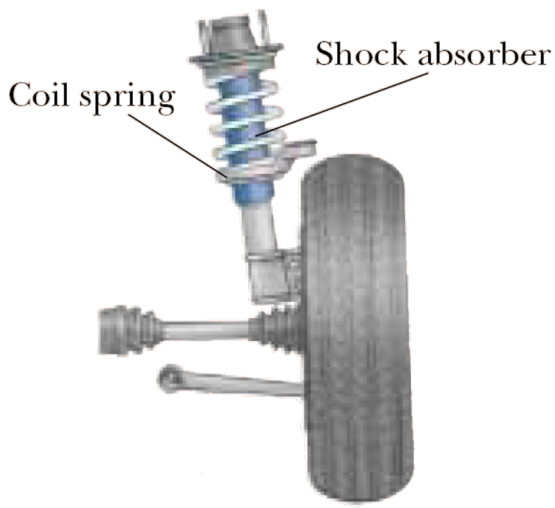
solução:

$$x = e^{-\gamma t}\left[A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t} \right]$$

$$\text{com} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

exemplo


Oil or
other viscous
fluid
Piston
with holes

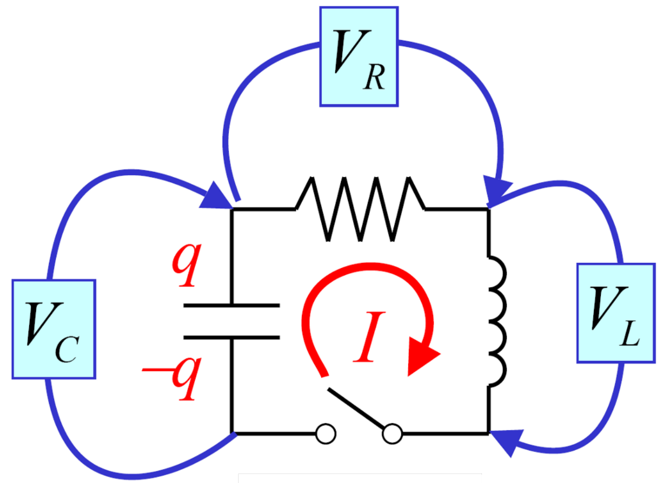

Shock absorber
Coil spring

analogia

$$V_C = \frac{q}{C}$$ Capacitance

$$V_R = -RI$$ Ohm's Law

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}$$ Inductance



$$I = -\frac{dq}{dt}$$

eq. do "movimento"

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

sistema fracamente amortecido

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0$$

potência dissipada:

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F}_d \cdot \vec{v} = -b\vec{v} \cdot \vec{v} = -bv^2$$

energia cinética média numa oscilação:

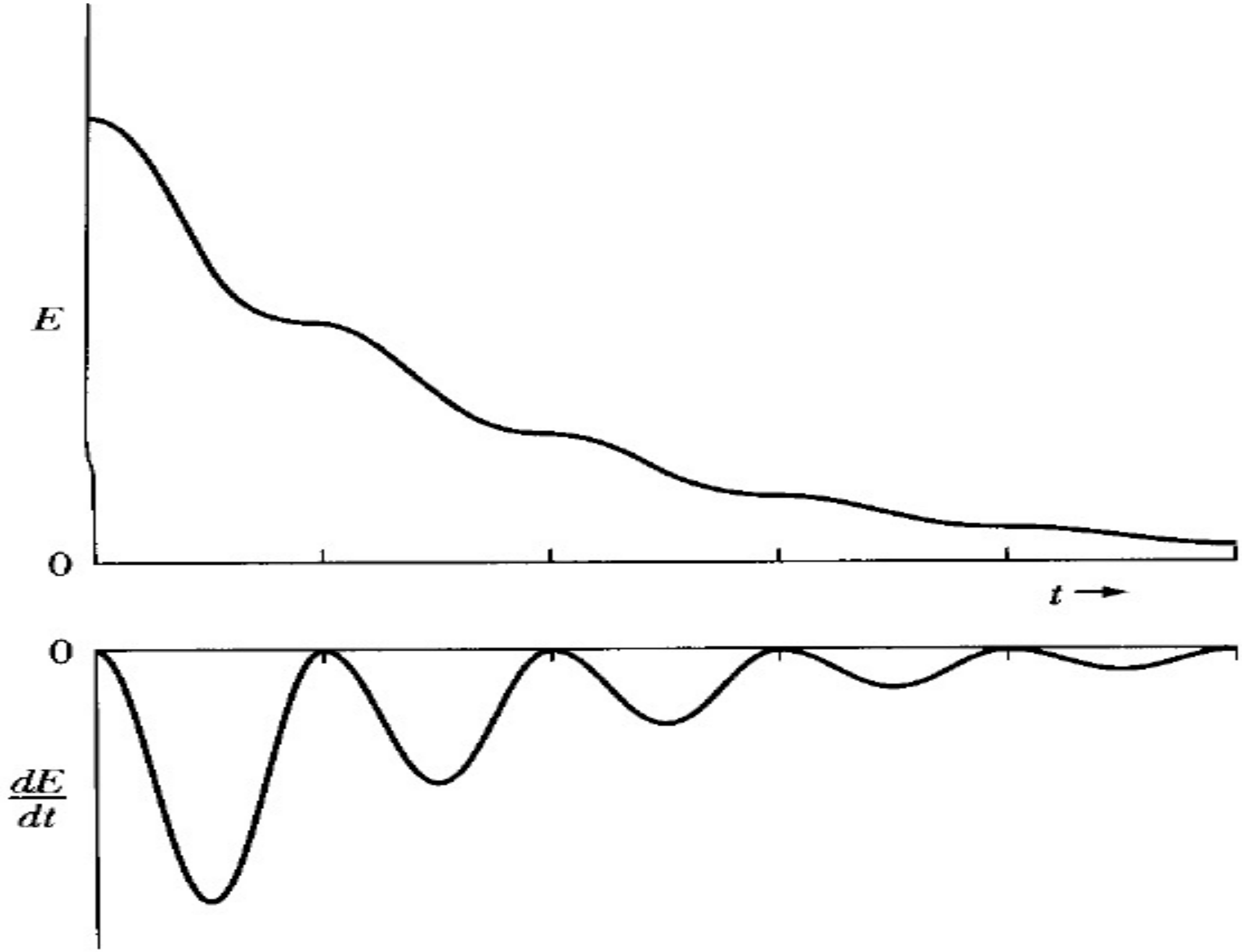
$$\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right)_{av} = \tfrac{1}{2} E \quad \text{então} \quad \left(v^2\right)_{av} = \frac{E}{m}$$

sistema fracamente amortecido

$$P = \frac{dE}{dt} = -bv^2 = -\frac{b}{m}E = -\frac{E}{\tau}$$

$$\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt \quad \Rightarrow \quad E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Energia no subamortecimento



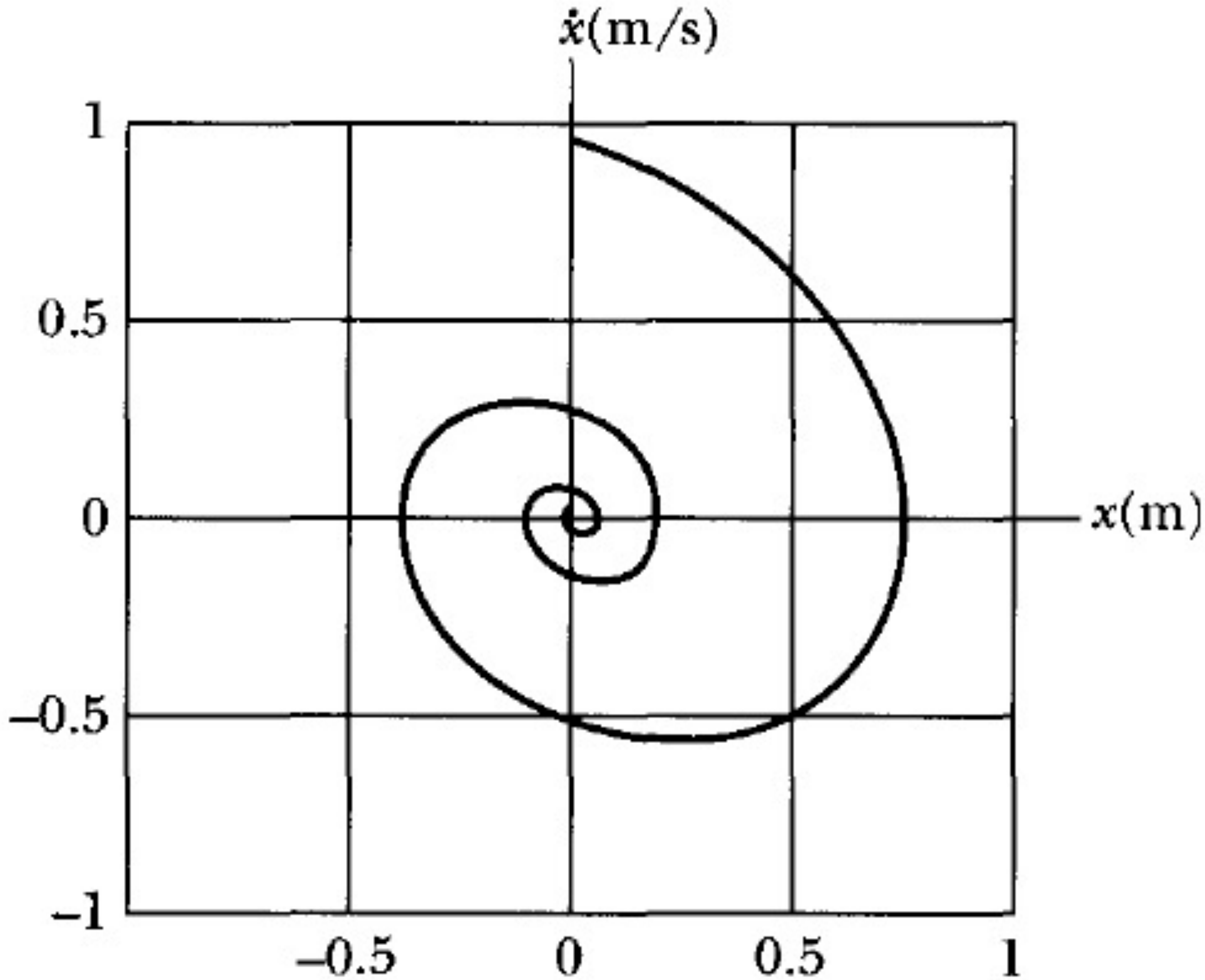
exercício

6 - Um corpo de 2 kg oscila preso a uma mola de constante de força $k = 400$ N.m^{-1}, com amplitude inicial de 3 cm.

a) Determine o período e a energia mecânica total inicial.

b) Qual a constante de amortecimento b, quando a energia diminui de 1% por período. Assuma que o período da oscilação natural é igual ao da oscilação amortecida.

Espaço de fase e subamortecimento



factor de qualidade Q

$$E = E_0 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{E} = -\frac{dt}{\tau}$$

Num ciclo e definindo $Q \equiv \omega_0 \tau$:

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E} \right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

Q/2π é a razão da energia armazenada e da energia dissipada por ciclo de oscilação

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{|\Delta E|}{E} \right)_{\text{ciclo}}} = 2\pi \left(\frac{E}{|\Delta E|} \right)_{\text{ciclo}}}$$

relação entre amplitudes de máximos consecutivos

$$\boxed{\begin{aligned} x_n &= Ae^{-\gamma t_n} \\ x_{n+1} &= Ae^{-\gamma(t_n+T)} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\gamma T}$$

$$\Rightarrow \quad \log \frac{x_n}{x_{n+1}} = \gamma T$$

decremento logarítmico

exercício

1. Uma partícula de 5 kg move-se ao longo da direcção do eixo do xx sob a influência de duas forças: i) uma força restauradora com a magnitude $40 \cdot x$ N/m; ii) uma força resistíva proporcional à velocidade de, por exemplo, 200 N para v = 10m/s. Sabendo que $x(t=0) = 20$ m e $\dot{x}(t=0) = 0$, determine:

   (a) A equação diferencial do movimento.

   (b) $x(t)$ analiticamente e graficamente.

   (c) A amplitude, o período, e a frequência da vibração.

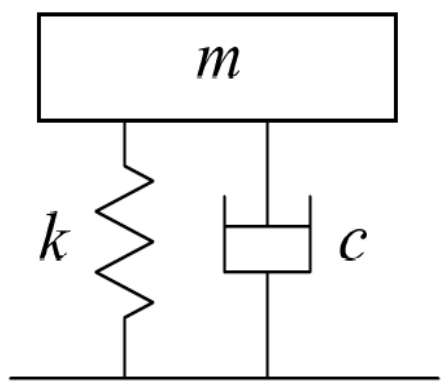
   (d) A razão entre duas amplitudes sucessivas (o decremento logarítmico).

exercício

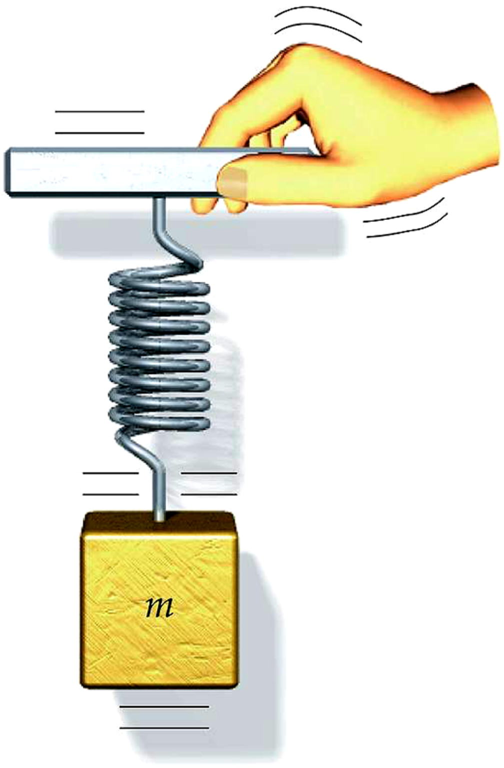
2. O sistema de fecho automático de uma porta pode ser descrito como um oscilador amortecido, como mostra a figura seguinte, onde $m = 10$ kg (massa do sistema), $k = 250$ N/m (constante da mola) e $c = 40$ Ns/m (parâmetro de amortecimento).

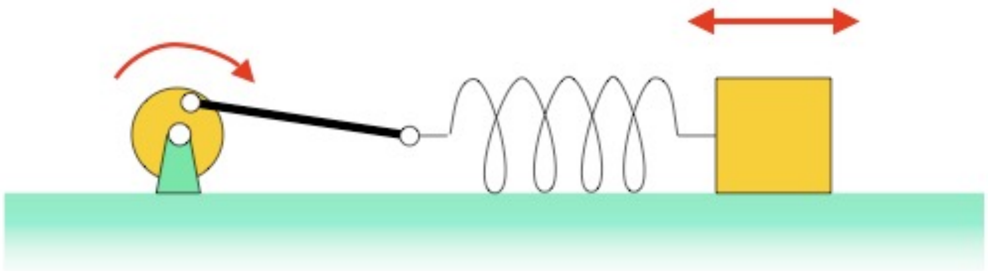
   (a) Qual é o tipo de amortecimento da porta (subamortecimento, amortecimento critico ou superamortecimento)?

   (b) Pretende redesenhar a porta de forma a que esta seja superamortecida. Adiciona amortecedores (de valor c) em série ou em paralelo? Qual o número mínimo necessário destes amortecedores?



Oscilador forçado



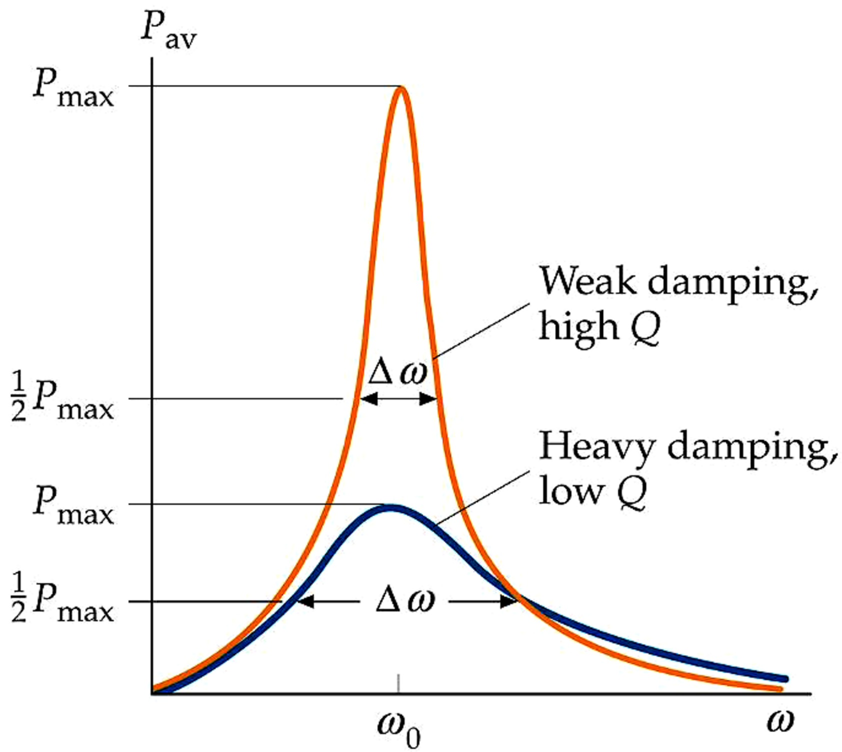


“mola” ligada a um “motor”

Oscilador forçado

- Se se pretende manter um sistema a oscilar, na presença de forças dissipativas, tem de se lhe fornecer energia, aplicando uma força externa.
- Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força excitadora.
- Isto fará com que ao fim de algum tempo a energia fornecida (numa oscilação) seja igual à dissipada, e assim a amplitude mantém-se constante. O seu valor dependerá da frequência excitadora.

Oscilador forçado e ressonância



exemplo

equação do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência
angular da
força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

força elástica

amortec.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t}$$

com $\boxed{\gamma = \dfrac{b}{2m}}$

solução geral

solução: $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

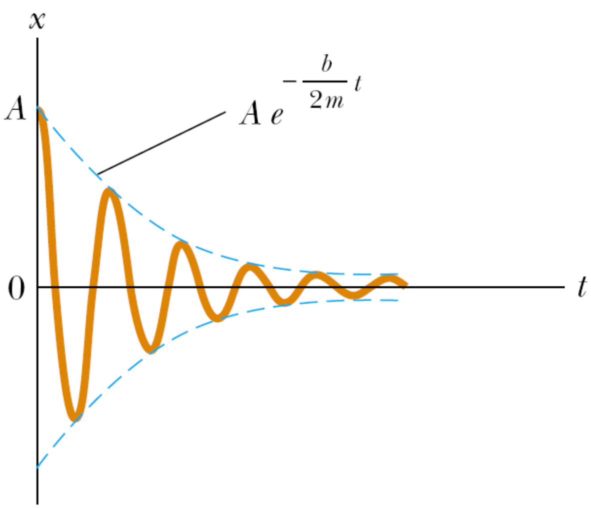
solução transiente:

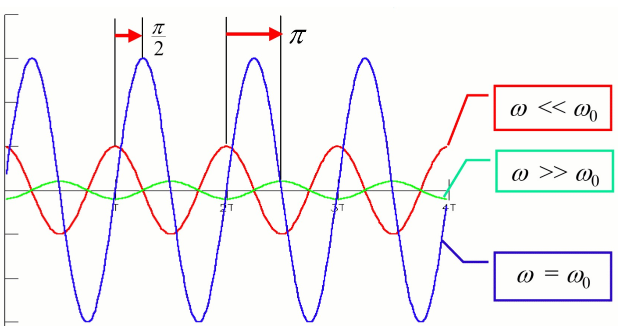
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

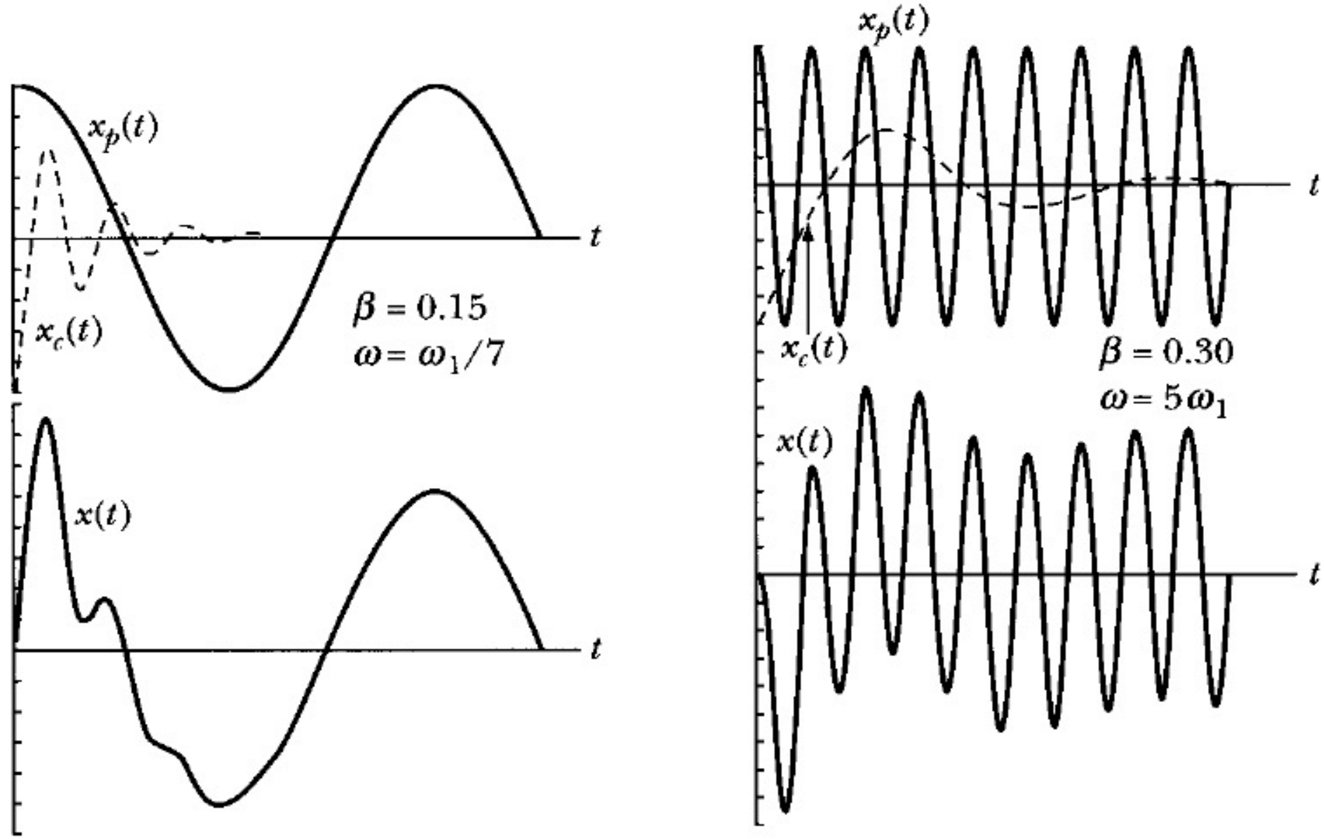
solução particular:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$





Solução transiente + solução particular



(a) (b)

solução transiente

$$x_t(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t - \phi_0) \Leftarrow \gamma^2 < \omega_0^2$$

$$x_t(t) = e^{-\gamma t}\left[A + Bt\right] \Leftarrow \gamma^2 = \omega_0^2$$

$$x_t(t) = e^{-\gamma t}\left[Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}\right] \Leftarrow \gamma^2 > \omega_0^2$$

com $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

solução particular

Solução:

$$x_p(t) = B\cos(\omega t - \delta)$$

com $$B = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\delta = \arctan\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

desfasamento entre a posição x e a força

$$0 \le \delta \le \pi$$

casos particulares

a) solução particular para γ=0:

$$x_p(t) = \underbrace{\frac{F_0 / m}{\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t - \delta)$$

$$\text{amplitude} \;\to\; \infty \text{ quando } \omega \to \omega_0$$

casos particulares

b) solução particular para $\gamma \neq 0$ e $\gamma << \omega_0$:

i) $\omega << \omega_0$:

$$x_p(t) \approx \frac{A}{\omega_0^2}\cos(\omega t) \qquad \text{em fase!}$$

com $A = F_0 / m$

ii) $\omega >> \omega_0$:

$$x_p(t) = -\frac{A}{\omega^2}\cos(\omega t) \quad \text{em oposição de fase!}$$

$$(\delta = \pi)$$

casos particulares

iii) $\omega = \omega_0$

$$x_p(t) = \frac{A}{2\gamma\omega}\cos(\omega t - \delta) \qquad \text{com} \quad \delta = \arctan\infty = \frac{\pi}{2}$$

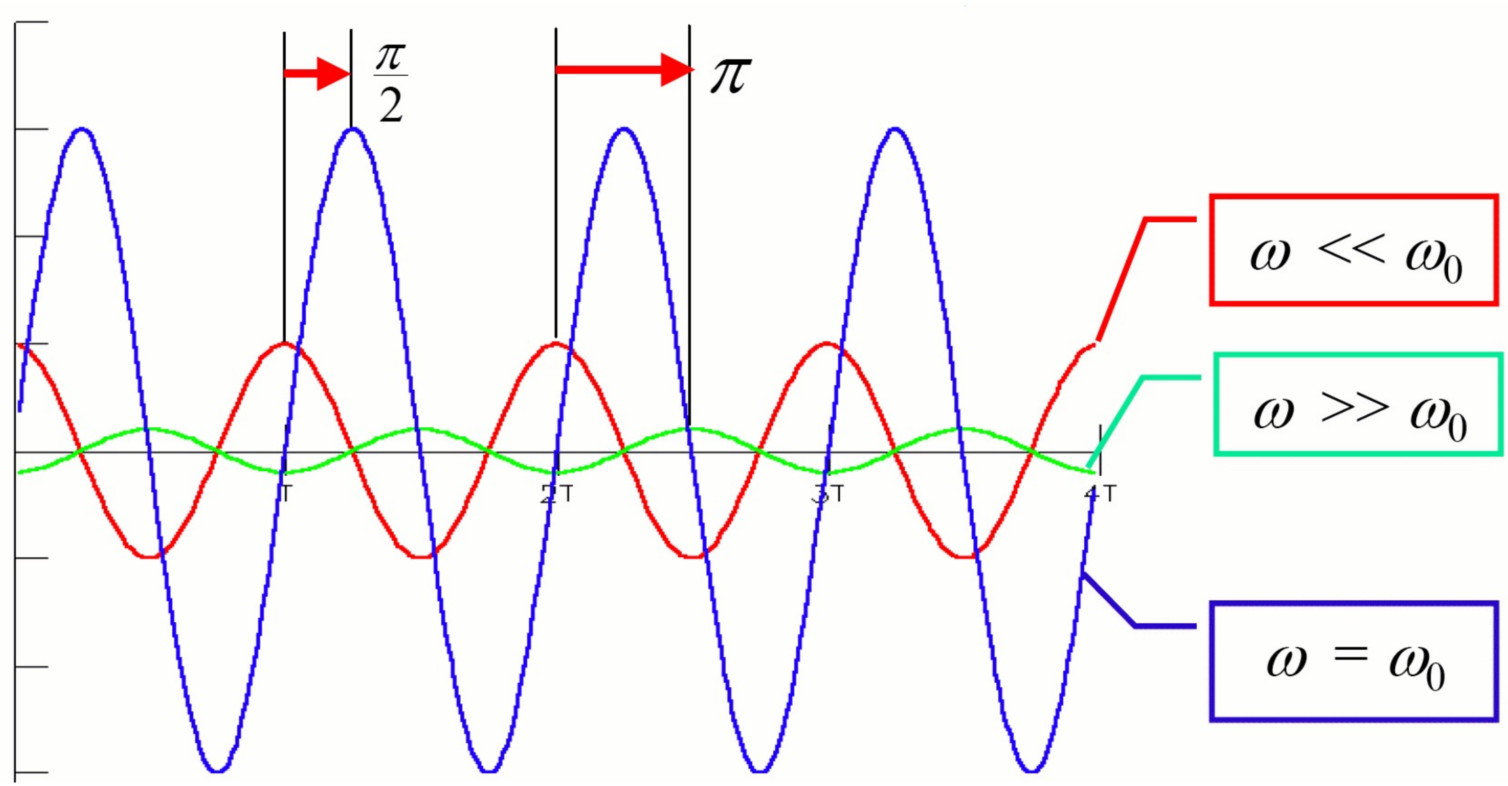
$$= \frac{A}{2\gamma\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

ressonância!

grande!

$$\boxed{\text{com} \;\; A = F_0 / m}$$

Soluções particulares



Ressonância

frequência de ressonância:

$$\boxed{\text{Amplitude máxima} \Rightarrow \left.\frac{dD}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0}$$

$$\text{onde } D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \text{(amplitude)}$$

ω_R - frequência de ressonância

$A = F_0 / m$

ressonância

$$\frac{dD}{d\omega} = A\frac{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\gamma^2\omega}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\gamma^2\omega = 0$$

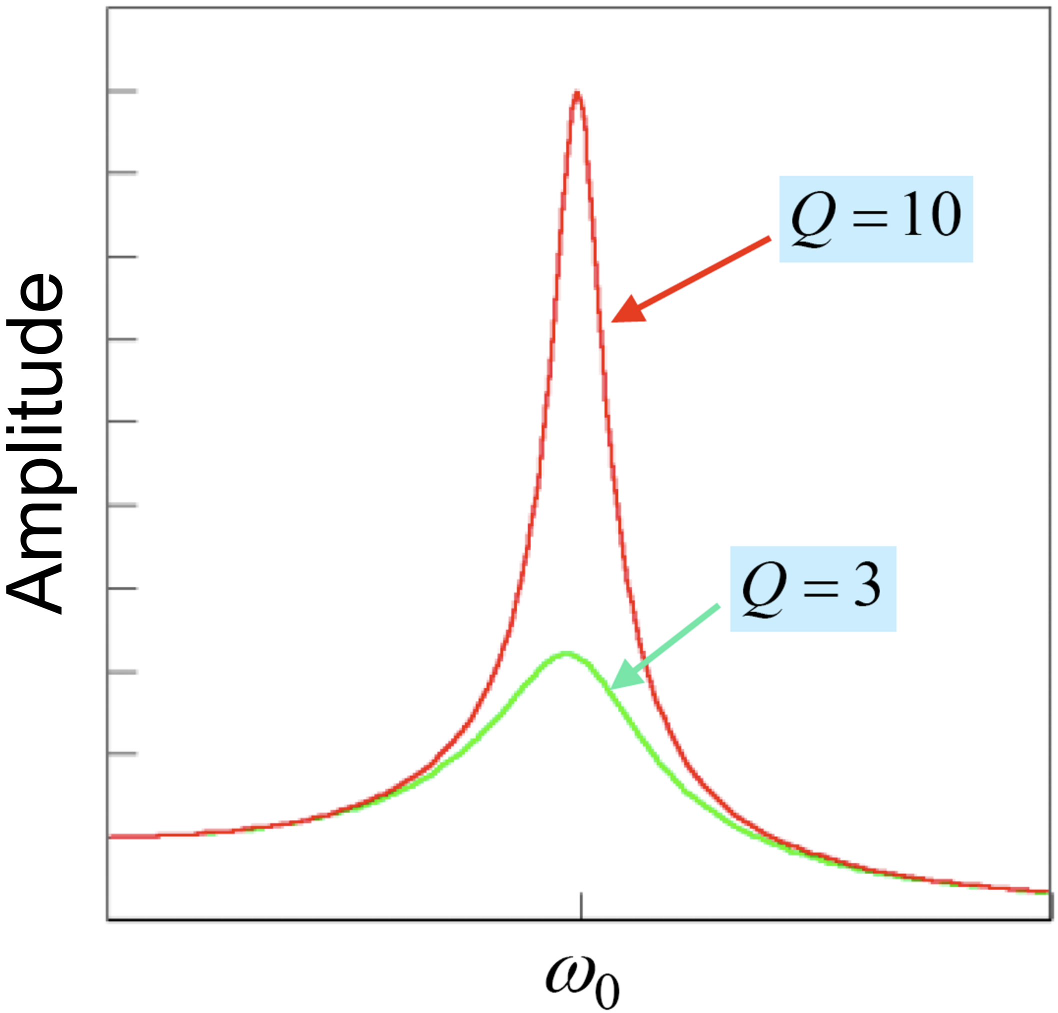
$$\Rightarrow \quad \omega_R^2 = -2\gamma^2 + \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

Amplitude perto da ressonância

factor de qualidade

$$Q = \frac{\omega_R}{2\gamma}$$



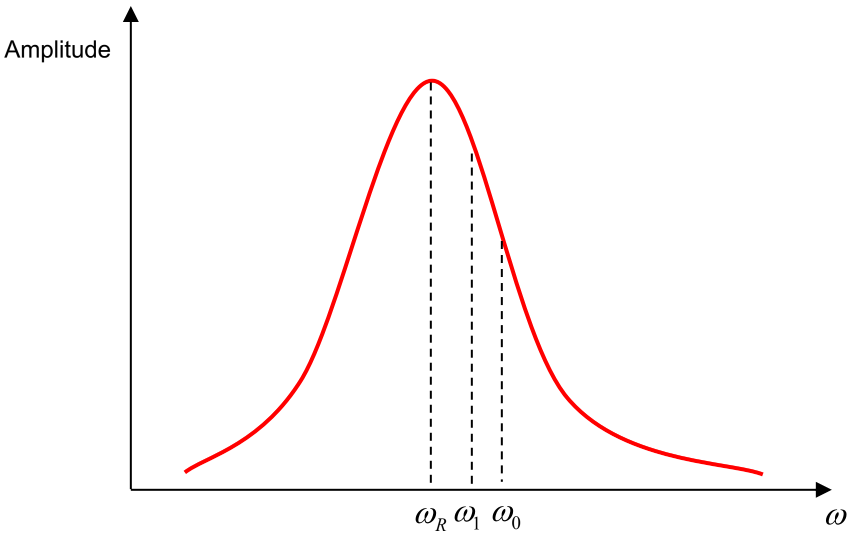
comparação das frequências angulares

oscilação livre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

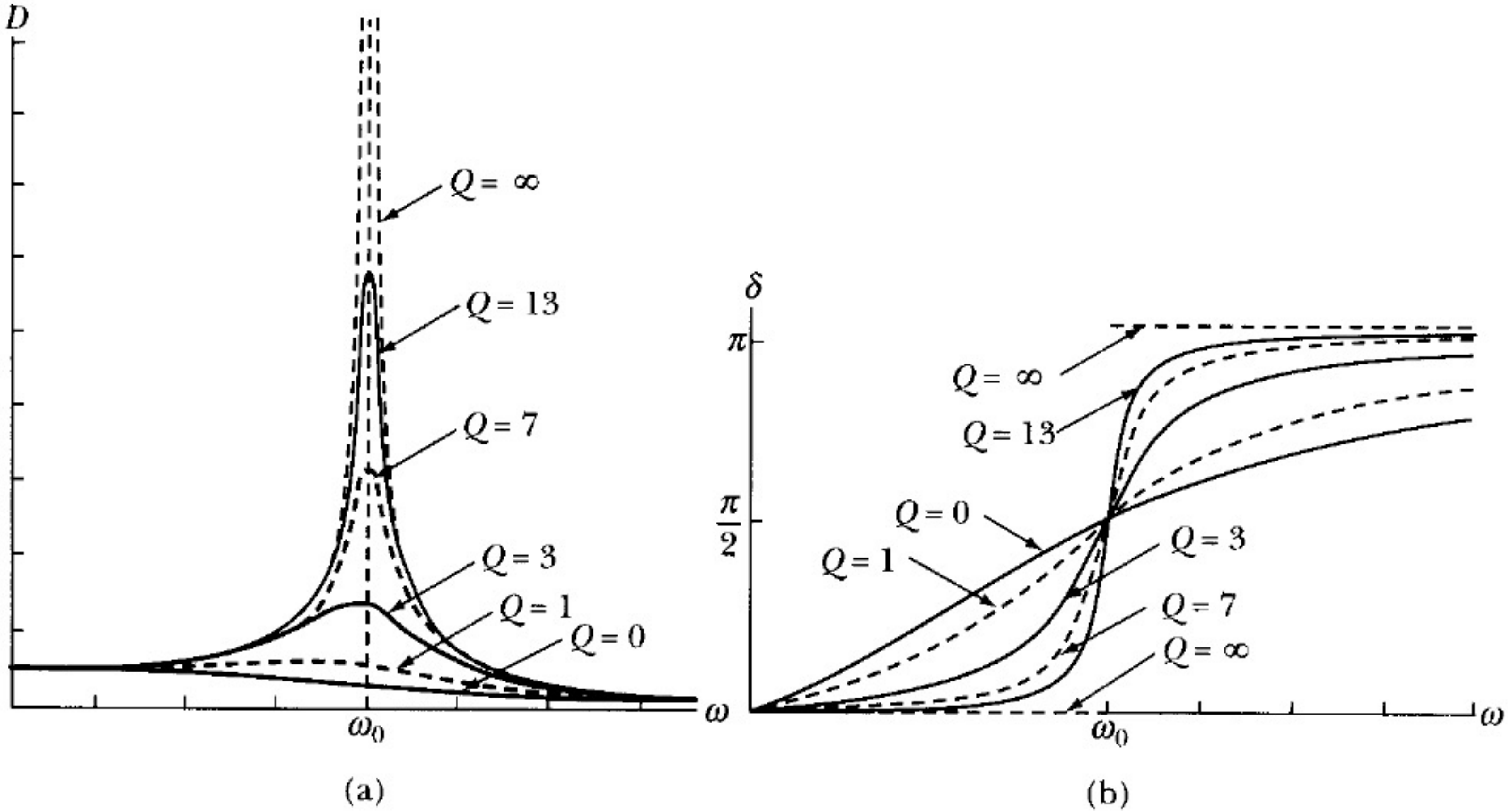
com amortecimento fraco $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

forçado $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

frequência de ressonância



Amplitude e fase



notas sobre energia

Considerando a solução permanente:

na ressonância:

- energia dissipada máxima
- trabalho realizado pelo motor máximo
- energia mecânica do oscilador máxima

nota: num período

energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

exercício

Um objecto de massa 1.5 kg está pendurado numa mola de constante 600 N/m e perde 3% da sua energia em cada ciclo. O sistema é forçado por uma força sinusoidal com um valor máximo de 0.50 N.

(a) Qual é o factor de qualidade Q do sistema?

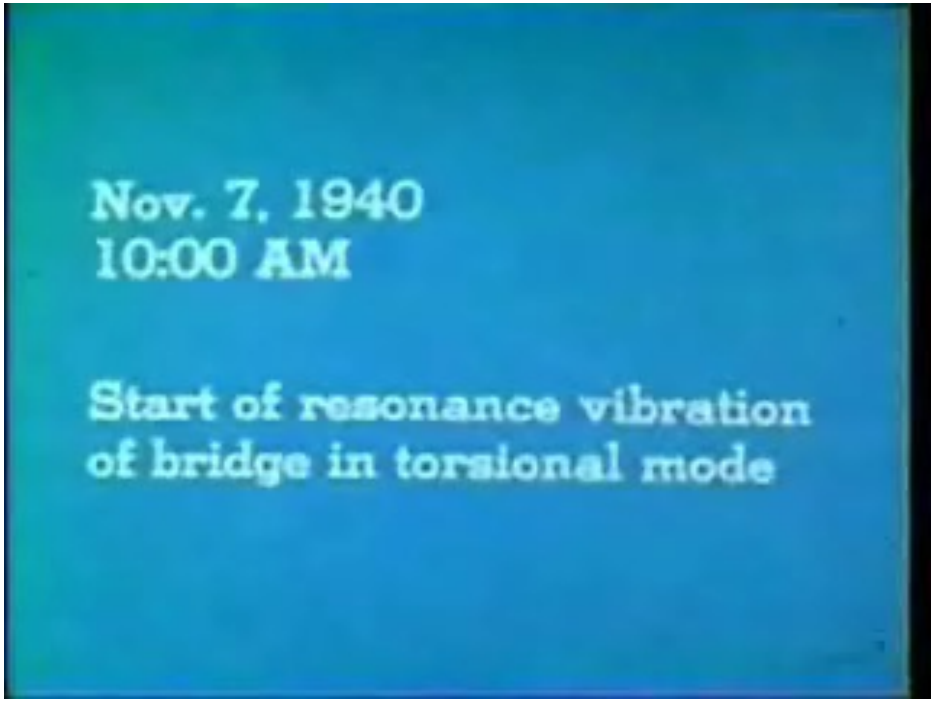
(b) Qual é a frequência angular ω_R da ressonância?

(c) Qual é a amplitude de oscilação na ressonância?

(e) Qual é a amplitude de oscilação para ω= 19 rad/s?

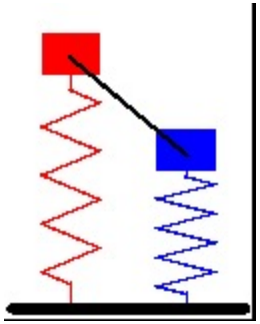
exemplo de ressonância

Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento

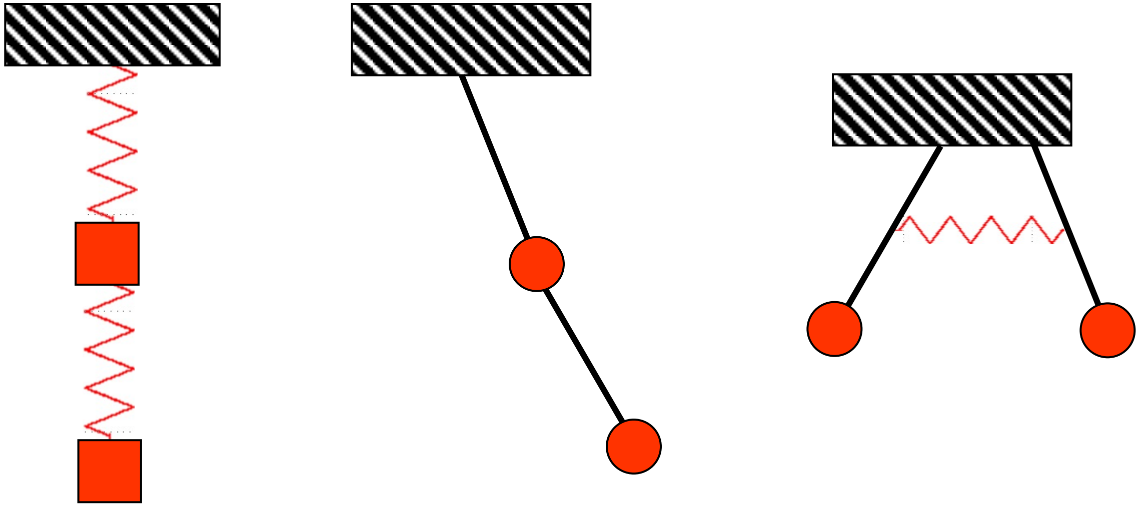


oscilações acopladas

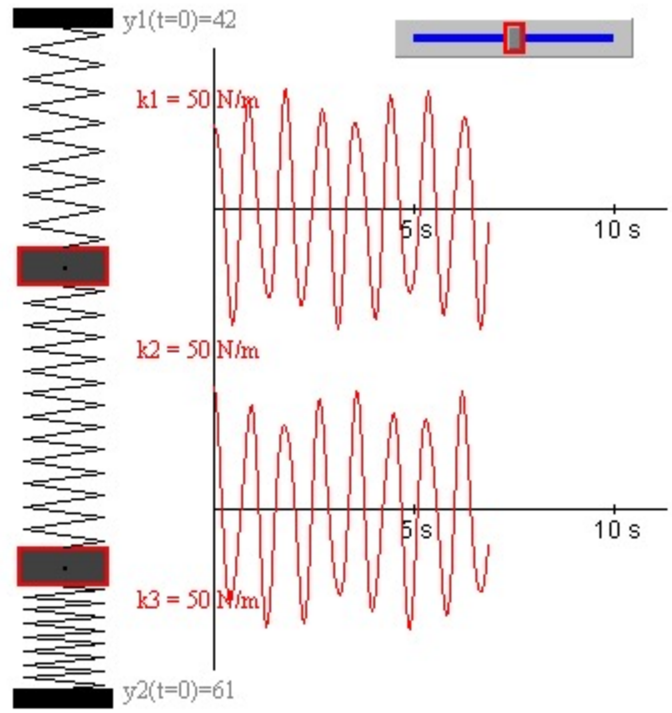
<u>oscilador com dois graus de liberdade</u>:



osciladores que requerem duas coordenadas independentes para especificar a sua posição

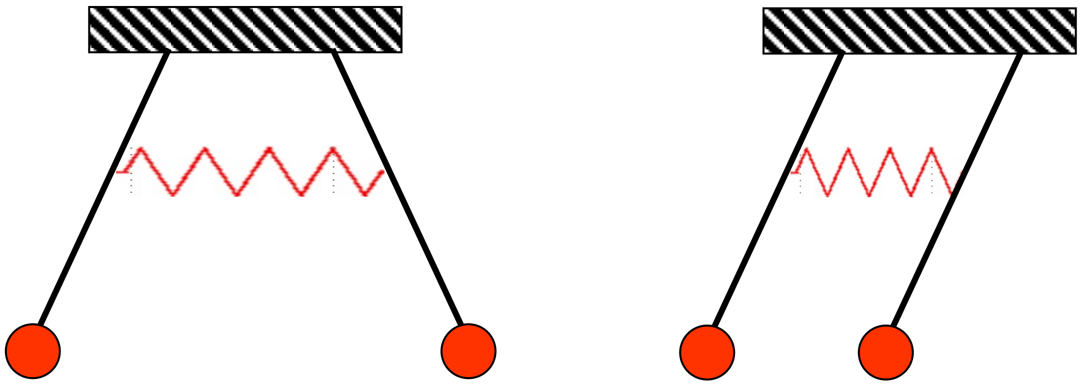


applet



http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/coupled/osc2.htm

modos normais de osciladores acoplados

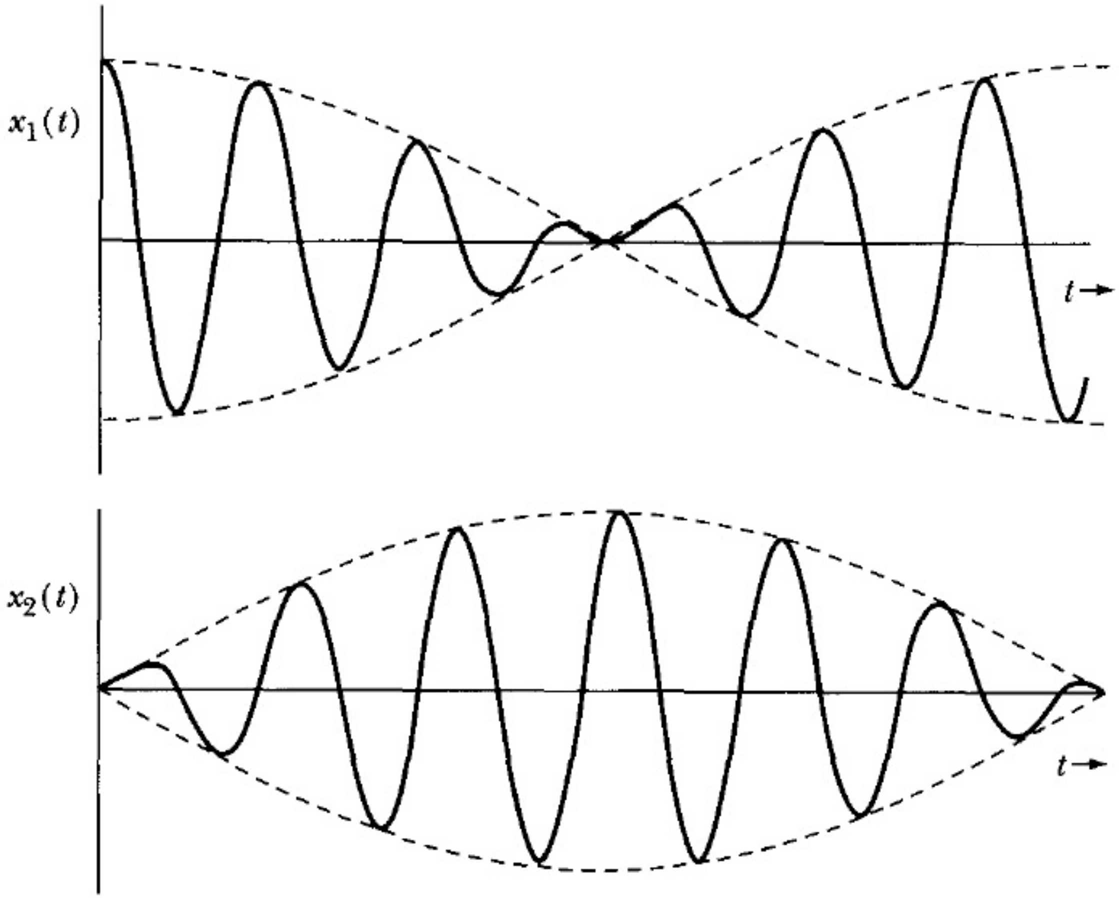


- massas alcançam deslocamentos máximos simultaneamente

- massas passam pelos pontos de equilíbrio simultaneamente

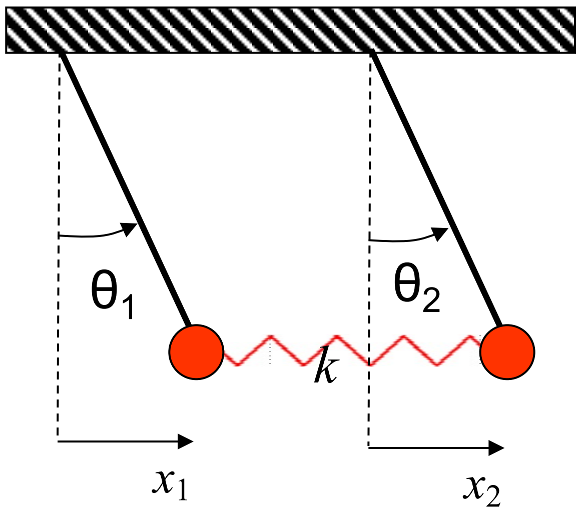
- massas oscilam com a mesma frequência

Osciladores acoplados



exercício

Dois pêndulos simples estão ligados por uma mola (como mostra a figura). Determine as freqüências características (frequências associadas aos modos normais de vibração).



exercício

9 – Duas massas iguais estão presas a um fio como mostra a figura. A tensão no fio é T. Determine as frequências naturais do sistema.