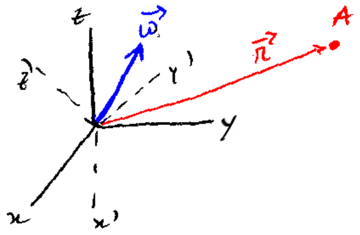
Relação entre as velocidades de uma partícula A medidas em cada referencial medidas por dois observadores



- xyz fixo
- $x'y'z'$ a rodar com vel. ang. $\vec{\omega}$
- Dois observadores
  - $\underline{O}$ ligado a xyz (parado em)
  - $\underline{\underline{O'}}$ " " $x'y'z'$

vetor posição relat. a xyz

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

vetor posição relat. a $x'y'z'$

$$\vec{r}' = \vec{r} = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'$$

Velocidade medida por O:

$$\vec{v}\Big|_O = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_O = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Velocidade de $\underline{A}$ medida por O':

$$\vec{v}\Big|_{O'} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{O'} = \frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$$

Velocidade no ref. $x'y'z'$ medida por O

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_O = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$$

$$+ x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Mas $\hat{i}'$, $\hat{j}'$, $\hat{k}'$ tem mov. circ. com veloc. ang. $\vec{\omega}$!

Logo

$$\left.\frac{d\hat{i}'}{dt}\right|_O = \vec{\omega} \times \hat{i}'$$

$$\left.\frac{d\hat{j}'}{dt}\right|_O = \vec{\omega} \times \hat{j}'$$

$$\left.\frac{d\hat{k}'}{dt}\right|_O = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

Então

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_O} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{O'} + \vec{\omega} \times x'\hat{i}' + \vec{\omega} \times y'\hat{j}' + \vec{\omega} \times z'\hat{k}'$$

$$= \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{O'} + \vec{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}')$$

$$\boxed{= \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Isto é, $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$

3) Relação entre as acelerações medidas por O_k e O'_k :

aceleração da part. A, relat. a xyz, medida por O :

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$= \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_O$$

aceleração da partícula A, relat. a $x'y'z'$, medida por O' :

$$\vec{a}\,' = \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_{O'} = \frac{dv'_x}{dt}\hat{\imath}\,' + \frac{dv'_y}{dt}\hat{\jmath}\,' + \frac{dv'_z}{dt}\hat{k}\,'$$

Mas

$$\boxed{\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_O = \left.\frac{d}{dt}\right|_O (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_O + \vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_O + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_O \times \vec{r}}$$

Ora

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{O} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_{O} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

$$\Leftarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{O} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{O'} + \vec{\omega} \times$$

↳ operadores diferenciais!

e também $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$.

Logo

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \underbrace{2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{\text{acel. de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{aceler. centrípeta}} + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\text{acelen. Tangencial}}}$$

4) 2ª lei de Newton no r.T. não inercial:

Para $\underline{\underline{O}}$: $\vec{F} = m\vec{a}$

nota: 2ª lei é válida apenas para ref. inerciais

Em relação a O':

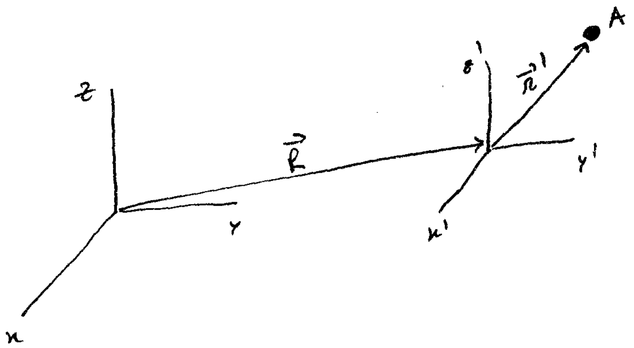
$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - m(\vec{\alpha}\times\vec{r}) - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}') - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

Caso particular: de $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const}}$:

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}') - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

B- Sistema de coord, em mov. generalizado:



$$\boxed{\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'}$$

Velocidade:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_O = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right|_O + \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

aceleração:

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_O = \left.\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|_O + \left.\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}\right|_{O'} + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}\,')}$$

2ª lei:

$$\boxed{\vec{a}\,' = \frac{\vec{F}}{m} - \ddot{\vec{R}} - \vec{\alpha}\times\vec{r}\,' - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' - \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}_{\text{acelr. centrífuga}}}$$

Nota:

- centrífuga

$$a_c < 1\% \times g \Rightarrow \begin{cases} g \simeq 9{,}83\ m/s^2 & \text{nos polos} \\ g \simeq 9{,}78\ m/s^2 & \text{no equador} \end{cases}$$

• <u>coriolis</u>:

$a_{coriolis} \sim a_{centrífuga} \Leftarrow v \sim 600 \text{ km/h}$

- leitos dos rios
- furacões
- correntes oceânicas
- trilhos da CP.