

Mecânica Aplicada

Adenda da sebenta prática de Mecânica Aplicada:
Noções básicas de cinemática do corpo rígido

JPC

Departamento da Engenharia Mecânica
Universidade de Aveiro
2012-2013

O movimento de corpo rígido

Um corpo rígido é um meio material contínuo que não sofre deformação, pelo que a distância entre 2 seus quaisquer pontos não varia.

Deste modo, o movimento de rotação no espaço de um corpo rígido (isolado ou numa associação de corpos rígidos) é unicamente caracterizado por 2 vectores a nível global associados à rotação: ω (velocidade angular) e a sua derivada temporal α (aceleração angular).

Por outro lado, cada ponto do corpo rígido tem os seus 2 vectores \mathbf{v} (velocidade) e \mathbf{a} (aceleração), que podem variar de ponto para ponto.

O movimento de corpo rígido

Então, em geral o movimento de um corpo rígido é caracterizado por 2 vectores globais, ω e α , e um conjunto infinito de pares de vectores locais, \mathbf{v} e \mathbf{a} .

Em seguida vamos classificar os movimentos e ver o que acontece aos 2 vectores globais ω e α , bem como aos pares de vectores locais \mathbf{v} e \mathbf{a} .

O movimento de um corpo rígido pode ser classificado de plano ou não-plano. Diz-se que o movimento é plano quando as suas partículas descrevem trajectórias que evoluem num conjunto de planos paralelos no espaço, mantendo-se a trajectória de um qualquer ponto móvel sempre no mesmo plano.

Classificação do movimento de corpo rígido

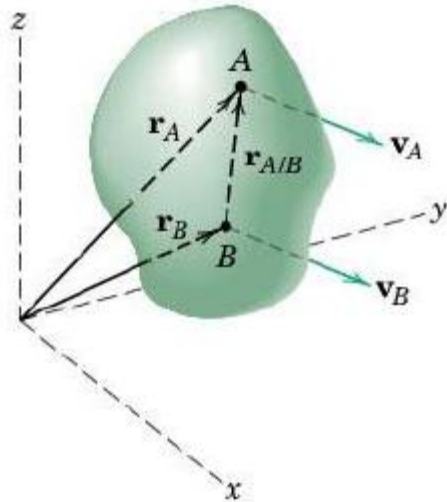
1 – Movimento do tipo plano:

- a) Translação plana
- b) Rotação em torno de eixo fixo
- c) Movimento plano geral

2 – Movimento do tipo não-plano:

- a) Translação não-plana
- b) Rotação em torno de um ponto fixo
- c) Movimento geral

1 – Translação plana

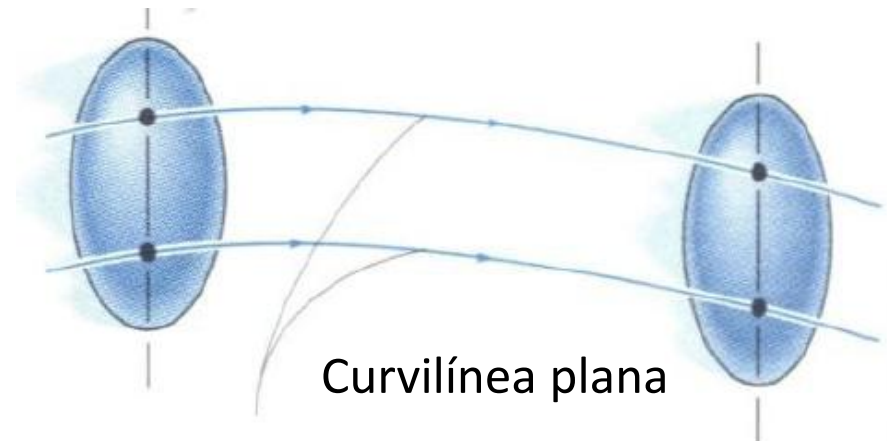
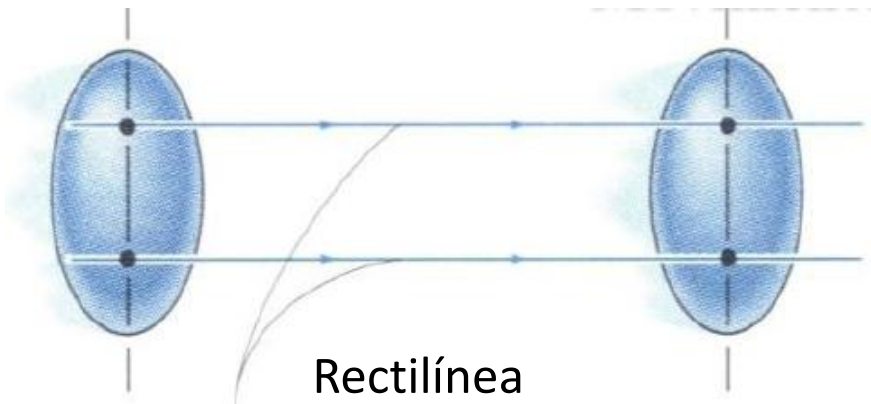


$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B$$

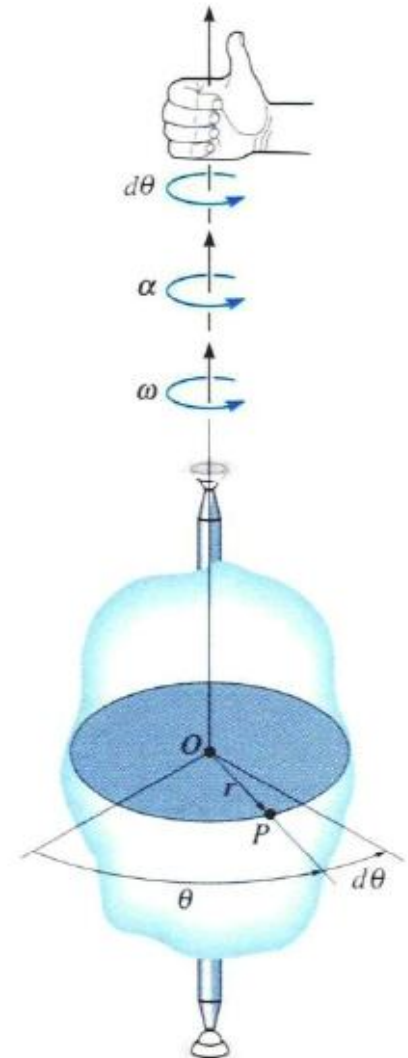
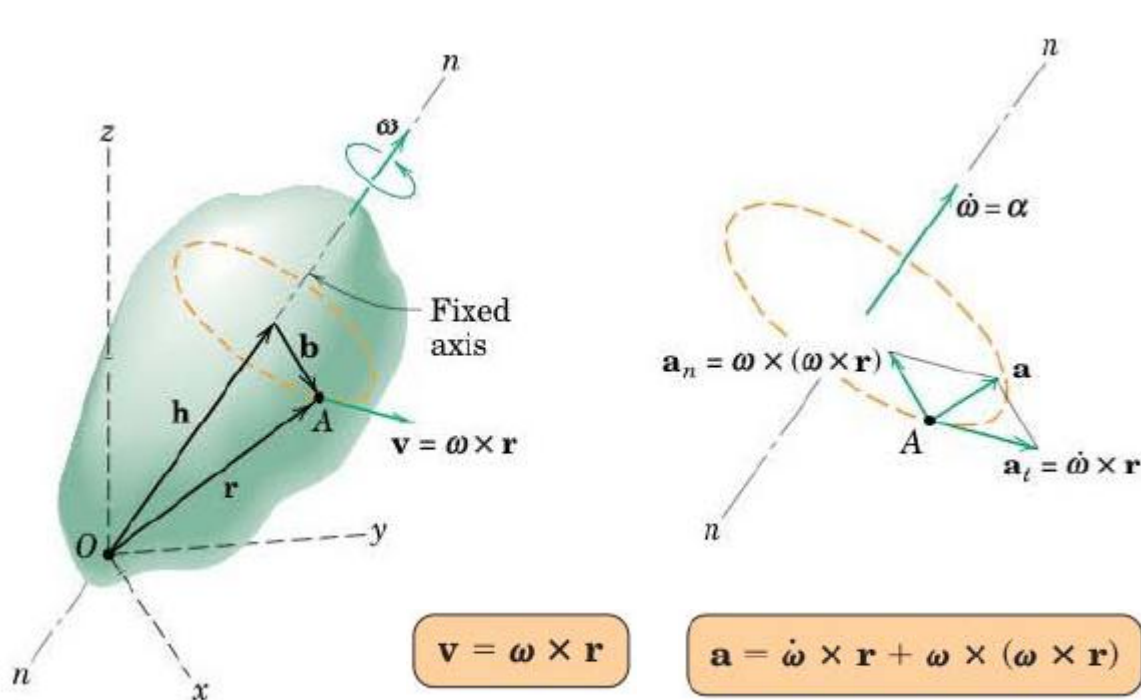
Corpo rígido $\Rightarrow \mathbf{r}_{A/B}$ é constante. Além disso, ω e α são nulos em qualquer instante, pois o corpo não roda no espaço, mantendo-se sempre paralelo a si mesmo.

Assim, a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} são iguais em todos os pontos, e têm componentes nulas na perpendicular ao plano.

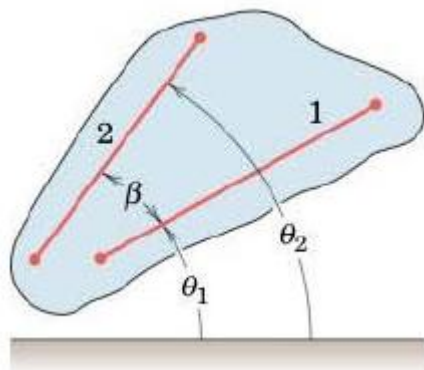
O movimento do corpo rígido é caracterizado apenas pelos 2 vectores \mathbf{v} e \mathbf{a} , que são iguais para todos os pontos, podendo \mathbf{a} ser nulo no movimento rectilíneo uniforme.



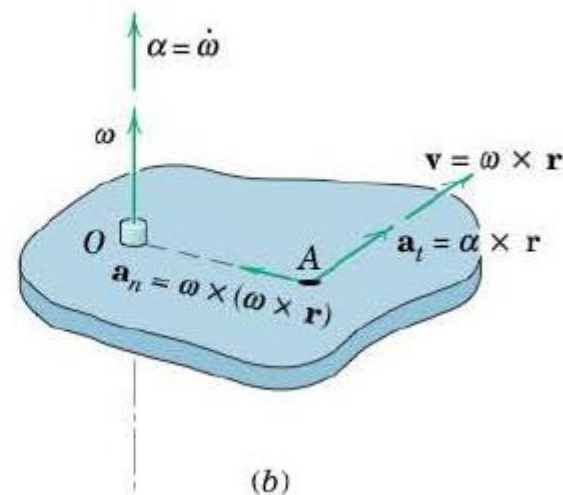
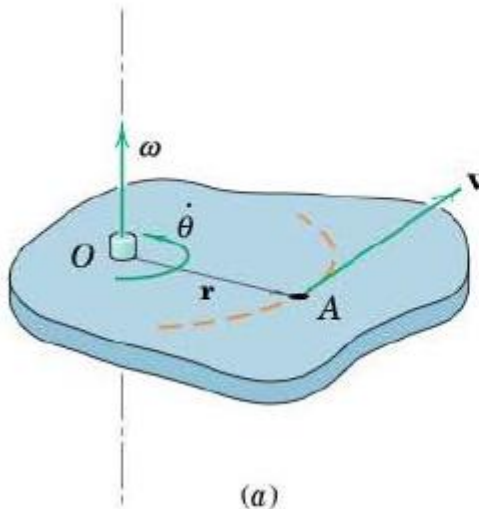
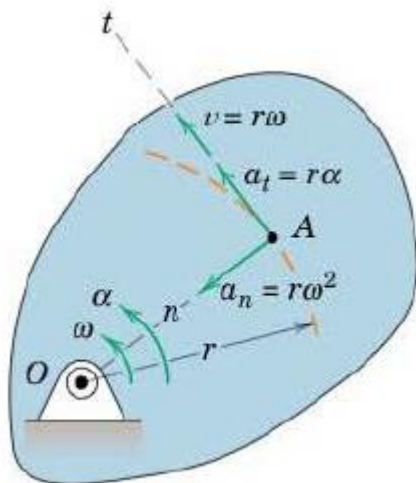
2 – Rotação em torno de eixo fixo



Direcção de $\boldsymbol{\omega}$ (não-nulo) é constante;
 Se o movimento é uniforme, então α é nulo, senão α é paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ (pois $\boldsymbol{\omega}$ só pode variar de tamanho);
 \mathbf{v} e \mathbf{a} estão nos planos perpendiculares a $\boldsymbol{\omega}$;
 \mathbf{v} e \mathbf{a} são nulos nos pontos do eixo.



No movimento de rotação em torno de um eixo fixo de um corpo rígido todos os segmentos de recta têm igual rotação θ no plano, associada à velocidade angular ω e à aceleração angular α (se o movimento de rotação for não-uniforme).



$$v = r\omega$$

$$a_n = r\omega^2 = v^2/r = v\omega$$

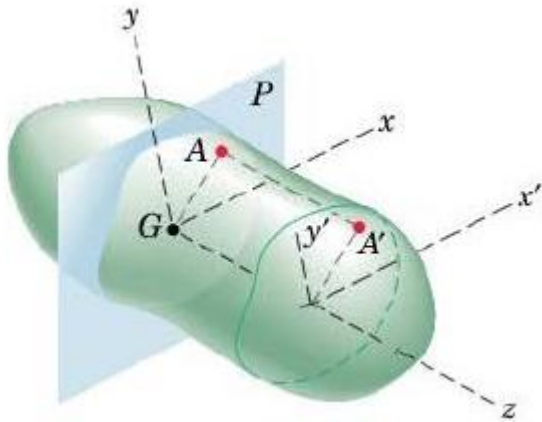
$$a_t = r\alpha$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

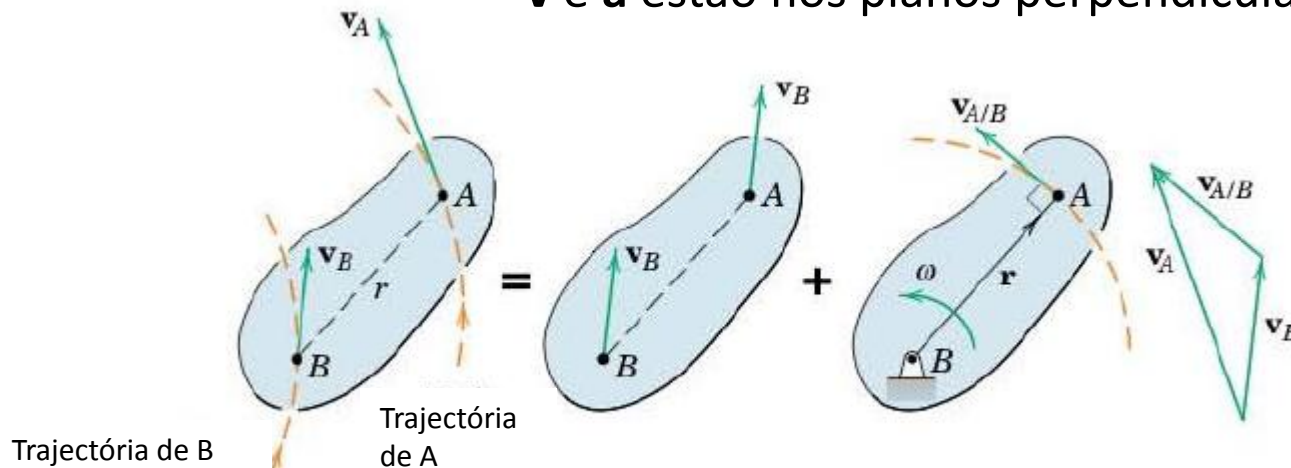
3 – Movimento plano geral

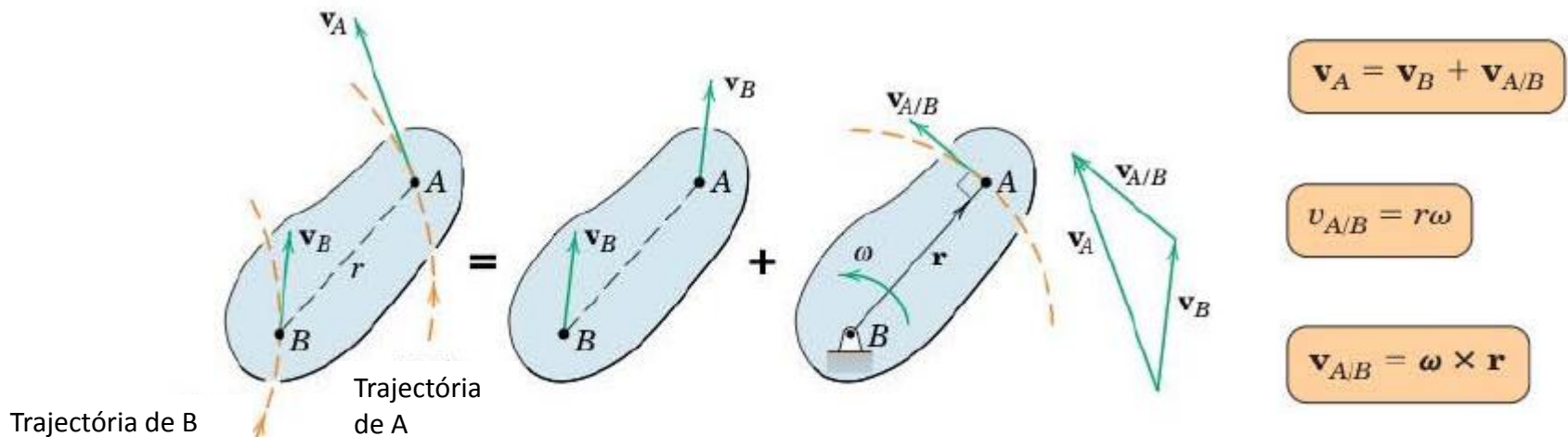


O corpo rígido roda em torno de um eixo que não está fixo e que se move ao longo do plano mantendo-se sempre perpendicular a este.

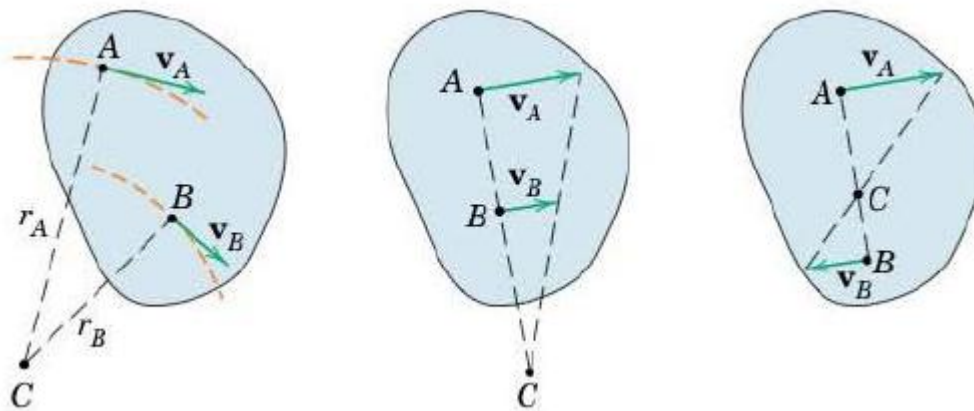
Assim, a direcção de ω (não-nulo) é constante; Se ω é constante, então α é nulo, senão α é paralelo a ω (pois ω só pode variar de tamanho).

\mathbf{v} e \mathbf{a} estão nos planos perpendiculares a ω .



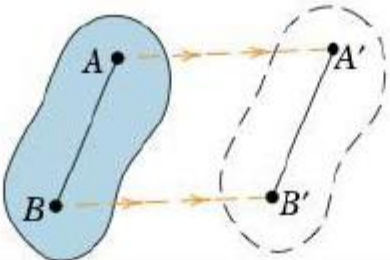
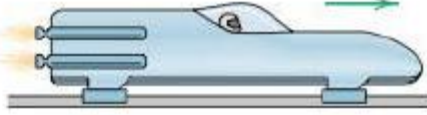
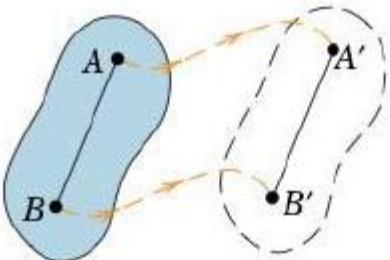
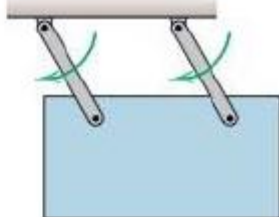
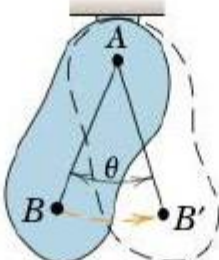

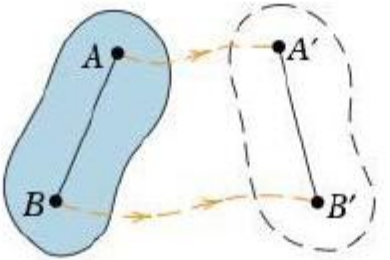
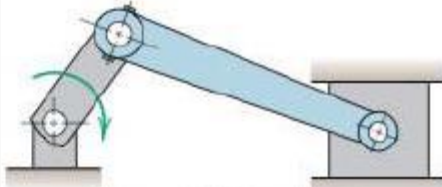


Centro instantâneo de rotação => ponto em torno do qual o corpo roda num dado instante. Corresponde à intersecção do eixo instantâneo de rotação com o plano do movimento. Atenda-se a que em cada instante \mathbf{v} é nulo no centro instantâneo de rotação, mas \mathbf{a} não o é (porquê?).

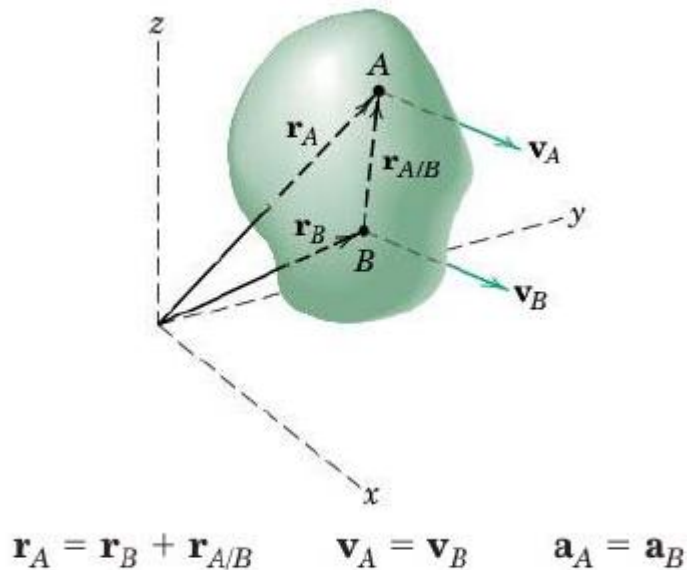


Tipos de movimento plano

Exemplos

<p>Translação rectilínea (plana)</p>		
<p>Translação curvilínea plana</p>		
<p>Rotação em torno de eixo fixo</p>		
<p>Movimento plano geral</p>		

4 – Translação não-plana

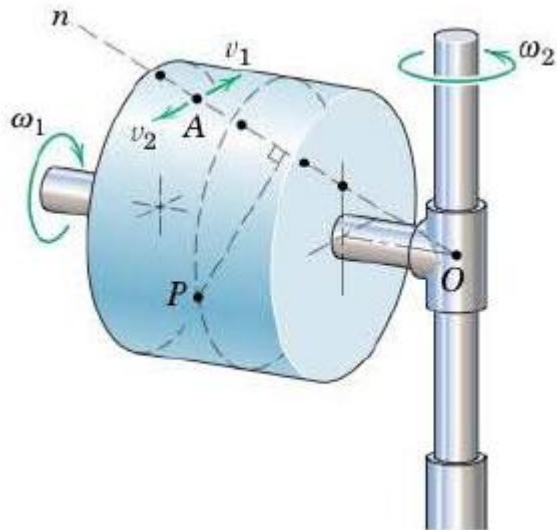


No caso de translação não-plana o movimento é curvilíneo.

Tal como se referiu para a situação de translação plana de um corpo rígido, tem-se que $\mathbf{r}_{A/B}$ é constante, sendo também $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ nulos em qualquer instante, pois o corpo não roda no espaço, mantendo-se sempre paralelo a si mesmo.

Tal como no caso plano, a velocidade \mathbf{v} e a aceleração \mathbf{a} iguais em todos os pontos, sendo também o movimento do corpo rígido caracterizado apenas pelos 2 vectores \mathbf{v} e \mathbf{a} , que são iguais para todos os pontos.

5 – Rotação em torno de ponto fixo



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

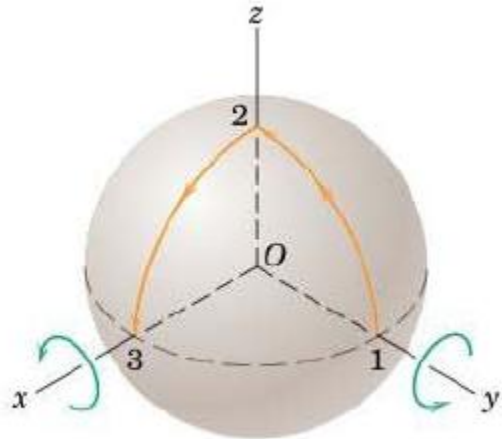
Movimento não-plano;

Direcção de $\boldsymbol{\omega}$ não é constante $\Rightarrow \boldsymbol{\omega}$ não pode ser paralelo a $\boldsymbol{\alpha}$;

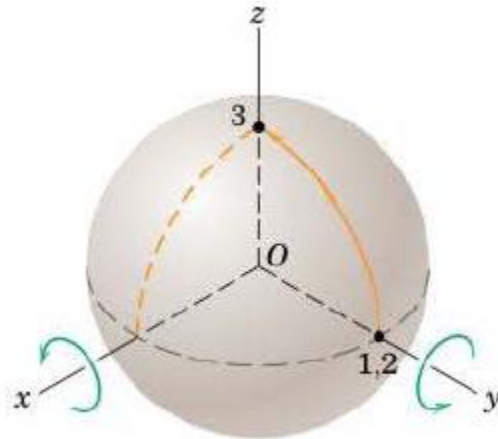
\mathbf{v} é nulo nos pontos do eixo instantâneo de rotação nO ;

\mathbf{a} não é nulo nos pontos desse eixo, excepto no ponto fixo O (porquê?);

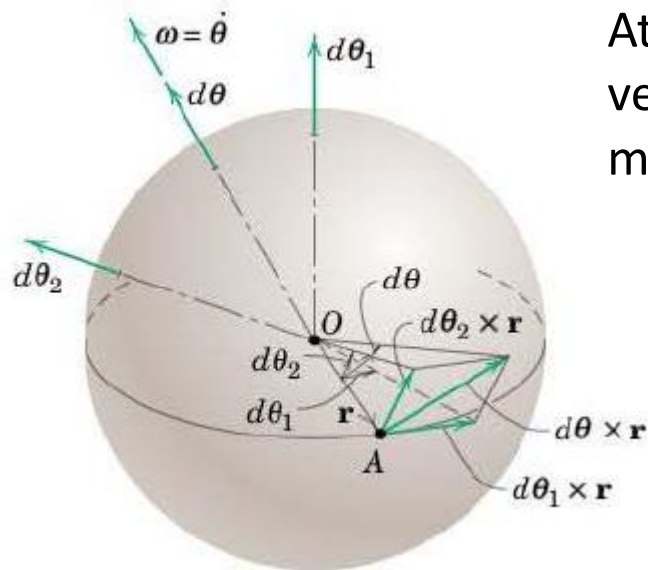
Numa análise considera-se a rotação em torno do eixo instantâneo de rotação.



θ_x seguido de θ_y



θ_y seguido de θ_x



Atenção: rotações finitas θ não definem um vector (não se verifica a regra do paralelogramo), mas rotações infinitesimais $d\theta$ sim.

$$d\theta_1 \times \mathbf{r} + d\theta_2 \times \mathbf{r} = (d\theta_1 + d\theta_2) \times \mathbf{r}$$

$$\omega = \dot{\theta} = \omega_1 + \omega_2.$$

6 – Movimento geral

Neste caso de movimento não-plano, os vectores ω , α , \mathbf{v} e \mathbf{a} têm direcções e magnitudes arbitrárias, mas distingue-se do caso anterior pelo facto de não haver um ponto fixo no espaço.

A não-existência de um ponto fixo no espaço leva a que em cada instante exista um eixo não-fixado (i.e., que varia de posição no tempo) em torno do qual o corpo roda instantaneamente, possuindo, todavia, simultaneamente um movimento de translação ao longo da direcção desse mesmo eixo.