CORRECÇÃO DO TESTE

Universidade de Aveiro – DEM

Mecânica Aplicada – 1.º Teste – Cinemática de Corpo Rígido – 01/04/2016

04/2016

Nome: Alexandre Pinho da Cruz

N.º Mecanográfico:

Nota: não é permitida a consulta de quaisquer documentos nem a utilização de máquina de calcular ou de telemóvel durante o exame. As respostas são para serem escritas no enunciado. Não há folhas de rascunho, pelo que pensem antes de escrever e aproveitem bem o espaço fornecido! Na última página encontra-se um Formulário. <u>Não tirar o agrafo das folhas do enunciado!</u> O teste tem uma duração máxima de 1h30.

Exercício 1 *(3 valores)*: Considere um corpo rígido que se movimenta no espaço. Neste contexto, responda **justificando breve e convenientemente** às seguintes questões:

1. Em termos da cinemática, que importante simplificação matemática advém do facto de o corpo que se movimenta ser rígido?

R: CORPO RÍGIDO $\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega} \\ \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \end{cases}$ IGUAIS, CADA UM, EM TODOS OS PONTOS DO CORPO RÍGIDO, ISTO É, $\vec{\omega}(P) = \vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}(P) = \vec{\alpha}$, $\forall$ PONTO P DO CORPO.

2. Ainda em termos da cinemática, que outras importantes simplificações matemáticas advêm do facto de o movimento (plano ou não-plano) do corpo rígido ser de translação?

R: MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO $\Rightarrow$ i) NÃO HÁ QUALQUER ROTAÇÃO $\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$ E $\vec{\alpha} = \vec{0}$, E LOGO ii) $\vec{v}(P) = \vec{v}$ E $\vec{a}(P) = \vec{a}$, $\forall$ PONTO P DO CORPO, ISTO É, TODOS OS PONTOS APRESENTAM AS MESMAS VELOCIDADE E ACELERAÇÃO.

Exercício 2 *(8 valores)*: A barra AB encontra-se articulada no ponto A com um apoio fixo e no ponto B com a barra BCD. Sabe-se que a barra BCD é guiada por um rolamento aplicado em C que desliza sobre a superfície horizontal, de tal modo que os pontos A e C se encontram sempre à mesma altura. No instante representado na Figura 1, a barra AB roda com uma velocidade angular ω_{AB} no sentido anti-horário e com uma aceleração angular α_{AB} no sentido horário. Nesse contexto:

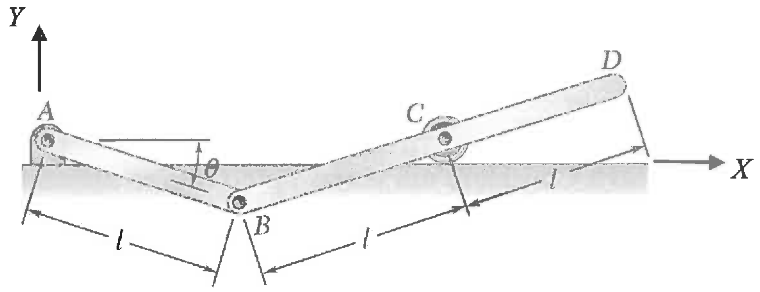

Figura 1. Sistema mecânico do Exercício 2.

(a) [10%] Classifique os tipos de movimento que apresentam as barras AB e BCD.

R:

Barra AB:

MOVIMENTO PLANO – ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO

Barra BCD:

MOVIMENTO PLANO – GERAL

(b) [45%] Com base no **método dos referenciais rotativos (MRR) e só neste**, determine a velocidade do ponto C e a velocidade angular da barra BCD.

R:

Equações vectoriais:

$$\vec{v}_C = \Big[\underset{\vec{0}}{\underset{\downarrow}{\vec{v}_A}} + \underset{\vec{\omega}_{AB}}{\underset{\downarrow}{\vec{\Omega}_1}} \times \underset{\vec{AC}}{\underset{\downarrow}{\vec{r}_{C/R_1}}}\Big] + \Big[\big(\underset{\vec{0}}{\underset{\downarrow}{\vec{v}_B}} + \underset{\vec{\omega}_{BCD/AB}}{\underset{\downarrow}{\vec{\Omega}_{2/1}}} \times \underset{\vec{BC}}{\underset{\downarrow}{\vec{r}_{C/R_2}}}\big) + \underset{\vec{0}}{\underset{\downarrow}{\vec{v}_{C/R_2}}}\Big] =$$

$$= \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AC} + \vec{\omega}_{BCD/AB} \times \vec{BC}$$

Equações vectoriais com componentes dos vectores:

$$\begin{Bmatrix} v_{Cx} \\ \cancel{v_{Cy}} \to 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{AC}_x \\ \overline{AC}_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BCD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{BC}_x \\ \overline{BC}_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_{Cx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2\,l\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BCD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l\cos\theta \\ l\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$c/\ \omega_{BCD} = \omega_{BCD/AB} + \omega_{AB}$$

Incógnitas do problema: v_{Cx} e $\omega_{BCD/AB}$

(c) [45%] Com base no **método dos referenciais rotativos (MRR) e só neste**, determine a aceleração do ponto C e a aceleração angular da barra BCD.

R:

Equações vectoriais:

$$\vec{a}_C = [\underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{0}} + \dot{\vec{\Omega}}_1 \times \vec{r}_{C/R_1} + \vec{\Omega}_1 \times (\vec{\Omega}_1 \times \vec{r}_{C/R_1})] + [\underbrace{\vec{a}_B}_{\vec{0}} + \dot{\vec{\Omega}}_{2/1} \times \vec{r}_{C/R_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \times (\vec{\Omega}_{2/1} \times \vec{r}_{C/R_2})]$$

$$+ [2\vec{\Omega}_1 \times \vec{v}_{C/R_1}] + [2\vec{\Omega}_{2/1} \times \underbrace{\vec{v}_{C/R_2}}_{\vec{0}}] + \underbrace{\vec{a}_{C/R_2}}_{\vec{0}}$$

$$= \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{AC} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AC}) + \vec{\alpha}_{BCD/AB} \times \vec{BC} + \vec{\omega}_{BCD/AB} \times (\vec{\omega}_{BCD/AB} \times \vec{BC})$$

$$+ 2\vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{BCD/AB} \times \vec{BC})$$

Equações vectoriais com componentes dos vectores:

$$\begin{Bmatrix} a_{Cx} \\ \cancel{a_{Cy}} \to 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_{AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2l\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2l\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{BCD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l\cos\theta \\ l\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BCD/AB} \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BCD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l\cos\theta \\ l\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$+ 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BCD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l\cos\theta \\ l\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

c/ $\alpha_{BCD} = \alpha_{BCD/AB} + \alpha_{AB}$

Incógnitas do problema: a_{Cx} e $\alpha_{BCD/AB}$

Exercício 3 (*9 valores*): Um disco com um raio de R gira com uma velocidade angular constante ω_3 – em torno do eixo que passa no ponto D – em relação ao seu apoio na ligação solidária BCD, que, por sua vez, roda com velocidade angular ω_2 e aceleração angular α_2 – em torno de um eixo horizontal – em relação ao suporte AB, que roda, em conjunto com o veio vertical de aço, – em torno do eixo X – com uma velocidade angular constante ω_1, tal como se ilustra na Figura 2 para um determinado instante. Neste contexto:

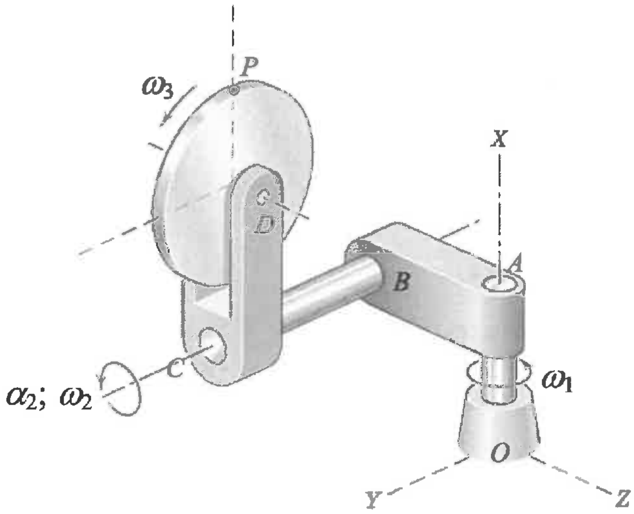

Figura 2. Sistema mecânico do Exercício 3.

(a) [10%] Classifique os tipos de movimento que apresentam os suportes AB, BCD e o disco.

R:

Suporte AB: MOVIMENTO PLANO – ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO

Suporte BCD: MOVIMENTO NÃO-PLANO – GERAL

Disco: MOVIMENTO NÃO-PLANO – GERAL

(b) [45%] Com base no **método da decomposição em translação e rotação relativa (MDTRR) e só neste**, determine a velocidade do ponto P.

R:

Equações vectoriais:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{C/O} + \vec{v}_{D/C} + \vec{v}_{P/D}$$

$$= \vec{0} + \vec{\omega}_{T1} \times \vec{OC} + \vec{\omega}_{T2} \times \vec{CD} + \vec{\omega}_{T3} \times \vec{DP}$$

c/ $\begin{cases} \vec{\omega}_{T1} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{\omega}_{T2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \\ \vec{\omega}_{T3} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \end{cases}$

Equações vectoriais com componentes dos vectores:

$$\begin{Bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ v_{Pz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{OC}_x \\ \overline{OC}_y \\ \overline{OC}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{CD}_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Incógnitas do problema: v_{Px}, v_{Py} e v_{Pz}

(c) [45%] Com base no **método da decomposição em translação e rotação relativa (MDTRR) e só neste**, determine a aceleração do ponto P.

R:

Equações vectoriais:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{a}_{C/O} + \vec{a}_{D/C} + \vec{a}_{P/D}$$

$$= \vec{0} + \vec{\alpha}_{T1} \times \vec{OC} + \vec{\omega}_{T1} \times (\vec{\omega}_{T1} \times \vec{OC}) + \vec{\alpha}_{T2} \times \vec{CD} + \vec{\omega}_{T2} \times (\vec{\omega}_{T2} \times \vec{CD})$$

$$+ \vec{\alpha}_{T3} \times \vec{DP} + \vec{\omega}_{T3} \times (\vec{\omega}_{T3} \times \vec{DP})$$

c/ $\begin{cases} \vec{\alpha}_{T1} = \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{0} \quad (\vec{\omega}_1 \text{ é cte.}) \\ \vec{\alpha}_{T2} = \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \dfrac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{0} + (\vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \end{cases}$ e $\vec{\alpha}_{T3} = \dfrac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \dfrac{d\vec{\omega}_2}{dt} + \dfrac{d\vec{\omega}_3}{dt} = \vec{0} + (\vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) + [\vec{0} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3]$

Equações vectoriais com componentes dos vectores:

$$\begin{Bmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \\ a_{Pz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{OC}_x \\ \overline{OC}_y \\ \overline{OC}_z \end{Bmatrix} \right) + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \times \begin{Bmatrix} \overline{CD}_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overline{CD}_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \right) \times \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

Incógnitas do problema: a_{Px}, a_{Py} e a_{Pz}

FORMULÁRIO

Método dos Referenciais Rotativos

$$\mathbf{v}_\mathrm{P} = \mathbf{v}_{\mathrm{P'}} + \mathbf{v}_{\mathrm{P/R}}$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{P} = \mathbf{a}_{\mathrm{P'}} + \mathbf{a}_{\mathrm{P/R}} + \mathbf{a}_{\mathrm{Cor}}$$

Método da Decomposição em Translação e Rotação Relativa

$$\mathbf{v}_\mathrm{P} = \mathbf{v}_\mathrm{A} + \mathbf{v}_{\mathrm{P/A}}$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{P} = \mathbf{a}_\mathrm{A} + \mathbf{a}_{\mathrm{P/A}}$$

Relações Cinemáticas

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$$

$$\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}/\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$$

Cálculo da Derivada de um Vector **Q** com Base num Referencial Rotativo (**Ω**)

$$(\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{OXYZ}} = (\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}t)_{\mathrm{oxyz}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$$

Boa Sorte