
Nome: CORRECÇÃO DO TESTE 06/2014

N.º Mecanográfico:

Nota: não é permitida a consulta de quaisquer documentos nem a utilização de máquina de calcular ou de telemóvel durante o exame. As respostas são para serem escritas no enunciado. Na última página encontra-se um Formulário. Não tirar o agrafo das folhas do enunciado! O teste tem uma duração de 2h30.

Exercício 1 *(12 valores)*: Uma placa rectangular fina e uniforme com massa m e dimensões $h \times 2h$ faz um ângulo θ com a vertical e encontra-se ligada a um veio vertical de massa desprezável que roda com velocidade angular ω constante no sentido anti-horário e se encontra apoiado nos pontos A e B (ver Figura 1). Neste contexto:

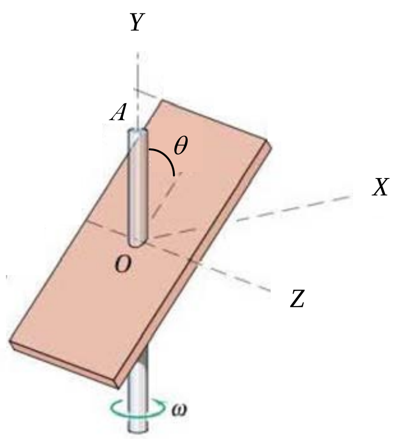


Figura 1: Sistema mecânico do Exercício 1.

(a) [10%] Classifique o tipo de movimento que apresenta a placa rectangular fina;

R:

MOVIMENTO PLANO DE ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

(b) [30%] Determine o ângulo ϕ formado pelo veio vertical e o momento angular $\mathbf{H}_G$ da placa em torno do seu centro de massa;

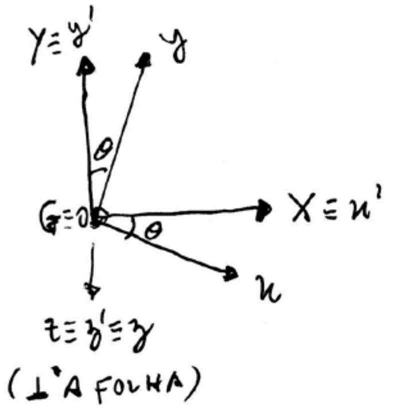
R:

1.º DEFINIÇÃO DE REFERENCIAIS INERCIAL E LOCAIS

INERCIAL OXYZ (NÃO RODA)

LOCAL NÃO-PRINCIPAL $Gx'y'z'$ (RODA)

LOCAL PRINCIPAL $Gxyz$ (RODA)



2.º DEFINIÇÃO LOCAL DE $\vec{H}_G$ (EM $Gxyz$)

$$\left|\begin{array}{l} \bar{I}_{xy} = \bar{I}_{xz} = \bar{I}_{yz} = 0 \\ \bar{I}_{xx} = \dfrac{m}{12}(h^2+4h^2) = \dfrac{5}{12} m h^2 \\ \bar{I}_{yy} = mh^2/12 \\ \bar{I}_{zz} = \dfrac{m4h^2}{12} = \dfrac{mh^2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow [I_G] = \begin{bmatrix} \frac{5mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mh^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = -\omega \sin\theta \,\hat{i} + \omega \cos\theta \,\hat{j} \quad (\text{EM } Gxyz)$$

$$\Rightarrow \vec{H}_G = [I_G]\,\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{5mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mh^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{mh^2\omega}{12}\left(-5\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right) \,//$$

3.º DETERMINAÇÃO DO ÂNGULO ϕ

$$\cos\phi = \frac{\vec{H}_G \cdot \vec{\omega}}{\|\vec{H}_G\|\,\|\vec{\omega}\|} = \frac{H_{Gx}\omega_x + H_{Gy}\omega_y + H_{Gz}\omega_z}{\sqrt{H_{Gx}^2 + H_{Gy}^2 + H_{Gz}^2}\,\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}} = \frac{5\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sqrt{25\sin^2\theta + \cos^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{4\sin^2\theta + 1}{\sqrt{24\sin^2\theta + 1}}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ SENDO } \theta \in \left]0, \pi/2\right[.$$

(c) [30%] Determine a taxa de variação instantânea do momento angular **H**G da placa em torno do seu centro de massa no referencial inercial (*OXYZ*);

R:

DETERMINAÇÃO DE $\dot{\vec{H}}_G$ EM $OXYZ$

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{OXYZ} = \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{H}_G\right)_{Gxyz}$$

SENDO

$$\begin{cases} \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right)_{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\ \text{ctes.}} = \vec{0} \\ \vec{\Omega} \times \left(\vec{H}_G\right)_{Gxyz} = \begin{Bmatrix} -\omega \sin\theta \\ \omega \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dfrac{mh^2}{12}\omega 5 \sin\theta \\ \dfrac{mh^2}{12}\omega \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{mh^2\omega^2}{3}\sin\theta\cos\theta \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \frac{mh^2\omega^2}{3}\sin\theta\cos\theta\,\hat{K} \quad (\text{EM } OXYZ)$$

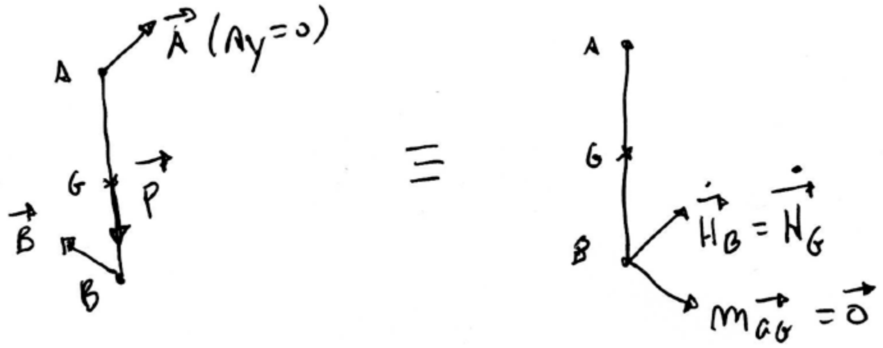
(d) [30%] Determine as reacções nos apoios A e B (considere que apenas o apoio B pode assegurar forças segundo a direcção vertical).

R:

DETERMINAÇÃO DE $\vec{A}$ E $\vec{B}$

$$\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = \dot{\vec{H}}_G + \underbrace{\vec{BG} \times (m\,\vec{a}_G)}_{=\vec{0}} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = \dot{\vec{H}}_G$$

$$\therefore \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G = \vec{0} \\ \sum (\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_B = \dot{\vec{H}}_G \end{cases}$$



(EXTERNAS) (EFECTIVAS)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = \vec{0} \\ \vec{BA} \times \vec{A} = \dot{\vec{H}}_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{Bmatrix} A_x \\ 0 \\ A_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ \overline{BA} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} A_x \\ 0 \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{mh^2\omega^2}{3} \sin\theta\cos\theta \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{mh^2\omega^2}{3\,\overline{BA}} \sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \begin{Bmatrix} \dfrac{mh^2\omega^2}{3\,\overline{BA}} \sin\theta\cos\theta \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \; //$$

Exercício 2 (*8 valores*)**:** Uma barra delgada e uniforme de massa m encontra-se articulada em relação a um eixo horizontal que passa no ponto O, estando ligada no ponto A a uma mola linear de rigidez k e no ponto B a um amortecedor com amortecimento viscoso c, conforme se ilustra na Figura 2. Nesse contexto:

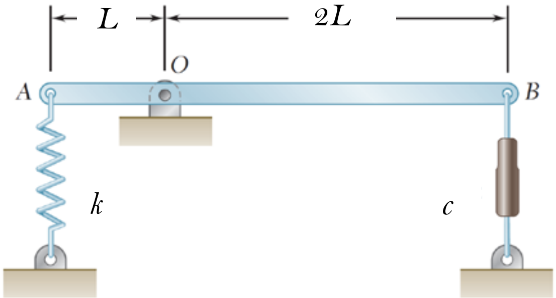


Figura 2: Sistema vibratório do Exercício 2.

(a) [10%] Em termos dos valores dos coeficientes k e c, o que se quer dizer com o facto de a mola ser linear e o amortecimento ser viscoso?;

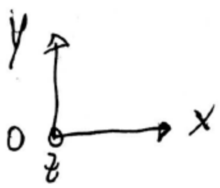
R:

MOLA LINEAR ⇒ K É CONSTANTE ∈ $\mathbb{R}^+$.

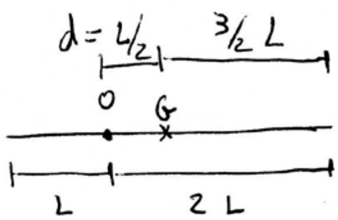
AMORTECIMENTO VISCOSO ⇒ C É CONSTANTE ∈ $\mathbb{R}^+$.

(b) [60%] Obtenha a equação diferencial de movimento do sistema para pequenas oscilações (equação diferencial linearizada) e determine a frequência natural de vibração do sistema (w_n);

R:

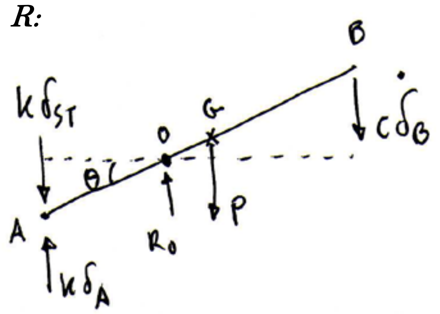


$$\Sigma (M_{ext_z})_O = I_O \ddot{\theta}$$



SENDO $I_O = I_G + md^2 = \frac{m(3L)^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = mL^2$

Cont. R:



$\theta > 0$

$\dot{\theta} > 0$

$$\Sigma (M_{ext\,z})_O = \left(k\delta_{ST} L\cos\theta - P\frac{L}{2}\cos\theta\right) - k\delta_A L\cos\theta - c\dot{\delta}_B 2L\cos\theta$$

$$= I_O\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\left(k\delta_{ST} L - \frac{PL}{2}\right)\cos\theta - k\delta_A L\cos\theta - c\dot{\delta}_B 2L\cos\theta = I_O\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} \delta_A = L\sin\theta \\ \delta_B = 2L\sin\theta \Rightarrow \dot{\delta}_B = \frac{d}{dt}(2L\sin\theta) = 2L\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(k\delta_{ST} L - \frac{PL}{2}\right)\cos\theta - kL^2\sin\theta\cos\theta - 4cL^2\dot{\theta}\cos^2\theta = I_O\ddot{\theta}$$

ATENDENDO A QUE $k\delta_{ST} L = \frac{PL}{2}$ (EQ. ESTÁTICO) E LINEARIZANDO A EQUAÇÃO: $\begin{cases}\sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1\end{cases}$, VEM:

$$\overset{0}{\cancel{\left(k\delta_{ST} L - \frac{PL}{2}\right)}}\,\overset{1}{\cancel{\cos\theta}} - kL^2\,\overset{\theta}{\cancel{\sin\theta}}\,\overset{1}{\cancel{\cos\theta}} - 4cL^2\dot{\theta}\,\overset{1}{\cancel{\cos^2\theta}} = I_O\ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$I_O\ddot{\theta} + 4cL^2\dot{\theta} + kL^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(mL^2)}_{I_O}\ddot{\theta} + \underbrace{(4cL^2)}_{(CR)ef.}\dot{\theta} + \underbrace{(kL^2)}_{kR\,ef}\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{(kR)ef}{I_O}} = \sqrt{\frac{kL^2}{mL^2}} \Rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \;//$$

(c) [30%] Sabendo que numericamente se tem que $k = m = c$, obtenha a solução da equação diferencial de movimento, isto é, o ângulo que a barra faz com a horizontal $\theta(t)$, sabendo que a barra é libertada no instante inicial $t = 0$ a partir do estado de repouso e de um ângulo inicial θ_0. No caso de não ter feito as alíneas anteriores considere a solução correspondente a $\zeta = 1$.

R:

$$k = m = c \Rightarrow w_n = \sqrt{\frac{(k_R)_{eq}}{I_O}} = \sqrt{\frac{kL^2}{mL^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$$

$$\xi = \frac{(c_R)_{ef}}{2\sqrt{I_O (k_R)_{ef}}} = \frac{4cL^2}{2\sqrt{mL^2\, kL^2}} = 2 \Rightarrow \text{SISTEMA SOBREAMORTECIDO}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A_1 e^{\left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n t} + A_2 e^{\left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n t}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = A_1 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n e^{\left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n t} + A_2 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n e^{\left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n t}$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(0) = A_1 + A_2 = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = A_1 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) W_n + A_2 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) w_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{\theta_0}{2}\left(\dfrac{\xi + \sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-1}}\right) \\ A_2 = \dfrac{\theta_0}{2}\left(\dfrac{-\xi + \sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-1}}\right) \end{cases} \xrightarrow[\text{SENDO } \begin{cases} \xi = 2 \\ \sqrt{\xi^2-1} = \sqrt{3} \\ w_n = 1 \end{cases}]{} \begin{cases} A_1 = \dfrac{\theta_0}{2}\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \\ A_2 = \theta_0 \left(\dfrac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

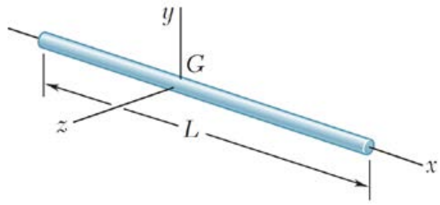
$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})\, e^{(-2+\sqrt{3})t} + (-2+\sqrt{3})\, e^{-(2+\sqrt{3})t}\right] \quad //$$

FORMULÁRIO

Momentos de inércia:

Barra delgada e uniforme

$(I_G)_{xx} = 0$; $(I_G)_{yy} = (I_G)_{zz} = m\,L^2/12$

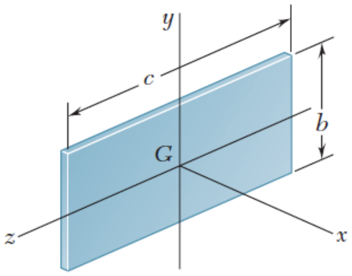


Placa rectangular fina e uniforme

$(I_G)_{xx} = m\,(b^2 + c^2)/12$

$(I_G)_{yy} = m\,c^2/12$

$(I_G)_{zz} = m\,b^2/12$



Teorema de Steiner:

$I = I_G + m\,d^2$

Respostas homogéneas de sistemas vibratórios (para a variável *x*):

$\zeta = 0$: $\quad x = C \sin(\omega_n t + \psi)$

$\zeta < 1$: $\quad x = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\zeta = 1$: $\quad x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t}$

$\zeta > 1$: $\quad x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$$= A_1 e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + A_2 e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

Boa Sorte