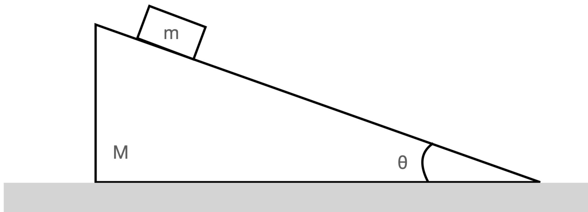
Ano letivo 2022/23

ONDAS E MECÂNICA APLICADA

Exercícios - Parte 1 - Folha 5

NOTA: Caso seja necessário considere uma velocidade do som no ar de 340 ms^{-1}.

1. Um bloco de massa m encontra-se inicialmente em repouso sobre um plano inclinado de massa M (ver figura).

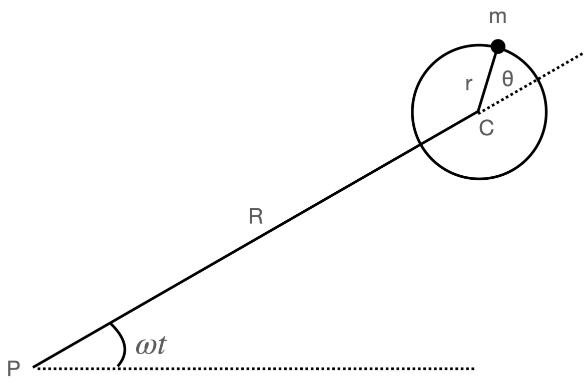


Considerando que não existe atrito entre nenhuma das superfícies determine a aceleração do plano inclinado

(a) por uma análise das forças;

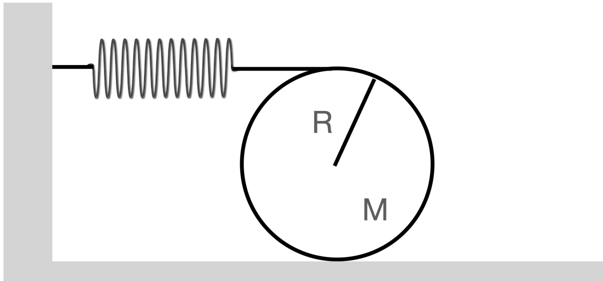
(b) utilizando o lagrangiano.

2. Uma conta de vidro de massa m move-se sem atrito numa calha circular de raio r. O centro da calha, C, move-se com velocidade angular ω constante em torno do ponto P conforme ilustrado na figura.

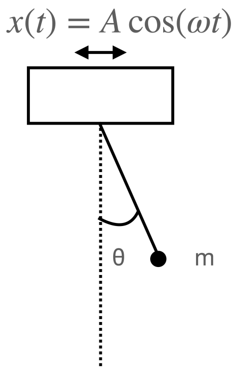


Sabendo que $\overline{PC} = R$ e que o sistema está na horizontal determine a equação do movimento e a frequência de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio.

3. O topo de uma roda de massa M e raio R encontra-se ligada a uma mola de constante elástica k. Considere que a massa da roda se encontra no seu centro. Se a roda rola sem deslizar determine a frequência de pequenas oscilações.



4. Um pêndulo constituído por uma barra l e massa m encontra-se ligado a um suporte cuja posição é dada pela expressão $x(t) = A\cos(\omega t)$ conforme indicado na figura. Na situação em que o suporte e a barra não têm massa determine a equação que descreve o ângulo θ do pêndulo em função do tempo.



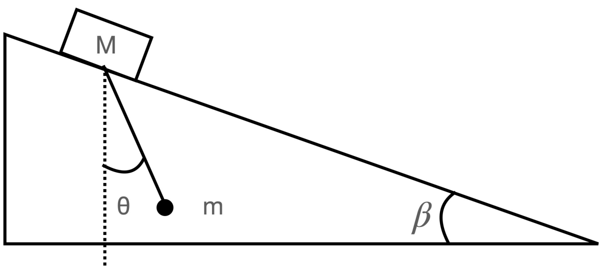
Mostre que

(a) $L = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgl\cos\theta$;

(b) a equação do movimento é $l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta = -g\sin\theta$;

(c) na aproximação de pequenas oscilações a equação do movimento pode ser descrita pela equação $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = a\omega^2\cos(\omega t)$ em que $\omega_0^2 = g/l$ e $a = A/l$. Note que esta equação corresponde à de um oscilador forçado.

5. Uma massa M pode deslizar sem atrito num plano inclinado. Um pêndulo de comprimento l e massa m encontra-se suspenso da massa M conforme indicado na figura. Determine:



(a) as equações do movimento;

(b) os modos normais e as respectivas frequências na situação de pequenas oscilações.

Soluções:

1. $\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$

2. $\omega_\star^2 = \frac{R}{r}\omega^2$

3. $\omega^2 = \frac{4k}{M}$

4.

5. (a) $(M+m)\ddot{z} + ml\left(\ddot{\theta}\cos(\theta+\beta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta+\beta)\right] = (M+m)g\sin\beta;$
   $l\ddot{\theta} + \ddot{z}\cos(\theta+\beta) = -g\sin\theta$

   (b) $\omega_1 = 0;\ \omega_2^2 = \left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\cos\beta.$