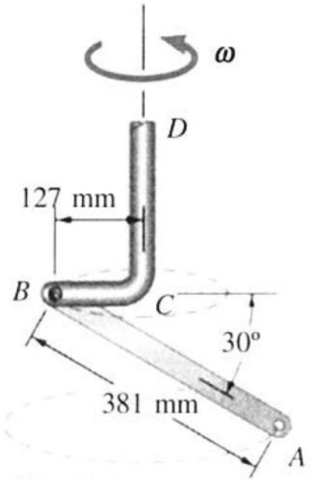
SEBENTA PRÁTICA DE MECÂNICA APLICADA
VOLUME II: CINÉTICA DO CORPO RÍGIDO

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt)
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Aveiro

2012 • versão 1.0

CAPÍTULO I: CINÉTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 1: A barra esbelta *AB* está articulada a um braço *BCD*, que roda com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ constante em torno da linha central do troço vertical *CD*. Determine a intensidade da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ associada ao equilíbrio dinâmico da barra *AB*.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 18.92 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO II-1: RESOLUÇÃO

DADOS: $\vec{\omega}$ CONSTANTE
MEDIDAS GEOMÉTRICAS

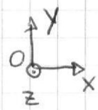
PEDIDO: $\|\vec{\omega}\|$ QUE GARANTE O EQUILÍBRIO DINÂMICO DA BARRA AB.

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO (GERAL)

i) DEFINIÇÃO DE REFERENCIAIS INERCIAL E LOCAIS
ii) DEFINIÇÃO LOCAL DE $\vec{H}_G = [I_G]\vec{\omega}$
iii) DEFINIÇÃO DE $\dot{\vec{H}}_G$ NO REFERENCIAL INERCIAL
iv) PASSAGEM DE $\dot{\vec{H}}_G$ PARA APOIO COM INCÓGNITAS, SE ADEQUADO.
v) CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE CORPO LIVRE E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

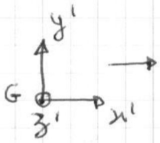
(i) DEFINIÇÃO DE REFERENCIAIS INERCIAL E LOCAIS

1) INERCIAL



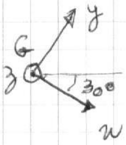
$\rightarrow (\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$; $OXYZ$

2) LOCAL NÃO-PRINCIPAL



$\rightarrow (\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$; $Gx'y'z'$

3) LOCAL PRINCIPAL



$\rightarrow (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$; $Gxyz$

O REFERENCIAL INERCIAL É O REFERENCIAL EXTERNO EM QUE SÃO FORMULADAS AS EQUAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON. O REFERENCIAL LOCAL NÃO-PRINCIPAL É PARALELO AO INERCIAL, MAS A SUA ORIGEM CORRESPONDE AO CENTRO DE MASSA DA BARRA AB. DEVIDO À BARRA AB SER BISSIMÉTRICA ENTÃO OS EIXOS PRINCIPAIS SÃO CONHECIDOS E DEFINE-SE O REFERENCIAL LOCAL PRINCIPAL $Gxyz$.

A VANTAGEM DE USAR ESTE ÚLTIMO É QUE A MATRIZ DE INÉRCIA DA BARRA AB É DIAGONAL EM $Gxyz$, AO CONTRÁRIO DO QUE OCORRE EM $Gx'y'z'$ E $GXYZ$, EM QUE A MATRIZ DE INÉRCIA PODE ATÉ VARIAR NO TEMPO DEVIDO À ROTAÇÃO DA MASSA EM RELAÇÃO AOS EIXOS. ENTÃO, A METODOLOGIA BASEIA-SE NO FACTO DE SE OBTER $\vec{H}_G = [I_G]\vec{\omega}$ EM $Gxyz$, ONDE $[I_G]$ É CONSTANTE E DIAGONAL, PASSANDO-SE DEPOIS, QUANDO ADEQUADO, PARA $Gx'y'z'$ E, POR FIM, PARA $OXYZ$.

REFIRA-SE QUE AS COMPONENTES DE UM VECTOR PODEM SER TRANSFORMADAS ENTRE ESTES SISTEMAS DO SEGUINTE MODO:

$$OXYZ \rightarrow \vec{v} = v_X \hat{I} + v_Y \hat{J} + v_Z \hat{K} = \begin{Bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{Bmatrix}$$

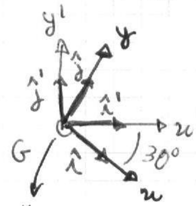
$$Gx'y'z' \rightarrow \vec{v} = v_{x'} \hat{i}' + v_{y'} \hat{j}' + v_{z'} \hat{k}' = \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix}$$

$$Gxyz \rightarrow \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

ENTÃO SENDO, NO PRIMEIRO CASO, A PASSAGEM DE $Gxyz \rightarrow Gx'y'z'$:

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \hat{i}'\cdot\hat{i} & \hat{i}'\cdot\hat{j} & \hat{i}'\cdot\hat{k} \\ \hat{j}'\cdot\hat{i} & \hat{j}'\cdot\hat{j} & \hat{j}'\cdot\hat{k} \\ \hat{k}'\cdot\hat{i} & \hat{k}'\cdot\hat{j} & \hat{k}'\cdot\hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{i}',\hat{i}) & \cos(\hat{i}',\hat{j}) & \cos(\hat{i}',\hat{k}) \\ \cos(\hat{j}',\hat{i}) & \cos(\hat{j}',\hat{j}) & \cos(\hat{j}',\hat{k}) \\ \cos(\hat{k}',\hat{i}) & \cos(\hat{k}',\hat{j}) & \cos(\hat{k}',\hat{k}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \cos(60^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(120^\circ) & \cos(30^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} z // z' \\ \hat{k} // \hat{k}' \end{cases}$$

$$\Rightarrow [M_1] = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) & 0 \\ -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ENTÃO, TEM-SE

$$\begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} = [M_1] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad E \quad \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = [M_1]^T \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix}$$

NO QUE CONCERNE À PASSAGEM DE $Gx'y'z' \rightarrow OXYZ$, COMO OS EIXOS CORRESPONDENTES SÃO PARALELOS, TEM-SE

$$[M_2] = \begin{bmatrix} \hat{I}\cdot\hat{i}' & \hat{I}\cdot\hat{j}' & \hat{I}\cdot\hat{k}' \\ \hat{J}\cdot\hat{i}' & \hat{J}\cdot\hat{j}' & \hat{J}\cdot\hat{k}' \\ \hat{K}\cdot\hat{i}' & \hat{K}\cdot\hat{j}' & \hat{K}\cdot\hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{I},\hat{i}') & \cos(\hat{I},\hat{j}') & \cos(\hat{I},\hat{k}') \\ \cos(\hat{J},\hat{i}') & \cos(\hat{J},\hat{j}') & \cos(\hat{J},\hat{k}') \\ \cos(\hat{K},\hat{i}') & \cos(\hat{K},\hat{j}') & \cos(\hat{K},\hat{k}') \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) & \cos(0^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

ASSIM, TEM-SE QUE

$$\begin{Bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} \quad \text{pois} \quad \begin{cases} \hat{I} = \hat{i}' \\ \hat{J} = \hat{j}' \\ \hat{K} = \hat{k}' \end{cases}$$

(ii) DEFINIÇÃO LOCAL DE $\vec{H}_G = [I_G]\vec{w}$

1) EM $Gxyz$ A MATRIZ DE INÉRCIA É DIAGONAL POIS xyz SÃO EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA $\Rightarrow \bar{I}_{xy} = \bar{I}_{xz} = \bar{I}_{yz} = 0$

DO FORMULÁRIO PARA BARRA ESBELTA (HOMOGÉNEA) DE MASSA m E COMPRIMENTO l $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{I}_{xx} = 0 \\ \bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{m}{12} l^2 \end{cases} , \text{PARA } [I_G] = \begin{bmatrix} \bar{I}_{xx} & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ & \bar{I}_{yy} & -\bar{I}_{yz} \\ \text{Sim.} & & \bar{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\therefore [I_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{EM } Gxyz)$$

2) $\vec{w} = w\hat{J}$ (EM $OXYZ$) $= w\hat{j}'$ (EM $Gx'y'z'$)

MAS É NECESSÁRIO OBTER $\vec{w}$ E $Gxyz$. ASSIM, TEM-SE

$$\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} = [M_1]^T \begin{Bmatrix} w_{x'} \\ w_{y'} \\ w_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w\sin(30^\circ) \\ w\cos(30^\circ) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = -w\sin(30^\circ)\,\hat{i} + w\cos(30^\circ)\,\hat{j} \quad (\text{EM } Gxyz)$$

3) DESTE MODO TEM-SE, EM Gxyz:

$$\vec{H}_G = [I_G]\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w\sin(30^\circ) \\ w\cos(30^\circ) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{m}{12} l^2 w\cos(30^\circ) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_G = \frac{ml^2}{12} w\cos 30^\circ\,\hat{j} \quad (\text{EM } Gxyz)}$$

iii) DEFINIÇÃO DE $\dot{\vec{H}}_G$ NO REFERENCIAL INERCIAL

ESTANDO O VECTOR $\vec{H}_G$ DEFINIDO NO REFERENCIAL Gxyz QUE RODA COM $\vec{\Omega} = \vec{w}$ E SENDO $\|\vec{H}_G\|$ CONSTANTE, TEM-SE DA CINEMÁTICA:

$$\dot{\vec{H}}_G\ (\text{EM } OXYZ) = (\dot{\vec{H}}_G)\ (\text{EM } Gxyz) + \vec{\Omega} \times \vec{H}_G \Longrightarrow$$

$$\dot{\vec{H}}_G = (\dot{\vec{H}}_G)_{OXYZ} = (\dot{\vec{H}}_G)_{Gxyz} + \vec{\Omega} \times (\vec{H}_G)_{Gxyz}$$

EM QUE

$$(\dot{\vec{H}}_G)_{Gxyz} = \frac{d}{dt}(\vec{H}_G)\Big|_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\ \text{CONSTANTES}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2}{12} w\cos 30^\circ\,\hat{j}\right)\Big|_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\ \text{CONSTANTES}} =$$

$$= \vec{0}$$

$$\vec{\Omega} \times (\vec{H}_G)_{Gxyz} = \begin{Bmatrix} -w\sin(30^\circ) \\ -w\cos(30^\circ) \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{ml^2}{12} w\cos(30^\circ) \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{ml^2}{12} w^2 \sin(30^\circ)\cos(30^\circ) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\vec{H}}_G = \vec{0} + \left(-\frac{ml^2}{12}\omega^2 \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ)\,\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\vec{H}}_G = -\frac{ml^2}{12}\omega^2 \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ)\,\hat{k} \quad (\text{em } Gxyz)$$

NOTA: A DERIVADA DE $\vec{H}_G$, ISTO É, $\overset{\circ}{\vec{H}}_G$ É CALCULADA NO REFERENCIAL INERCIAL $OXYZ$, EMBORA AS SUAS COMPONENTES ESTEJAM AINDA DEFINIDAS EM FUNÇÃO DO REFERENCIAL LOCAL $Gxyz$!!

NESTE CONTEXTO, PODE PASSAR-SE $\overset{\circ}{\vec{H}}_G$ PARA $OXYZ$ DO SEGUINTE MODO:

$$\begin{Bmatrix} \dot{H}_{GX} \\ \dot{H}_{GY} \\ \dot{H}_{GZ} \end{Bmatrix} = [M_2]\left[[M_1]\begin{Bmatrix} \dot{H}_{Gx} \\ \dot{H}_{Gy} \\ \dot{H}_{Gz} \end{Bmatrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & \operatorname{sen}(30^\circ) & 0 \\ -\operatorname{sen}(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{ml^2}{12}\omega^2\operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ) \end{Bmatrix}\right]$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{ml^2}{12}\omega^2\operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overset{\circ}{\vec{H}}_G = -\frac{ml^2}{12}\omega^2 \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ)\,\hat{K} \quad (\text{em } OXYZ)}$$

NOTA: O RESULTADO FOI O MESMO, POIS $\hat{k} \parallel \hat{k}' \parallel \hat{K}$ E $\overset{\circ}{\vec{H}}_G$ SÓ TINHA COMPONENTE EM $\hat{k}$.

(iv) PASSAGEM DE $\overset{\circ}{\vec{H}}_G$ PARA APOIO COM INCÓGNITAS, SE ADEQUADO

NESTE CASO A PASSAGEM DE $\overset{\circ}{\vec{H}}_G$ PARA O APOIO B É ADEQUADA POIS TEM-SE QUE NO APOIO B EXISTE O VECTOR $\vec{B}$ (FORÇA) INCÓGNITA. ENTÃO COM BASE NO TEOREMA DE KÖNIG PROCEDE-SE À PASSAGEM PARA O PONTO B. ASSIM, TEM-SE:

$$\overset{\circ}{\vec{H}}_B = \overset{\circ}{\vec{H}}_G + \vec{BG} \times m\vec{a}_G$$

ASSIM, RESTA APENAS DEFINIR O VECTOR $\vec{BG} \times m\vec{a}_G$!

ATENDA-SE AO FACTO DE QUE A DEFINIÇÃO DE $\vec{a}_G$ REQUER UMA ANÁLISE CINEMÁTICA!

ASSIM, QUANDO A BARRA AB RODA EM TORNO DO EIXO VERTICAL COM $\vec{w}$ CONSTANTE, QUAL É A ACELERAÇÃO DO SEU CENTRO DE MASSA?

UMA PRIMEIRA ANÁLISE PERMITE CONCLUIR QUE O CENTRO DE MASSA G NÃO SE ENCONTRA ALINHADO COM O EIXO DE ROTAÇÃO, PELO QUE ESTE DESCREVE UMA CIRCUNFERÊNCIA COM MOVIMENTO UNIFORME.

ASSIM, UM PONTO QUE DESCREVE UM MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME ESTÁ SUJEITO A UMA ACELERAÇÃO CENTRÍPETA $\Rightarrow$

$\vec{a}_G = \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{EG})$, EM QUE $\vec{EG}$ É O VECTOR QUE DEFINE A POSIÇÃO DE G EM RELAÇÃO A UM PONTO QUALQUER DO EIXO DE ROTAÇÃO.

ASSIM, SELECCIONANDO O PONTO $C \equiv E$, TEM-SE:

$$\begin{cases} \vec{w} = w\hat{j} \\ \vec{EG} = \vec{CG} = \left(\dfrac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\hat{I} - \dfrac{\overline{BA}}{2}\sin(30^\circ)\hat{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = w\hat{j} \times \left(w\hat{j} \times \left\{\left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\hat{I} - \frac{\overline{BA}}{2}\sin(30^\circ)\hat{j}\right\}\right) =$$

$$= w\hat{j} \times \left[w\left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\underbrace{(\hat{j}\times\hat{\imath})}_{-\hat{k}} - w\frac{\overline{BA}}{2}\sin(30^\circ)\underbrace{\hat{j}\times\hat{j}}_{\vec{0}}\right] =$$

$$= w^2\left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\underbrace{\hat{j}\times(-\hat{k})}_{-\hat{I}} = -w^2\left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\hat{I}$$

ASSIM, SENDO $\vec{a}_G = -w^2\left(\dfrac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\hat{I}$, TEM-SE

$$\vec{BG} \times m\vec{a}_G = \left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ)\hat{I} - \frac{\overline{BA}}{2}\sin(30^\circ)\hat{j}\right) \times \left\{-mw^2\left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\hat{I}\right\}$$

$$\begin{cases} \hat{I}\times\hat{I} = \vec{0} \\ \hat{I}\times\hat{j} = -\hat{k} \end{cases} \Rightarrow = -m w^2 \frac{\overline{BA}}{2}\sin(30^\circ)\left(\frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC}\right)\hat{k}$$

SENDO $\overline{BA} = l$ E $\overline{BC} = l/3$, VEM

$$\vec{BG} \times m\,\vec{a}_G = \left(-\frac{ml^2}{4} \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ)\,\omega^2 + \frac{ml^2}{6}\operatorname{sen}(30^\circ)\,\omega^2\right)\hat{k}$$

NOTA: NA PÁGINA ANTERIOR APRESENTOU-SE UM MODO GERAL DE OBTER $\vec{BG} \times m\vec{a}_G$. NO ENTANTO, NO PROBLEMA ACTUAL BASTARIA ATENDER QUE A ACELERAÇÃO CENTRÍPETA TERIA O SENTIDO CONTRÁRIO DE $\hat{I}$ NO INSTANTE CONSIDERADO, PELO QUE RESULTA DE IMEDIATO QUE

$$\vec{a}_G = -\omega^2 d_G\,\hat{I}$$

EM QUE d_G É A DISTÂNCIA DO EIXO VERTICAL DE ROTAÇÃO A G, OU SEJA,

$$d_G = \frac{\overline{BA}}{2}\cos(30^\circ) - \overline{BC} = \frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_G = -\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - l/3\right)\hat{I}$$

ASSIM,

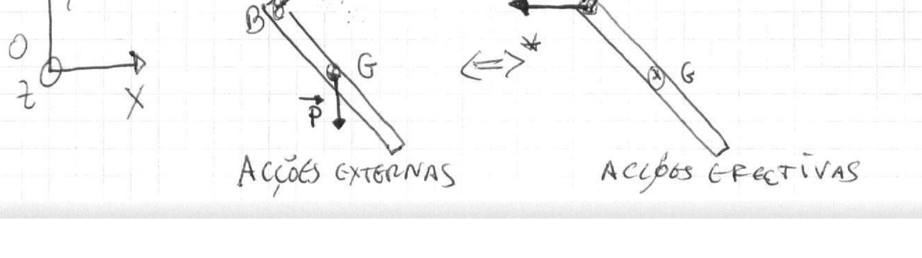
$$\dot{\vec{H}}_B = \dot{\vec{H}}_G + \vec{BG} \times m\vec{a}_G =$$

$$= -\frac{m}{12}l^2\omega^2 \operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ)\,\hat{k} + \left(-\frac{ml^2}{4}\operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ)\,\omega^2 + \frac{ml^2}{6}\operatorname{sen}(30^\circ)\,\omega^2\right)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{H}}_B = \left[-\frac{m}{3}l^2\omega^2\operatorname{sen}(30^\circ)\cos(30^\circ) + \frac{ml^2}{6}\operatorname{sen}(30^\circ)\,\omega^2\right]\hat{k} \quad (\text{EM } OXYZ)}$$

(V) CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE CORPO LIVRE E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

EM OXYZ TEM-SE



ACÇÕES EXTERNAS   ACÇÕES EFECTIVAS

* SENDO AS ACÇÕES EXTERNAS EQUIVALENTES ÀS EFECTIVAS PARA UM CORPO RÍGIDO, TEM-SE QUE

$$\begin{cases}\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \\ \sum(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_B\end{cases}$$

ASSIM, TEM-SE 6 EQUAÇÕES ESCALARES PARA 4 INCÓGNITAS: ω, H_x, H_y E H_z.

COMO SE PASSOU $\dot{\vec{H}}_G$ PARA $\dot{\vec{H}}_B$, O ESFORÇO $\vec{B}$ DESAPARECEU DA EQUAÇÃO DOS MOMENTOS (PORQUÊ??).

ASSIM,

$$\sum(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_B \longrightarrow \text{PERMITE OBTER } \underline{\omega}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \longrightarrow \text{PERMITE OBTER } \vec{B} = (\underline{B_x}\hat{I} + \underline{B_y}\hat{J} + \underline{B_z}\hat{K})$$

DESTE MODO:

<u>OBTENÇÃO DE ω</u>

$$\sum(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_B \iff \underbrace{\vec{BB}}_{=\vec{0}}\times\vec{H} + \vec{BG}\times\vec{P} = \dot{\vec{H}}_B \iff$$

NOTA: $\begin{cases}\sum M_{By} = \dot{H}_{By} \\ \sum M_{Bz} = \dot{H}_{Bz}\end{cases} \iff \begin{cases}0=0\\0=0\end{cases}$

$$\vec{BG}\times\vec{P} = \dot{\vec{H}}_B = \dot{H}_{Bz}\hat{K} \Rightarrow$$

$\hat{I}\times\hat{J} = \hat{K}$

$\hat{J}\times\hat{J} = \vec{0}$

$$\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ)\hat{I} - \frac{l}{2}\sin(30^\circ)\hat{J}\right)\times(-mg\hat{J}) = \dot{H}_{Bz}\hat{K} \iff$$

$$-mg\frac{l}{2}\cos(30^\circ)\hat{K} = \dot{H}_{Bz} = \left[-\frac{ml^2}{3}\omega^2\sin(30^\circ)\cos(30^\circ) + \frac{ml^2}{6}\sin(30^\circ)\omega^2\right]\hat{K}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\frac{l}{2}\cos(30^\circ) = \frac{\cancel{m}l^2}{3}\omega^2\sin(30^\circ)\cos(30^\circ) - \frac{\cancel{m}l^2}{6}\sin(30^\circ)\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g/l}{\frac{2}{3}\sin(30^\circ) - \frac{1}{3}\tan(30^\circ)}} = 13{,}52 \text{ rad/s}}$$

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) ● versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica ● Universidade de Aveiro

NOTA: EMBORA NÃO SEJA PEDIDO, O CÁLCULO DE $\vec{B}$ É O SEGUINTE:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow$$

$$\vec{B} + \vec{P} = m\left[-\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3}\right)\right]\hat{I} \Leftrightarrow$$

$$\left(B_x\hat{I} + B_y\hat{J} + B_z\hat{K}\right) + \left(-mg\hat{J}\right) = -m\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3}\right)\hat{I}$$

$$\Leftrightarrow \left[B_x + m\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3}\right)\right]\hat{I} + \left[B_y - mg\right]\hat{J} + B_z\hat{K} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_x + m\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3}\right) = 0 \\ B_y - mg = 0 \\ B_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} B_x = -m\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3}\right) \\ B_y = mg \\ B_z = 0 \end{cases}$$

DINÂMICA, POIS DEPENDE DE ω

ESTÁTICA, POIS NÃO-NULA E NÃO DEPENDE DE ω NEM DE α.

LOGO

$$\boxed{\vec{B} = -m\omega^2\left(\frac{l}{2}\cos(30^\circ) - \frac{l}{3}\right)\hat{I} + mg\hat{J}}$$

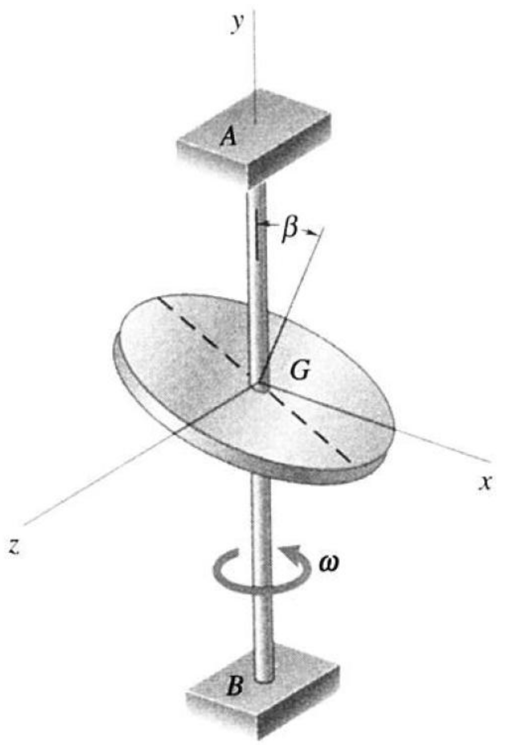
— FIM —

CAPÍTULO I: CINÉTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 2: Um disco homogéneo de massa m e raio r está montado num veio vertical AB, e no instante considerado roda em torno desse veio com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$, ambas positivas e paralelas ao eixo vertical. A normal ao disco em G forma um ângulo $\beta = 25°$ com o veio. Neste contexto, determine:

(a) o ângulo θ formado pelo veio AB e o momento angular $\mathbf{H}_G$ do disco em torno do seu centro de massa;

(b) a taxa de variação instantânea do momento angular $\mathbf{H}_G$ do disco em torno de seu centro de massa.



(Enunciado adaptado dos exercícios propostos 18.4 e 18.64 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO II-2: RESOLUÇÃO

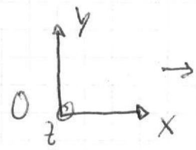
DADOS: MASSA m
RAIO R
$\vec{\omega}$ É CONSTANTE
$\beta = 25°$

PEDIDO a) $\theta = \sphericalangle(\vec{\omega}, \vec{H}_G)$
b) $\vec{H}_G$

a)

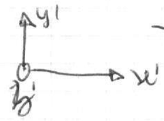
(i) DEFINIÇÃO DE REFERENCIAIS INERCIAL E LOCAIS

1) INERCIAL



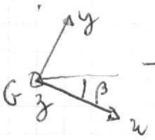
$\rightarrow (\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$; $OXYZ$

2) LOCAL NÃO-PRINCIPAL



$\rightarrow (\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$; $Gx'y'z'$

3) LOCAL PRINCIPAL



$\rightarrow (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$; $Gxyz$

DE ACORDO COM O EXERCÍCIO II-1, TEM-SE

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad [M_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) DEFINIÇÃO LOCAL DE $\vec{H}_G = [I_G]\,\vec{\omega}$

1) EM $Gxyz$ A MATRIZ DE INÉRCIA É DIAGONAL, POIS SENDO OS EIXOS xyz PRINCIPAIS DE INÉRCIA $\Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

FORMULÁRIO PARA DISCO HOMOGÉNEO DE MASSA m E RAIO R $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{I}_{xx} = \bar{I}_{zz} = \frac{1}{4} m R^2 \\ \bar{I}_{yy} = \frac{1}{2} m R^2 \end{cases} \Rightarrow [I_G] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} m R^2 \end{bmatrix} \text{ EM } Gxyz$$

2) $\vec{\omega} = \omega \hat{j}$ (EM OXYZ) $= \omega \hat{j}'$ (EM $Gx'y'z'$)

$= -\omega \operatorname{sen}(\beta)\hat{i} + \omega \cos(\beta)\hat{j}$ (EM $Gxyz$), POIS

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [M_1]^T \begin{Bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega \operatorname{sen}(\beta) \\ \omega \cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} //$$

3) ASSIM, TEM-SE, EM $Gxyz$:

$$\vec{H}_G = [I_G]\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mr^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\omega \operatorname{sen}(\beta) \\ \omega\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{mr^2}{4}\omega \operatorname{sen}(\beta) \\ \frac{mr^2}{2}\omega\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_G = \frac{mr^2}{4}\omega\left(-\operatorname{sen}(\beta)\hat{i} + 2\cos(\beta)\hat{j}\right) \text{(em } Gxyz)}$$

AGORA, PRETENDE-SE OBTER O ÂNGULO ENTRE $\vec{H}_G$ E $\vec{\omega}$. DESTE MODO, TENDO EM CONTA $Gxyz$ VEM:

$$\vec{H}_G \cdot \vec{\omega} = \|\vec{H}_G\| \, \|\vec{\omega}\| \cos(\theta) = H_{Gx}\omega_x + H_{Gy}\omega_y + H_{Gz}\omega_z \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{H_{Gx}\omega_x + H_{Gy}\omega_y + H_{Gz}\omega_z}{\|\vec{H}_G\| \, \|\vec{\omega}\|} \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{\cancel{\frac{mr^2\omega}{4}}\left(\cancel{\omega}\operatorname{sen}^2(\beta) + 2\omega\cos^2\beta\right)}{\cancel{\frac{mr^2\omega}{4}}\sqrt{\operatorname{sen}^2(\beta)+4\cos^2(\beta)}\;\cancel{\omega}\cancel{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\beta)+\cos^2(\beta)}}^{\,1}} \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\beta) + 2\cos^2(\beta)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\beta)+4\cos^2(\beta)}} \Rightarrow \cos(\theta) = 0{,}977 \Rightarrow$$

$$\theta = 11{,}88^\circ //$$

b) DEFINIÇÃO DE $\dot{\vec{H}}_G$ NO REFERENCIAL INERCIAL

NESTE CASO TEM-SE QUE, COM BASE NO VECTOR $\vec{H}_G$ DEFINIDO EM $Gxyz$ QUE RODA COM $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$, RESULTA:

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{OXYZ} = \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{H}_G\right)_{Gxyz}$$

EM QUE

$$\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gxyz} = \frac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right)_{\hat{i},\hat{j},\hat{k} \text{ CONSTANTES}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{mR^2}{4}\omega\left(-\operatorname{sen}(\beta)\hat{i} + 2\cos(\beta)\hat{j}\right)\right]\Big|_{\hat{i},\hat{j},\hat{k} \text{ CONST.}} =$$

$$= \frac{mR^2}{4}\underset{\overset{\shortparallel}{d\omega/dt}}{\alpha}\left(-\operatorname{sen}(\beta)\hat{i} + 2\cos(\beta)\hat{j}\right)$$

$$\vec{\Omega} \times \left(\vec{H}_G\right)_{Gxyz} = \begin{Bmatrix} -\omega \operatorname{sen}(\beta) \\ \omega\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\frac{mR^2\omega}{4}\operatorname{sen}(\beta) \\ \frac{mR^2\omega\cos(\beta)}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mR^2}{4}\omega^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \frac{mR^2}{4}\left(-\alpha \operatorname{sen}(\beta)\hat{i} + 2\alpha\cos(\beta)\hat{j} - \omega^2\operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)\hat{k}\right)$$

PARA PASSAR DE $Gxyz$ PARA $GXYZ$, TEM-SE ENTÃO

$$\begin{Bmatrix} \dot{H}_{GX} \\ \dot{H}_{GY} \\ \dot{H}_{GZ} \end{Bmatrix} = [M_2]\left[[M_1]\begin{Bmatrix} \dot{H}_{Gx} \\ \dot{H}_{Gy} \\ \dot{H}_{Gz} \end{Bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{H}_{Gx} \\ \dot{H}_{Gy} \\ \dot{H}_{Gz} \end{Bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \cos(\beta)\dot{H}_{Gx} + \operatorname{sen}(\beta)\dot{H}_{Gy} \\ -\operatorname{sen}(\beta)\dot{H}_{Gx} + \cos(\beta)\dot{H}_{Gy} \\ \dot{H}_{Gz} \end{Bmatrix}$$

Então, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} H_{Gx} \\ H_{Gy} \\ H_{Gz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{mr^2}{4}\left[-\alpha\, \mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta) + 2\alpha\, \mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta)\right] \\ \frac{mr^2}{4}\left[\alpha\, \mathrm{sen}^2(\beta) + 2\alpha \cos^2(\beta)\right] \\ -\frac{mr^2}{4}\,\omega^2\, \mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

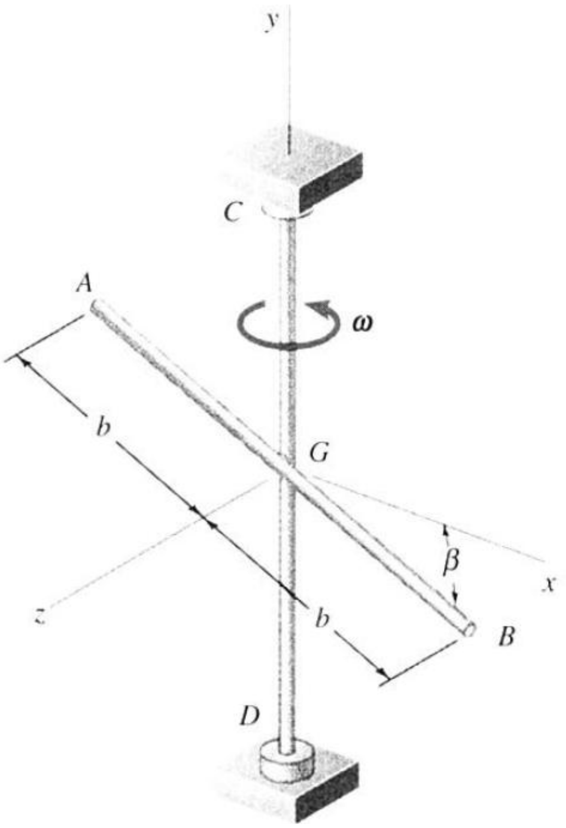
$$\boxed{\dot{\vec{H}}_G = \frac{mr^2}{4}\left(\alpha\, \mathrm{sen}(\beta)\cos\beta\, \hat{I} + \alpha\left[1+\cos^2(\beta)\right]\hat{J} - \omega^2\, \mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta)\,\hat{K}\right)}$$

em OXYZ

— Fim —

CAPÍTULO I: CINÉTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 3: Uma barra esbelta uniforme *AB*, com massa *m*, e um veio (esbelto uniforme) vertical *CD*, ambos com comprimento $2b$, estão soldados um ao outro nos seus pontos médios *G*. Sabendo que o veio roda com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ constante, determine as reacções dinâmicas nos apoios *C* e *D*.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 18.66 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

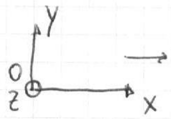
EXERCÍCIO II-3: RESOLUÇÃO

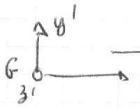
DADOS: BARRA ESBELTA
MASSA m
$\vec{w}$ CONSTANTE,
MEDIDAS GEOMÉTRICAS

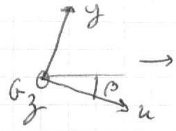
PEDIDO: REACÇÕES DINÂMICAS EM C E D.

DE ACORDO COM A METODOLOGIA APRESENTADA NO PROBLEMA 1, TEM-SE:

(i) DEFINIÇÃO DE REFERENCIAIS INERCIAL E LOCAIS

1) INERCIAL  $\longrightarrow (\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$; OXYZ

2) LOCAL NÃO-PRINCIPAL  $\longrightarrow (\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$; $Gx'y'z'$

3) LOCAL PRINCIPAL  $\longrightarrow (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$; $Gxyz$

DE ACORDO COM O EXERCÍCIO II-1, TEM-SE

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad [M_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) DEFINIÇÃO LOCAL DE $\vec{H}_G = [I_G]\vec{w}$

1) EM $Gxyz$ A MATRIZ DE INÉRCIA É DIAGONAL, POIS SENDO OS EIXOS xyz PRINCIPAIS DE INÉRCIA, POIS SÃO EIXOS DE SIMETRIA, ENTÃO TEM-SE QUE $\bar{I}_{xy} = \bar{I}_{xz} = \bar{I}_{yz} = 0$

FORMULÁRIO PARA BARRA ESBELTA (HOMOGÉNEA) DE MASSA m E COMPRIMENTO l $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{I}_{xx} = 0 \\ \bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \dfrac{m l^2}{12} \end{cases} \Rightarrow [I_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2/12 \end{bmatrix}$$

SENDO $l = 2b$ TEM-SE ENTÃO

$$[I_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mb^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & mb^2/3 \end{bmatrix} \text{ em } Gxyz$$

2) $\vec{w} = w\hat{j}$ (EM OXYZ) $= w\hat{j}'$ (EM $Gx'y'z'$) $=$

$= -w \operatorname{sen}(\beta)\hat{i} + w\cos(\beta)\hat{j}$ (EM $Gxyz$), POIS

$$\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} = [M_1]^T \begin{Bmatrix} w_{x'} \\ w_{y'} \\ w_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w\operatorname{sen}(\beta) \\ w\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3) ASSIM, TEM-SE EM $Gxyz$:

$$\vec{H}_G = [I_G]\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mb^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & mb^2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w\operatorname{sen}(\beta) \\ w\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{mb^2}{3} w\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_G = \frac{m}{3} b^2 w\cos(\beta)\hat{j} \quad (\text{EM } Gxyz)}$$

(iii) DEFINIÇÃO DE $\dot{\vec{H}}_G$ NO REFERENCIAL INERCIAL

ESTANDO O VECTOR $\vec{H}_G$ DEFINIDO NO REFERENCIAL $Gxyz$ QUE RODA COM $\vec{\Omega} = \vec{w}$, TEM-SE DA CINEMÁTICA:

$$\dot{\vec{H}}_G = (\dot{\vec{H}}_G)_{OXYZ} = (\dot{\vec{H}}_G)_{Gxyz} + \vec{\Omega} \times (\vec{H}_G)_{Gxyz}$$

EM QUE

$$(\dot{\vec{H}}_G)_{Gxyz} = \frac{d}{dt}(\vec{H}_G)_{\hat{i},\hat{j},\hat{k} \text{ CONSTANTES}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{mb^2}{3} w\cos(\beta)\hat{j}\right)_{\hat{i},\hat{j},\hat{k} \text{ CONST.}} = \vec{0} \quad \text{(POIS } W \text{ É CONSTANTE!)}$$

$$\vec{\Omega} \times (\vec{H}_G)_{Gxyz} = \begin{Bmatrix} -w\operatorname{sen}(\beta) \\ w\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{mb^2}{3} w\cos(\beta) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mb^2}{3} w^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\dot{H}}_G = \vec{0} + \left(-\frac{mb^2}{3} w^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)\,\hat{k}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{\dot{H}}_G = -\frac{mb^2}{3} w^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)\,\hat{k} \quad (\text{em } Gxyz)$$

PARA PASSAR A OXYZ TEM-SE, DE ACORDO COM O PROBLEMA II-1) QUE:

$$\begin{Bmatrix} \dot{H}_{GX} \\ \dot{H}_{GY} \\ \dot{H}_{GZ} \end{Bmatrix} = [M_2]\left[[M_1]\begin{Bmatrix} \dot{H}_{Gx} \\ \dot{H}_{Gy} \\ \dot{H}_{Gz} \end{Bmatrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mb^2}{3} w^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta) \end{Bmatrix} \right\}$$

$$= -\frac{mb^2}{3} w^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos(\beta)\,\hat{K}$$

NOTA: NESTE CASO, $\hat{k} \,//\, \hat{k}' \,//\, \hat{K}$ E $\vec{\dot{H}}_G$ SÓ TINHA COMPONENTE EM $\hat{k}$, PELO QUE O RESULTADO É O MESMO QUE EM $Gxyz$!

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\dot{H}}_G = -\frac{mb^2}{3} w^2 \operatorname{sen}(\beta)\cos\beta\,\hat{K} \quad (\text{em } OXYZ)}$$

(iv) PASSAGEM DE $\vec{\dot{H}}_G$ PARA APOIO COM INCÓGNITAS, SE ADEQUADO

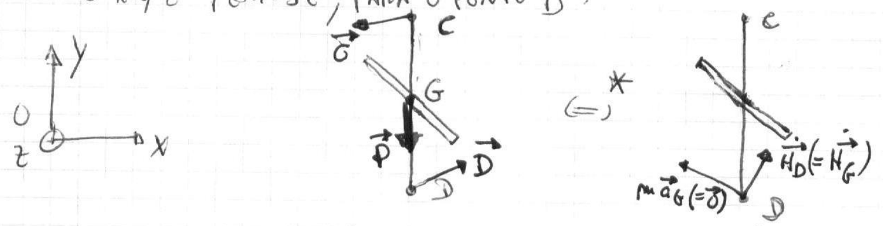
NO PRESENTE CASO, EMBORA HAJA 2 APOIOS COM INCÓGNITAS (1 VECTOR DE FORÇA POR CADA), ACONTECE QUE DE ACORDO COM O TEOREMA DE KÖNIG SE TEM QUE

$$\begin{cases} \vec{\dot{H}}_C = \vec{\dot{H}}_G + \vec{CG} \times m\vec{a}_G \\ \vec{\dot{H}}_D = \vec{\dot{H}}_G + \vec{DG} \times m\vec{a}_G \end{cases} ; \text{ MAS COMO } \vec{a}_G = \vec{0}, \text{ ENTÃO}$$

$\vec{\dot{H}}_C = \vec{\dot{H}}_D = \vec{\dot{H}}_G$, PELO QUE SE PODE EFECTUAR A SOMA DOS MOMENTOS DAS ACÇÕES EXTERNAS EM RELAÇÃO A QUALQUER PONTO INDIFERENTEMENTE, POIS A FORÇA EFECTIVA ($m\vec{a}_G$) É NULA!

(V) CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE CORPO LIVRE E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

EM OXYZ TEM-SE, PARA O PONTO D:



ACÇÕES EXTERNAS   ACÇÕES EFECTIVAS

* SENDO AS ACÇÕES EXTERNAS EQUIVALENTES ÀS EFECTIVAS PARA UM CORPO RÍGIDO, TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \; (= \vec{0}) \\ \Sigma (\vec{M}_{ext})_D = \dot{\vec{H}}_D \; (= \dot{\vec{H}}_G) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \Sigma (\vec{M}_{ext})_D = \dot{\vec{H}}_G \end{cases}$$

ATENDENDO A QUE $\Sigma(M_{ext})_{Dy} = \dot{H}_{Gy}$ CORRESPONDE A $0=0$ (PORQUÊ??)
ASSIM, TEM-SE SÓ 5 EQUAÇÕES ESCALARES PARA 6 INCÓGNITAS. DE FACTO, COMO SE VERÁ, O SISTEMA REVELA-SE HIPERESTÁTICO NOS APOIOS ROTULADOS C E D, PELO QUE PARA QUE HAJA UMA SOLUÇÃO DEFINIDA VAI CONSIDERAR-SE QUE SÓ O APOIO INFERIOR ABSORVE O PESO DA ESTRUTURA, POR EXEMPLO.

ASSIM, $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \longrightarrow$ 3 RELAÇÕES ENTRE COMPONENTES DE $\vec{C}$ E $\vec{D}$

$\Sigma (\vec{M}_{ext})_D = \dot{\vec{H}}_G \longrightarrow$ PERMITE DEFINIR C_x E C_z.

DESTE MODO, A CONDIÇÃO EXTRA DE QUE $C_y = 0$ PERMITE DEFINIR $\vec{C}$ E $\vec{D}$!

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} + \vec{D} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}) + (D_x\hat{i} + D_y\hat{j} + D_z\hat{k}) - mg\hat{j} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(C_x + D_x)\hat{i} + (C_y + D_y - mg)\hat{j} + (C_z + D_z)\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_x + D_x = 0 \\ C_y + D_y = mg \\ C_z + D_z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma (\vec{M}_{ext})_D = \dot{\vec{H}}_G \Rightarrow \underbrace{\vec{DG} \times \vec{P}}_{// \Rightarrow \vec{0}} + \vec{DC} \times \vec{C} + \underbrace{\vec{DD}}_{\vec{0}} \times \vec{D} = \dot{\vec{H}}_G \Leftrightarrow$$

$$\vec{DC} \times \vec{C} = \dot{\vec{H}}_G$$

$$\Rightarrow (2b\,\hat{J}) \times (C_x\hat{I} + C_y\hat{J} + C_z\hat{K}) = \dot{\vec{H}}_G \Rightarrow \begin{cases} \hat{J}\times\hat{I} = -\hat{K} \\ \hat{J}\times\hat{J} = \vec{0} \\ \hat{J}\times\hat{K} = \hat{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2bC_x\hat{K} + 2bC_z\hat{I} = -\frac{mb^2}{3}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[-2bC_x + m\frac{b^2}{3}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\right]\hat{K} + 2bC_z\hat{I} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_x = \frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta) \\ C_y \text{ É QUALQUER } (0 \cdot C_y = 0) \\ C_z = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{C} = \frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{I} + C_y\hat{J} \\ \vec{D} = -\frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{I} + (mg - C_y)\hat{J} \end{cases}$$

ASSUMINDO QUE O PESO É TODO ABSORVIDO PELO APOIO D, ENTÃO $C_y = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{C} = \frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{I} \\ \vec{D} = -\frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{I} + mg\hat{J} \end{cases}$$

PELO QUE AS ACÇÕES DINÂMICAS EM C E D SÃO:

$$\begin{cases} \vec{C}_D = \frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{I} \\ \vec{D}_D = -\frac{mb}{6}\omega^2 \sin(\beta)\cos(\beta)\hat{I} \end{cases} //$$

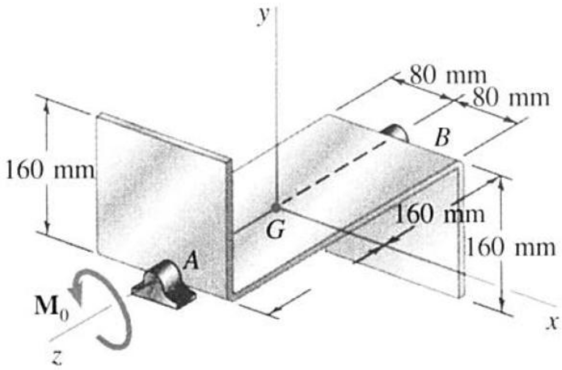
— FIM —

CAPÍTULO I: CINÉTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 4: Uma chapa fina metálica, com massa m = 2,4 kg, largura de 160 mm e comprimento de 240 mm, foi dobrada para formar o componente ilustrado na figura. O componente encontra-se em repouso ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$), quando no instante considerado se lhe aplica um binário $\mathbf{M}_0$ com magnitude de 0,8 Nm segundo o eixo definido pelos apoios *A* e *B*, conforme se ilustra. Neste contexto, determine:

(a) a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ do componente;

(b) as reacções dinâmicas nos apoios *A* e *B* logo após a aplicação do binário $\mathbf{M}_0$.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 18.73 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO II-4: RESOLUÇÃO

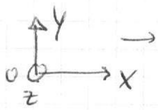
DADOS: $m_T = 2,4\,kg$
CHAPA FINA
$\vec{\omega}(0) = \vec{\alpha}(0) = \vec{0}$
$\vec{M}_0 = 0,8\,\hat{k}$
MEDIDAS GEOMÉTRICAS

PEDIDO: a) $\vec{\alpha}(0)$?
b) REACÇÕES DINÂMICAS NOS APOIOS A E B NO INSTANTE $t=0$.

DE ACORDO COM A METODOLOGIA APRESENTADA NO PROBLEMA 1, TEM-SE:

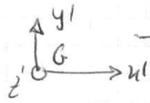
(i) DEFINIÇÃO DE REFERENCIAIS INERCIAL E LOCAIS

1) INERCIAL



$\rightarrow (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$; $oxyz$

2) LOCAL NÃO-PRINCIPAL



$\rightarrow (\hat{i}', \hat{j}', \hat{k})$; $Gx'y'z'$

NESTE CASO, COMO A PEÇA NÃO É BISSIMÉTRICA NÃO SE SABE À PARTIDA QUAIS SERÃO OS EIXOS PRINCIPAIS, PELO QUE NÃO SE SABE À PARTIDA DEFINIR $Gxyz$. EMBORA SEJA POSSÍVEL DETERMINÁ-LOS, OPTOU-SE POR DEFINIR A MATRIZ DE INÉRCIA EM $Gx'y'z'$ UTILIZANDO O TEOREMA DE STEINER.

ASSIM, DE ACORDO COM O EXERCÍCIO II-1, TEM-SE QUE A MATRIZ QUE EXPRIME A ROTAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO DAS COMPONENTES DE VECTORES ENTRE $oxyz$ E $Gx'y'z'$ CORRESPONDE A:

$$[M_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) DEFINIÇÃO LOCAL DE $\vec{H}_G = [I_G]\vec{\omega}$

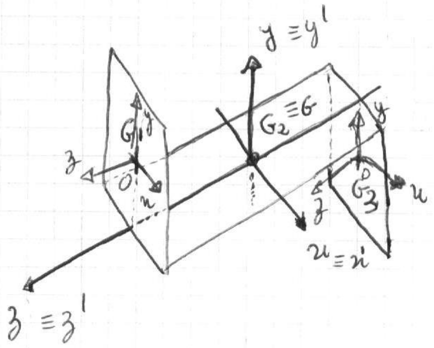
1) EM $Gx'y'z'$ A MATRIZ DE INÉRCIA NÃO É DIAGONAL NESTE CASO POIS OS EIXOS $x'y'z'$ NÃO SÃO PRINCIPAIS DE INÉRCIA, POIS ESTA NÃO É BISSIMÉTRICA.

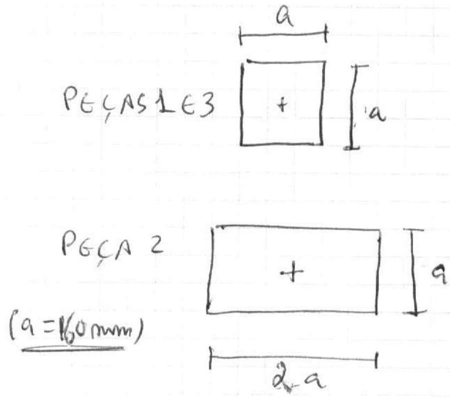
ENTÃO, NESTE CASO TER-SE-Á:

$$[I_G] = \begin{bmatrix} \bar{I}_{x'x'} & -\bar{I}_{x'y'} & -\bar{I}_{x'z'} \\ & \bar{I}_{y'y'} & -\bar{I}_{y'z'} \\ \text{Sim.} & & \bar{I}_{z'z'} \end{bmatrix}$$

ASSIM, ESTE PROBLEMA ENVOLVE A UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE STEINER, POIS A PEÇA VAI SER SUBDIVIDIDA EM 3 PARTES E AS COMPONENTES DO TENSOR DE INÉRCIA SÓ SE PODERÃO SOMAR QUANDO REFERENTES AO MESMO EIXO, ASSIM, AS COMPONENTES DAS 3 PARTES TÊM DE SER PASSADAS PARA UM SISTEMA DE EIXOS QUE PASSARÁ, POR OPÇÃO DELIBERADA, NO CENTRO DE MASSA DA PEÇA CONSIDERADA.

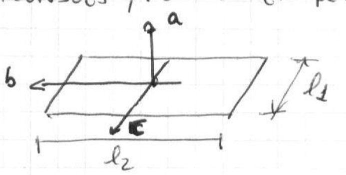
ASSIM, CONSIDERA-SE





ASSIM, AS 3 PARTES JÁ CORRESPONDEM A COMPONENTES BISSIMÉTRICAS, PELO QUE AS 3 SUBMATRIZES PODEM SER OBTIDAS NOS 3 CENTROS DE MASSA.

PARA UM RECTÂNGULO DE CHAPA FINA DE MASSA m E DIMENSÕES, TEM-SE EM RELAÇÃO AOS SEUS EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA a, b E c QUE:



$$\begin{cases} \bar{I}_{aa} = \frac{m}{12}\left(l_1^2 + l_2^2\right) \\ \bar{I}_{bb} = \frac{m}{12} l_1^2 \\ \bar{I}_{cc} = \frac{m}{12} l_2^2 \end{cases}$$

SENDO OS EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \bar{I}_{ab} = 0 \\ \bar{I}_{ac} = 0 \\ \bar{I}_{bc} = 0 \end{cases}$$

LOGO, LOCALMENTE A MATRIZ DE INÉRCIA PARA O RECTÂNGULO É, PARA Gabc, IGUAL A

$$\left[I_G\right] = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}\left(l_1^2 + l_2^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} l_2^2 \end{bmatrix}$$

MAS, A QUE CORRESPONDE O TEOREMA DE STEINER?

QUANDO SE QUER PASSAR DE UM REFERENCIAL EM G, PARA UM REFERENCIAL DE EIXOS PARALELOS, COM ORIGEM NUM PONTO O, HÁ QUE CONSIDERAR AS COORDENADAS DO CENTRO DE MASSA NO NOVO SISTEMA DE EIXOS PARALELOS.

SEJAM $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ AS COORDENADAS DE G EM OXYZ, ENTÃO A TRANSFORMAÇÃO DE INÉRCIAS É A SEGUINTE:

$$\begin{cases} I_{xx} = \bar{I}_{xx} + m(\bar{y}^2+\bar{z}^2) = \int (y^2+z^2)\,dm + m(\bar{y}^2+\bar{z}^2) \\ I_{yy} = \bar{I}_{yy} + m(\bar{x}^2+\bar{z}^2) = \int (x^2+z^2)\,dm + m(\bar{x}^2+\bar{z}^2) \\ I_{zz} = \bar{I}_{zz} + m(\bar{x}^2+\bar{y}^2) = \int (x^2+y^2)\,dm + m(\bar{x}^2+\bar{y}^2) \\ I_{xy} = \bar{I}_{xy} + m(\bar{x}\bar{y}) = \int xy\,dm + m(\bar{x}\bar{y}) \\ I_{xz} = \bar{I}_{xz} + m(\bar{x}\bar{z}) = \int xz\,dm + m(\bar{x}\bar{z}) \\ I_{yz} = \bar{I}_{yz} + m(\bar{y}\bar{z}) = \int yz\,dm + m(\bar{y}\bar{z}) \end{cases}$$

NO PROBLEMA ACTUAL, ATENDENDO A QUE NO REFERENCIAL $Gx'y'z'$ O VECTOR $\vec{\omega}$ SÓ TEM COMPONENTE EM z', ENTÃO SÓ É NECESSÁRIO CONHECER METADE DAS COMPONENTES DE $[I]$!

DE FACTO, TEM-SE QUE

$$\vec{H}_G = [I_G]\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{x'x'} & -\bar{I}_{x'y'} & -\bar{I}_{x'z'} \\ & \bar{I}_{y'y'} & -\bar{I}_{y'z'} \\ Sim. & & \bar{I}_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\bar{I}_{x'z'}\,\omega \\ -\bar{I}_{y'z'}\,\omega \\ \bar{I}_{z'z'}\,\omega \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$ SÓ É NECESSÁRIO CONHECER $\bar{I}_{x'z'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ E $\bar{I}_{z'z'}$!!

ATENDENDO AGORA A QUE AS COORDENADAS DE G_1, G_2 E G_3 SÃO NO REFERENCIAL $Gx'y'z'$ (VER FIGURA ATRÁS)

$$G_1 \equiv \left(0, \frac{a}{2}, a\right) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$$
$$G_2 \equiv (0, 0, 0) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$$
$$G_3 \equiv \left(0, -\frac{a}{2}, -a\right) = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$$

E AINDA A QUE, DEVIDO À BISSIMETRIA EM RELAÇÃO AOS EIXOS LOCAIS PRINCIPAIS,

$$\begin{cases} (\bar{I}_{xy})_1 = (\bar{I}_{xy})_2 = (\bar{I}_{xy})_3 = 0 \\ (\bar{I}_{xz})_1 = (\bar{I}_{xz})_2 = (\bar{I}_{xz})_3 = 0 \\ (\bar{I}_{yz})_1 = (\bar{I}_{yz})_2 = (\bar{I}_{yz})_3 = 0 \end{cases}$$

ASSIM, TEM-SE, SENDO $m_1 = \frac{m_T}{4} = m_3$ E $m_2 = m_T/2$

PEÇA ①:

$$\begin{cases} (I_{z'z'})_1 = (\bar{I}_{zz})_1 + m_1(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2) = \frac{m_T}{48}(a^2+a^2) + \frac{m_T}{4}\left(0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{5 m_T}{48} a^2 \\ (I_{x'z'})_1 = (\bar{I}_{xz})_1 + m_1(\bar{x}_1 \bar{z}_1) = 0 + \frac{m_T}{4}(0 \times a) = 0 \\ (I_{y'z'})_1 = (\bar{I}_{yz})_1 + m(\bar{y}_1 \bar{z}_1) = 0 + \frac{m_T}{4}\left(\frac{a}{2} \times a\right) = \frac{m_T a^2}{8} \end{cases}$$

PEÇA ②:

$$\begin{cases} (I_{z'z'})_2 = (\bar{I}_{zz})_2 + m_2(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2) = \frac{m_T}{24} a^2 + \frac{m_T}{2}(0^2+0^2) = \frac{m_T a^2}{24} \\ (I_{x'z'})_2 = (\bar{I}_{xz})_2 + m_2(\bar{x}_2 \bar{z}_2) = 0 + \frac{m_T}{2} \times (0 \times 0) = 0 \\ (I_{y'z'})_2 = (\bar{I}_{yz})_2 + m_2(\bar{y}_2 \bar{z}_2) = 0 + \frac{m_T}{2} \times (0 \times 0) = 0 \end{cases}$$

PEÇA ③:

$$\begin{cases} (I_{z'z'})_3 = (\bar{I}_{zz})_3 + m_3(\bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2) = \frac{m_T}{48}(a^2+a^2) + \frac{m_T}{4}\left(0^2 + \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{5 m_T a^2}{48} \\ (I_{x'z'})_3 = (\bar{I}_{xz})_3 + m_3(\bar{x}_3 \bar{z}_3) = 0 + \frac{m_T}{4} \times (0 \times (-a)) = 0 \\ (I_{y'z'})_3 = (\bar{I}_{yz})_3 + m_3(\bar{y}_3 \bar{z}_3) = 0 + \frac{m_T}{4} \times \left[\left(-\frac{a}{2}\right) \times (-a)\right] = \frac{m_T a^2}{8} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \bar{I}_{z'z'} = (I_{z'z'})_1 + (I_{z'z'})_2 + (I_{z'z'})_3 = \frac{5 m_T}{48} a^2 + \frac{m_T a^2}{24} + \frac{5}{48} m_T a^2 = \frac{m_T}{4} a^2 \\ \bar{I}_{x'z'} = (I_{x'z'})_1 + (I_{x'z'})_2 + (I_{x'z'})_3 = 0 + 0 + 0 = 0 \\ \bar{I}_{y'z'} = (I_{y'z'})_1 + (I_{y'z'})_2 + (I_{y'z'})_3 = \frac{m_T}{8} a^2 + 0 + \frac{m_T}{8} a^2 = \frac{m_T}{4} a^2 \end{cases}$$

DESTE MODO,

$$\vec{H}_G = -\bar{I}_{x'z'}\,\omega\,\hat{i}' - \bar{I}_{y'z'}\,\omega\,\hat{j}' + \bar{I}_{z'z'}\,\omega\,\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_G = \frac{m_T}{4} a^2 \omega \left(-\hat{j}' + \hat{k}'\right) \quad (\text{em } Gx'y'z')}$$

(iii) DEFINIÇÃO DE $\dot{\vec{H}}_G$ NO REFERENCIAL INERCIAL

ESTANDO O VETOR $\vec{H}_G$ DEFINIDO NO REFERENCIAL $Gx'y'z'$ QUE RODA COM $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$, TEM-SE DA CINEMÁTICA:

$$\dot{\vec{H}}_G = \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{OXYZ} = \left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gx'y'z'} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{H}_G\right)_{Gx'y'z'}$$

EM QUE

$$\left(\dot{\vec{H}}_G\right)_{Gx'y'z'} = \frac{d}{dt}\left(\vec{H}_G\right)_{\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}' \text{ CONSTANTES}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{m_T}{4} a^2 \omega \left(-\hat{j}' + \hat{k}'\right)\right]_{\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}' \text{ CONSTANTES}} =$$

$$= \frac{m_T}{4} a^2 \underbrace{\alpha}_{d\omega/dt} \left(-\hat{j}' + \hat{k}'\right) //$$

$$\vec{\Omega} \times \left(\vec{H}_G\right)_{Gx'y'z'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} m_T a^2 \omega \\ \frac{1}{4} m_T a^2 \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} m_T a^2 \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \frac{m_T}{4} a^2 \alpha \left(-\hat{j}' + \hat{k}'\right) + \frac{1}{4} m_T a^2 \omega^2 \hat{i}' \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \frac{m_T}{4} a^2 \left(\omega^2 \hat{i}' - \alpha \hat{j}' + \alpha \hat{k}'\right) \quad (\text{em } Gx'y'z')$$

COMO $Gx'y'z'$ É PARALELO A $OXYZ$, ENTÃO

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_G = \frac{m_T}{4} a^2 \left(\omega^2 \hat{I} - \alpha \hat{J} + \alpha \hat{K}\right) \quad \text{em } OXYZ}$$

(IV) PASSAGEM DE $\vec{H}_G$ PARA APOIO COM INCÓGNITAS, SE ADEQUADO

TAL COMO NO PROBLEMA ANTERIOR, EMBORA HAJA 2 APOIOS COM INCÓGNITAS (1 VECTOR DE FORÇA POR CADA), ACONTECE QUE DE ACORDO COM O TEOREMA DE KÖNIG SE TEM QUE

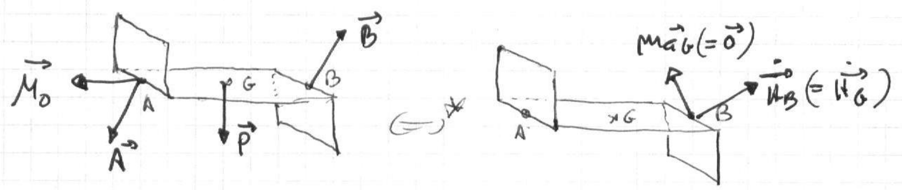
$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_A = \dot{\vec{H}}_G + \vec{AG} \times m\vec{a}_G \\ \dot{\vec{H}}_B = \dot{\vec{H}}_G + \vec{BG} \times m\vec{a}_G \end{cases}$$

, MAS COMO $\vec{a}_G = \vec{0}$, ENTÃO

$$\dot{\vec{H}}_A = \dot{\vec{H}}_B = \dot{\vec{H}}_G \,!$$

(V) CONSTRUÇÃO DO DIAGRAMA DE CORPO LIVRE E RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

EM OXYZ, TEM-SE PARA O PONTO B:



ACÇÕES EXTERNAS — ACÇÕES EFECTIVAS

* SENDO AS ACÇÕES EXTERNAS EQUIVALENTES ÀS EFECTIVAS PARA UM CORPO RÍGIDO, TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G (=\vec{0}) \\ \Sigma(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_B (=\dot{\vec{H}}_G) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \Sigma(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_G \end{cases}$$

ASSIM, TEM-SE 6 EQUAÇÕES ESCALARES PARA 7 INCÓGNITAS! (α E OS VECTORES $\vec{A}$ E $\vec{B}$ DAS REACÇÕES NOS APOIOS!). DE MODO A RESOLVERMOS A HIPERESTATICIDADE ASSOCIADA AOS APOIOS ROTULADOS A E B, VAI CONSIDERAR-SE QUE SÓ O APOIO B PODE ABSORVER ESFORÇO SEGUNDO Z.

ASSIM, $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow$ 3 RELAÇÕES ENTRE COMPONENTES DE $\vec{A}$ E $\vec{B}$

$\Sigma(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_G \rightarrow$ PERMITE DEFINIR α, A_y E A_x

A CONDIÇÃO EXTRA DE $A_z = 0$ PERMITE DEFINIR $\vec{A}$ E $\vec{B}$!

ASSIM, $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A_x \hat{I} + A_y \hat{J} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{I} + B_y \hat{J} + B_z \hat{k}) - m_T g \hat{J} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (A_x + B_x)\hat{I} + (A_y + B_y - m_T g)\hat{J} + (A_z + B_z)\hat{k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x + B_x = 0 \\ A_y + B_y = m_T g \\ A_z + B_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum(\vec{M}_{ext})_B = \dot{\vec{H}}_G \Rightarrow \vec{BA} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{BB}}_{=\vec{0}} \times \vec{B} + \vec{BP} \times \vec{P} + \vec{M}_0 = \dot{\vec{H}}_G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a\hat{k}) \times (A_x \hat{I} + A_y \hat{J} + A_z \hat{k}) + (a\hat{k}) \times (-m_T g \hat{J}) + M_0 \hat{k} = \dot{\vec{H}}_G \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{k} \times \hat{I} = \hat{J} \\ \hat{k} \times \hat{J} = -\hat{I} \\ \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2aA_x \hat{J} - 2aA_y \hat{I} + a m_T g \hat{I} + M_0 \hat{k} = \dot{\vec{H}}_G$$

$$\Rightarrow (a m_T g - 2aA_y)\hat{I} + 2aA_x \hat{J} + M_0 \hat{k} = \dot{\vec{H}}_G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a m_T g - 2aA_y)\hat{I} + 2aA_x \hat{J} + M_0 \hat{k} = \frac{1}{4} m_T a^2 (\omega^2 \hat{I} - \alpha \hat{J} + \alpha \hat{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{a} m_T g - 2\cancel{a} A_y = \frac{1}{4} m_T a^2 \omega^2 \\ 2\cancel{a} A_x = -\frac{1}{4} m_T a^2 \alpha \\ M_0 = \frac{1}{4} m_T a^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_y = \frac{m_T}{2}\left(g - \frac{1}{4} a\omega^2\right) \;// \\ A_x = -\frac{1}{8} m_T a \alpha = -\frac{M_0}{2a} \;// \\ \alpha = \frac{4 M_0}{m_T a^2} \;// \end{cases}$$

∴ TEM-SE QUE, SENDO $\omega(0) = 0$

$$\begin{cases} \vec{A} = -\frac{M_O}{2a}\hat{I} + \frac{m_T}{2}g\hat{J} + A_Z\hat{K} \\ \vec{B} = \frac{M_O}{2a}\hat{I} + \frac{m_T}{2}g\hat{J} - A_Z\hat{K} \end{cases}$$

ASSUMINDO QUE NÃO HÁ QUALQUER ESFORÇO HORIZONTAL SEGUNDO Z EM A, ENTÃO $A_Z = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{A} = -\frac{M_O}{2a}\hat{I} + \frac{m_T}{2}g\hat{J} \\ \vec{B} = \frac{M_O}{2a}\hat{I} + \frac{m_T}{2}\hat{J} \end{cases}$$

PELO QUE AS ACÇÕES DINÂMICAS EM A E B SÃO:

$$\begin{cases} \vec{A}_D = -\frac{M_O}{2a}\hat{I} \\ \vec{B}_D = \frac{M_O}{2a}\hat{I} \end{cases}$$

— FIM —