Capítulo 1 - Coordenadas e cálculo vectorial

1 - Determine as coordenadas cartesianas do ponto de coordenadas cilíndricas: $(\rho, \phi, z) = (2, \pi/3, 1)$.

2 - Determine as coordenadas cartesianas do ponto de coordenadas esféricas: $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/3, \pi/2)$.

3 - Determine as coordenadas cilíndricas do ponto de coordenadas cartesianas: $(x, y, z) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.

4 - Determine as coordenadas esféricas do ponto de coordenadas cartesianas: $(x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$.

5 - Escreva as componentes cartesianas dos vectores unitários associados às coordenadas cilíndricas.

6 - Escreva as componentes cartesianas dos vectores unitários associados às coordenadas esféricas.

7 - Escreva o vector posição na base das coordenadas cilíndricas e esféricas.

8 - Escreva o vector $\mathbf{v} = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ na base das coordenadas cilíndricas e esféricas.

9 - Escreva o vector v = z i + 2x j + y k na base das coordenadas cilíndricas e esféricas.

suplementar

10 - Determine o ângulo entre duas diagonais de duas faces adjacentes dum cubo.

11 - Determine o ângulo entre as diagonais de dois vértices opostos dum cubo.

12 - Um vector $\mathbf{A}$, cujo módulo é 10, faz ângulos iguais com os eixos das coordenadas cartesianas. Determine A_x, A_y, A_z e esse ângulo.

13 - Os vértices de um triângulo $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são dados pelos pontos $(-1, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, -1, 0)$, respectivamente. Determine o ponto $\mathbf{D}$ tal que a figura $\mathbf{ABCD}$ seja um paralelogramo.

14 - Determine o coseno do ângulo entre os vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i}\text{-}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

15 - Dois vectores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são dados por $\mathbf{A} = 2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$. Determine os produtos escalar e vectorial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

16 - Dados três vectores $\mathbf{P} = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -6\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{R} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, ache dois vectores que são perpendiculares e dois que são paralelos ou antiparalelos.

17 - Encontre um vector $\mathbf{A}$ que é perpendicular aos vectores $\mathbf{U} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{V} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e a sua norma.

18 - Os vértices de um paralelogramo **ABCD** são $(1, 0, 0)$, $(2, -1, 0)$, $(0, -1, 1)$, e $(-1, 0, 1)$. Calcule as àreas do triângulo **ABC** e do triângulo **BCD**. Estas áreas são iguais?

19 - Um vértice de um paralelipípedo está na origem. Os outros 3 vértices estão em $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, e $(0, 3, 1)$. Todos os comprimentos estão em centímetros. Calcule o volume do paralelipípedo usando o produto escalar triplo.

20 - Dados 3 vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{i} + \mathbf{j}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{i} - \mathbf{k}. \end{aligned}$$

(a) Determine o produto escalar triplo, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. Reparando que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, apresente uma interpretação geométrica para o resultado do produto escalar triplo.

(b) Determine $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

21 - Três vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são dados por $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 6\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = -3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$. Determine os valores de $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ e $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. O que pode concluir?

22 - Dados 3 vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, mostre que se pode escrever:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}\,.$$

Soluções

1 - $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 1)$.

2 - $(x, y, z) = (0, \sqrt{3}, 1)$.

3 - $(\rho, \phi, z) = (2, -\pi/4, 2)$.

4 - $(r, \theta, \phi) = (2, -\pi/4, 0)$.

5 - $\mathbf{i} = \cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{j} = \sin\phi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$.

6 - $\mathbf{i} = \sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi$,
$\mathbf{j} = \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{e}_\phi$,
$\mathbf{k} = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$.

7 - cilíndricas: $\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z$,
esféricas: $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$.

8 - cilíndricas: $\mathbf{v} = \rho z\,\mathbf{e}_\rho + \rho^2\sin\phi\cos\phi\,\mathbf{e}_z$,
esféricas: $\mathbf{v} = r^2\cos\theta\sin^2\theta(1+\sin\phi\cos\phi)\,\mathbf{e}_r + r^2\sin\theta[1-\sin^2\theta(1+\sin\phi\cos\phi)]\,\mathbf{e}_\theta$.

9 - cilíndricas: $\mathbf{v} = (z + 2\rho\sin\phi)\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho + (2\rho cos^2\phi - z\sin\phi)\,\mathbf{e}_\phi + \rho\sin\phi\,\mathbf{e}_z$,
esféricas: $\mathbf{v} = r\sin\theta[\cos\theta(\sin\phi + \cos\phi) + \sin\theta\sin(2\phi)]\,\mathbf{e}_r + r[\cos^2\theta(\sin\phi + \cos\phi) + \sin(2\theta)\sin(2\phi)/2 - \sin\phi]\,\mathbf{e}_\theta + r[2\sin\theta\cos^2\phi - \cos\theta\sin\phi]\,\mathbf{e}_\phi$.

10 - $\cos\varphi = 1/2 \;\Rightarrow\; \varphi = 60°$.

11 - $\cos\varphi = 1/3$.

12 - $A_x = A_y = A_z = 10/\sqrt{3}$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{3}$.

13 - $(2, 0, -2)$.

14 - $\cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 90°$.

15 - $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = -36$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 28\,\mathbf{j} - 18\,\mathbf{k}$.

16 - antiparalelos: $\mathbf{Q} = -2\,\mathbf{P}$, perpendiculares: $\mathbf{P}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{R} = 0$.

17 - $\mathbf{A} = -3\,(\mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\|\mathbf{A}\| = 3\sqrt{2}$.

18 - Área $= \frac{1}{2}\| - \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}\| = \sqrt{6}/2$.

19 - 18 cm^3.

20 - (a) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$, porque $\mathbf{A}$ está no mesmo plano de $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, mas $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ é perpendicular a esse plano, (b) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

21 - $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = -24\,\mathbf{i} - 88\,\mathbf{j} + 62\,\mathbf{k}$, $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = -60\,\mathbf{i} - 40\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}$. O produto externo não é associativo.