Sumário

1ª aula:

Apresentação. Avaliação e metodologia de ensino.

Noções básicas de vectores e cálculo vectorial. Produto interno. Produto vectorial. Produto escalar triplo. Campos escalares e vectoriais. Derivação de funções vectoriais. Coordenadas polares.

Apresentação

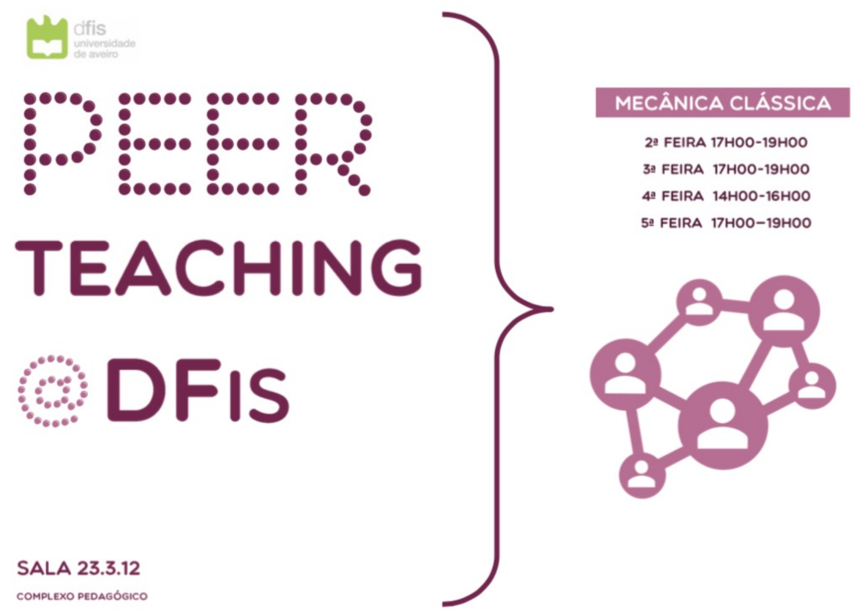
Ricardo Assis Guimarães Dias

Gabinete: Dep. Física, 2º piso

Informações

- Guião geral + guião Lab

- Iniciativa Peer Teaching@DFis, dedicada ao apoio a Mecânica Clássica
  - 2ª, 3ª, 5ª, 17h-19h
  - 4ª, 14h-16h
  - Sala 23.3.12



Informações

- Aulas T: redução de 3h/semana para 2h/semana

programa:
- Principal: avaliado de 0 a 20 nos testes/exames
- Suplementar: um ponto extra (até 19 valores) nos testes/exames

Capítulo 1: vectores e cálculo vectorial

Vectores e escalares

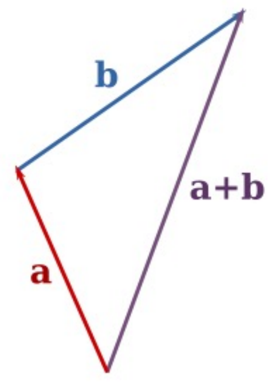
- Grandeza escalar:
  - número, unidade
    - Ex: massa, temperatura, etc
- Grandeza vectorial:
  - módulo, direcção, sentido
    - ex: velocidade, aceleração, deslocamento

propriedades de vectores

- igualdade

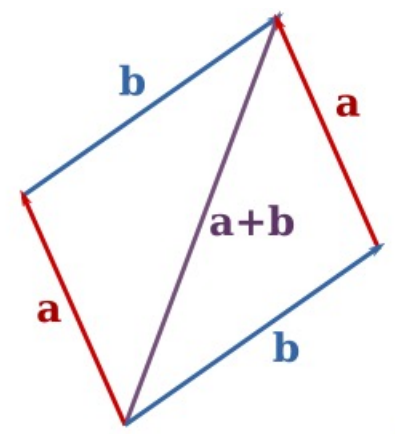
$$\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = |\vec{v}| \\ dir(\vec{u}) = dir(\vec{v}) \\ sent(\vec{u}) = sent(\vec{v}) \end{cases}$$

- adição
  - método do triângulo



propriedades de vectores

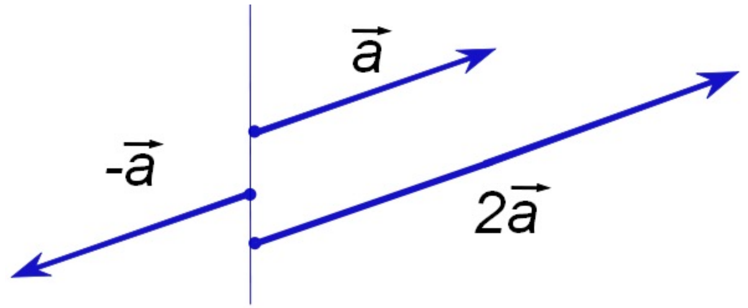
- adição
  - método do paralelogramo



  - comutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
  - associativa: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$
  - vector nulo: $\vec{0}$

propriedades de vectores

- vectores opostos

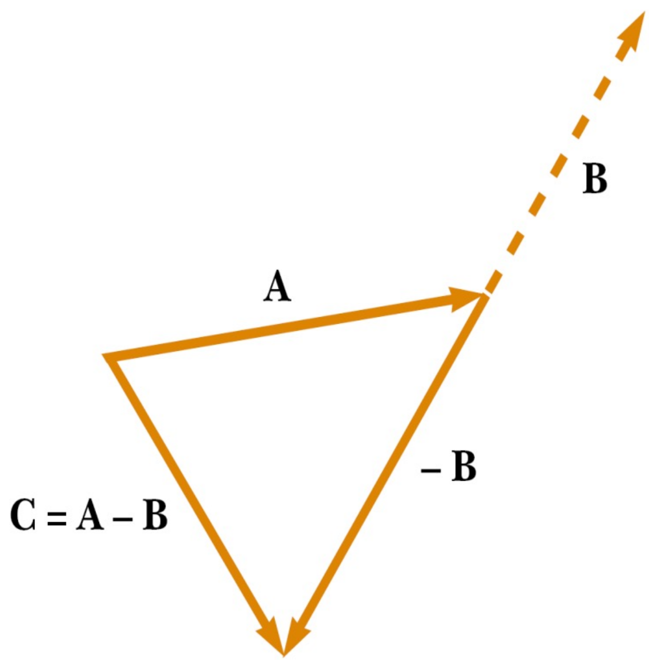


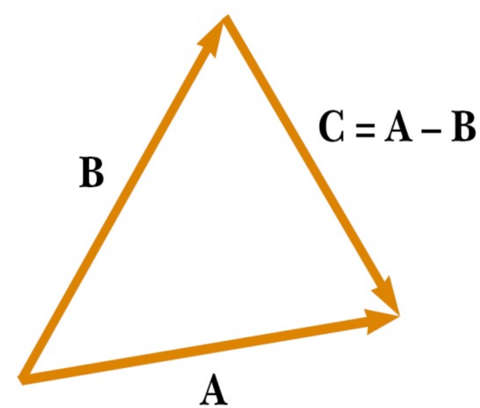
- produto de um escalar por um vector

$$k\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} |k| \cdot |\vec{v}| \\ dir(\vec{v}) \\ sent(\vec{v}), k > 0; \text{sentido oposto}, k < 0 \end{cases}$$

diferença de vectores

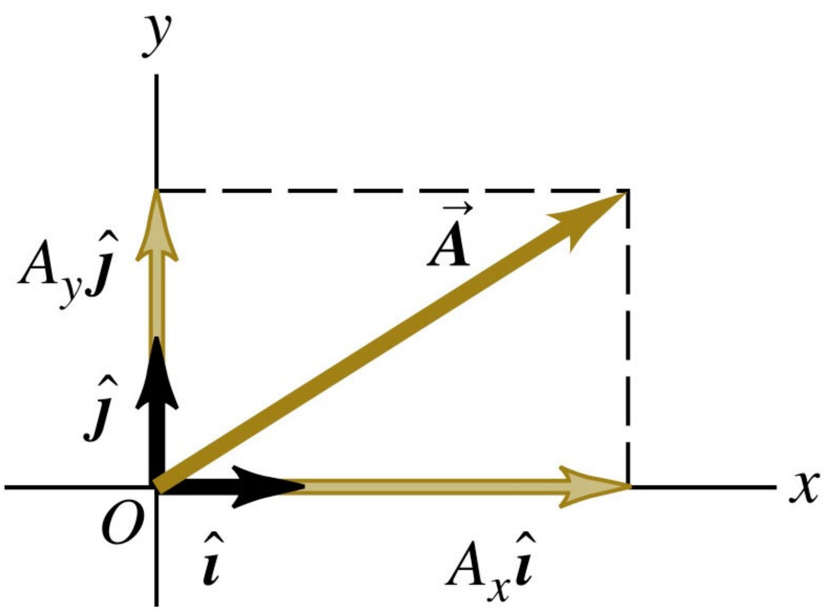
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$$



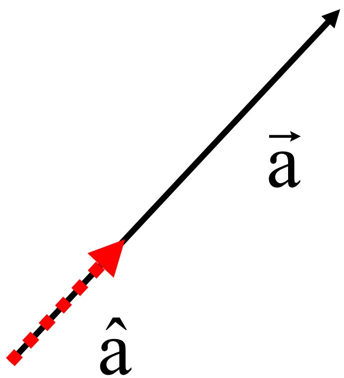


Vectores unitários e componentes vectoriais

- <u>plano *xy*</u>



Vectores unitários (versores)



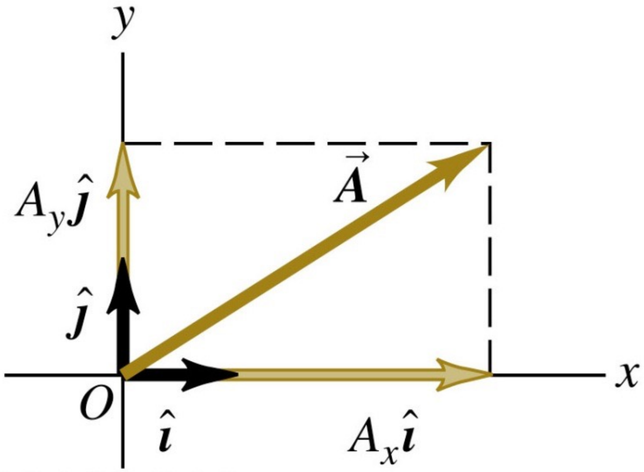
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

versores: $\hat{i}, \hat{j}$

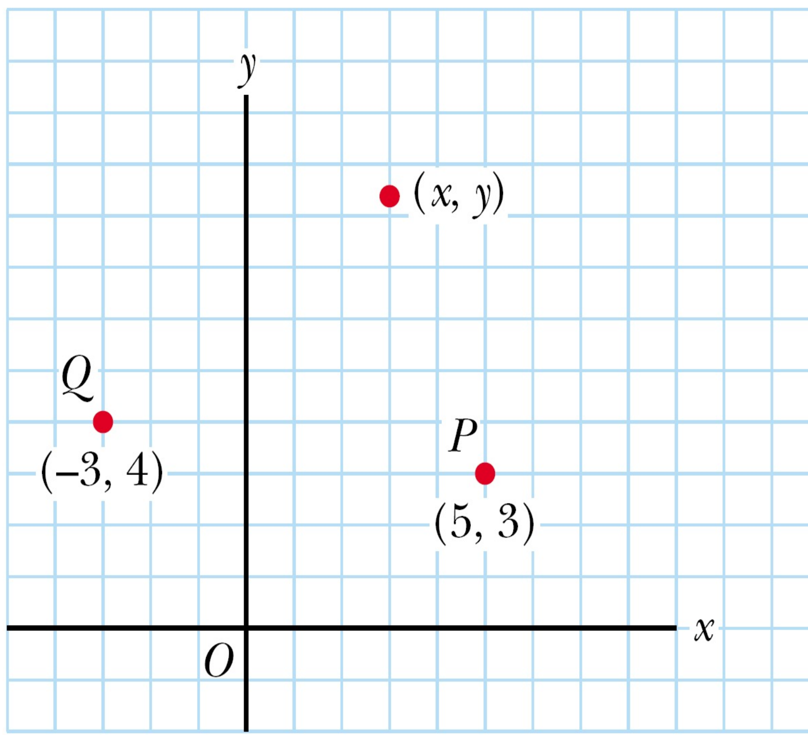
- $|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$
- $\hat{i} \perp \hat{j}$

componentes vectoriais

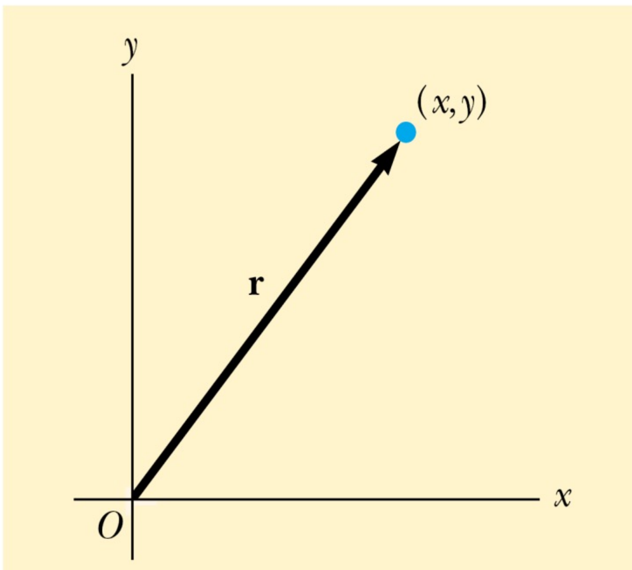
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} A_x &= A \cos \theta \\ A_y &= A \sin \theta \end{aligned}$$



Coordenadas Cartesianas



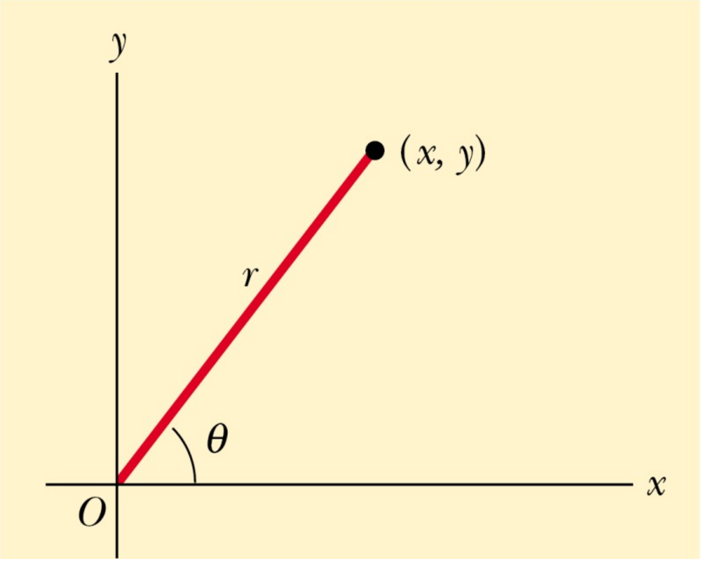
vector posição



vector posição

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

coordenadas polares

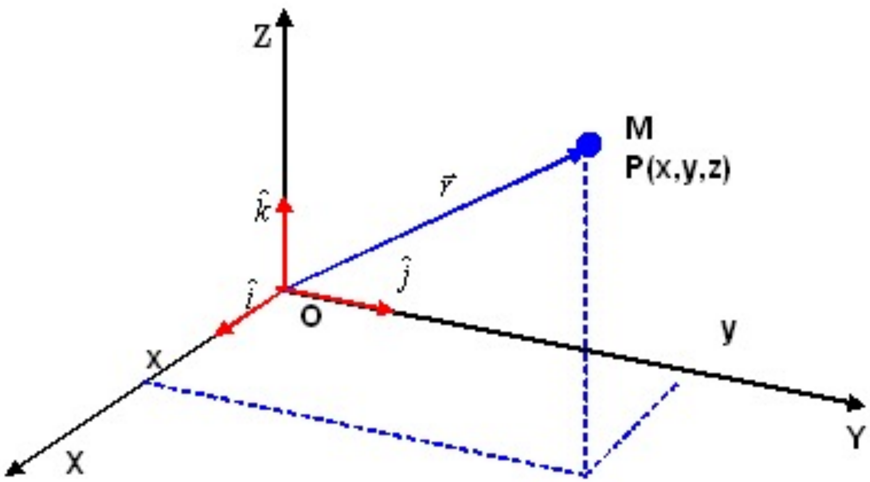


$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

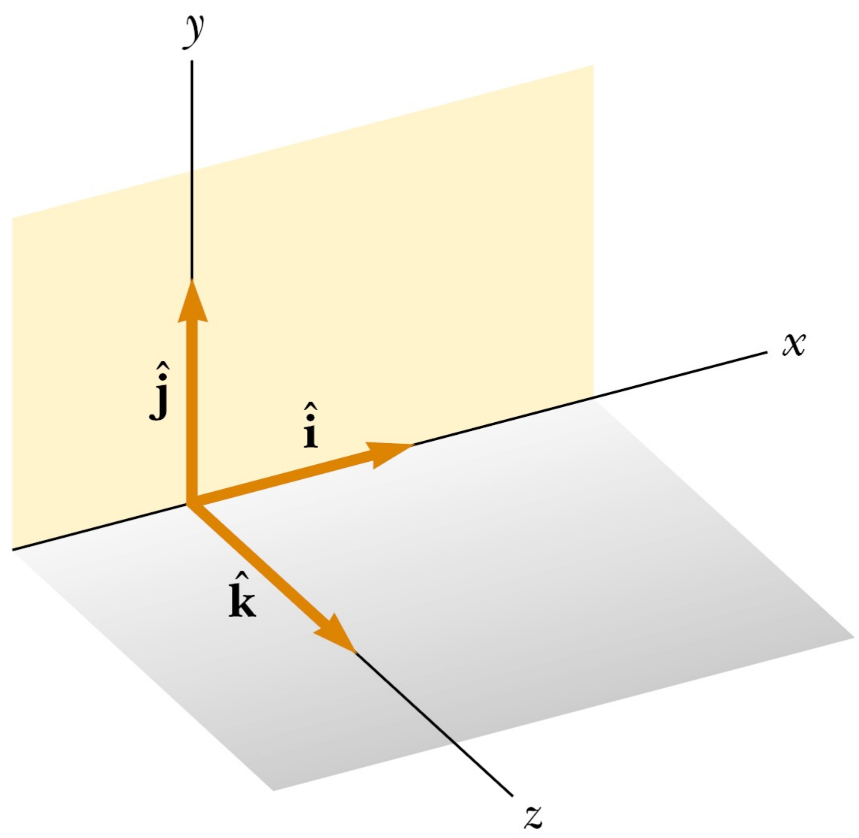
espaço *xyz*



componentes do vector posição

$$\vec{r} = r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}} + r_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$= x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

versores



adição de vectores usando componentes

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

norma de um vector

$$\vec{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

notações equivalentes

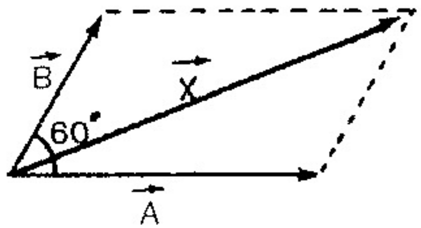
$$\vec{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

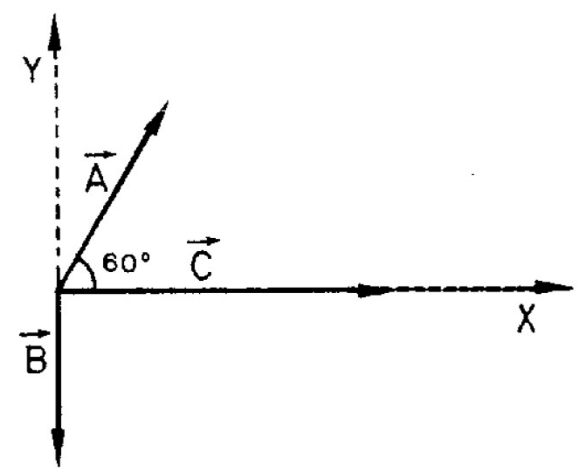
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

exercícios básicos

Qual o valor do vector soma de dois vectores que formam, entre si,um angulo de 60º e cujos modulos são: I***A***I = 6 unidades e I***B***I = 4 unidades



Considere os vectores ***A***, ***B*** e ***C***, cujos modulos são respectivamente 4, 5 e 10 unidades. Determine o valor da resultante dos vectores e indique a sua direcção:



soluções

$|\vec{x}| = 8{,}7$ unidades

Cálculo dos valores das projecções

$$\begin{cases} A_x = A \cos 60^o \Longrightarrow A_x = 4 \times \frac{1}{2} \Longrightarrow A_x = 2 \\ A_y = A \text{ sen } 60^o \Longrightarrow A_y = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A_y = 3{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = B \cos 90^o \Longrightarrow B_x = 0 \\ B_y = -B \text{ sen } 90^o \Longrightarrow B_y = -5 \end{cases}$$

soluções

$$\begin{cases} C_x = C \cos 0^{o} \Longrightarrow C_x = 10 \\ C_y = C \text{ sen } 0^{o} \Longrightarrow C_y = 0 \end{cases}$$

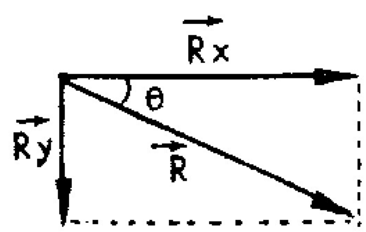
$$\begin{cases} R_x = 2 + 0 + 10 \Longrightarrow R_x = 12 \\ R_y = 3,4 - 5 + 0 \Longrightarrow R_y = -1,6 \end{cases}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{12^2 + 1,6^2}$$

$$|\vec{R}| = 12,1 \text{ unidades}$$

<u>Cálculo da direcção de $\vec{R}$</u>



$$tg\theta = \frac{R_y}{Rx}$$

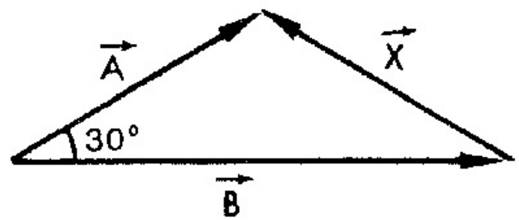
$$tg\theta = \frac{-1,6}{12}$$

$$tg\theta = -0,1333$$

$$\theta = -8^{o}$$

exercícios básicos

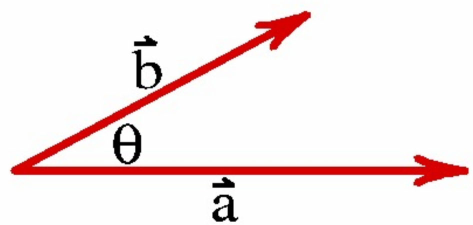
Qual o valor do vector diferença de dois vectores, ***A*** e ***B***, que formam um ângulo de 30º entre si, e cujos modulos são, respectivamente 3m e 10m?



solução: $|\vec{x}| \doteq 7{,}5\,\mathrm{m}$

produto interno (escalar)

Consideremos dois vectores ***a*** e ***b***



<u>Definição de produto interno:</u>

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta}$$

propriedades do produto interno

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \qquad \text{if} \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \qquad \text{(commutativity);}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \qquad \text{(distributivity);}$$

$$p(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (p\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \qquad \text{(associativity).}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ &\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

produto interno (escalar)

Utilizando componentes:

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

demonstração

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}),\\ &= a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\ &\quad +a_zb_x\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}.\end{aligned}$$

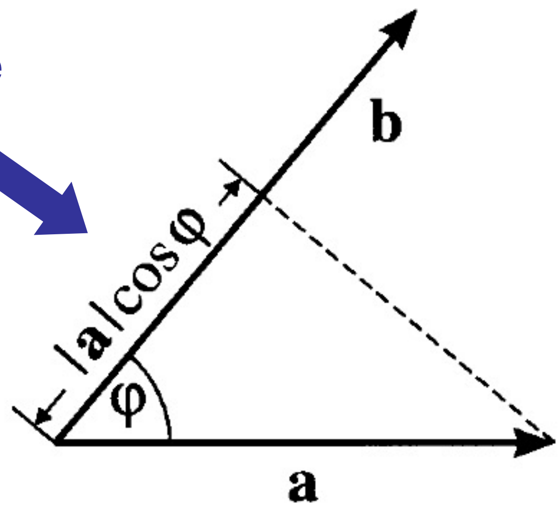
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

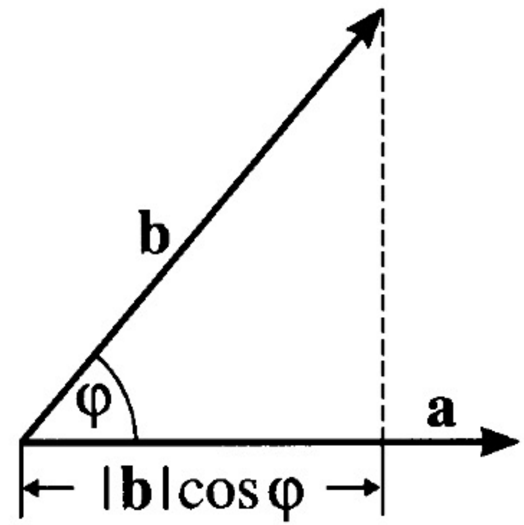
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}$$

projecções

projecção de
a* sobre *b





projecção de
b* sobre *a

projecções

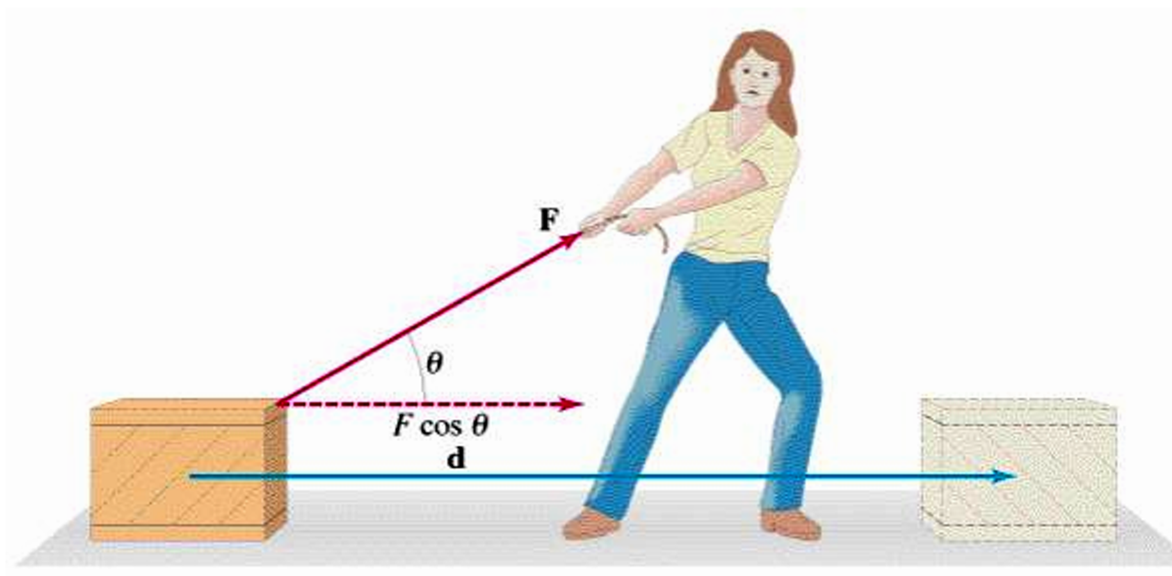
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

$$a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i},$$

$$a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j},$$

$$a_z = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}$$

exemplo: trabalho mecânico de uma força



$$W=\vec{F}\cdot\vec{d} = F\ d\cos\theta$$

prod. interno usando outra notação

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i},\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{j},\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu},$$

com $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{for } \nu \neq \mu, \\ 1 & \text{for } \nu = \mu, \end{cases}$

prod. interno usando outra notação

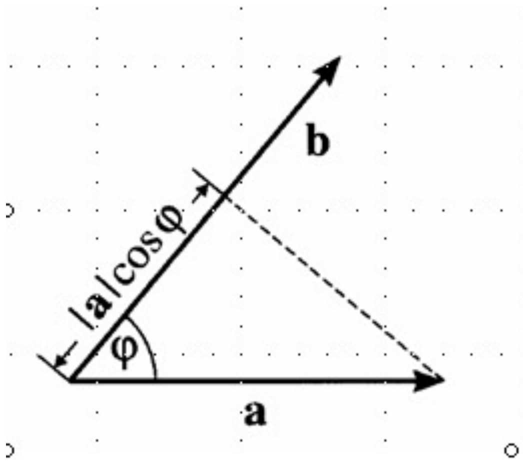
$x \mathrel{\widehat{=}} 1, \quad y \mathrel{\widehat{=}} 2, \quad z \mathrel{\widehat{=}} 3,$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{e}_\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i\,.$$

ângulo entre dois vectores



$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

exercício

Dados

$$\mathbf{a} = (2, 1, 1),$$

$$\mathbf{b} = (1, -2, 2),$$

$$\mathbf{c} = (3, -4, 2),$$

qual é o valor absoluto da projecção da soma **a**+**b** sobre o vector **c**?

solução

vector unitário

$$\mathbf{e}_c = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{(3, -4, 2)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (2 + 1, 1 - 2, 1 + 2),$$

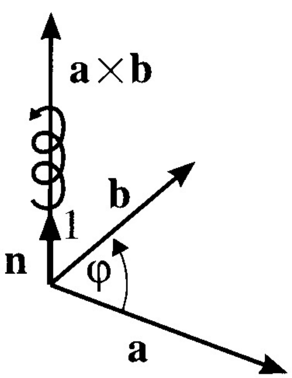
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_c = \frac{3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 2}{\sqrt{29}} = \frac{19}{\sqrt{29}}$$

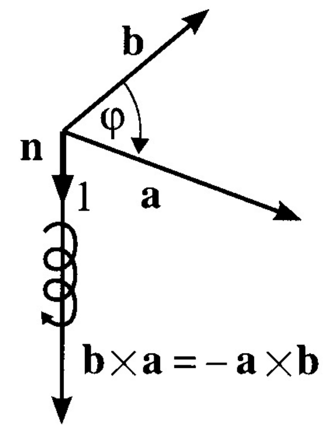
produto externo (vectorial)

<u>Definição:</u>

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \varphi)\mathbf{n},$$

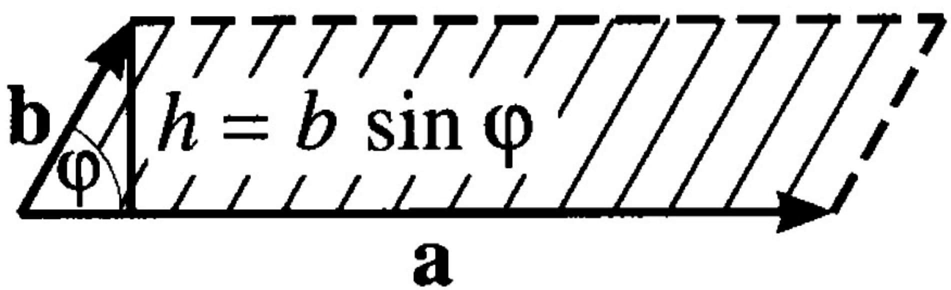
n vector unitário perpendicular ao plano formado por **a** e **b**



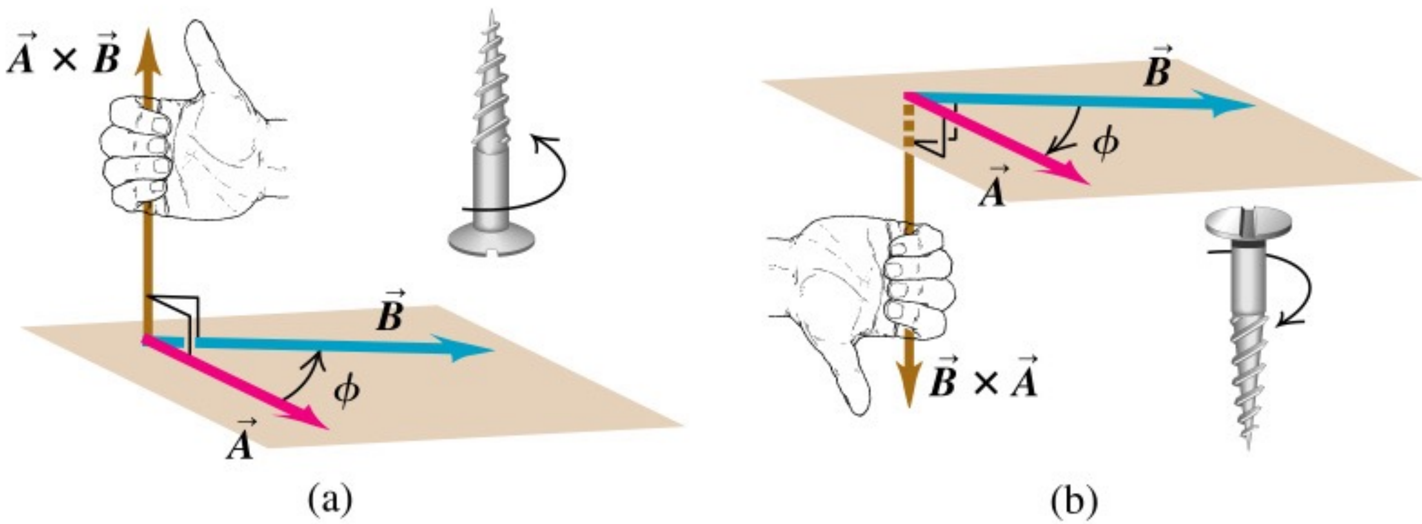


módulo do prod. vect.

$$F = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi = ab \sin\varphi,$$



regra da mão direita



propriedades do prod. vectorial

$$\varphi = 0 \longrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

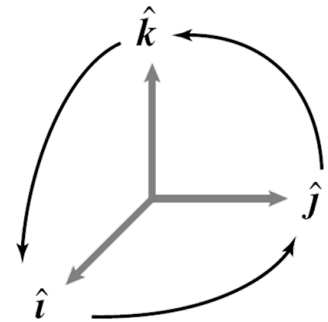
$$p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (p\mathbf{b}).$$

produto vectorial dos versores cartesianos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

e permutações cíclicas!



$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

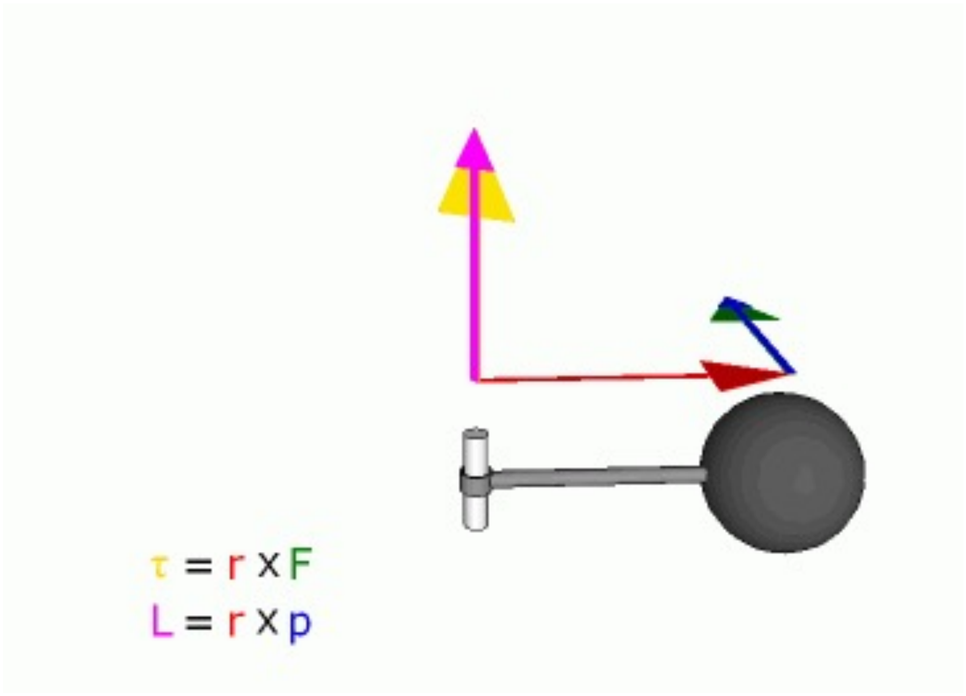
$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$$

exemplos

Momento de uma força

Momento angular



prod. vectorial usando componentes

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\mathbf{e}_\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

prod. vectorial usando componentes

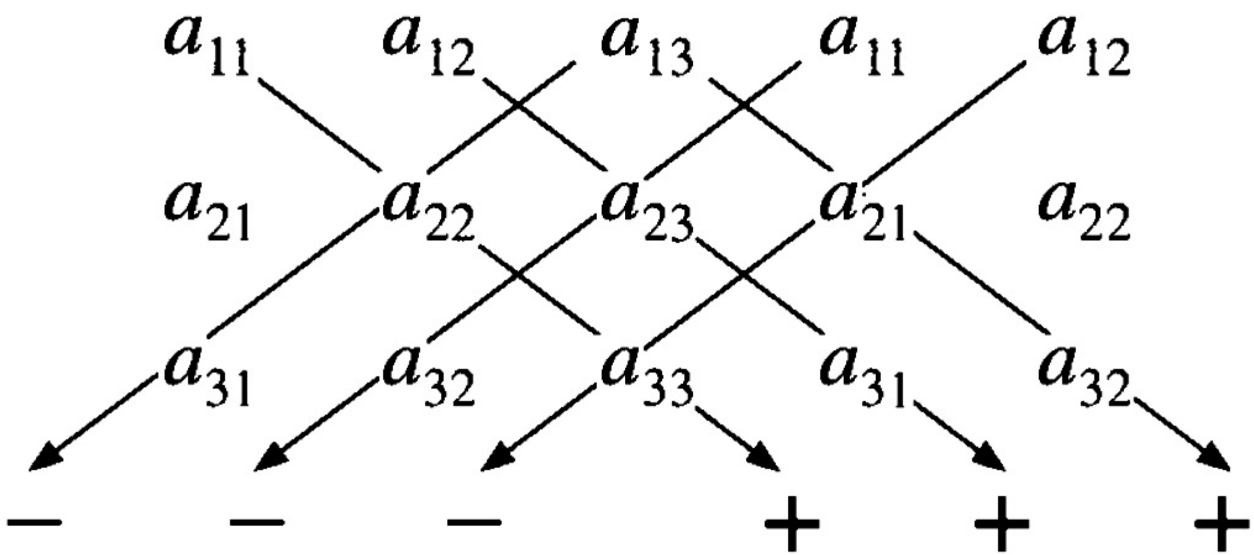
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

$$+ \mathbf{e}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

$$+ \mathbf{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

nota sobre determinantes



demonstração

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_2\mathbf{e}_3 - a_2b_1\mathbf{e}_3 + a_2b_3\mathbf{e}_1 - a_3b_2\mathbf{e}_1 + a_3b_1\mathbf{e}_2 - a_1b_3\mathbf{e}_2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0$$

exemplo

$$\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{\imath} + -4\hat{\jmath} + \hat{k}$$

Determine $\vec{a} \times \vec{b}$

<u>solução</u>:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\imath}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\jmath}(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{k}(a_1 b_2 - b_1 a_2) \\
&= \hat{\imath}(1 - 8) + \hat{\jmath}(-6 - 1) + \hat{k}(-4 - 3) \\
&= -7(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}).
\end{aligned}$$

outro exemplo

Determine um vector unitário perpendicular aos vectores

$$\vec{\boldsymbol{r}}_A = \hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_b = 3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}$$

solução

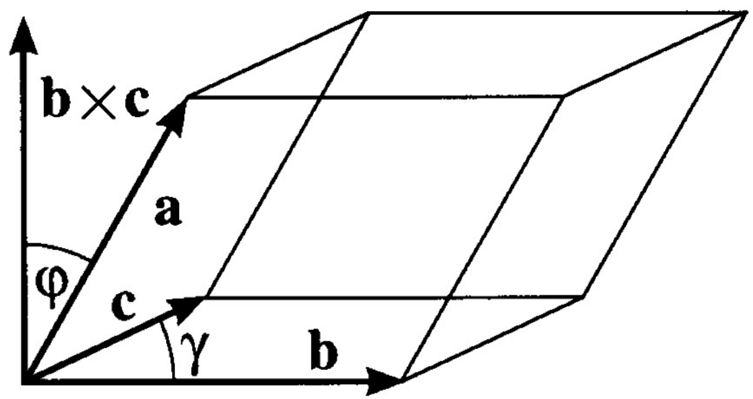
vector perpendicular ***N***:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{N}} &= \vec{\boldsymbol{r}}_A \times \vec{\boldsymbol{r}}_B \\ &= (\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}) \times (3\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 2\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= -7\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}.\end{aligned}$$

vector unitário: $$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{\vec{\boldsymbol{N}}}{N} \\ &= \frac{-7\hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{7^2 + 2^2 + 3^2}} \\ &= -0.89\hat{\boldsymbol{\imath}} - 0.25\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0.38\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

produto escalar triplo

volume do paralelipípedo definido por **a**, **b** e **c**



$$V = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$ (em módulo)

produto escalar triplo

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) =$$

$$= (a_1, a_2, a_3) \cdot [(b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3)]$$

$$= (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

produto escalar triplo

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

propriedades do prod. esc. triplo

permutações cíclicas:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \gamma = 0$$

vectores coplanares

exercício

Ache o volume do paralelipípedo de lados

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}),$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = 3\hat{\boldsymbol{\imath}},$$

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}.$$

solução

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0-9) + 0 = -\frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Volume: $\frac{9}{\sqrt{2}}$

campos

2 tipos de campos:

- vectoriais: $\vec{v}(x,y,z) = [v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)]$

- escalares: função $f = f(x,y,z)$ que associa o escalar $f(x,y,z)$ a cada ponto do espaço

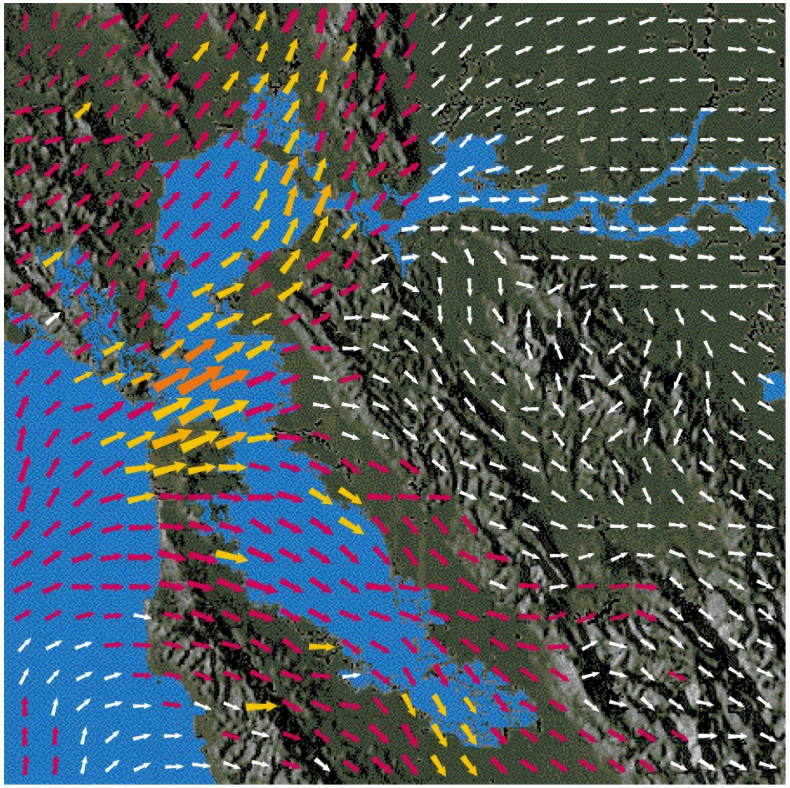
Exemplos:

-de campo escalar: potencial gravítico, temperatura

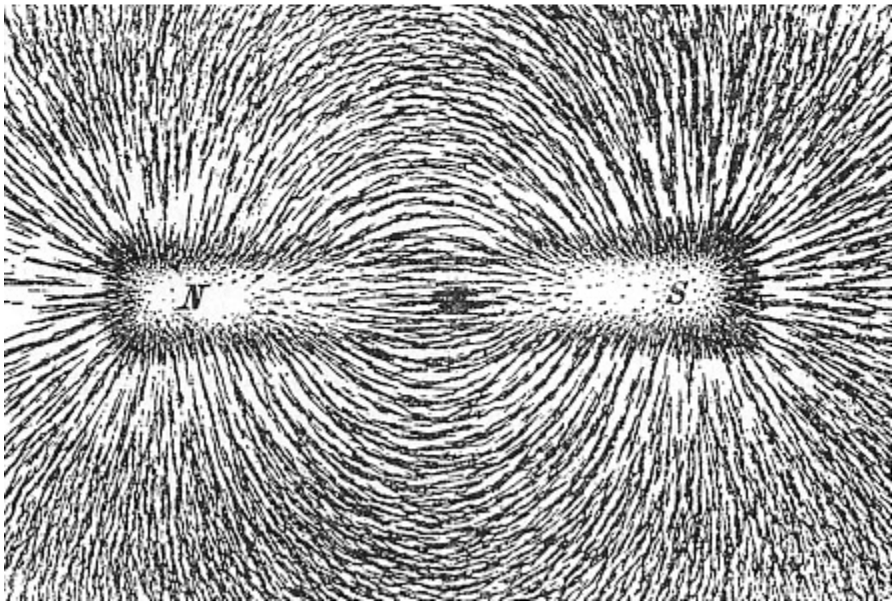
-de campo vectorial: campo eléctrico

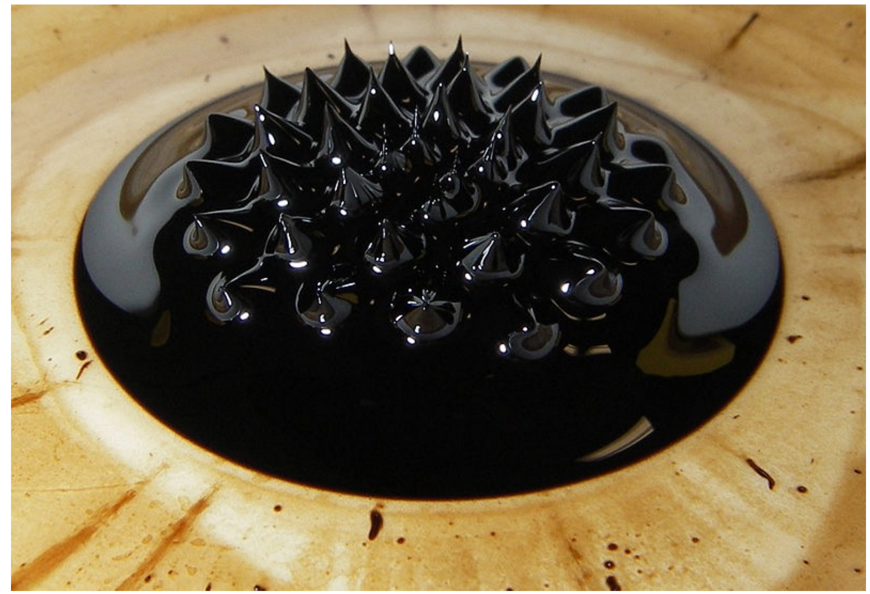
campos vectoriais

Campos vectoriais associam um vector a cada ponto do espaço.

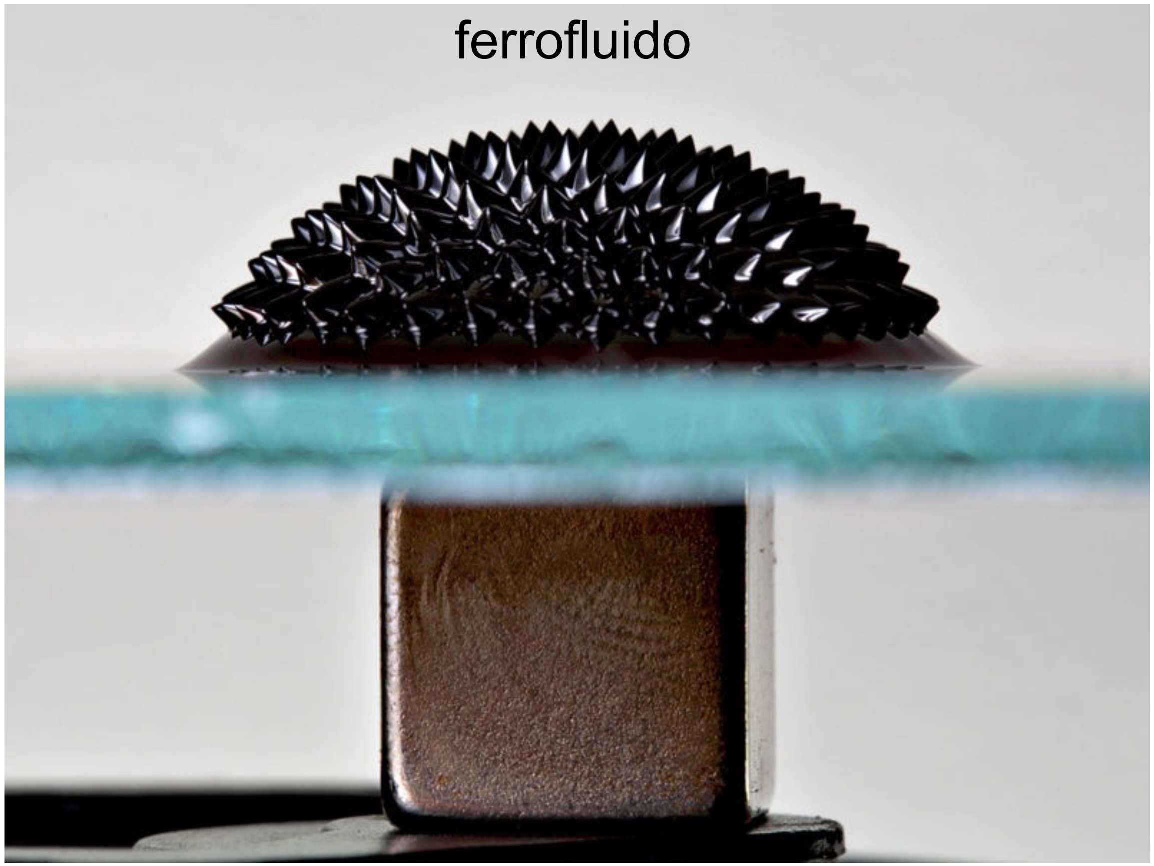


visualização de campos vectoriais





visualização de campos vectoriais

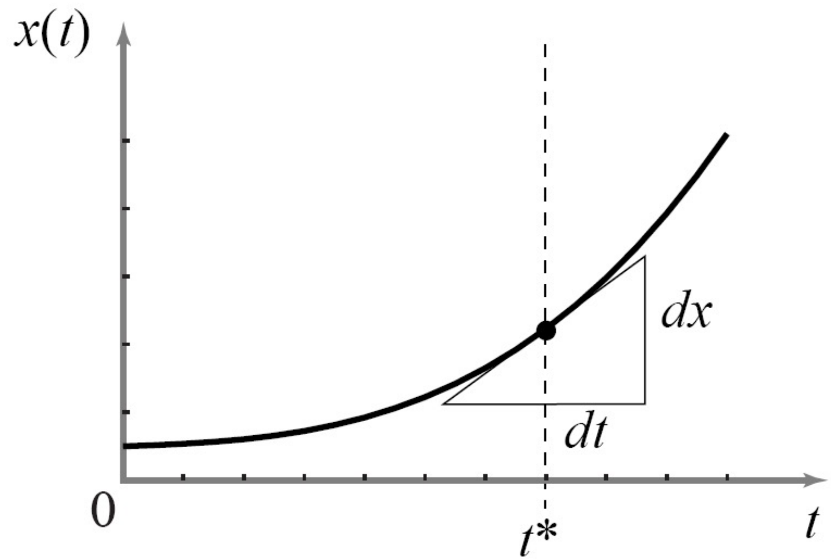


Derivada “usual”

função de uma variável: $x(t)$

Derivada: $v=dx/dt$

Variação infinitesimal: $dx=v\cdot dt=dx/dt\cdot dt$
(diferencial)



Derivação de funções vectoriais

$$\mathbf{A}(u) = A_x(u)\mathbf{e}_1 + A_y(u)\mathbf{e}_2 + A_z(u)\mathbf{e}_3$$

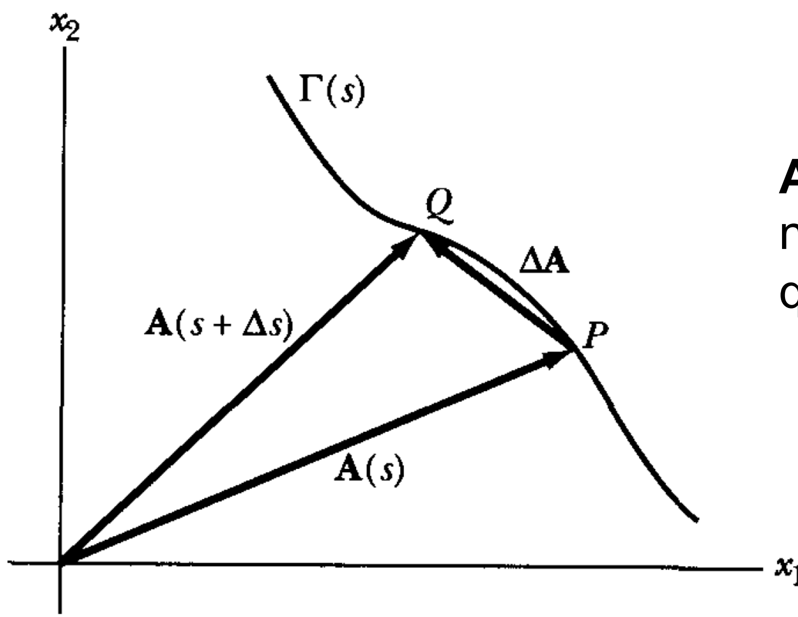
Definição:

$$\frac{d\mathbf{A}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u + \Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{A}(u)}{du} = \frac{dA_x(u)}{du}\mathbf{e}_1 + \frac{dA_y(u)}{du}\mathbf{e}_2 + \frac{dA_z(u)}{du}\mathbf{e}_3.$$

interpretação geométrica

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{A}(s + \Delta s) - \mathbf{A}(s)}{\Delta s}$$



A(*s*) define uma “trajectória “ no plano/espaço à medida que *s* é variado

Derivada de ordem *n*

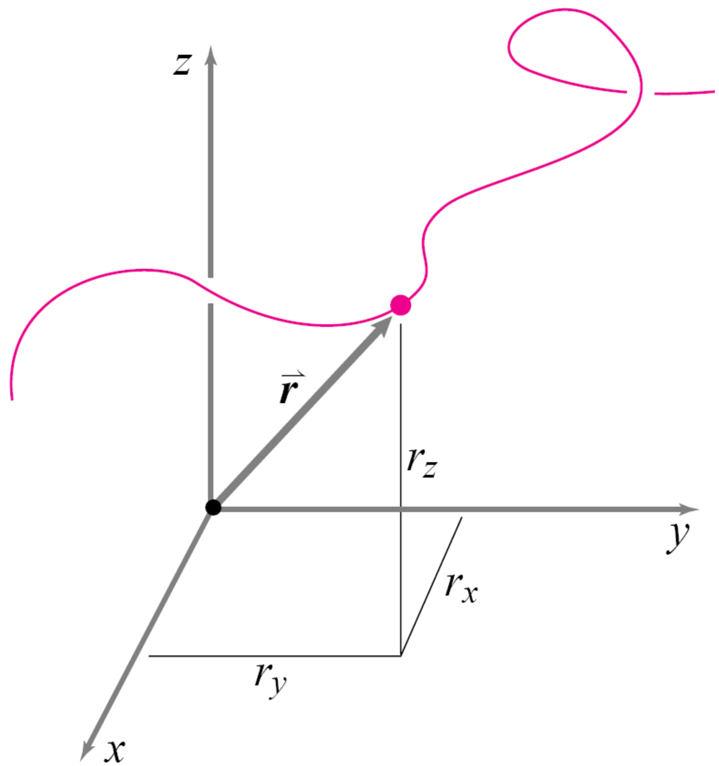
$$\frac{d^n \mathbf{A}(u)}{du^n} = \frac{d^n A_x(u)}{du^n}\mathbf{e}_1 + \frac{d^n A_y(u)}{du^n}\mathbf{e}_2 + \frac{d^n A_z(u)}{du^n}\mathbf{e}_3$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(u) &= \underbrace{(2u^2 - 3u)}_{A_x(u)}\,\mathbf{e}_1 + \underbrace{(5 \cdot \cos u)}_{A_y(u)}\,\mathbf{e}_2 - \underbrace{(3 \cdot \sin u)}_{A_z(u)}\,\mathbf{e}_3, \\
&= (2u^2 - 3u, 5 \cdot \cos u, -3 \cdot \sin u), \\
\frac{d\mathbf{A}(u)}{du} &= (4u - 3)\mathbf{e}_1 - (5 \cdot \sin u)\mathbf{e}_2 - (3 \cdot \cos u)\mathbf{e}_3 \\
&= (4u - 3, -5 \cdot \sin u, -3 \cdot \cos u), \\
\frac{d^2\mathbf{A}(u)}{du^2} &= 4\mathbf{e}_1 - 5 \cdot \cos u \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \sin u \cdot \mathbf{e}_3 \\
&= (4, -5 \cdot \cos u, 3 \cdot \sin u).
\end{aligned}$$

caso particular: vector posição

$$\vec{r}\left(t\right)=x\left(t\right)\hat{i}+y\left(t\right)\hat{j}+z\left(t\right)\hat{k}$$



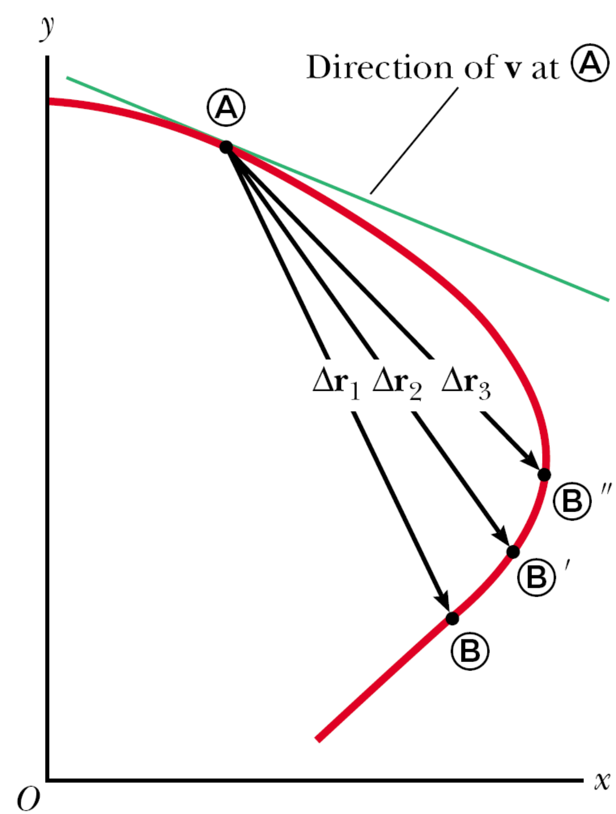
velocidade instantânea

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

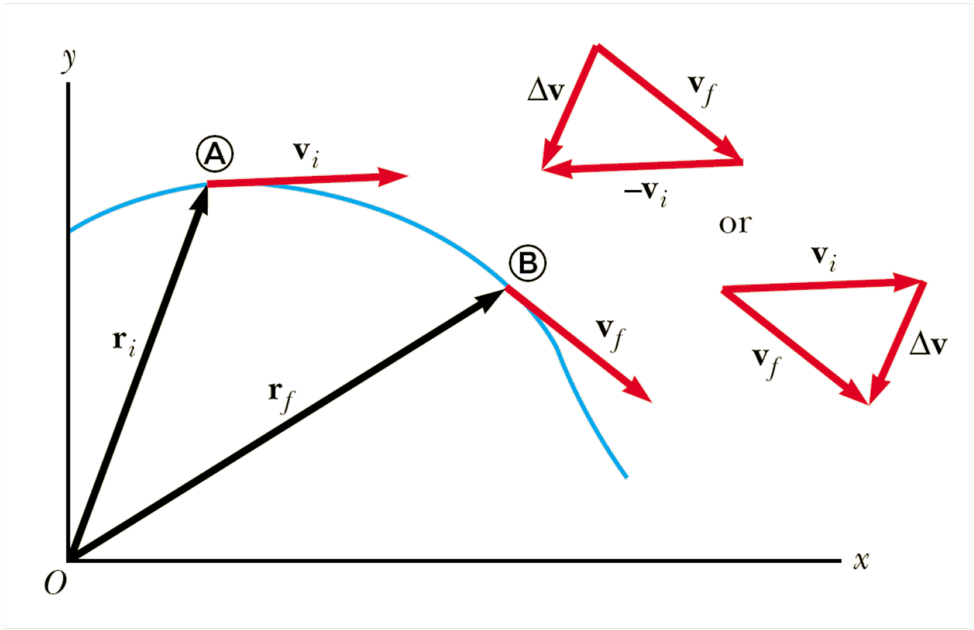
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$



aceleração instantânea

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d(d\mathbf{r}/dt)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}.$$



utilizando outra notação

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \ddot{x}_i \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\mathbf{e}_i$$

derivada do produto

$$\frac{d}{dt}(a\vec{\mathbf{A}}) = \dot{a}\vec{\mathbf{A}} + a\dot{\vec{\mathbf{A}}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) = \dot{\vec{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \dot{\vec{\boldsymbol{B}}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = \dot{\vec{\boldsymbol{A}}} \times \vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{A}} \times \dot{\vec{\boldsymbol{B}}}.$$

exercício

Considere um vector posição dado por:

$$\mathbf{r} = (t^3 + 2t, -3e^{-t}, t)\ \text{m}.$$

Determine a velocidade e a aceleração nos instantes t = 0 s and t = 1 s.

Solução

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = (3t^2 + 2, 3e^{-t}, 1)\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}} = (6t, -3e^{-t}, 0)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

<u>*t* = 0 s</u>:

$$\mathbf{v}(0) = (2, 3, 1)\frac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad \mathbf{a}(0) = (0, -3, 0)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$v(0) = \sqrt{14}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \qquad a(0) = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Solução (cont.)

<u>t = 1 s</u>:

$$\mathbf{v}(1) = (5, \frac{3}{e}, 1)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \mathbf{a}(1) = (6, -\frac{3}{e}, 0)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$v(1) = 5.22\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad a(1) = 6.1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

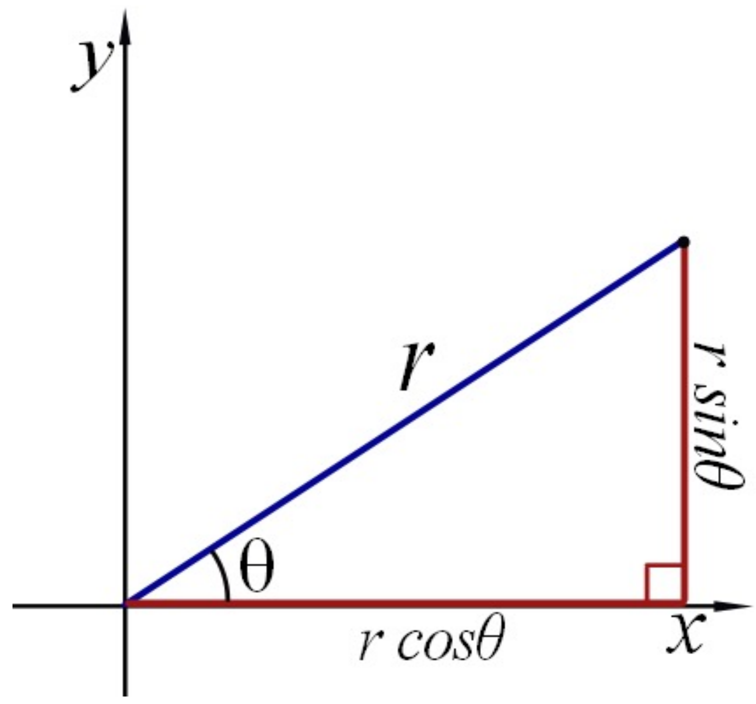
Exercício

20. Uma partícula tem movimento helicoidal, $\mathbf{r}(t) = r\cos(\omega t)\mathbf{i} + r\sin(\omega t)\mathbf{j} + b\,\omega t\mathbf{k}$, com velocidade angular ω e raio r constantes. b é uma constante.

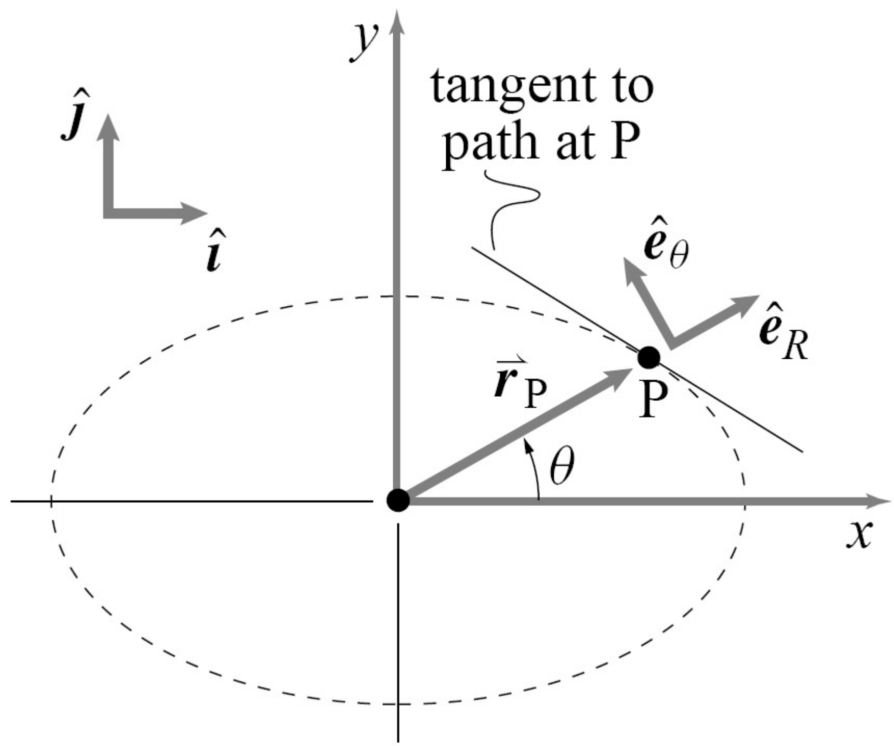
    (a) Determine a velocidade da partícula.

    (b) Determine a aceleração.

coordenadas polares



coordenadas polares



equações de transformação

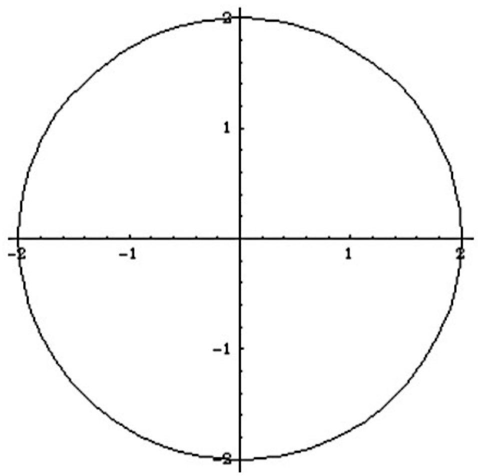
$$(x,y) \rightarrow (r,\theta)$$

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

exemplos

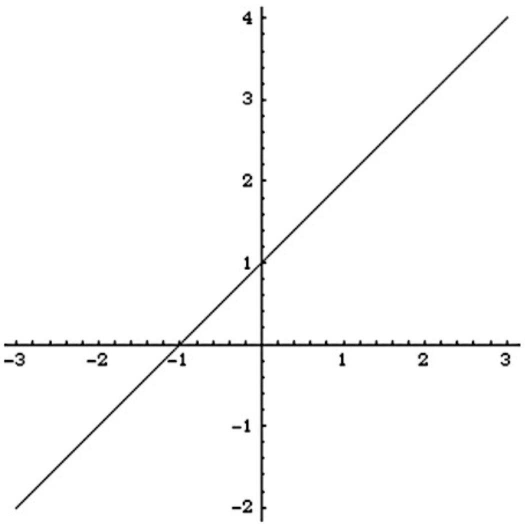
circunferência



coord. pol.: $r = 2$

coord. cart.: $x^2 + y^2 = 4$

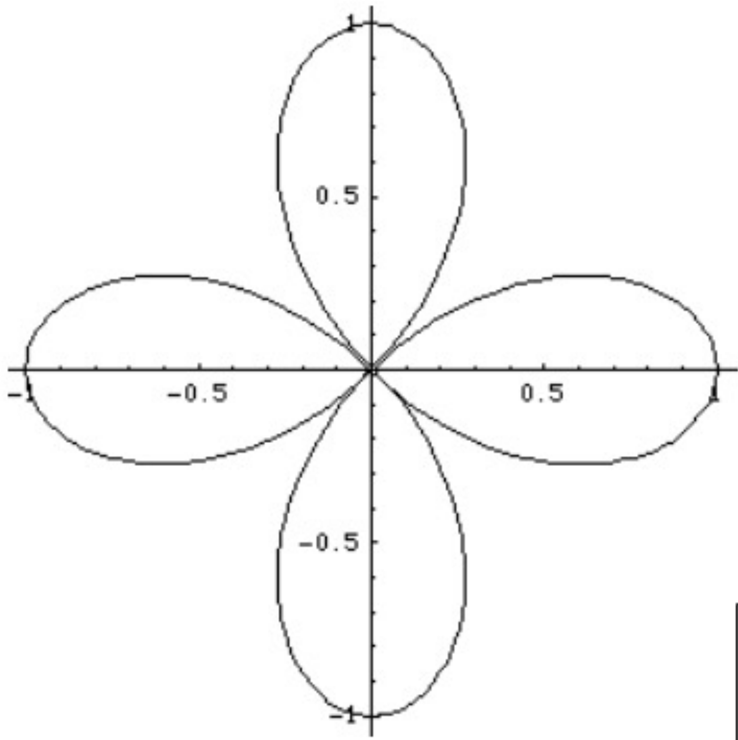
recta



coord. pol.: $r = \dfrac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$

coord. cart.: $y = x + 1$

exemplos



coord. polares:

$r = |\cos(2\theta)|$

coord. cart.:

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \pm(x^2 - y^2)$$