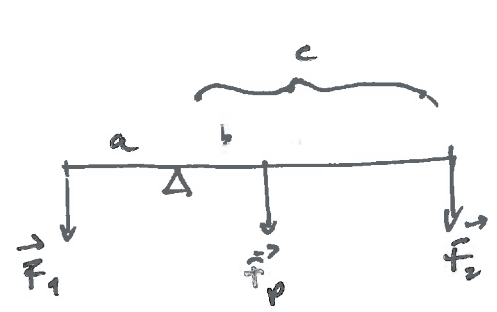
1



Torques em relação ao fulcro :

$$F_1 a = F_p b + F_2 c \Rightarrow F_1 = \frac{b}{a} F_p + \frac{c}{a} F_2$$

$$= \frac{12}{2.5}\, 28 \times 9.8 + \frac{30}{2.5}\, 75 \times 9.8$$

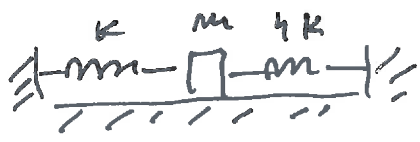
$$= 1013{,}7 \text{ N}$$

2 Depende do ponto de aplicação da força

3 O momento de inércia varia, mas o momento angular não varia

4 Ambas as massas sofrem a mesma magnitude de variação de momento linear

5 Equivalente a



$$\Rightarrow \omega = \sqrt{5K}$$

$\boxed{II}$

Dados:

$m = 1\,kg$

$k = 4,0 \times 10^{2}\ N/m$

$b = 3,0\ Ns/m$

a) freq. de oscilação:

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ com $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = k$

$\gamma = \frac{b}{2m} = b/2$

Logo

$\omega = \sqrt{k - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{400 - \frac{9}{4}} = 19.94\ rad/s$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3,17\ Hz$

b) $\omega_0^2 = k = 400\ s^{-2}$

$\gamma^2 = \frac{b^2}{4} = \frac{9}{4}\ s^{-2}$

$\Rightarrow \omega_0^2 > \gamma^2$

subamortecimento

c) $E_m(t) = E_m(0)\, e^{-\frac{b}{m}t}$

$\Rightarrow 0.05\, \cancel{E_m(0)} = \cancel{E_m(0)}\, e^{-\frac{b}{m}t}$

$\Rightarrow 0{,}05 = e^{-3t}$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}05)}{(-3)} \simeq 1\,s$

d)

i) É a frequência das força externa:

$\omega = 2\pi f = 5\ rad/s$

$\Rightarrow f = \frac{5}{2}\pi^{-1}\ Hz$

ii) Ressonância:

$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{400 - \frac{9}{2}} = 19{,}887\ rad/s$

$\Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 3{,}165\ Hz$

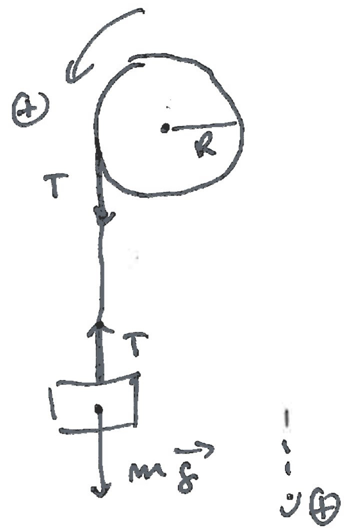
iii) <u>Amplitude :</u>

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{5/1}{\sqrt{(\cancel{400}-\cancel{400}+\frac{9}{2})^2+4\times\frac{3}{2}\,(400-\frac{9}{2})}}$$

$\simeq 0{,}10\ m$

III

a) <u>Diagrama de forças:</u>



<u>Equações do movimento:</u>

roldana: $TR = I_O \alpha$, com $a = R\alpha$

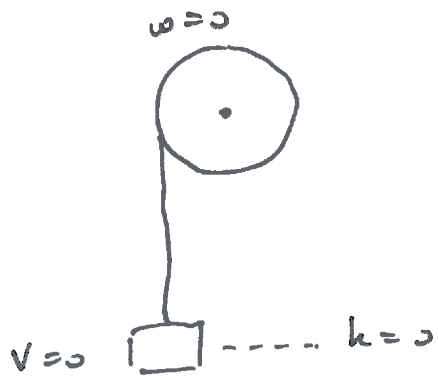
bloco: $mg - T = ma$,

$$\Rightarrow \begin{cases} TR = I_O \dfrac{a}{R} \\ \text{—} \end{cases} \quad \begin{cases} T = \dfrac{I_O}{R^2} a \\ mg - \dfrac{I_O}{R^2} a = ma \end{cases}$$

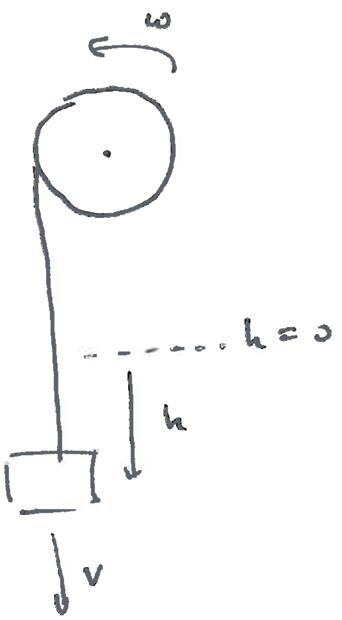
$$\Rightarrow a \left(m + \frac{I_O}{R^2} \right) = mg$$

$$\Rightarrow a = \frac{m}{m + \frac{I_O}{R^2}} g = \frac{m}{m + \frac{\frac{1}{2} M R^2}{R^2}} g = \frac{m}{m + \frac{M}{2}} g$$

b) Início:



Depois:



com $\boxed{v = R\omega}$

Conserv. da energia mecânica:

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\,\omega^2$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{I_O}{R^2}v^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_O}{R^2}\right)v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2g}\,\frac{m + \frac{I_O}{R^2}}{m}\,v^2 = \frac{1}{2g}\,\frac{m + \frac{1}{2}M}{m}\,v^2}$$

c) <u>Momentos de inércia</u>:

roldana sem buraco: $\frac{1}{2} M R^2$

(nota: M massa da roldana sem buraco)

buraco em relação ao seu centro: $I_B = \frac{1}{2} M_B \left(\frac{R}{2}\right)^2$

buraco em relação ao centro da roldana:

$$I_B' = I_B + M_B \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} M_B \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{8} M_B R^2$$

<u>Massa do buraco</u>:

proporcional à área $\Rightarrow \frac{M_B}{M} = \frac{A_B}{A_\odot} = \frac{\pi (R/2)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow M_B = \frac{1}{4} M$$

$$I_{\odot} = I_{\odot} - I_B' = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{3}{8}\times\frac{1}{4}M\times R^2$$

$$= \frac{13}{32}MR^2$$

Massa da Roldana com buraco:

$$M_{\odot} = M - M_B = \frac{3}{4}M$$

Conclusão:

$$I_{\odot} = \frac{13}{32}\,\frac{4}{3}M_{\odot}R^2$$

$$= \frac{13}{24}M_{\odot}R^2$$

ii) Sim, pois o plano do disco contém o ponto em relação ao qual se calculam os momentos e esse plano contém as forças (coplanares)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{L} = L_z \hat{k} = I \omega \hat{k} \\ \vec{\tau} = \tau \hat{k} = I \alpha \hat{k} \end{cases}$$

paralelos ao eixo de rotação

(onde z é perpendicular ao plano)

Exame:

$\boxed{\text{II}}$

a) $\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}$

$= -(4x^3 - 2x)\, y\, \hat{i} - (x^4 - x^2)\, \hat{j}$

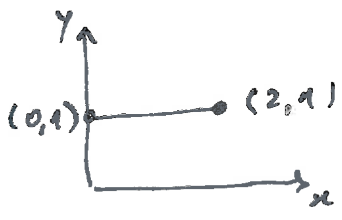
b) Método 1:

$W = -\Delta U = U(0,1) - U(2,1)$

$= 0 - (16-4)\times 1$

$= -12\,J$

Método 2:



$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F_x\, dx =$

$= -\int_0^2 (4x^3 - 2x)\times 1\, dx$

$= -(x^4 - x^2)\Big|_0^2$

$= -12\,J$

c)

$$W = \Delta E_c \Rightarrow E_{cf} = W + E_{ci}$$

$$= (-12) + \frac{1}{2} \times m\, v_1^2$$

$$= (-12) + \frac{1}{2} \times 1 \times 6^2$$

$$= -12 + 18$$

$$= 6\ J \qquad \Rightarrow \frac{1}{2} \overset{1}{m} v^2 = 6$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{12}\ m/s$$

d) Pontos de equilíbrio:

$$U(x) = x^4 - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dx} = 4x^3 - 2x$$

equil. $\Rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow (2x^2 - 1)\, 2x = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \ \vee\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Estabilidade:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_0 = -2 \quad \text{instável}$$

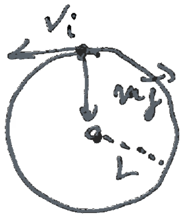
$$\frac{d^2U}{dx^2} = 12x^2 - 2 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = 6 - 2 = 4 \quad \text{estável}$$

Exame:

[1] 1000 N

[2] Mov. circular:

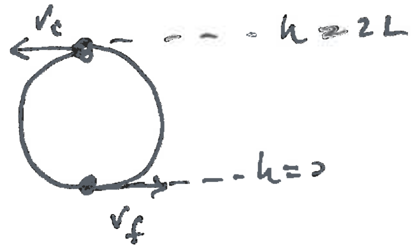


Tensão na corda é nula no topo

$$\Rightarrow \quad m\frac{v_i^2}{L} = m g$$

$$\Rightarrow \quad v_i = \sqrt{gL}$$

Cons. Em:



$$m g (2L) + \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \cancel{m} g (2L) + \frac{1}{2} \cancel{m} g L = \frac{1}{2} \cancel{m} v_f^2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} g L = \frac{1}{2} v_f^2$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{5 g L}$$

[3] <u>Aceleração azimutal</u>:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$= 2\dot{r}\dot{\theta} \quad , \quad \text{pois } \dot{\theta} = \text{constante} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

Mas

$$r = 0{,}4\,\theta \Rightarrow \dot{r} = 0{,}4\,\dot{\theta} = 0{,}4 \times 3$$

$$= 1{,}2 \ \text{m/s}$$

Logo

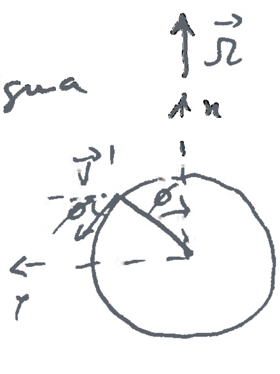
$$a_\theta = 2 \times 1{,}2 \times 3$$

$$= 7{,}20 \ \text{m/s}^2$$

[4] <u>Aceleração de Coriolis</u>:

$$\vec{a}_{cor} = -2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}\,'$$

no instante representado na figura



$$\begin{cases} \vec{v}\,' = |\vec{v}\,'|\,(-\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}) \\ \vec{\Omega} = \Omega\,\hat{\imath} \end{cases}$$

Logo

$$a_{cor} = 2 \, |\vec{\Omega} \times \vec{v}'|$$

$$= 2 \, \Omega \, v' \cos\phi$$

$$= 2 \, \Omega \, R\dot{\phi} \cos\phi$$

A direcção é ortogonal a $\vec{\Omega}$ e $\vec{v}'$, logo é a direcção dos zz.

$\boxed{5}$ $\omega = \sqrt{5k}$