Cap. 2 - Cinemática

Sumário:

Referenciais inerciais.

Vetor posição e trajetória.

Vetor velocidade e aceleração.

Movimento uniforme e uniformemente acelerado.

Movimento curvilíneo. Movimento circular.

Bibliografia:

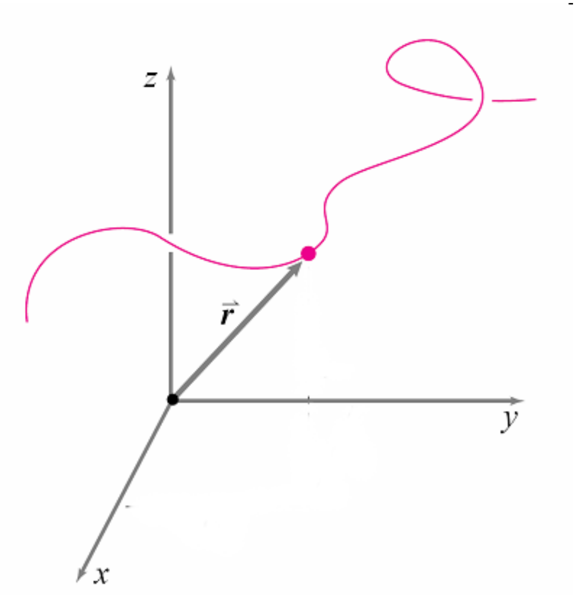
- Caps. 2 e 4, Serway

referenciais inerciais

Um referencial diz-se inercial, se as leis de Newton são válidas nesse referencial, isto é, se um corpo sobre o qual não actuam forças externas tem movimento rectilíneo uniforme ou está em repouso nesse referencial

Vector posição

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$



veloc. e aceler. em coord. cartes.

velocidade:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

aceleração:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\,\hat{k}$$

Partícula livre

partícula livre: $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

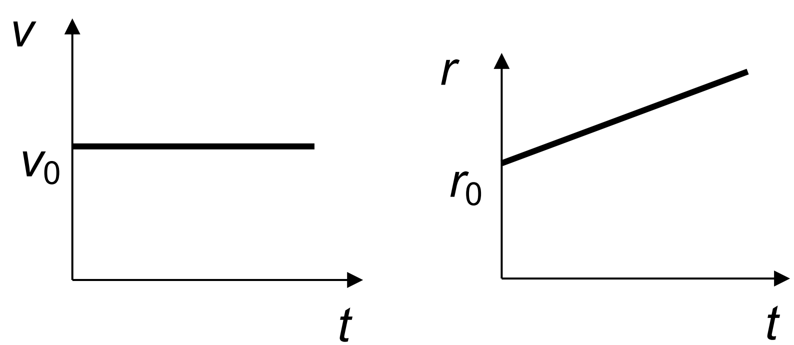
eq. das velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

eq. das posições:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

uma dimensão:



Partícula com aceleração constante

Força constante:

eq. das acelerações:

$$\vec{a} = \vec{a}_0$$

eq. das velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

eq. das posições:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

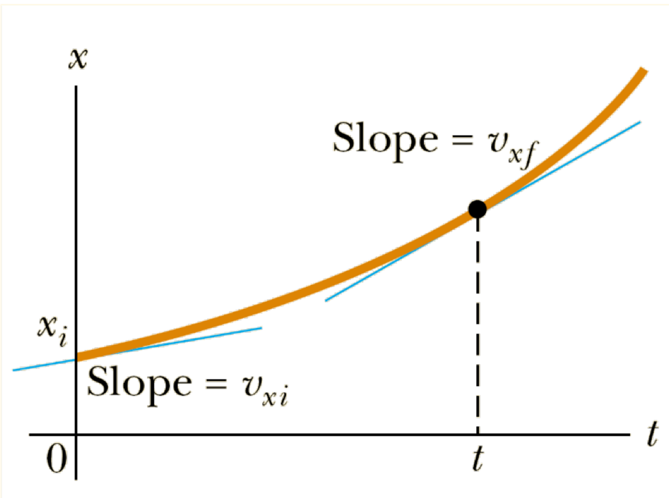
Partícula com aceleração constante

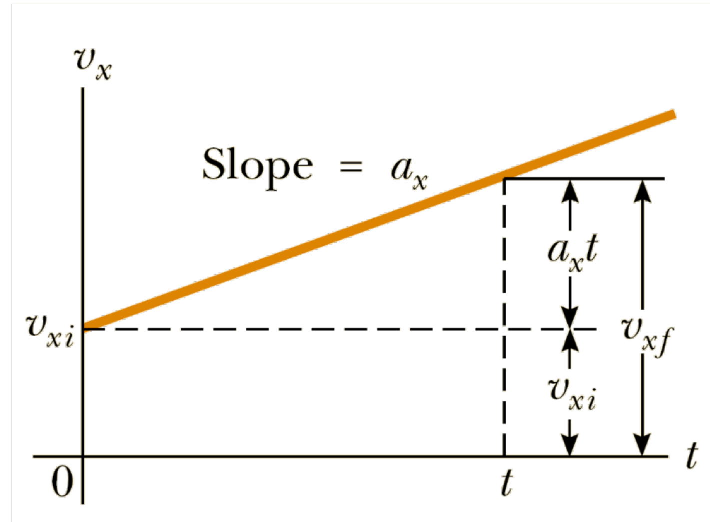
A uma dimensão:

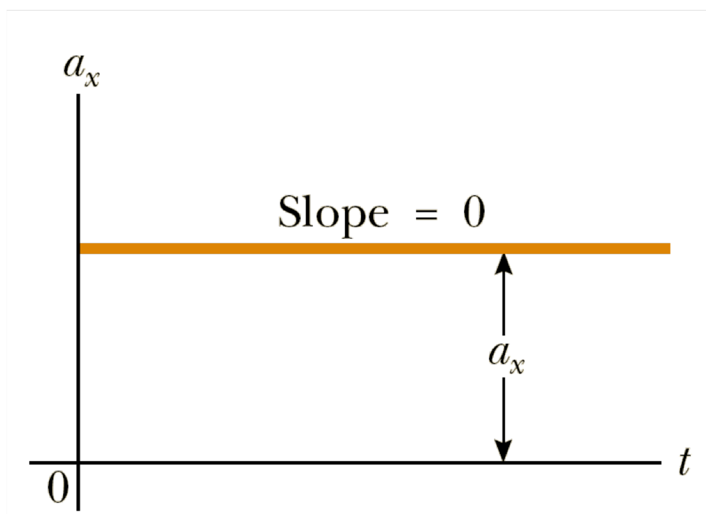
mov. rectilíneo uniformemente acelerado

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

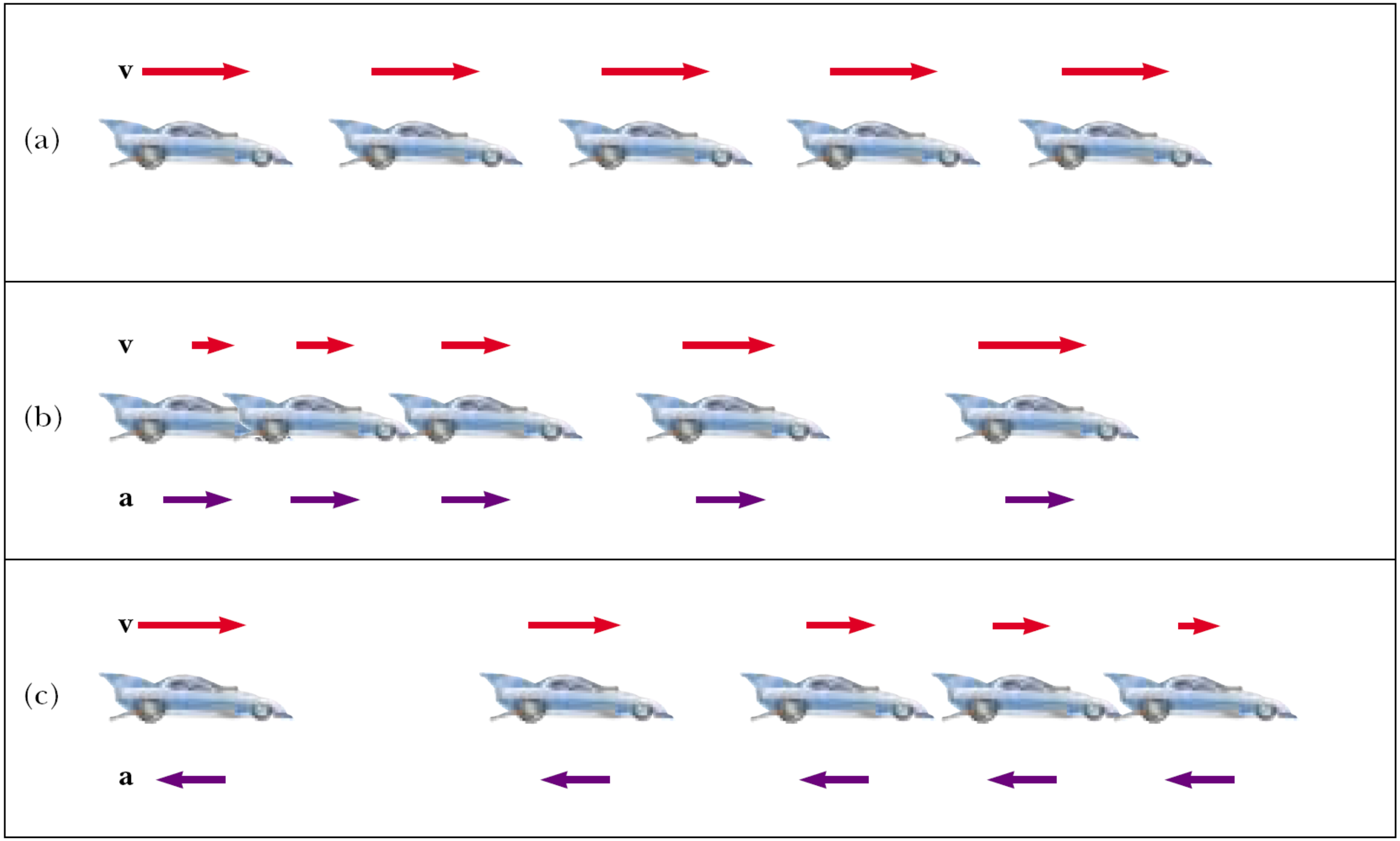
Partícula com aceleração constante (1D)







exemplo: 1D



Partícula com aceleração constante (2D)

A duas dimensões:

movimento curvilíneo no plano (ex. *xy*)

duas componentes:

$$\vec{a}(t) = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

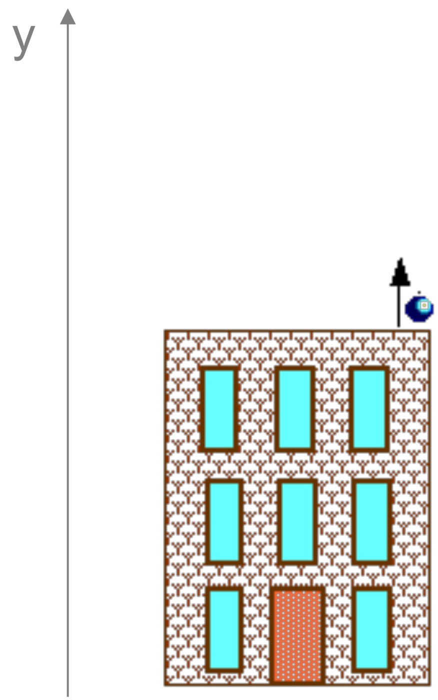
Partícula com aceleração constante (2D)

$$\begin{cases} a_x = c^{te} \\ a_y = c^{te} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \dfrac{1}{2} a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y} + \dfrac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

caso particular (1D): Queda livre



Galileo Galilei (1564-1642)

Aceleração da gravidade, na Terra $\vec{g}$

$g \sim 9.8\ m/s^2$

caso particular (1D): Queda livre

caso particular (1D): Queda de um grave

aceleração :

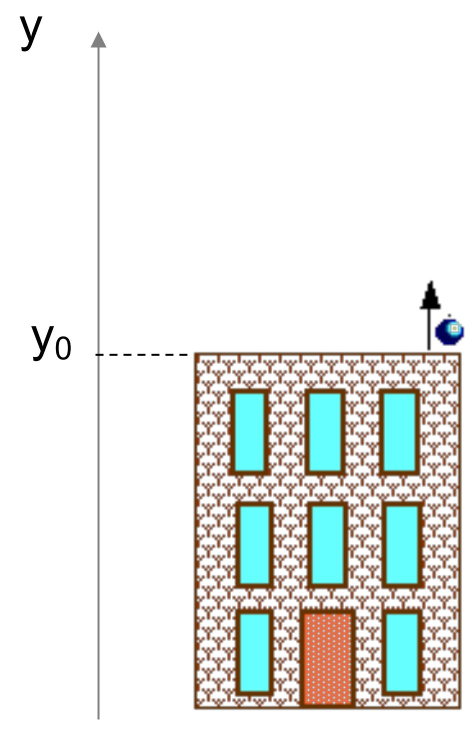
$$\vec{g} = -9.8\hat{j}$$

velocidade :

$$v = v_0 - g(t - t_0)$$

posição :

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$



Queda de um grave: tempos e altura máxima

tempo de subida :

$$t_s = \frac{v_0}{g} \qquad (\mathrm{y}_0 = 0)$$

tempo de subida :

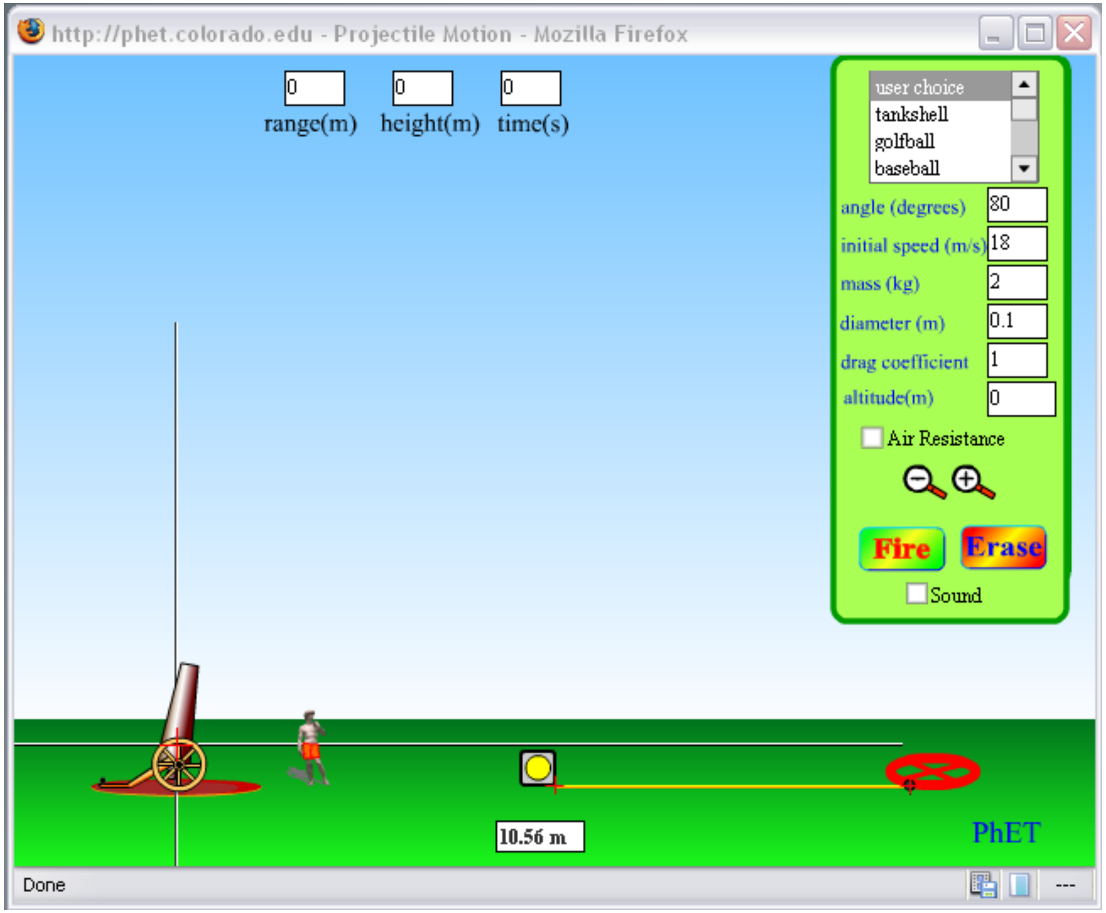
$$t_d = \frac{v_0}{g}$$

altura máxima :

$$h_{\max} \Rightarrow v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

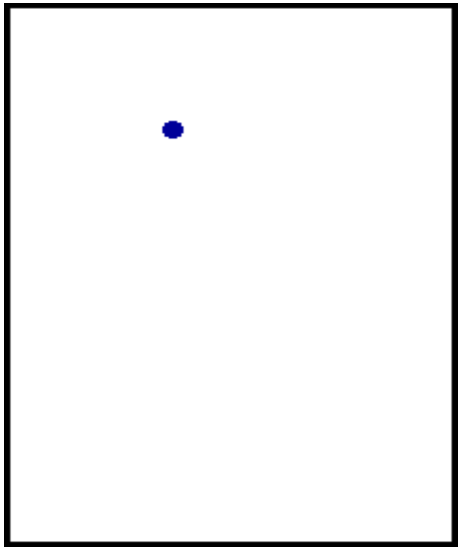
$$h_{\max} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \frac{{v_0}^2}{g}$$

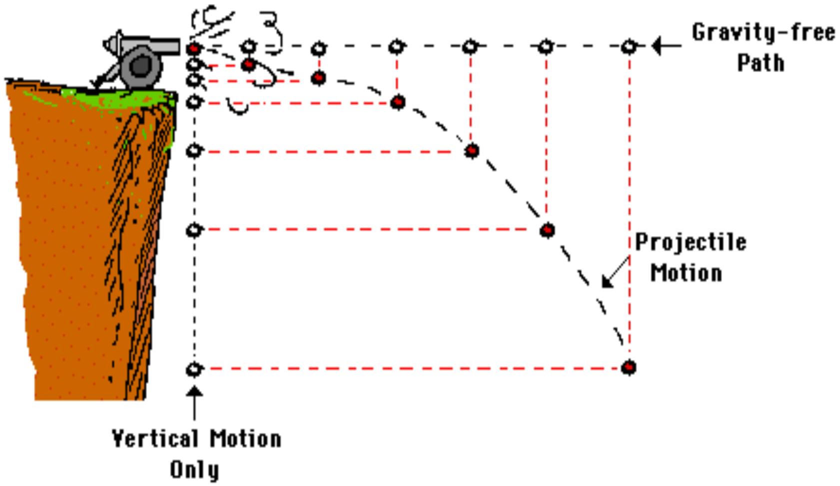
caso particular (2D): Projéctil



http://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion.swf

Projéctil: Sobreposição de dois movimentos

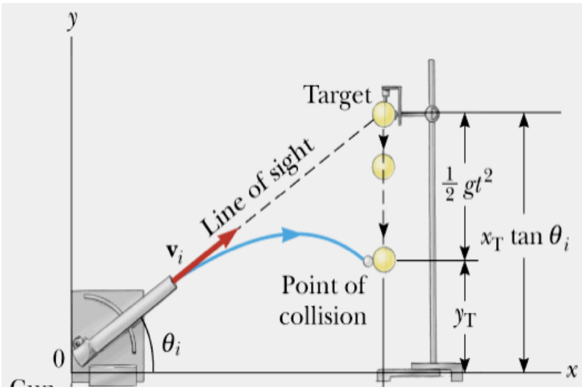




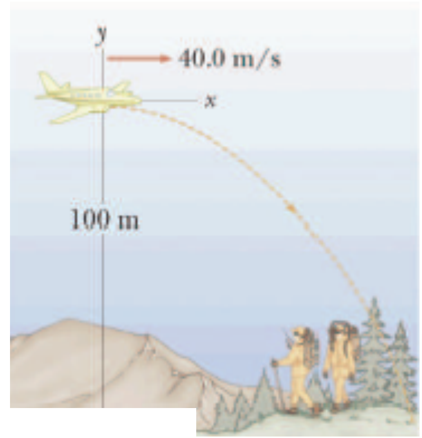
Movimento rectilíneo uniforme segundo xx’

Movimento rectilíneo uniformemente variado segundo yy’

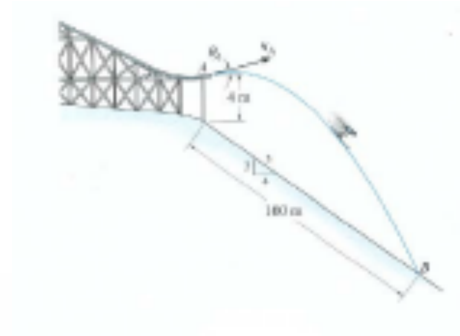
Exemplos

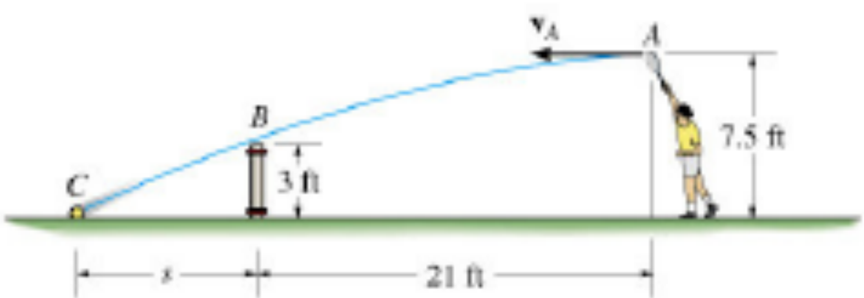


y
Target
Line of sight
$\mathbf{v}_i$
Point of collision
$\frac{1}{2}gt^2$
$x_T \tan\theta_i$
y_T
θ_i
0
x

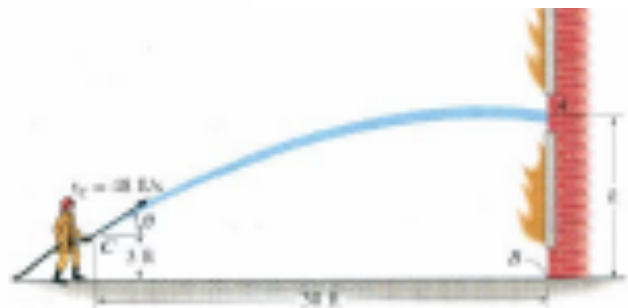


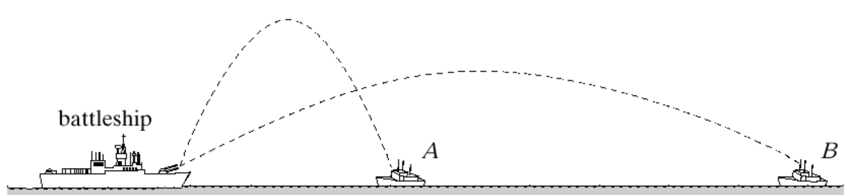
y
40.0 m/s
x
100 m





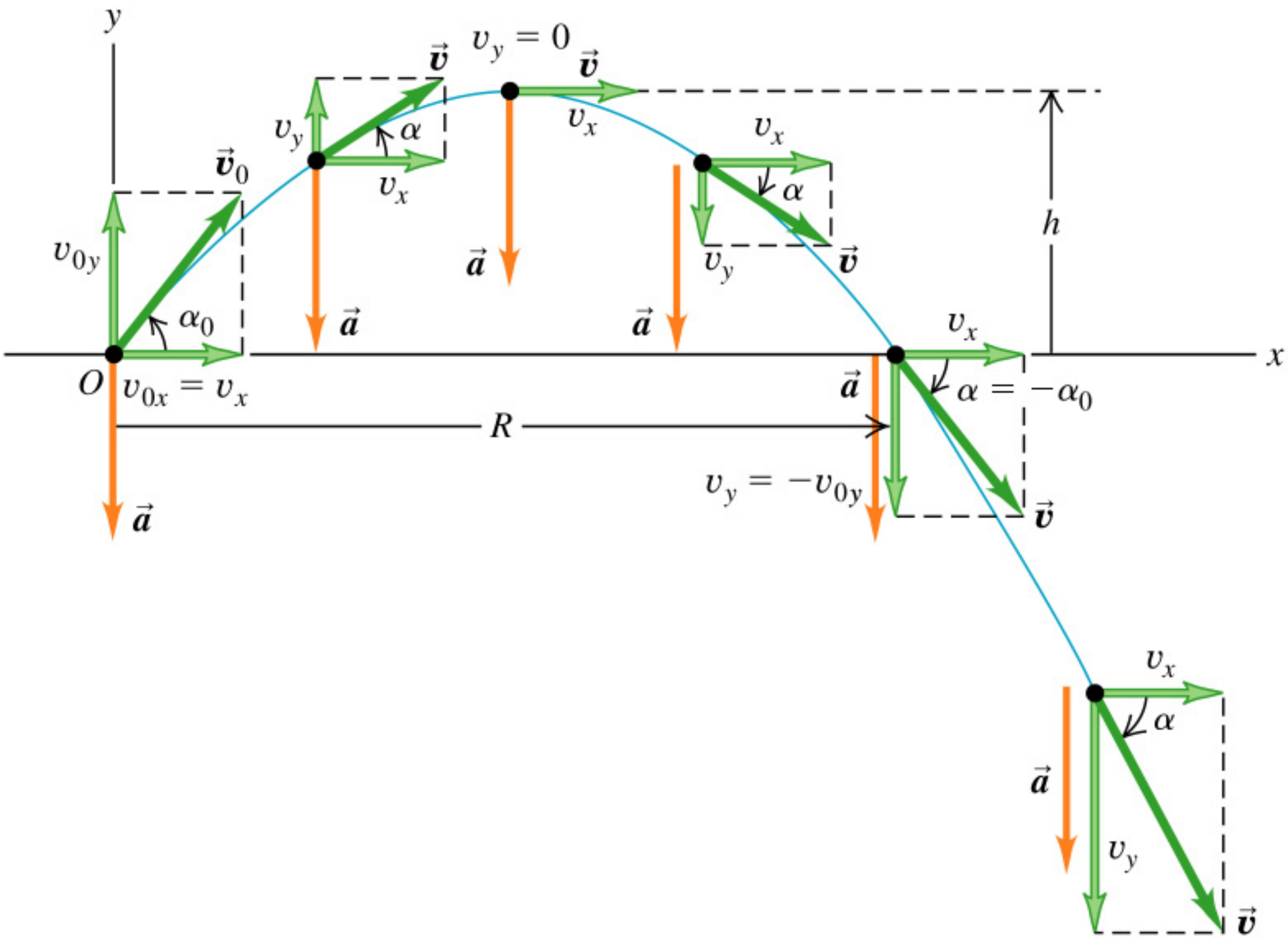
$\mathbf{v}_A$
A
B
C
7.5 ft
3 ft
s
21 ft





battleship
A
B

projéctil


y
$v_y = 0$
$\vec{v}$
$\vec{v}_0$
v_y
α
v_x
h
v_{0y}
α_0
$\vec{a}$
O
$v_{0x} = v_x$
R
x
$\alpha = -\alpha_0$
$v_y = -v_{0y}$

equações do movimento do projéctil

aceleração:

$$\vec{a} = \vec{g} = -9.8\hat{j}$$

velocidade:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0)$$

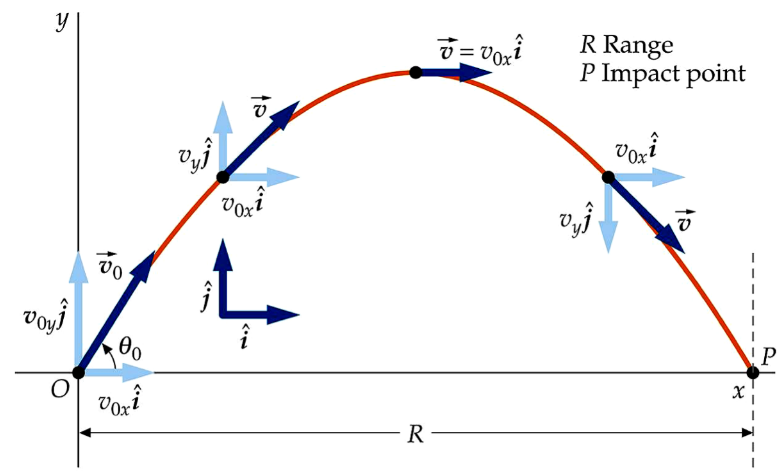
posição:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2$$

projéctil: componentes da acel., vel. e pos.

aceleração:

$$\vec{a}(t):\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



velocidade:

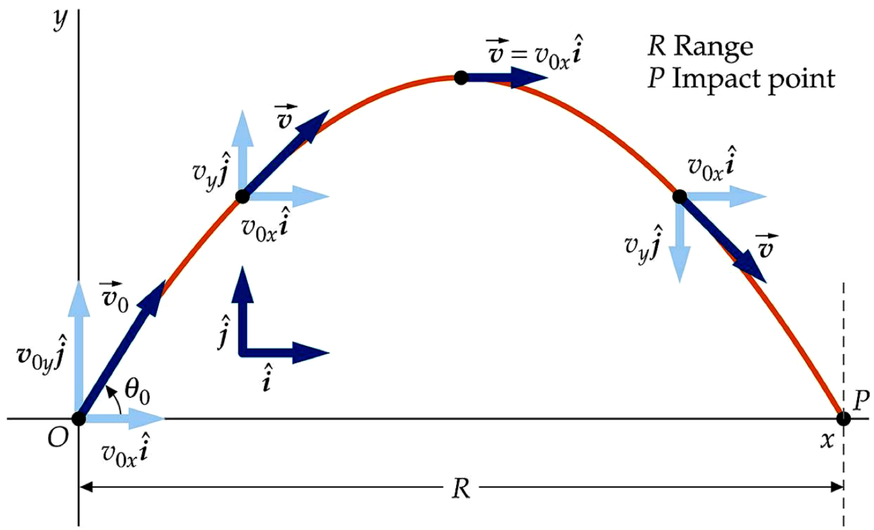
$$\vec{v}(t):\begin{cases} v_x = v_{x,0} = v_0 \cos\theta_0 = c^{te} \\ v_y = v_{y,0} - g(t-t_0) = v_0 sen\theta_0 - g(t-t_0) \end{cases}$$

projéctil: componentes da acel., vel. e pos.

posição:

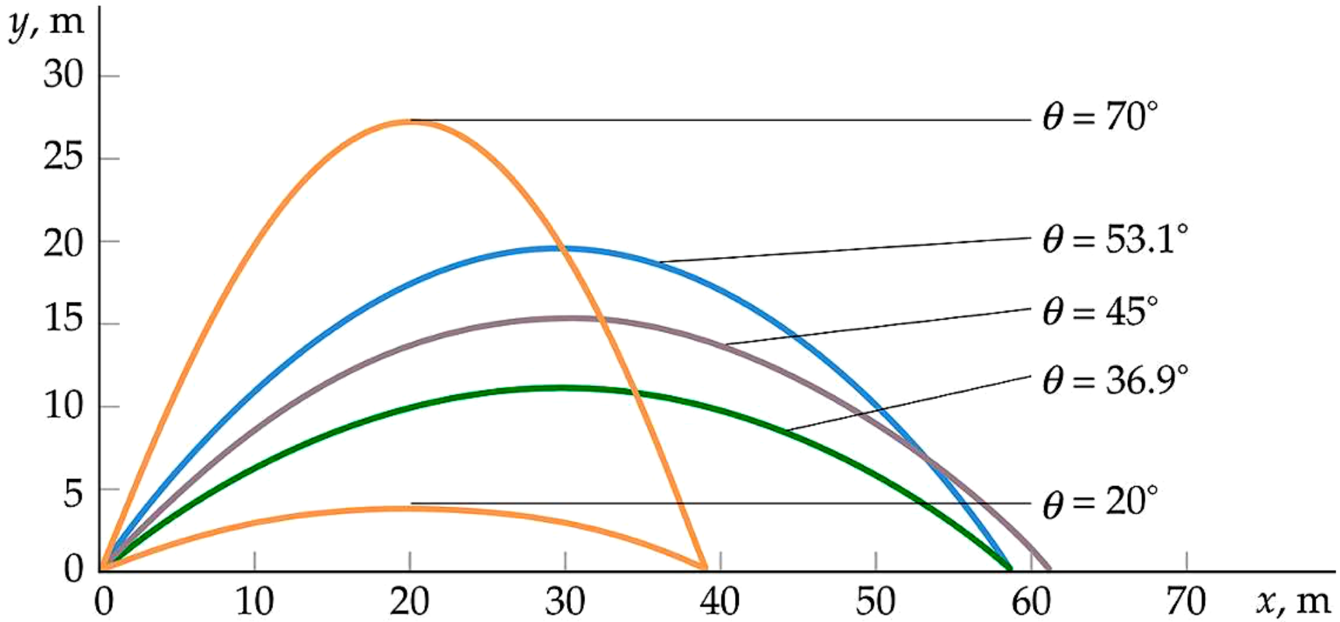
$$\vec{r}(t):\begin{cases} x &= x_0 + v_{x,0}\left(t - t_0\right) \\ &= x_0 + \left(v_0 \cos\theta_0\right)\left(t - t_0\right) \\ y &= y_0 + v_{y,0}\left(t - t_0\right) - \dfrac{1}{2} g \left(t - t_0\right)^2 \\ &= y_0 + \left(v_0 sen\theta_0\right)\left(t - t_0\right) - \dfrac{1}{2} g \left(t - t_0\right)^2 \end{cases}$$

trajectória de um projéctil



$$y(x) = (\tan\theta_0)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$$

alcance do projéctil



$$\boxed{R = \frac{v_0^{\,2}}{g} \sin 2\theta_0}$$

exercício

6. (MIT) No instante $t = 0$s, uma pedra é lançada verticalmente a partir do solo com velocidade de 20 m/s.

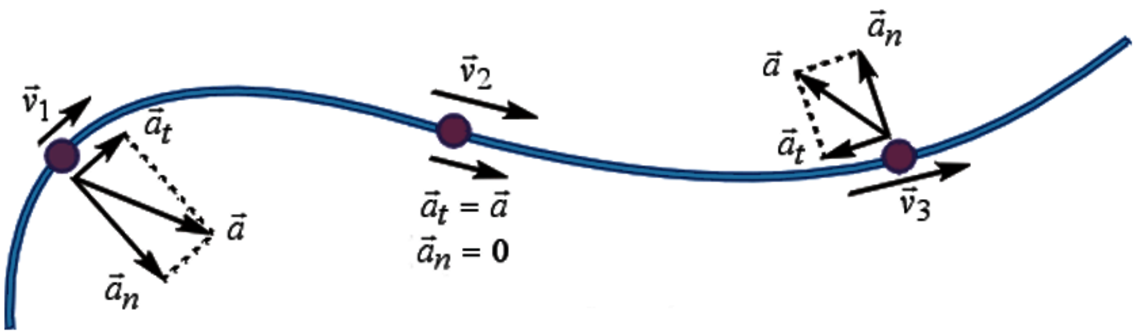
(a) Em que instante a pedra atingirá a altura máxima? Determine o valor da altura máxima.

(b) Se uma segunda pedra fôr lançada 2 s apos a primeira, a que distância se encontram nesse instante?

(c) Com que velocidade deveria ser lançada a segunda pedra para que atinja a primeira pedra um segundo após ter sido lançada?

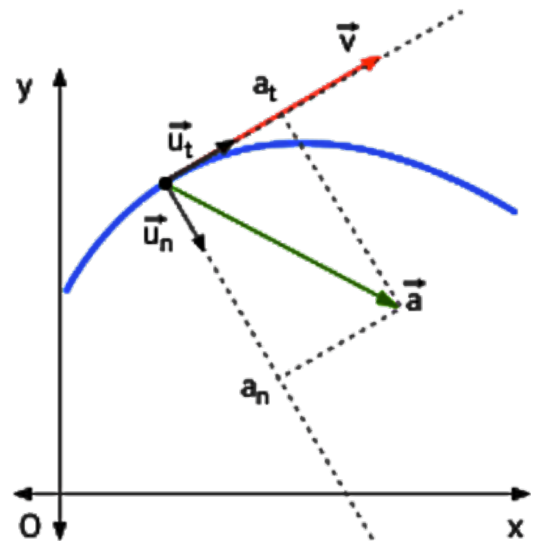
movimento curvilíneo

Componentes tangencial e normal



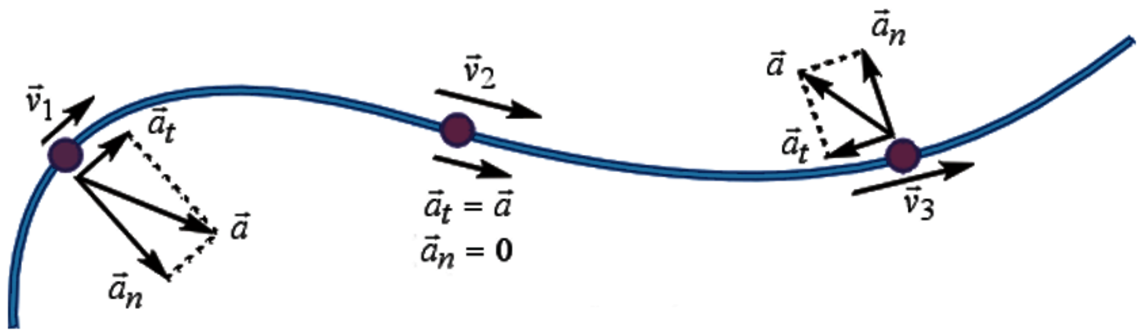
Vetor unitário tangente: $\hat{u}_t$

Vetor unitário normal: $\hat{u}_n$



movimento curvilíneo

Componentes tangencial e normal



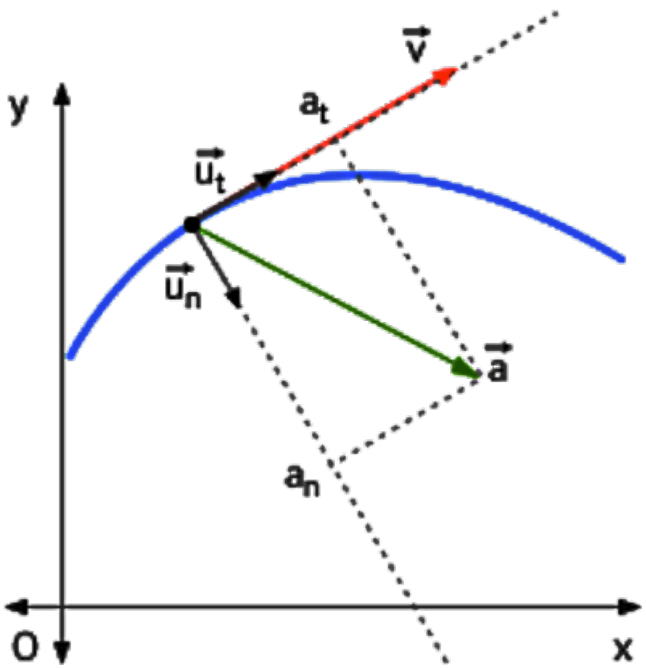
$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t = v\,\hat{u}_t$$

vector velocidade é tangente à trajectória em qualquer instante

→ apenas tem componente tangencial

movimento curvilíneo

Componentes tangencial e normal



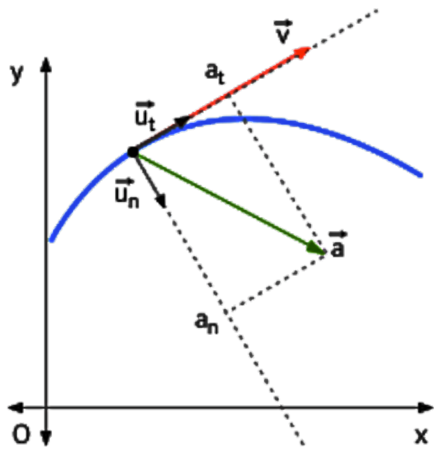
aceleração aponta para interior da concavidade

→ tem componente tangencial e componente normal

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

aceleração tangencial aceleração normal

movimento curvilíneo: Componentes tangencial e normal



$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n$$

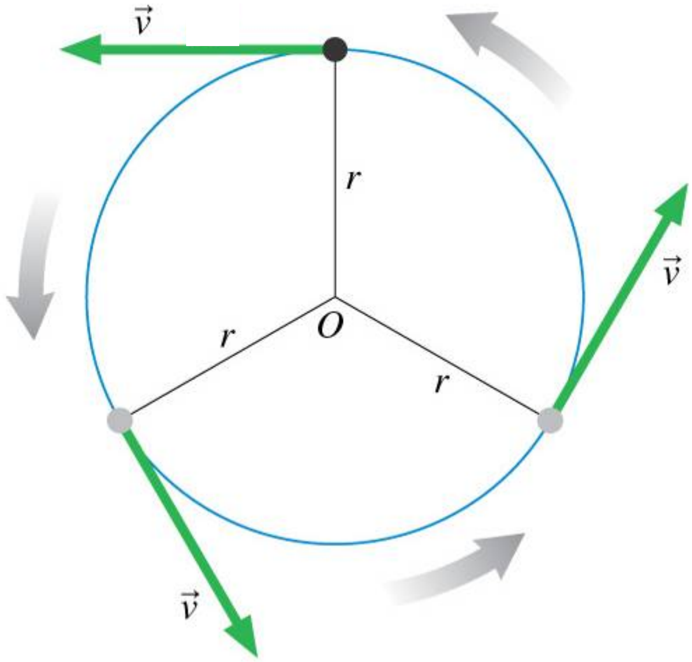
$$\boxed{\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} \\ a_n &= \frac{v^2}{r} \\ a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \end{aligned}}$$

Demonstração:

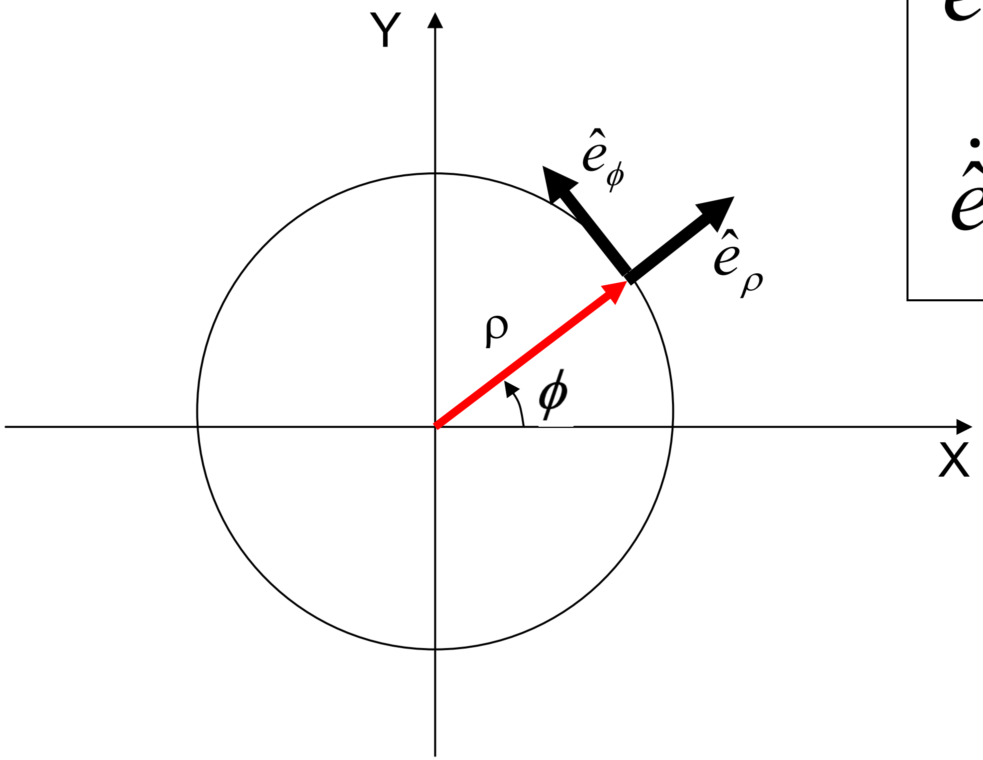
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[v\hat{u}_t]}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{v}{r}\vec{u}_n \longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n$$

movimento circular



movimento circular: coordenadas polares



$$\dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho$$

movimento circular: coordenadas polares

$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho\,\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\phi}\right)\hat{e}_\phi$$

$$\rho = const$$

$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \rho\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = -\rho\,\dot{\phi}^2\,\hat{e}_\rho + \rho\,\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

aceler. centripeta

aceler. tangencial

mov. circular uniforme

$$\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{v} = \rho\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a} = -\rho\,\dot{\phi}^2\,\hat{e}_\rho$$

aceler.
centripeta

satélite