Dinâmica de um sistema de partículas

Cap. 6: Dinâmica de um sistema de partículas.

Centro de massa.
Momento linear.
Momento angular.
Energia.
Colisões elásticas: energética e cinemática.
Colisões inelásticas.

Bibliografia:

- Cap. 3 Taylor; Cap. 9 Thornton

Dinâmica de um sistema de partículas

Mecânica do ponto material – consideramos que os corpos se podem aproximar a uma partícula.

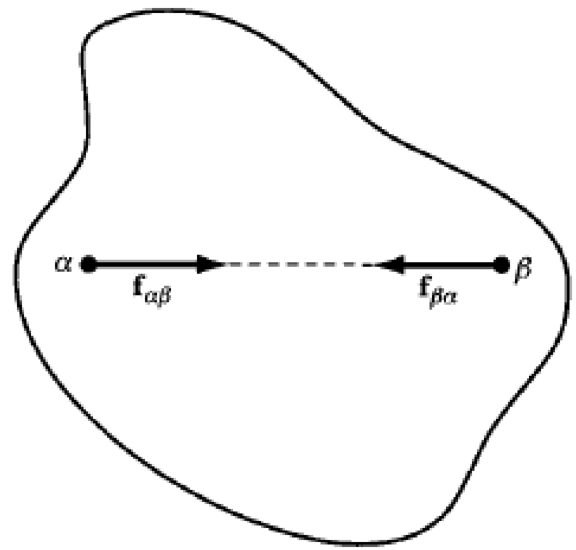
Nos próximos dois capítulos vamos alargar os conceitos de modo a incluir:

- Sistemas de muitas partículas: as n partículas podem ser por exemplo bolas de bilhar, as moléculas de um gás,...
- Sólidos, que designamos por corpo rígido, em que temos de considerar a sua orientação no espaço, isto é, além do movimento de translação temos movimento de rotação. Exemplos: o arremesso de um tijolo, uma bola a rolar num plano inclinado,...

Dinâmica de um sistema de partículas

terceira lei de Newton:

para uma par de partículas as forças exercidas uma na outra são iguais em intensidade e opostas em direção.



$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$$

Conservação do momento linear

Num sistema isolado (sem forças externas), o momento linear total $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ é constante no tempo.

<u>2 partículas</u>:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{const}$$

Impulso da força

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt}dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

Nota: Se uma componente da força é nula então a componente respectiva do momento linear é constante

Conservação do momento angular

O momento angular de uma partícula conserva-se se o momento das forças que sobre ela actuam é nulo

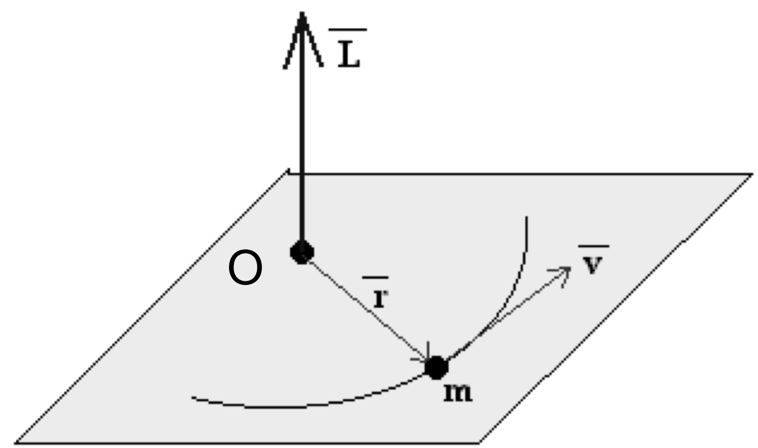
momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$

momento da força: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Momento angular de uma partícula

O momento angular de uma partícula em relação a um ponto O é definido como o momento do vector momento linear

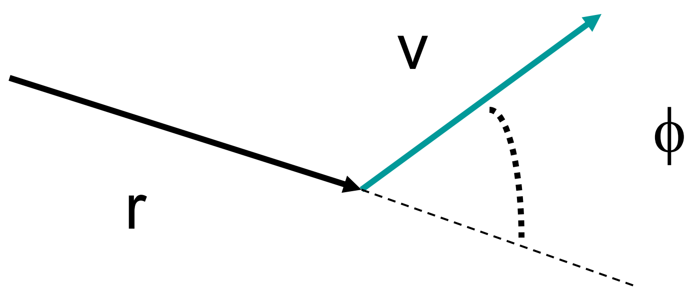
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$



unidades SI: kgm^2s^{-1}

Módulo do momento angular

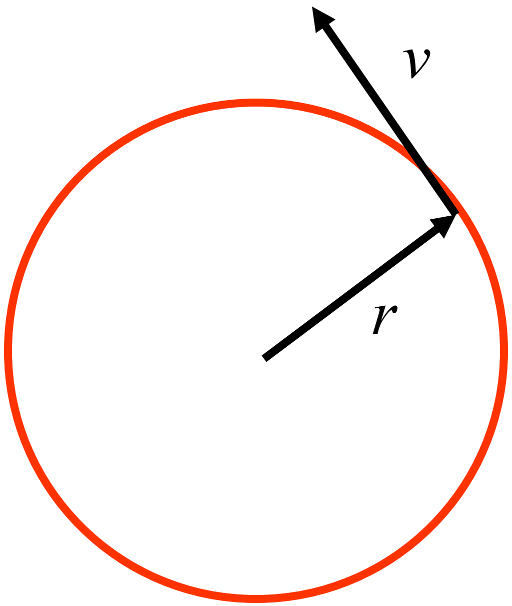
Módulo: $\left|\vec{L}\right| = mvrsen\phi$



Exemplo: movimento circular

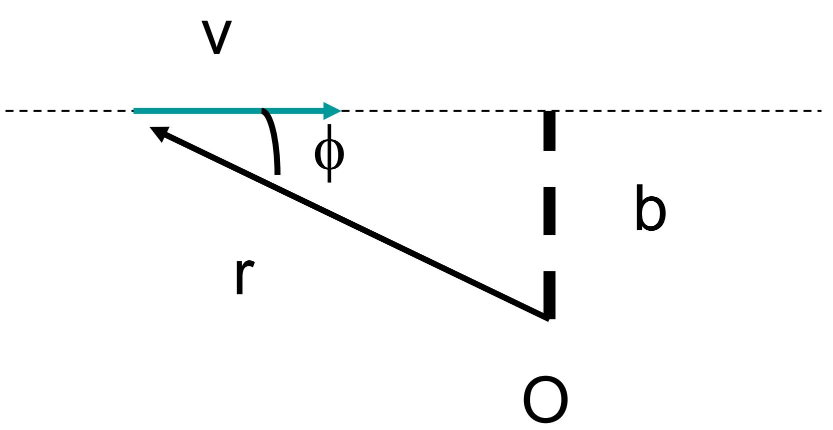
Módulo:

$$L = m v r = m \omega r^2$$



L perpendicular ao plano definido por ***r*** e ***v.***

Exemplo: mov. rectilíneo



b = Distância entre O e a recta

Variação do Momento Angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}_{\vec{v}\times\vec{p}=\vec{0}} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Variação do Momento Angular

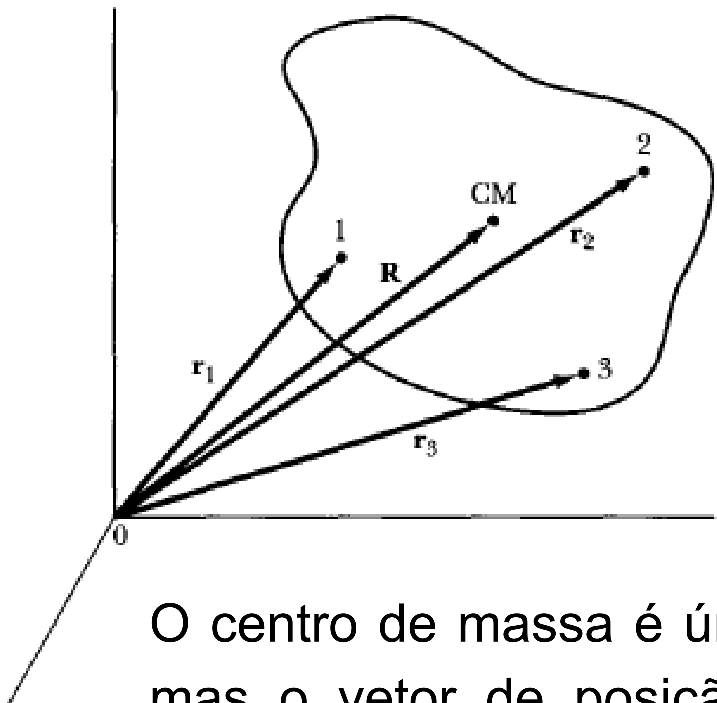
O momento da força resultante aplicada a uma partícula é igual à variação do momento angular com o tempo

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

<u>corolário</u>:

$$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = const$$

Centro de massa



massa total

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

centro de massa

$$\vec{r}_{CM} = \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

r_i vetor de posição de cada partícula

n partículas cada uma com massa m_i

O centro de massa é único, mas o vetor de posição R depende do sistema de coordenadas

Centro de massa

distribuição contínua de massa

$$\vec{r}_{CM} = \vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Problemas:

1) calcule o centro de massa de um cubo de lado a, considerando um sistema de eixos com origem num dos vértices do cubo.

2) calcule o centro de massa de uma semiesfera de raio a R=(0,0,3a/8)

Momento linear de um sistema

A força que atua numa partícula do sistema é em geral composta por uma força externa F_{ext} e a força resultante das interações com as restantes *n-1* partículas

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

Pela segunda lei de Newton

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_i \vec{r}_i\right) = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

Somando esta expressão para todas as partículas

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

Momento linear de um sistema

Aceleração do centro de massa

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r}_i = M\ddot{\vec{R}}$$

soma das forças externas

$$\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

O segundo termo do lado direito é nulo. Por exemplo, para 3 partículas

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} &= \sum_{j\neq 1}\left(\vec{f}_{1j}\right) + \sum_{j\neq 2}\left(\vec{f}_{2j}\right) + \sum_{j\neq 3}\left(\vec{f}_{3j}\right)\\ &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32}\\ &= 0\end{aligned}$$

Momento linear de um sistema

Conclusão:

O centro de massa do sistema move-se como se fosse uma partícula de massa M, sob a ação da força externa total.

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}$$

O momento linear do sistema é a soma dos momentos individuais de cada partícula

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}}$$

Momento linear de um sistema

O momento linear do sistema é igual ao de uma partícula de massa M na posição do centro de massa, e movendo-se da maneira como este se move.

Se não estiverem forças externas aplicadas no sistema o momento total é constante. A derivada em ordem ao tempo do momento total é nula, pelo que o momento total se conserva.

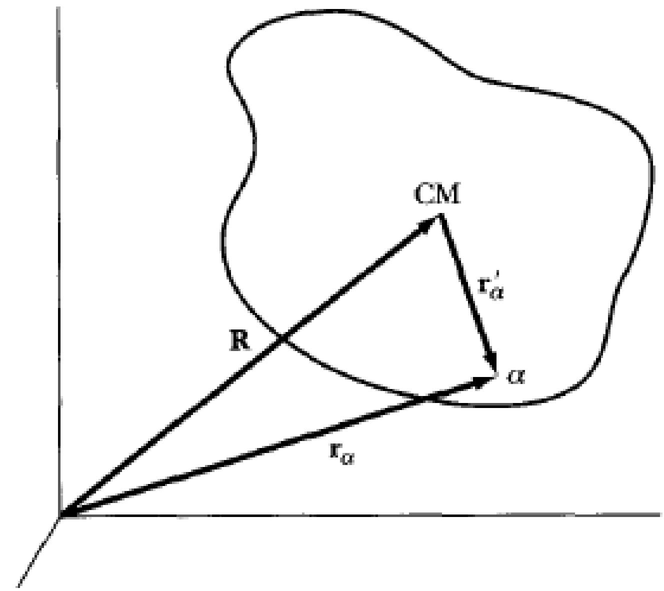
Momento angular total

vetor posição da partícula i:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{\,'}$$

momento angular da partícula i:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



momento angular total:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i^{\,'}\right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,'}\right)$$

$$= \sum_i m_i \left[\left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}\right) + \left(\vec{r}_i^{\,'} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,'}\right) + \left(\vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,'}\right) + \left(\vec{r}_i^{\,'} \times \dot{\vec{R}}\right)\right]$$

Momento angular total

Os dois últimos termos são nulos

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,'} \times \dot{\vec{R}} = \left[\sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}\right)\right] \times \dot{\vec{R}} = \left[\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{R}\right] \times \dot{\vec{R}}$$

$$= \left[M\vec{R} - M\vec{R}\right] \times \dot{\vec{R}} = 0$$

Pelo que o momento angular total é dado por

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,'} \times \dot{\vec{r}}_i^{\,'} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,'}$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i^{\,'} \times \vec{p}_i^{\,'}$$

Momento angular total

momento angular total

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i^{\,'} \times \vec{p}_i^{\,'}$$

O momento angular total é a soma do momento angular do centro de massa em relação à origem, mais a soma dos momentos angulares em relação à posição do centro de massa.

derivada em ordem ao tempo do momento angular total:

$$\dot{\vec{L}}_i = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right)$$

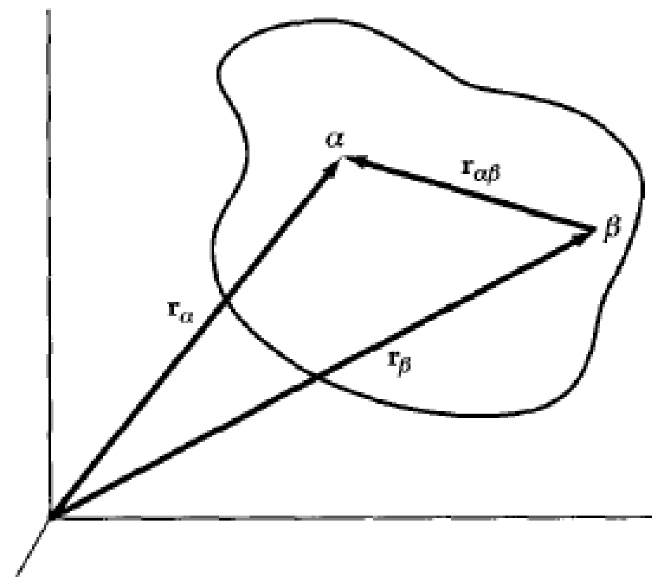
$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{L}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

Momento angular total

Problema: mostrar que o ultimo termo é nulo. Sugestão: Considere pares da forma de

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}$$

e mostre que eles são nulos



Momento angular total

derivada em ordem ao tempo do momento angular total:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

soma dos torques externos aplicados no sistema

$\Rightarrow$ Se o momento das forças externas for nulo o momento angular total conserva-se.

Energia cinética

A energia cinética total do sistema é a soma da energia cinética de cada partícula

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$
$$= \tfrac{1}{2} MV^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v'^2_i$$

A energia cinética total é igual à energia cinética do centro de massa mais a soma das energias cinéticas das partículas referidas à posição do CM

A energia mecânica total é constante se as forças externas e internas a atuar no sistema forem conservativas.

Energia

No caso de sistemas conservativos: E=T+U=const.

Problema: Um projétil de massa M explode em voo em três fragmentos. Um de massa $m_1=M/2$ continua a mover-se na direção original do projétil, o segundo de massa $m_2=M/6$ move-se na direção contrária, e o terceiro $m_3=M/3$ fica em repouso. A energia libertada na explosão é cinco vezes a energia cinética do projétil no momento da explosão. Calcule as velocidades de cada fragmento.

Colisões

Colisões entre duas partículas

⇨ aplicação da conservação de energia e momento.

As colisões podem ser elásticas (Q=0) ou inelásticas (Q<>0)

$$T_1^i + T_2^i + Q = T_1^f + T_2^f$$

colisões elásticas:

conservação da energia cinética e do momento

$$T_1^i + T_2^i = T_1^f + T_2^f$$

$$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$$

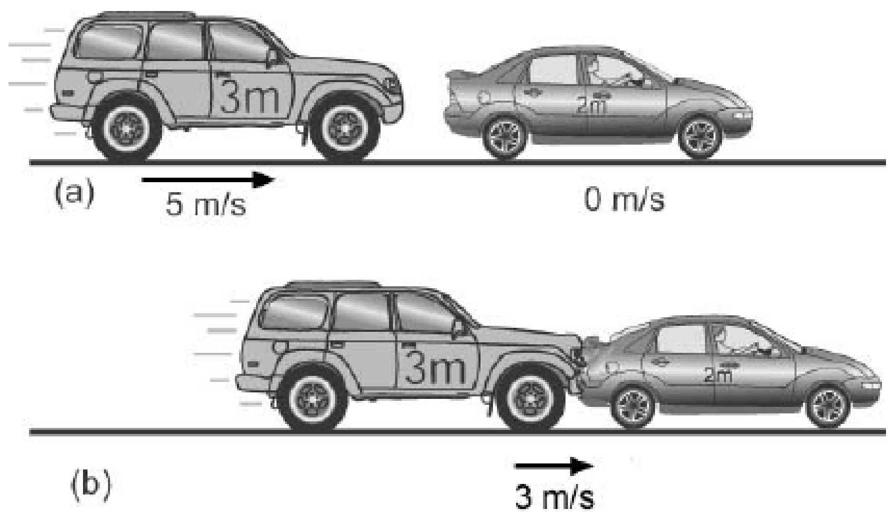
Colisões

colisões inelásticas:

há energia dissipada ou libertada na colisão.

$$T_1^i + T_2^i + Q = T_1^f + T_2^f$$

$$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$$



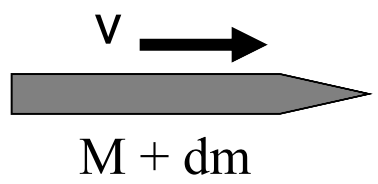
exercício (sistema de massa variável)

Qual a aceleração inicial de um foguete cuja massa inicial é de $3x10^6$ Kg e a massa final é 10% da inicial, após ter expelido gases de combustão à taxa de $1,5x10^4$Kg/s à velocidade de 2600m/s ?

Qual a velocidade do foguete após expulsão dos gases?

exercício (sistema de massa variável)

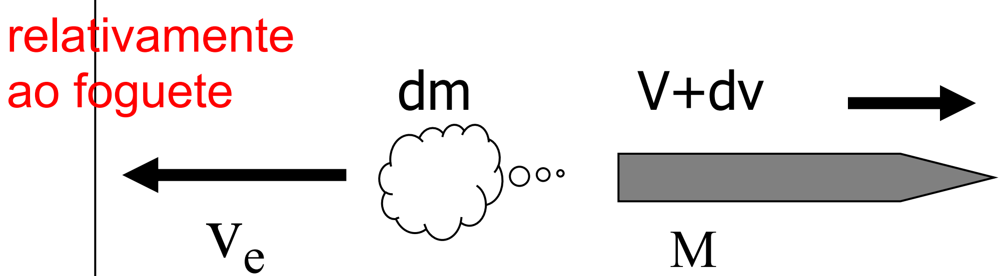
instante *t*:



Momento linear do sistema

$$(M + dm)v$$

instante *t+dt* :



Momento linear do sistema

$$M(v+dv)+dm(v-v_e)$$

exercício (sistema de massa variável)

Pela conservação do momento linear:

$$(M + dm)v = M(v + dv) + dm(v - v_e)$$

$$\Rightarrow \quad M dv = dm \cdot v_e$$

$$\Rightarrow \quad dv = v_e \frac{dm}{M} > 0$$

exercício (sistema de massa variável)

Mas dm = - dM,

$$Mdv = -v_e dM \quad \Rightarrow \quad M\frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dM}{dt}$$

Força de reacção:

força que os gases expelidos exercem sobre o foguete

$$F = M\frac{dv}{dt} = v_e \left| \frac{dM}{dt} \right|$$

exercício (sistema de massa variável)

Substituíndo os valores:

Força de reacção:

$$F_R = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = 2600 \times 1{,}5 \times 10^4 = 3{,}9 \times 10^7\, N$$

Aceleração inicial:

$F_R - P = ma$

==> $a = F_R - g$ = 13-9,8 = 3,2 m s^{-2}

exercício (sistema de massa variável)

determinação da velocidade do foguete:

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{M} dM$$

$$v_f - v_i = v_e \ln \frac{M_i}{M_f}$$

M_i e M_f :
massa inicial e final do foguete
mais combustível

exercício (sistema de massa variável)

Substituíndo os valores:

$$v_f = v_i + v_e \ln \frac{M_i}{M_f}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 2600 \times \ln 10$$

$$\Rightarrow \quad v_f = 5990 m/s$$