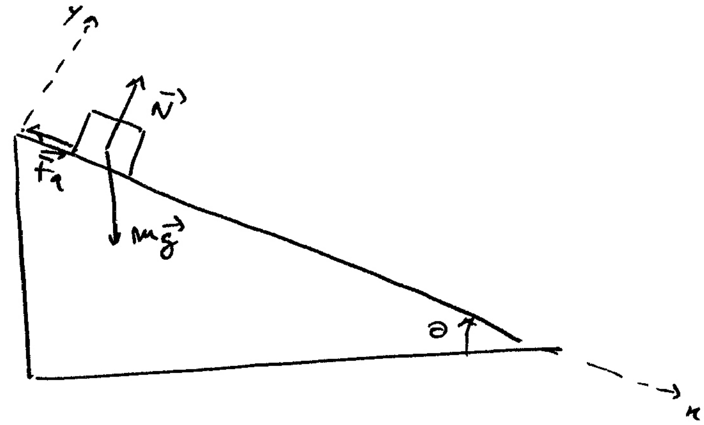
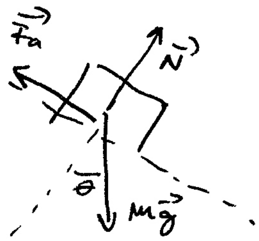
$\boxed{1}$





Solução :

a) Princ. fundamental da Dinâmica:

Força total: $\vec{N} + \vec{F}_g + \vec{F}_{at} = m\,\vec{a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_x + F_{gx} + F_{at,x} = m\,a_x \\ N_y + F_{gy} + F_{at,y} = m\,a_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + mg\sin\theta - F_a = m\,a \\ N - mg\cos\theta - 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta - \mu\,mg\cos\theta = m\,a \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad a = \ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

b) Velocidade:

cond. iniciais:

$v(t=0) = 0$

$x(t=0) = 0$

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = a\,dt$$

1º método: Integração indefinida:

$$\int dv = \int \underbrace{a}_{a = const}\, dt \Rightarrow v = at + c_1$$

Det. de c_1:

$v(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

nota:
As constantes de integração são det. pelas cond. iniciais.

Logo:

$$v = at$$

2º método: integral definido:

nota:
O Integral definido automatica/ incorpora as cond. iniciais.

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = \int_{t_i}^{t_f} a\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_f} dv = \int_0^{t_f} a\,dt$$

$$\Rightarrow v = a\,t_f$$

3º método: outra notação:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} \Rightarrow d\dot{x} = \ddot{x}\, dt \Rightarrow \int_0^v d\dot{x} = \int_0^t \ddot{x}\, dt$$

$$\Rightarrow v = \ddot{x}\, t$$

$\ddot{x}$ = const

Velocidade em função da distância:

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow \frac{dv}{dx} v = a$$

$$\Rightarrow \int v\, dv = \int a\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = ax + C_2$$

a const

Det. de C_2:

$$v(x=0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

Logo:

$$\frac{v^2}{2} = ax \Rightarrow v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\,x}$$

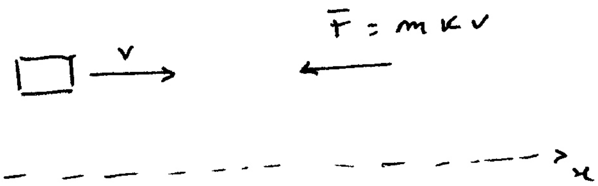
c) **Posição em função do tempo:**

$$v = \frac{dx}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\, t$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\, t'\, dt'$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\, t^2$$

$\boxed{2}$



Solução:

Velocidade em função do tempo:

cond. iniciais:

$v(t=0) = v_0$

$x(t=0) = 0$

$$ma = \cancel{m}\frac{dv}{dt} = -k\cancel{m}v$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -k \int dt$$

$$\Rightarrow \ln v = -kt + c_1$$

Determinação de c_1:

$$v(t=0) = v_0 \Rightarrow \ln v_0 = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = \ln v_0$$

Logo

$$\ln v = -kt + \ln v_0 \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$$

Posição em função do tempo:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \Rightarrow \int_0^{x_f} dx = v_0 \int_0^{t_f} e^{-kt} dt$$

$$\Rightarrow x_f = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \Big|_0^{t_f}$$

$$\Rightarrow x_f = -\frac{v_0}{k} \left(e^{-kt_f} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0}{k} \left(1 - e^{-kt} \right)$$

Velocidade em função da posição:

nota: substituir!

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Mas

$$\frac{dv}{dt} = -k v_0 e^{-kt} = -kv$$

Logo

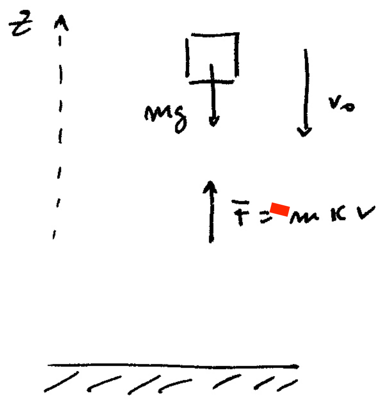
$$-\kappa \cancel{v} = \frac{dv}{dx}\cancel{v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\kappa$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv' = -\kappa \int_0^x dx'$$

$$\Rightarrow v - v_0 = -\kappa x$$

$$\Rightarrow v = v_0 - \kappa x \;/\!/$$

$\boxed{3}$



<u>cond. iniciais</u>:

$v(t=0) = v_0 < 0\,!$

$z(t=0) = h$

<u>Solução</u>:

Direcção zz: $\quad m\, a = -mg - mKv \qquad (v<0\,!)$

$$\Rightarrow \cancel{m}\frac{dv}{dt} = -\cancel{m}g - \cancel{m}Kv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{g+kv} = -dt \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{g+kv'} = -\int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k} \ln(g+kv') \Big|_{v_0}^{v} = -t' \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k} \ln \frac{g+kv}{g+kv_0} = -t$$

$$\Rightarrow \quad g+kv = (g+kv_0)\, e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \quad v = \underbrace{-\frac{g}{k}}_{\substack{\text{velocidade} \\ \text{limite!}}} + \frac{1}{k}(g+kv_0)\, e^{-kt}$$