Nota: não é permitida a consulta de quaisquer documentos nem a utilização de máquina de calcular ou de telemóvel durante o exame. <u>As respostas de cada uma das partes são para serem escritas em folhas separadas.</u> Na última página encontra-se um Formulário. O teste tem uma duração máxima de 1h30.

Exercício 1 *(60%)***:** Dois discos iguais de massa m cada e raio r encontram-se ligados a um veio horizontal AB de massa desprezável que roda com velocidade angular ω_1 constante no sentido horário e que se encontra apoiado no veio vertical CD, também ele de massa desprezável, que roda com velocidade angular ω_2 constante no sentido anti-horário (ver Figura 1). Neste contexto:

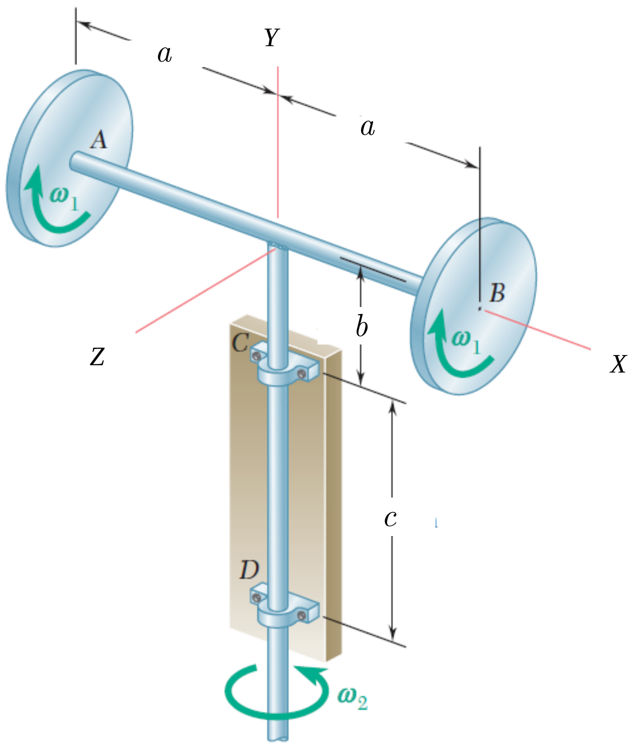


Figura 1: Sistema mecânico do Exercício 1.

(a) [10%] Classifique os tipos de movimento que apresentam quer a barra vertical quer a barra horizontal com os discos.

(b) [30%] Determine o momento angular $\mathbf{H}_G$ do sistema em torno do seu centro de massa.

(c) [30%] Determine a taxa de variação instantânea do momento angular $\mathbf{H}_G$ do sistema em torno do seu centro de massa no referencial inercial ($OXYZ$).

(d) [30%] Determine as reacções nos apoios C e D (considere que apenas o apoio D pode assegurar forças segundo a direcção vertical).

Exercício 2 (*40%*)**:** Uma barra delgada e uniforme de massa m encontra-se articulada em relação a um eixo horizontal que passa no ponto O, estando ligada a uma mola linear de rigidez k e a um amortecedor com amortecimento viscoso c, conforme se ilustra na Figura 2. Nesse contexto:

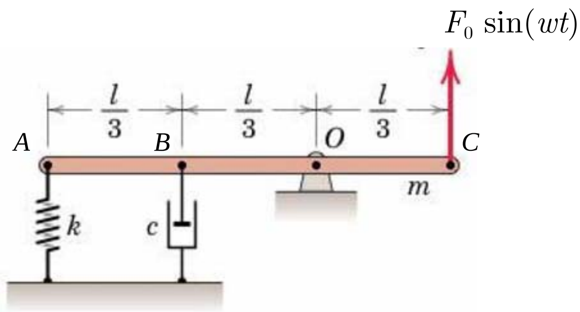


Figura 2: Sistema mecânico do Exercício 2.

(a) [10%] Classifique o sistema vibratório.

(b) [10%] Determine a inércia I_O da barra em relação ao eixo que passa em O.

(c) [50%] Obtenha a equação diferencial de movimento do sistema para pequenas oscilações (equação diferencial linearizada) e determine a frequência natural de vibração do sistema (w_n).

(d) [15%] Obtenha o valor do coeficiente de amortecimento crítico c_c.

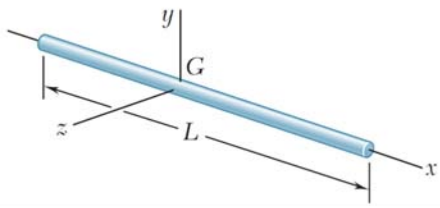
(e) [15%] No caso de $F_0 = 0$ e $\zeta = 0{,}5$, obtenha a solução da equação diferencial de movimento, isto é, o ângulo que a barra faz com a horizontal $\theta(t)$, sabendo que a barra é libertada no instante inicial $t = 0$ a partir do estado de repouso e de um ângulo inicial θ_0.

FORMULÁRIO

Momentos de inércia:

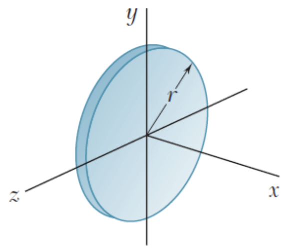
Barra delgada e uniforme

$$(I_\mathrm{G})_\mathrm{xx} = 0;\ \ (I_\mathrm{G})_\mathrm{yy} = (I_\mathrm{G})_\mathrm{zz} = m\ L^2/12$$



Disco fino e uniforme

$$(I_\mathrm{G})_\mathrm{x\,x} = m\ r^2/2;\ \ (I_\mathrm{G})_\mathrm{yy} = (I_\mathrm{G})_\mathrm{zz} = m\ r^2/4$$



Teorema de Steiner:

$$I_\mathrm{O} = I_\mathrm{G} + m\ \overline{OG}^{\,2}$$

Respostas homogéneas de sistemas vibratórios (para a variável x):

$\zeta = 0$: $\quad x = C \sin(\omega_n t + \psi)$

$\zeta < 1$: $\quad x = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)$, com $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\zeta = 1$: $\quad x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t}$

$\zeta > 1$:

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= A_1 e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + A_2 e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \end{aligned}$$

Boa Sorte