

# exercício

---

Aceleração em coordenadas polares: Um insecto desloca-se ao longo da espiral de uma concha. A trajectória descrita pelo insecto é dada pela equação:

$$R = R_0 \cdot e^{a \cdot \theta},$$

onde  $a = 0.182$  e  $R_0 = 5$  mm. A distância radial do insecto ao centro da espiral aumenta à razão constante de 2 mm/s. Determine as componentes  $a_x$  e  $a_y$  da aceleração do insecto quando  $\theta = \pi$ .

nota: coordenadas polares ( $R, \theta$ )

# solução

---

aceleração em coordenadas polares:

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\hat{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\hat{e}_\theta.$$

derivando a equação da trajectória em ordem ao tempo:

$$R = R_0 e^{a\theta},$$

$$\dot{R} = R_0 a e^{a\theta} \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{R}}{R_0 a e^{a\theta}}, \quad \textcircled{1}$$

$$\ddot{R} = R_0 a e^{a\theta} \ddot{\theta} + R_0 a^2 e^{a\theta} \dot{\theta}^2.$$

## solução (cont.)

---

Mas

$$\dot{R} = 2 \text{ mm/s} \Rightarrow \ddot{R} = 0$$

$$\Rightarrow R_0 a e^{a\theta} (\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -a\dot{\theta}^2 = -\frac{a\dot{R}^2}{R_0^2 a^2 e^{2a\theta}} = -\frac{\dot{R}^2}{R_0^2 a e^{2a\theta}}.$$

↑  
1

## solução (cont.)

---

substituindo na aceleração:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\hat{e}_R + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\hat{e}_\theta \\ &= \left(0 - R_0 e^{a\theta} \cdot \frac{\dot{R}^2}{R_0^2 a^2 e^{2a\theta}}\right) \hat{e}_R + \left(\frac{2\dot{R}^2}{R_0 a e^{a\theta}} + \overbrace{R_0 e^{a\theta}}^R \cdot \overbrace{\frac{-\dot{R}^2}{R_0^2 a e^{2a\theta}}}^{\ddot{\theta}}\right) \hat{e}_\theta \\ &= \frac{\dot{R}^2}{R_0 a e^{a\theta}} \left[-\frac{1}{a} \hat{e}_R + (2 - 1) \hat{e}_\theta\right].\end{aligned}$$

## solução (cont.)

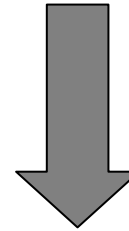
---

$$R_0 = 5 \text{ mm},$$

$$\dot{R} = 2 \text{ mm/s}$$

$$a = 0.182,$$

Substituindo  $\theta = \pi$  :



$$\vec{a} = -13.63 \text{ mm/s}^2 \hat{e}_R + 2.48 \text{ mm/s}^2 \hat{e}_\theta.$$

## solução (cont.)

---

Mas para  $\theta = \pi$  :

$$\hat{e}_R = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} = -\hat{j}$$

logo

$$\vec{a} = 13.63 \text{ mm/s}^2 \hat{i} - 2.48 \text{ mm/s}^2 \hat{j}$$

$$a_x = 13.63 \text{ mm/s}^2, a_y = -2.48 \text{ mm/s}^2$$