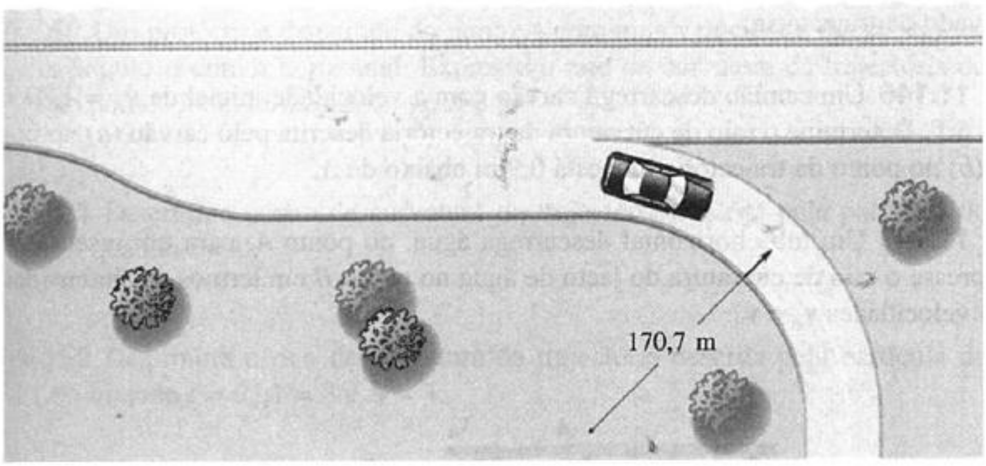
SEBENTA PRÁTICA DE MECÂNICA APLICADA
VOLUME I: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt)
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade de Aveiro

2012 ● versão 1.0

CAPÍTULO I: CINEMÁTICA DAS PARTÍCULAS

Exercício 1: Um motorista viaja ao longo de uma secção recta de uma auto--estrada e, antes de deixar a auto-estrada através de uma rampa circular com um raio de 171 m, reduz a velocidade do seu automóvel a uma razão constante. Continua então a desacelerar à mesma razão constante de tal modo que 10 s depois de entrar na rampa a sua velocidade decresce para 32,2 km/h, velocidade que depois se mantém constante. Sabendo que, a esta velocidade constante, a aceleração total do automóvel é igual a um quarto do seu valor antes de entrar na rampa, determine o máximo valor da aceleração.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 11.141 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 1: RESOLUÇÃO

DADOS:

PEDIDO: $\|\vec{a}(t)\|_{MÁX}$?

$t < 0s \rightarrow a_t =$ CONSTANTE ≤ 0

$0s \leq t \leq 10s \rightarrow a_t =$ CONSTANTE < 0

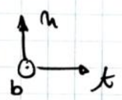
$10s < t \rightarrow a_t = 0$

$R = 171\,m$

$\|\vec{v}(t \geq 10)\| = 32,2\,km/h = 8,94\,m/s$

$\|\vec{a}(t > 10)\| = \frac{1}{4}\|\vec{a}(t < 0)\|$

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL:



A ESCOLHA DO TRIEDO DE FRENET PRENDE-SE COM O FACTO DE AS ACELERAÇÕES TANGENCIAL E NORMAL SEREM AS COMPONENTES DA ACELERAÇÃO NESTE REFERENCIAL.

ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

O VEÍCULO TEM MOVIMENTO PLANO (NA HORIZONTAL)

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DAS PARTÍCULAS COM A HIPÓTESE SIMPLIFICATIVA DO VEÍCULO SER UMA PARTÍCULA. ASSIM, O VEÍCULO TEM UNICAMENTE TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA, SENDO O SEU MOVIMENTO CARACTERIZADO PELO DE UM DOS SEUS PONTOS, EM PARTICULAR O SEU CENTRO DE MASSA.

iv) RESOLUÇÃO:

O VEÍCULO SOFRE UMA TRAVAGEM ($a_t < 0$) ATÉ AOS 10 S. NO ENTANTO, ATÉ $t = 0s$ O MOVIMENTO É RECTILÍNEO ($\rho = \infty$), PELO QUE $a_n = 0$. APÓS $t = 0s$ A TRAJECTÓRIA PASSA A SER UM QUARTO DE CÍRCULO COM RAIO R, PELO QUE $a_n \neq 0$.

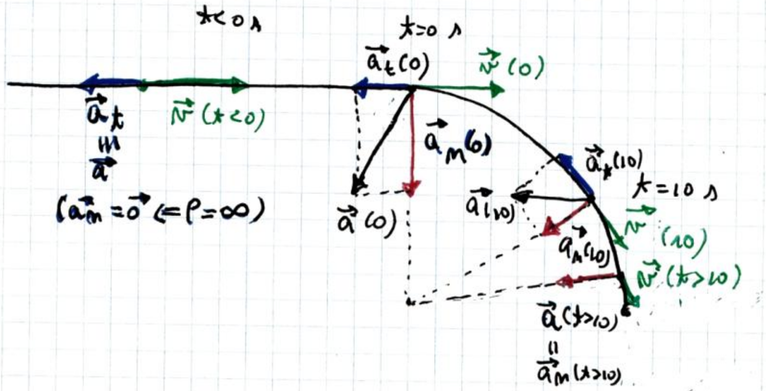
ASSIM, TEM-SE:

$t<0\,s \Rightarrow \begin{cases} a_t = \text{CONSTANTE} < 0 \\ a_n = 0 \Leftarrow \rho = \infty \end{cases}$

$0\,s \leq t \leq 10\,s \Rightarrow \begin{cases} a_t = \text{CONSTANTE} < 0 \\ a_n \neq 0 \Leftarrow \rho = R \end{cases}$

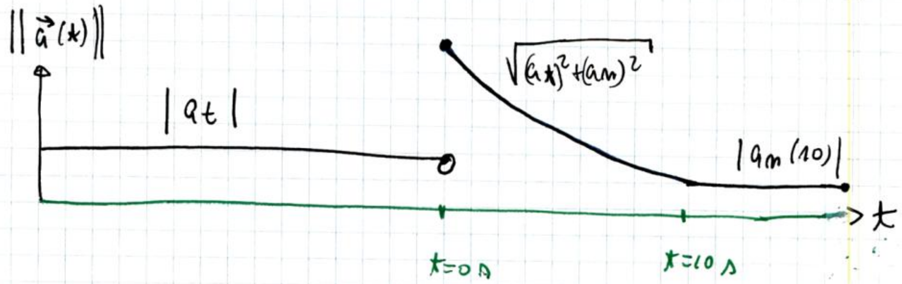
$10\,s < t \Rightarrow \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n \neq 0 \Leftarrow \rho = R \end{cases}$

GRAFICAMENTE TEMOS:



NOTA: $\begin{cases} \|\vec{a}_t(t<0)\| = \|\vec{a}_t(0)\| = \|\vec{a}\,(0<t\leq 10)\| \\ \|\vec{v}(t<0)\| > \|\vec{v}(0)\| > \|\vec{v}(10)\| \\ \|\vec{v}(t>10)\| = \|\vec{v}(10)\| \end{cases}$

ASSIM, COM BASE NUMA PLANIFICAÇÃO TEM-SE:



DESTE MODO, $\|\vec{a}(t)\|$ É MÁXIMA PARA $t=0\,s$, SENDO

$$\|\vec{a}(0)\| = \sqrt{a_t^2(0)+a_n^2(0)} = \sqrt{a_t^2+\left(\frac{v^2(0)}{R}\right)^2}$$

AS INCÓGNITAS SÃO $\begin{cases} a_t \\ v(0) \end{cases}$, PELO QUE SÃO NECESSÁRIAS 2 CONDIÇÕES!

1ª CONDIÇÃO: $\|\vec{a}(t>10)\| = \frac{1}{4}\|\vec{a}(t<0)\| \Rightarrow$

$$\sqrt{0^2+\left(\frac{v^2(t>0)}{R}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{a_t^2+0^2} \Rightarrow$$

$$|a_t| = 4\,\frac{v^2(t>10)}{R} = 4\,\frac{v^2(10)}{R} = \frac{4\times(8,94)^2}{171} \Rightarrow$$

$$|a_t| = 1,87\ m/s^2$$

MAS $a_t<0 \Rightarrow \boxed{a_t=-1,87\ m/s^2}$

2ª CONDIÇÃO: ATÉ 10 s O MOVIMENTO É UNIFORMEMENTE RETARDADO, PELO QUE

$$a_t = \frac{dv}{ds} = \text{constante} \Rightarrow v = v_0 + a_t\, t \Rightarrow$$

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\, a_t t^2$$

CONSIDERANDO A LEI DAS VELOCIDADES PARA $t=10\,s$

$$v(10) = v_0 + a_t \times 10 \Rightarrow v_0 = v(10) - a_t \times 10 \Rightarrow$$

$$v_0 = 8{,}94 - (-1{,}87) \times 10 = 27{,}6 \ m/s \Rightarrow$$

$$\boxed{v_0 = 27{,}6 \ m/s}$$

ASSIM, COM BASE NAS INCÓGNITAS DETERMINADAS, VEM QUE

$$\|\vec{a}(t)\|_{MÁX} = \|\vec{a}(0)\| = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2(0)}{R}\right)^2} = \sqrt{(-1{,}87)^2 + \left(\frac{27{,}6^2}{171}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}(t)\|_{MÁX} = 4{,}8 \ m/s^2 \ //$$

NOTA: A LEI DO ESPAÇO PERCORRIDO NÃO FOI UTILIZADA, MAS PERMITE VERIFICAR SE PARA $t=10s$ O VEÍCULO AINDA SE ENCONTRA NA RAMPA CURVA, TAL COMO SE ADMITIU!

ENTÃO, PARA $t=10s$, VEM

$$s(10) = s_0 + v_0 \times 10 + \frac{1}{2} a_t \times 10^2 \Rightarrow$$

$$s(10) = 0 + 27{,}6 \times 10 - \frac{1}{2} 1{,}87 \times 10^2 = 182{,}5 \ m$$

ENTÃO $s(10) = 182{,}5 \ m \Rightarrow \theta(10) = \dfrac{s(10)}{R} = \dfrac{182{,}5}{171} = 1{,}07 \ rad$

$$\Rightarrow \theta(10) = 1{,}07 \ \cancel{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \ \cancel{rad}} = 61{,}3^\circ < 90^\circ \quad \text{OK!}$$

v) CONCLUSÃO: $\|a(t)\|_{MÁX} = 4{,}8 \ m/s^2$

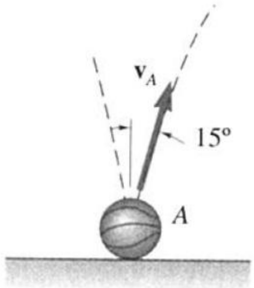
— " FIM " —

CAPÍTULO I: CINEMÁTICA DAS PARTÍCULAS

Exercício 2: Uma bola de basquetebol é atirada contra o chão no ponto *A* e ressalta com a velocidade $\mathbf{v}_A$, de intensidade 2,3 m/s, como é indicado na figura. Determine o raio de curvatura da trajectória descrita pela bola:

(a) no ponto *A*;

(b) no ponto mais elevado da trajectória.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 11.145 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 2: RESOLUÇÃO

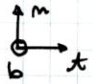
<u>DADOS</u>: $\|\vec{v}_A\| = 2{,}3\,m/s$

$\measuredangle(\vec{v}_A, \hat{j}) = 15^\circ$

<u>PEDIDO</u>: a) RAIO DE CURVATURA EM A?

b) RAIO DE CURVATURA NO PONTO MAIS ELEVADO DA TRAJECTÓRIA?

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL:



A ESCOLHA DO TRIEDO DE FRENET PRENDE-SE COM O FACTO DE O RAIO DE CURVATURA SER UMA VARIÁVEL EXPLÍCITA QUANDO SE DECOMPÕE A ACELERAÇÃO NAS SUAS COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL!

ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

A BOLA DE BASQUETEBOL TEM MOVIMENTO PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DAS PARTÍCULAS COM AS SEGUINTES HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS:

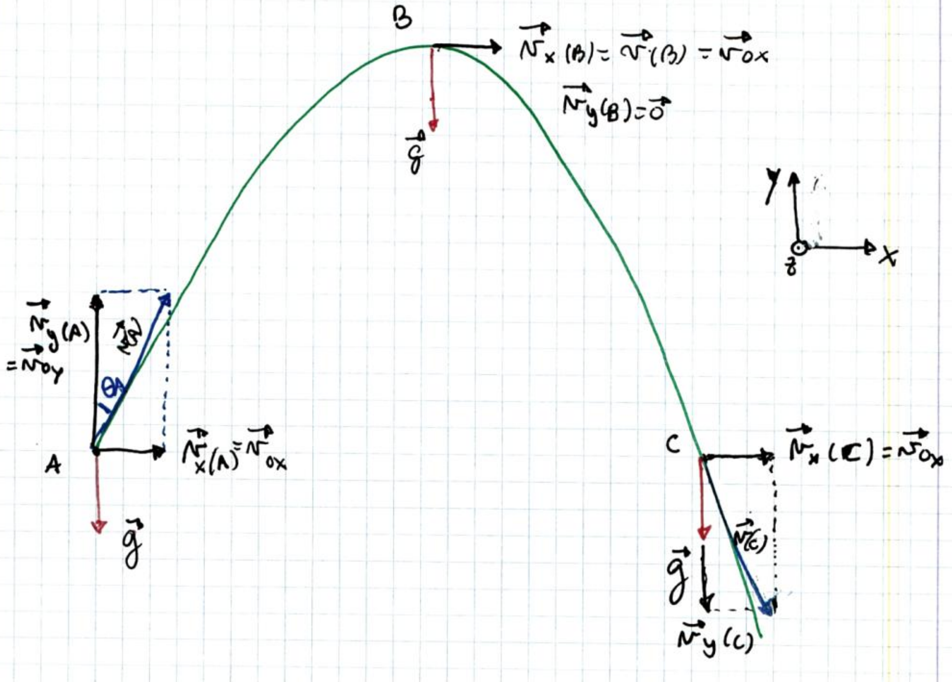
a) A BOLA É UMA PARTÍCULA, PELO QUE NÃO CONSIDERA QUALQUER MOVIMENTO DE ROTAÇÃO. ASSIM, A BOLA TEM UNICAMENTE TRANSLAÇÃO (CURVILÍNEA) E O SEU MOVIMENTO PODE SER CARACTERIZADO PELO DE UM DOS SEUS PONTOS, EM PARTICULAR O SEU CENTRO DE MASSA.

b) NÃO SE CONSIDERA O EFEITO DO ATRITO DO AR, PELO QUE O PROBLEMA CORRESPONDE AO ESTUDO DE UM PROJÉCTIL SUJEITO APENAS AO EFEITO DA GRAVIDADE PARA UM CERTO VECTOR DE VELOCIDADE INICIAL.

iv) RESOLUÇÃO:

A TRAJECTÓRIA IRÁ CORRESPONDER A PARTE DE UMA PARÁBOLA NO PLANO VERTICAL CONSIDERADO. NO ENTANTO, A TRAJECTÓRIA E A EVOLUÇÃO DOS VECTORES DE VELOCIDADE E ACELERAÇÃO PODEM SER ANALISADOS COM BASE NAS COORDENADAS CARTESIANAS OU COM O TRIEDO DE FRENET, RESULTANDO EM ANÁLISES EQUIVALENTES, EMBORA REVELADORAS DE DIFERENTES ASPECTOS.

ASSIM, PARA OXYZ TEM-SE:



TEM-SE: $\vec{a}(A)=\vec{a}(B)=\vec{a}(C)=\vec{g}=-g\hat{j} \Rightarrow$

EM XY: $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

EM X: MOVIMENTO UNIFORME

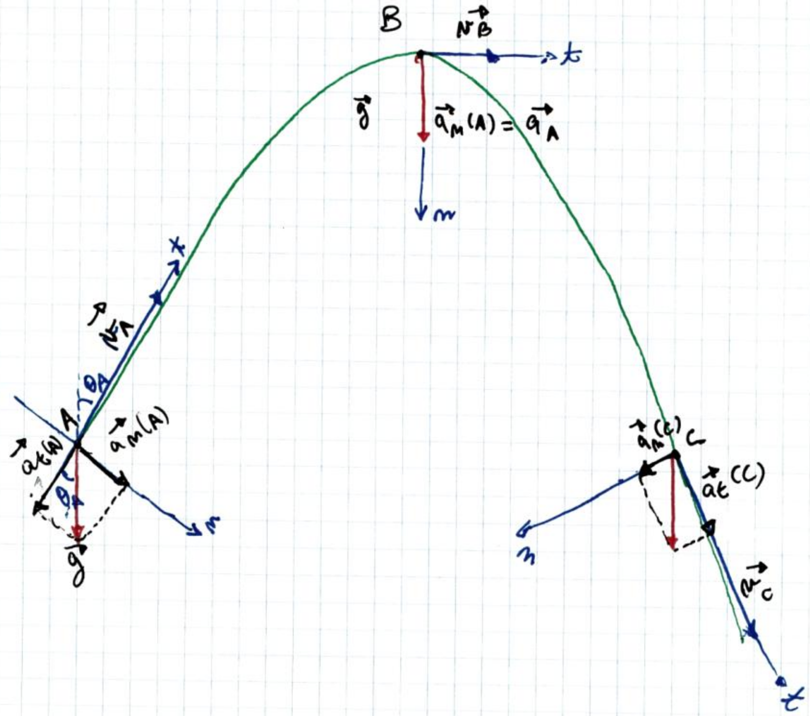
EM Y: MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

ESTA É UMA DAS ANÁLISES MAIS UTILIZADA NA PRÁTICA, MAS NÃO EVIDENCIA O VALOR DO RAIO DE CURVATURA!

DO PONTO A CONCLUI-SE QUE

$$\begin{cases} v_x(A) = v_{0x} = v_A \operatorname{sen} \theta_A \\ v_y(A) = v_{0y} = v_A \cos \theta_A \end{cases}$$

POR OUTRO LADO, PARA tmb TEM-SE:



NESTE CASO $\vec{v} = v\hat{t} \Rightarrow \vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} \Rightarrow$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

ASSIM, DA ANÁLISE NO PONTO A TEM-SE:

$$\begin{cases} a_t(A) = g\cos\theta_A \\ a_n(A) = g\,\mathrm{sen}\,\theta_A \end{cases}$$

ASSIM, TEM-SE:

a) $a_n(A) = g\,\mathrm{sen}\,\theta_A = \frac{v_A^2}{\rho_A} \Rightarrow \rho_A = \frac{v_A^2}{g\,\mathrm{sen}\,\theta_A} = \frac{(2,3)^2}{9,8\times\mathrm{sen}\,15^\circ} = 2,1\ m$ //

b) $a_n(B) = g = \frac{v_B^2}{\rho_B} \Rightarrow \rho_B = \frac{v_B^2}{g} = \frac{v_{0x}^2}{g} = \frac{(v_A\,\mathrm{sen}\,\theta_A)^2}{g} = \frac{(2,3\,\mathrm{sen}\,15^\circ)^2}{9,8} = 0,036\ m$ //

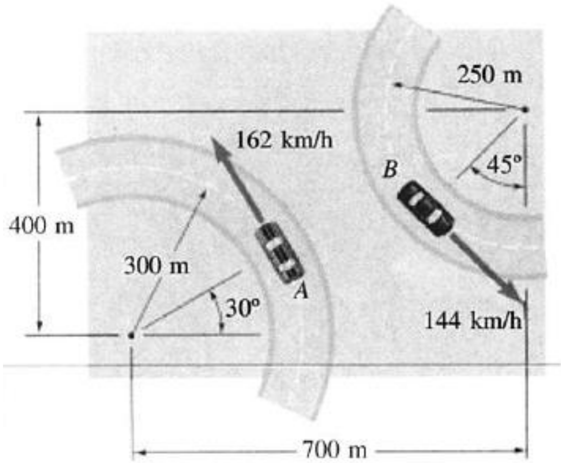
— FIM —

CAPÍTULO I: CINEMÁTICA DAS PARTÍCULAS

Exercício 3: Os carros de corrida *A* e *B* deslocam-se nas secções circulares das pistas. No instante indicado, a velocidade de *A* decresce a uma razão de 7 m/s² e a velocidade de *B* aumenta a uma razão de 2 m/s². Para as posições indicadas, determine:

(a) a velocidade de *B* relativamente a *A*;

(b) a aceleração de *B* relativamente a *A*.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 11.142 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 3: RESOLUÇÃO

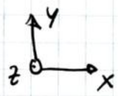
DADOS: $\|(\vec{a}_A)_t\| = 7\,m/s^2$, SENDO $\frac{dv}{dt}(A) = -7\,m/s^2$
$\|(\vec{a}_B)_t\| = 2\,m/s^2$, SENDO $\frac{dv}{dt}(B) = +2\,m/s^2$
$\|\vec{v}_A\| = 162\,km/h$ E $\|\vec{v}_B\| = 144\,km/h$
MEDIDAS GEOMÉTRICAS

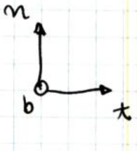
PEDIDO: a) $\vec{v}_{B/A}$
b) $\vec{a}_{B/A}$

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL:

PARA VELOCIDADES: OXYZ

PARA ACELERAÇÕES: OXYZ OU Otnb





ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

VEÍCULOS TÊM MOVIMENTO PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DAS PARTÍCULAS EM QUE SE DESPREZA QUALQUER MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DOS VEÍCULOS, PELO QUE O MOVIMENTO DE CADA UM É CARACTERIZADO PELO DE UM DOS SEUS PONTOS, EM PARTÍCULAR O SEU CENTRO DE MASSA. NESTE CONTEXTO, OS VEÍCULOS PASSAM A TER MOVIMENTO PLANO DE TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA.

iv) RESOLUÇÃO:

a) $\vec{v}_{B/A}$?

$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$\vec{v}_B = \|\vec{v}_B\| \hat{m}_{\vec{v}_B} = 40 (\cos 45° \hat{i} - \sin 45° \hat{j}) \Leftarrow$

$\vec{v}_A = \|\vec{v}_A\| \hat{m}_{\vec{v}_A} = 45 (-\sin 30° \hat{i} + \cos 30° \hat{j}) \Leftarrow$

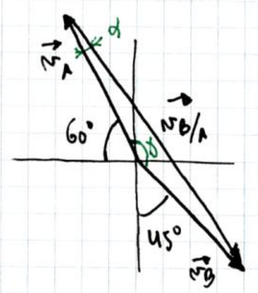
SENDO $\begin{cases} \|\vec{v}_B\| = 144\,km/h = 40\,m/s \\ \|\vec{v}_A\| = 162\,km/h = 45\,m/s \end{cases}$

ASSIM, TEM-SE QUE

$$\vec{v}_B = 28\hat{i} - 28\hat{j}$$
$$\vec{v}_A = -23\hat{i} + 39\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B - \vec{v}_A = (51\hat{i} - 67\hat{j})\ m/s = \vec{v}_{B/A}$$ //

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE:



$\Rightarrow$ TEOREMA DE CARNOT

$$v_{B/A}^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2\, v_A v_B \cos\gamma$$
$$= 45^2 + 40^2 - 2\times 45\times 40 \times \cos(165°) \Rightarrow$$

$$v_{B/A} = 84\, m/s$$

$\Rightarrow$ LEI DOS SENOS

$$\frac{v_B}{\sin\alpha} = \frac{v_{B/A}}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_B}{v_{B/A}}\sin\gamma =$$
$$= \frac{40}{84}\times \sin 165° \Rightarrow$$

$\Leftarrow \quad \alpha = 7{,}1°$

ENTÃO $\vec{v}_{B/A} = \|\vec{v}_{B/A}\|\ \hat{n}_{\vec{v}_{B/A}} = 84\,(\cos 52{,}9°\,\hat{i} - \sin 52{,}9°\,\hat{j}) \Rightarrow$

$$\vec{v}_{B/A} = (51\hat{i} - 67\hat{j})\ m/s$$

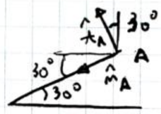
b) $\vec{a}_{B/A}$?

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

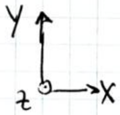
$$\begin{cases} \vec{a}_B = (a_B)_t\,\hat{t}_B + (a_B)_n\,\hat{n}_B \\ \vec{a}_A = (a_A)_t\,\hat{t}_A + (a_A)_n\,\hat{n}_A \end{cases}$$

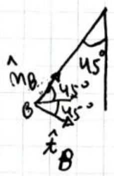
SENDO
$$\begin{cases} (a_B)_t = 2\ m/s^2 \\ (a_A)_t = -7\ m/s^2 \\ (a_B)_n = (v_B)^2/\rho_B = (40)^2/250 = 6,4\ m/s^2 \\ (a_A)_n = (v_A)^2/\rho_A = (45)^2/300 = 6,8\ m/s^2 \end{cases}$$

E



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{t}_A = -\text{sen}30°\,\hat{\imath} + \cos 30°\,\hat{\jmath} \\ \hat{n}_A = -\cos 30°\,\hat{\imath} - \text{sen}30°\,\hat{\jmath} \end{cases}$$





$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{t}_B = \cos 45°\,\hat{\imath} - \text{sen}45°\,\hat{\jmath} \\ \hat{n}_B = \cos 45°\,\hat{\imath} + \text{sen}45°\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{a}_B = 2(\cos 45°\,\hat{\imath} - \text{sen}45°\,\hat{\jmath}) + 6,4\,(\cos 45°\,\hat{\imath} + \text{sen}\,45°\,\hat{\jmath}) \\ \vec{a}_A = -7\,(-\text{sen}30°\,\hat{\imath} + \cos 30°\,\hat{\jmath}) + 6,8\,(-\cos 30°\,\hat{\imath} - \text{sen}\,30°\,\hat{\jmath}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_B = 5,9\,\hat{\imath} + 3,1\,\hat{\jmath} \\ \vec{a}_A = -2,4\,\hat{\imath} - 9,5\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = (8,3\,\hat{\imath} + 12,6\,\hat{\jmath})\ m/s^2$$

v) CONCLUSÃO:

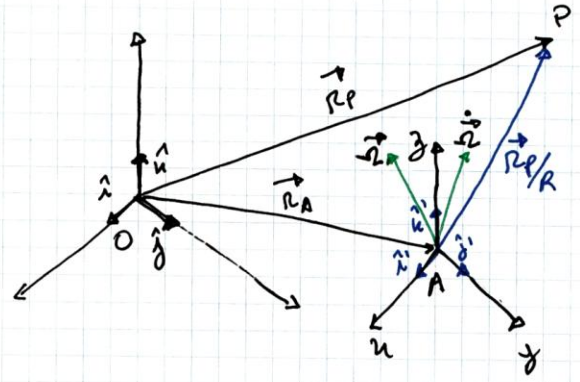
a) $\vec{v}_{B/A} = (51\,\hat{\imath} - 67\,\hat{\jmath})\ m/s$

b) $\vec{a}_{B/A} = (8,3\,\hat{\imath} + 12,6\,\hat{\jmath})\ m/s^2$

—FIM—

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) ● versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica ● Universidade de Aveiro

(A) MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS



EM RELAÇÃO AO VECTOR POSIÇÃO DE P TEM-SE:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \vec{r}_P = r_{Px}\hat{i} + r_{Py}\hat{j} + r_{Pz}\hat{k} \\ \vec{r}_A = r_{Ax}\hat{i} + r_{Ay}\hat{j} + r_{Az}\hat{k} \\ \vec{r}_{P/A} = r_{P/Ax}\hat{i}' + r_{P/Ay}\hat{j}' + r_{P/Az}\hat{k}' \end{cases}$$

ATENDENDO A QUE OS VERSORES $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ E $\hat{k}'$ RODAM COM $\vec{\Omega}$ TEM-SE QUE AS DERIVADAS DE UM VECTOR $\vec{Q}$ (DEFINIDO EM $Oxyz$) NOS REFERENCIAIS $OXYZ$ E $Oxyz$ SE ENCONTRAM RELACIONADAS POR:

$$\left[\frac{d\vec{Q}}{dt}\right]_{OXYZ} = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt}\right]_{Oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{Q}$$

ASSIM, DERIVANDO EM ORDEM AO TEMPO A RELAÇÃO, EM $OXYZ$,

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \quad \text{VEM}$$

$$\left[\frac{d}{dt}(\vec{r}_P)\right]_{OXYZ} = \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{r}_{P/A})\right]_{OXYZ} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \left[\frac{d\vec{r}_{P/A}}{dt}\right]_{OXYZ} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \left[\frac{d}{dt}\vec{r}_{P/R}\right]_{oxyz} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R}$$

REORDENANDO TEM-SE:

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\left(\vec{v}_A + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R}\right)}_{\substack{\vec{v}_{P'} \\ \downarrow \\ \text{TRANSPORTE}}} + \underbrace{\vec{v}_{P/R}}_{\substack{\downarrow \\ \text{EM RELAÇÃO AO} \\ \text{EIXO ROTATIVO R}}}$$

LOGO $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/R} = \vec{v}_A + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R} + \vec{v}_{P/R}}$

DERIVANDO A RELAÇÃO ANTERIOR EM ORDEM AO TEMPO, EM OXYZ, VEM

$$\left[\frac{d}{dt}(\vec{v}_P)\right]_{OXYZ} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_A + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R} + \vec{v}_{P/R}\right)\right]_{OXYZ} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_P = \frac{d}{dt}\vec{v}_A + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\left[\frac{d}{dt}\vec{r}_{P/R}\right]_{OXYZ} + \left[\frac{d}{dt}\vec{v}_{P/R}\right]_{OXYZ} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\left(\left[\frac{d}{dt}\vec{r}_{P/R}\right]_{oxyz} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R}\right) + \left(\left[\frac{d}{dt}\vec{v}_{P/R}\right]_{oxyz} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{P/R}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{v}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R}\right) + \left(\vec{a}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_{P/R}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{a}_P}_{\substack{\downarrow \\ \text{ABSOLUTA}}} = \underbrace{\vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}_{P/R}\right)}_{\substack{\vec{a}_{P'} \\ \downarrow \\ \text{TRANSPORTE}}} + \underbrace{\vec{a}_{P/R}}_{\substack{\downarrow \\ \text{EM RELAÇÃO AO} \\ \text{EIXO ROTATIVO R}}} + \underbrace{2\,\vec{\Omega}\times\vec{v}_{P/R}}_{\substack{\downarrow \\ \text{COMPLEMENTAR} \\ \text{OU DE} \\ \text{CORIOLIS}}}$$

SENDO AINDA $\begin{cases} \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{P/R} = \text{ACELERAÇÃO TANGENCIAL} \\ \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/R}) = \text{ACELERAÇÃO CENTRÍPETA} \end{cases}$

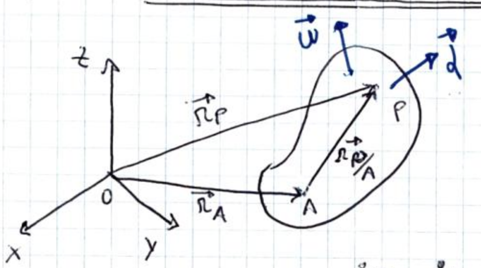
ASSIM, TEM-SE:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_c = \\ &= \left[\vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/R})\right] + \vec{a}_{P/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/R} \end{aligned}}$$

B MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

VÃO SER CONSIDERADAS 2 SITUAÇÕES, UMA PRIMEIRA EM QUE SE TEM UM CORPO RÍGIDO ÚNICAMENTE. UMA SEGUNDA EM QUE SE CONSIDERAM PARTES MÓVEIS NUM CORPO RÍGIDO.

B-1 - CORPO RÍGIDO SEM PARTES MÓVEIS



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/A} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{P/A} \Leftrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} \\ \ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}_{P/A} \Leftrightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A} \end{cases}$$

SENDO $\|\vec{r}_{P/A}\| = \text{CONSTANTE}$, ENTÃO $\dot{\vec{r}}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}}$$

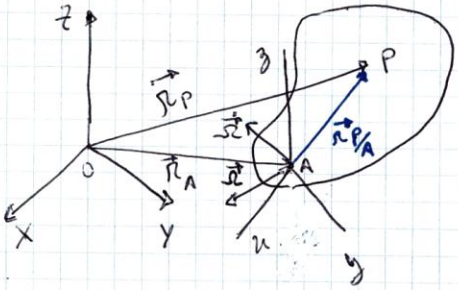
EM RELAÇÃO ÀS ACELERAÇÕES, SENDO

$$\vec{a}_{P/A} = \left(\overset{\circ}{\vec{v}}_{P/A}\right) = \left(\vec{\omega} \times \overset{\circ}{\vec{r}}_{P/A}\right) = \overset{\circ}{\vec{\alpha}} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{P/A}$$

MAS $\vec{v}_{P/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A})}$$

B-2 - CORPO RÍGIDO COM PARTES MÓVEIS



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P/B}$$

ATENDENDO A QUE $\boxed{\left[\frac{d\vec{Q}}{dt}\right]_{OXYZ} = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt}\right]_{Oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{Q}}$

TEM-SE QUE

$$\overset{\circ}{\vec{r}}_P = \overset{\circ}{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{P/B} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{P/R}$$

SENDO $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ E $\vec{v}_{P/R} = \vec{\mu}$, RESULTA

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\mu}}_{\vec{v}_{P/A}}}$$

DERIVANDO ESTA RELAÇÃO OBTÉM-SE, SENDO $\overset{\circ}{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}$ E $\vec{a}_{P/R} = \dot{\vec{\mu}}$,

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B}) + \dot{\vec{\mu}} + 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mu}}_{\vec{a}_{P/A}}}$$

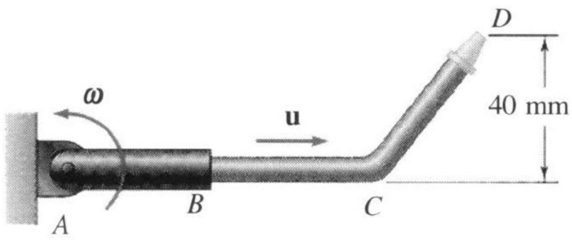
—"FIM"—

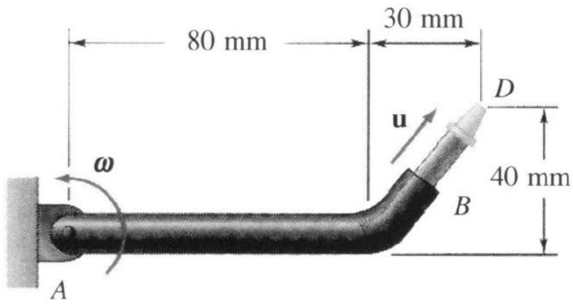
CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 4: O movimento da agulheta D é controlado pelo braço AB. Na posição mostrada o braço está a rodar à velocidade ω = 2,4 rad/s no sentido anti-horário e o componente BD desloca-se à velocidade constante u = 100 mm/s em relação ao braço. Para cada um dos sistemas mostrados, determine:

(a) a velocidade da agulheta D;

(b) a aceleração da agulheta D.





(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.166 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 4: RESOLUÇÃO

DADOS: $\|\vec{\omega}_{AB}\| = 24\ rad/s$ ↺ PEDIDO: a) $\vec{v}_D$

$\|\vec{\mu}\| = 100\ mm/s$ b) $\vec{a}_D$

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:

ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

ESTRUTURA: MOVIMENTO PLANO
BRAÇO AB: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
COMPONENTE BD: MOVIMENTO PLANO GERAL

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

a) $\vec{v}_D$?

$$\underbrace{\vec{v}_D}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{v}_{D'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{v}_{D/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO } R}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_D = (\vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R}) + \vec{v}_{D/R}$$

TEM-SE QUE $\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{AD} \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\mu} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{AD} + \vec{\mu}$$

A EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A DUAS EQUAÇÕES ESCALARES EM X E Y, VISTO A EQUAÇÃO EM Z DEGENERAR EM 0=0 EM FUNÇÃO DO REFERENCIAL SELECCIONADO. DE FACTO, $\vec{v}$ E $\vec{a}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM X E Y (MOVIMENTO PLANO), E $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM Z.

ASSIM, HÁ 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS, DEFINIDORAS DE $\vec{v}_D$.

ASSIM, VEM:

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{AD} + \vec{\mu} \Rightarrow$$

① $\begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} AD_x \\ AD_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu_{1x} \\ \mu_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix}$

② $\begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} AD_x \\ AD_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu_{2x} \\ \mu_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix}$

NOTA:
$$\begin{cases} \vec{\mu}_1 = \|\vec{\mu}_1\| \, \hat{m}_{\vec{\mu}_1} = 100 \left(\dfrac{\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}}{\sqrt{1^2+0^2}} \right) = 100\hat{\imath} \\ \vec{\mu}_2 = \|\vec{\mu}_2\| \, \hat{m}_{\vec{\mu}_2} = 100 \left(\dfrac{30\hat{\imath} + 40\hat{\jmath}}{\sqrt{30^2+40^2}} \right) = 60\hat{\imath} + 80\hat{\jmath} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ① $\begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 110 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

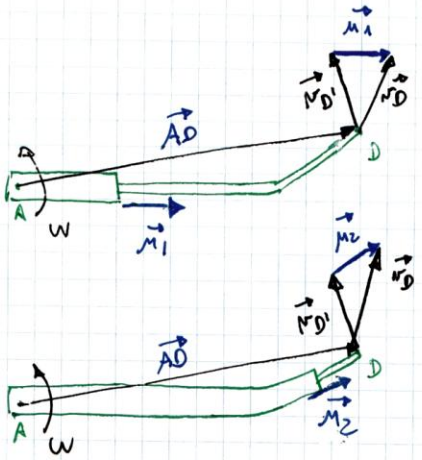
② $\begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 110 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow$ ① $\vec{v}_{D_1} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 264 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm/s

② $\vec{v}_{D_2} = \begin{Bmatrix} -36 \\ 344 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm/s

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE PARA O INSTANTE CONSIDERADO:

① ②



b) $\vec{a}_D$?

→ COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{D'} + \vec{a}_{D/R} + \vec{a}_c$$

ABSOLUTA — TRANSPORTE — EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R

$$\Rightarrow \vec{a}_D = \left[\vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R})\right] + \vec{a}_{D/R} + 2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}_{D/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{0} \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha} = \vec{0} \quad (\text{POIS } \vec{\omega} \text{ É CONSTANTE}) \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{AD} \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\mu} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_D = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AD}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mu} \Rightarrow$$

$$① \begin{Bmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} AD_x \\ AD_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \mu_{1x} \\ \mu_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$② \begin{Bmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} AD_x \\ AD_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \mu_{2x} \\ \mu_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) • versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica • Universidade de Aveiro

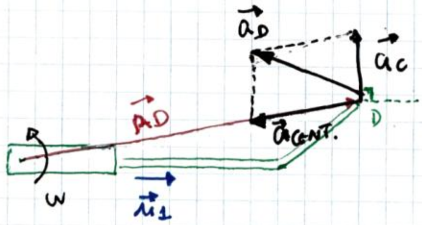
$$\Rightarrow ① \begin{Bmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 110 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

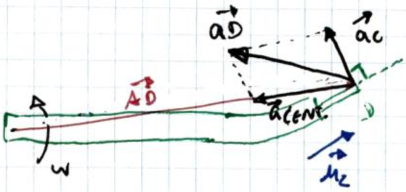
$$② \begin{Bmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 110 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 60 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{D_1} = \begin{Bmatrix} -634 \\ 250 \\ 0 \end{Bmatrix} mm/s^2$$

$$\vec{a}_{D_2} = \begin{Bmatrix} -1018 \\ 58 \\ 0 \end{Bmatrix} mm/s^2$$

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE PARA O INSTANTE CONSIDERADO:

① 

② 

v) CONCLUSÃO:

a) $\vec{v}_{D_1} = (41\hat{\imath} + 264\hat{\jmath})$ mm/s e $\vec{v}_{D_2} = (-36\hat{\imath} + 344\hat{\jmath})$ mm/s

b) $\vec{a}_{D_1} = (-634\hat{\imath} + 250\hat{\jmath})$ mm/s² e $\vec{a}_{D_2} = (-1018\hat{\imath} + 58\hat{\jmath})$ mm/s²

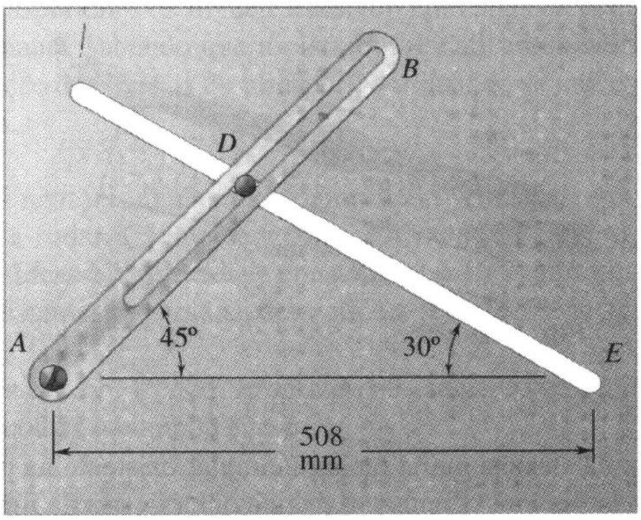
// FIM //

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 5: O movimento do pino *D* é guiado por uma corrediça *AB* e por uma ranhura existente numa placa fixa. Sabendo que na posição mostrada a barra *AB* roda com uma velocidade angular de 3 rad/s e com uma aceleração angular de 5 rad/s², ambas no sentido horário, determine:

(a) a velocidade do pino *D*;

(b) a aceleração do pino *D*.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.177 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 5: RESOLUÇÃO

DADOS: $\|\vec{\omega}_{AB}\| = 3\,rad/s$ ↻ PEDIDO: a) $\vec{v}_D$

$\|\vec{\alpha}_{AB}\| = 5\,rad/s^2$ ↻ b) $\vec{a}_D$

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL: 

ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

ESTRUTURA: MOVIMENTO PLANO
CORREDIÇA AB: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
PINO D: TRANSLAÇÃO RECTILÍNEA

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

a) $\vec{v}_D$?

$$\underset{\text{ABSOLUTA}}{\vec{v}_D} = \underset{\text{TRANSPORTE}}{\vec{v}_{D'}} + \underset{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R}}{\vec{v}_{D/R}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_D = \left(\vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R}\right) + \vec{v}_{D/R}$$

TEM-SE QUE $\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{AD} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{AD} + \vec{v}_{D/R}$$

A EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A DUAS EQUAÇÕES ESCALARES EM X E Y, VISTO A EQUAÇÃO EM Z DEGENERAR EM 0=0 EM FUNÇÃO DO REFERENCIAL SELECCIONADO. DE FACTO, $\vec{v}$ E $\vec{a}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM X E Y (MOVIMENTO PLANO), E $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM Z.

ASSIM, HÁ 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS. NO CASO PRESENTE TEM-SE QUE $\vec{v}_D$ TEM DE SER PARALELO À CALHA E A VELOCIDADE $\vec{v}_{D/R}$ É PARALELO À CORREDIÇA AB, OU SEJA,

$$\vec{v}_D \parallel \vec{DE} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{D/R} \parallel \vec{AD}.$$

ASSIM:

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \|\vec{v}_D\|\,\hat{m}_{\vec{v}_D} = v_D\,\hat{m}_{\vec{v}_D} = v_D\,(\cos 30^\circ\,\hat{i} - \sin 30^\circ\,\hat{j}) \\ \vec{v}_{D/R} = \|\vec{v}_{D/R}\|\,\hat{m}_{\vec{v}_{D/R}} = v_{D/R}\,\hat{m}_{\vec{v}_{D/R}} = v_{D/R}\,(\cos 45^\circ\,\hat{i} + \sin 45^\circ\,\hat{j}) \end{cases}$$

2 INCÓGNITAS

DESTE MODO:

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{AD} + \vec{v}_{D/R} \Rightarrow$$

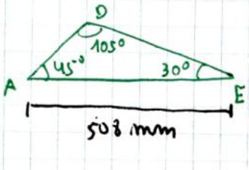
$$\begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} AD_x \\ AD_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{D/Rx} \\ v_{D/Ry} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \cos 30^\circ \\ -v_D \sin 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 186 \\ 186 \\ 0 \end{Bmatrix}^{*} + \begin{Bmatrix} v_{D/R} \cos 45^\circ \\ v_{D/R} \sin 45^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \sqrt{3}/2 \\ -0{,}5\,v_D \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 558 \\ -558 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{D/R} \sqrt{2}/2 \\ v_{D/R} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_D \sqrt{3}/2 = 558 + v_{D/R} \sqrt{2}/2 \\ -0{,}5\,v_D = -558 + v_{D/R} \sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_D = 817 \text{ mm/s} \\ v_{D/R} = 211 \text{ mm/s} \end{cases}$$

* **NOTA:** DETERMINAÇÃO AUXILIAR DE $\vec{AD}$



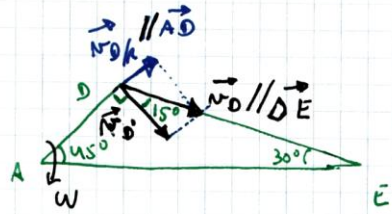
LEI DOS SENOS $\Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\overline{AE}}{\sin 105^\circ} \Rightarrow \overline{AD} = 263$ mm

$\therefore \quad \vec{AD} = \overline{AD}\,(\cos 45^\circ\,\hat{i} + \sin 45^\circ\,\hat{j}) = (186\,\hat{i} + 186\,\hat{j})$

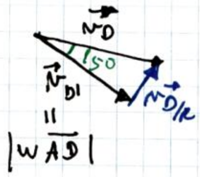
ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \|\vec{v}_D\| \, \hat{n}_{\vec{v}_D} = v_D \begin{Bmatrix} \cos 30^\circ \\ -\text{sen}\, 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 707 \\ -408 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_{D/R} = \|\vec{v}_{D/R}\| \, \hat{n}_{\vec{v}_{D/R}} = v_{D/R} \begin{Bmatrix} \cos 45^\circ \\ \text{sen}\, 45^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \end{cases}$$

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE PARA O INSTANTE CONSIDERADO:



ASSIM, TEM-SE



$$\Rightarrow \begin{cases} v_D = v_{D'} / \cos 15^\circ \\ v_{D/R} = v_{D'} \, \text{tg}\, 15^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_D = |\omega \, \overline{AD}| / \cos 15^\circ \\ v_{D/R} = |\omega \, \overline{AD}| \, \text{tg}\, 15^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_D = 817 \text{ mm/s} \\ v_{D/R} = 211 \text{ mm/s} \end{cases}$$

ASSIM, DE IGUAL MODO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \|\vec{v}_D\| \, \hat{n}_{\vec{v}_D} = \begin{Bmatrix} 707 \\ -408 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_{D/R} = \|\vec{v}_{D/R}\| \, \hat{n}_{\vec{v}_{D/R}} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \end{cases} \quad //$$

b) $\vec{a}_D$?

$$\underbrace{\vec{a}_D}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{a}_{D'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{a}_{D/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R}} + \underbrace{\vec{a}_c}_{\text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_D = \left[\vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R})\right] + \vec{a}_{D/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{D/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega} \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{AD} \\ \vec{v}_{D/R} = (15.0\hat{\imath} + 15.0\hat{\jmath}) \end{cases}$$ (Cf. ALÍNEA a)

$$\Rightarrow \vec{a}_D = \vec{\alpha} \times \vec{AD} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AD}) + \vec{a}_{D/R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{D/R}$$

MAIS UMA VEZ, DE ACORDO COM O RACIOCÍNIO DA ALÍNEA a, $\vec{a}_D // \vec{DE}$ E $\vec{a}_{D/R} // \vec{AD}$, SENDO

$$\vec{a}_D = \|\vec{a}_D\| \hat{m}_{\vec{a}_D} = a_D \hat{m}_{\vec{a}_D} = a_D (\cos 30° \hat{\imath} - \operatorname{sen} 30° \hat{\jmath})$$

$$\vec{a}_{D/R} = \|\vec{a}_{D/R}\| \hat{m}_{\vec{a}_{D/R}} = a_{D/R} \hat{m}_{\vec{a}_{D/R}} = a_{D/R} (\cos 45° \hat{\imath} + \operatorname{sen} 45° \hat{\jmath})$$

ASSIM:

$$\vec{a}_D = \vec{\alpha} \times \vec{AD} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AD}) + \vec{a}_{D/R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{D/R} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \cos 30° \\ -a_D \operatorname{sen} 30° \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} AD_x \\ AD_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} a_{D/R} \cos 45° \\ a_{D/R} \operatorname{sen} 45° \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_{D/R\,x} \\ v_{D/R\,y} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \sqrt{3}/2 \\ -0{,}5\, a_D \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 186 \\ 186 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 186 \\ 186 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2\; a_{D/R} \\ \sqrt{2}/2\; a_{D/R} \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

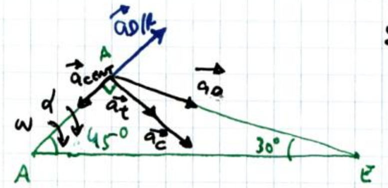
$$+\; 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_D = 2675 \text{ mm/s}^2 \\ a_{D/R} = 3060 \text{ mm/s}^2 \\ - \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_D = \|\vec{a}_D\|\, \hat{m}_{\vec{a}_D} = a_D \begin{Bmatrix} \cos 30^\circ \\ -\sin 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2317 \\ -1338 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

$$\vec{a}_{D/R} = \|\vec{a}_{D/R}\|\, \hat{m}_{\vec{a}_{D/R}} = a_{D/R} \begin{Bmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2164 \\ 2164 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

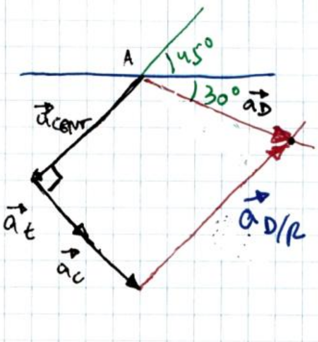
NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE PARA O INSTANTE CONSIDERADO:



ABSOLUTA

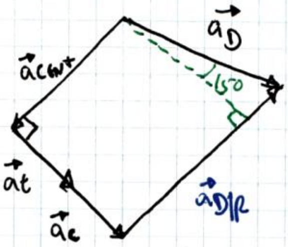
SOMA $\underbrace{\vec{a}_t}_{\text{TANGENCIAL}} + \underbrace{\vec{a}_{cent}}_{\text{CENTRÍPETA}} + \vec{a}_{D/R} + \underbrace{\vec{a}_c}_{\text{CORIOLIS}} = \vec{a}_D \,//\, \vec{AE}$

EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R



A INTERSECÇÃO DEFINE AS MAGNITUDES DE $\vec{a}_D$ E $\vec{a}_{D/R}$

tem-se então:



⇒ No sentido e na direcção de $\vec{a}_t$:

$$a_t + a_c = a_D \cos 15° \Rightarrow$$

$$|\alpha \overline{AD}| + |2\omega v_{D/R}| = a_D \cos 15° \Rightarrow$$

$$a_D = (|15 \times 263| + |2 \times 3 \times 2111|) / \cos 15°$$

$$\Rightarrow a_D \cong 2675 \text{ mm/s}^2$$

⇒ No sentido e na direcção de $\vec{a}_{cent}$:

$$a_{D/R} = a_{cent} + a_D \operatorname{sen} 15° \Rightarrow$$

$$a_{D/R} = |\omega^2 \overline{AD}| + a_D \operatorname{sen} 15° \Rightarrow$$

$$a_{D/R} = |3^2 \times 263| + 2675 \operatorname{sen} 15° \Rightarrow$$

$$a_{D/R} \cong 3060 \text{ mm/s}^2$$

⇓

$$\vec{a}_D = \|\vec{a}_D\| \hat{n}_{\vec{a}_D} = \begin{Bmatrix} 2317 \\ -1338 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

$$\vec{a}_{D/R} = \|\vec{a}_{D/R}\| \hat{n}_{\vec{a}_{D/R}} = \begin{Bmatrix} 2164 \\ 2164 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

=

V) Conclusão:

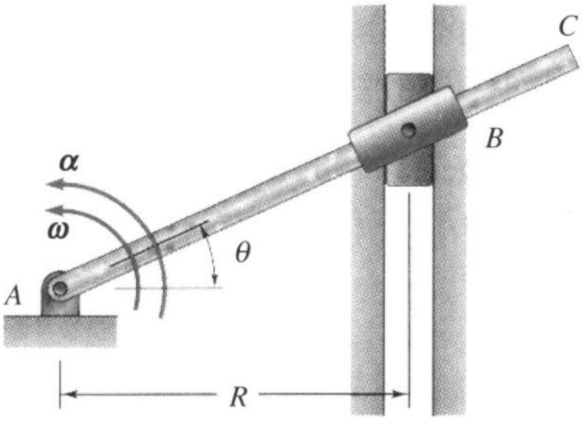
a) $\vec{v}_D = 707\hat{i} - 408\hat{j}$ mm/s

b) $\vec{a}_D = 2317\hat{i} - 1338\hat{j}$ mm/s²

— Fim —

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 6: O cursor B desliza ao longo da barra AC e está ligado a um bloco que se desloca numa corrediça vertical. Sabendo que a barra AC roda com velocidade angular ω e com uma aceleração α, ambos no sentido anti-horário, deduza as expressões para a velocidade e a aceleração do cursor B.



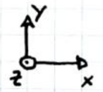
(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.182 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 6: RESOLUÇÃO

DADOS: R, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$, θ

PEDIDO: a) $\vec{v}_B$ b) $\vec{a}_B$

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

ESTRUTURA → MOVIMENTO PLANO
BARRA AC → ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
CURSOR B → TRANSLAÇÃO RECTILÍNEA

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

a) $\vec{v}_B$?

$$\underset{\text{ABSOLUTA}}{\vec{v}_B} = \underset{\text{TRANSPORTE}}{\vec{v}_{B'}} + \underset{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R}}{\vec{v}_{B/R}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \left(\vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R}\right) + \vec{v}_{B/R}$$

TEM-SE QUE $\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega} \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{AB} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{AB} + \vec{v}_{B/R}$$

A EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A DUAS EQUAÇÕES ESCALARES EM X E Y, VISTO A EQUAÇÃO EM Z DEGENERAR EM $0=0$ EM FUNÇÃO DO REFERENCIAL SELECCIONADO. DE FACTO $\vec{v}$ E $\vec{a}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM X E Y (MOVIMENTO PLANO), E $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM Z.

ASSIM, HÁ 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS. NO CASO PRESENTE TEM-SE QUE $\vec{v}_B = v_B\hat{j}$ (VERTICAL ASCENDENTE) E QUE $\vec{v}_{B/R} \parallel \vec{AB}$.

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) • versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica • Universidade de Aveiro

DE FACTO, $\begin{cases} \vec{v}_B = \|\vec{v}_B\| \, \hat{m}_{\vec{v}_B} = v_B \, \hat{m}_{\vec{v}_B} = v_B \, \hat{j} \\ \vec{v}_{B/R} = \|\vec{v}_{B/R}\| \, \hat{m}_{\vec{v}_{B/R}} = v_{B/R} \, \hat{m}_{\vec{v}_{B/R}} = v_{B/R} \, (\cos\theta \, \hat{i} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{j}) \end{cases}$

2 INCÓGNITAS

ASSIM:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{AB} + \vec{v}_{B/R} \Rightarrow$$

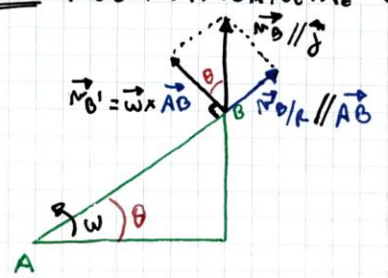
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ R\,\mathrm{tg}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{B/R} \cos\theta \\ v_{B/R} \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega R\,\mathrm{tg}\,\theta \\ \omega R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{B/R} \cos\theta \\ v_{B/R} \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = -\omega R\,\mathrm{tg}\,\theta + v_{B/R}\cos\theta \\ \underline{v_B} = \omega R + v_{B/R}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{B/R} = \omega R \operatorname{sen}\theta / \cos^2\theta \\ \underline{v_B} = \omega R / \cos^2\theta \end{cases} \quad //$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{v}_B = v_B \, \hat{j} = \omega R / \cos^2\theta \, \hat{j} \\ \vec{v}_{B/R} = v_{B/R} (\cos\theta \, \hat{i} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{j}) = \omega R \,\mathrm{tg}\,\theta \, \hat{i} + \omega R \,\mathrm{tg}^2\theta \, \hat{j} \end{cases}$$

<u>NOTA</u>: GEOMETRICAMENTE TEM-SE PARA O INSTANTE CONSIDERADO



$$\Rightarrow \begin{cases} v_B = v_B' / \cos\theta = (\omega R / \cos\theta)/\cos\theta \\ v_{B/R} = v_B' \,\mathrm{tg}\,\theta = (\omega R/\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_B = \omega R / \cos^2\theta \\ v_{B/R} = \omega R \operatorname{sen}\theta / \cos^2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_B = \omega R / \cos^2\theta \, \hat{j} \\ \vec{v}_{B/R} = \omega R \,\mathrm{tg}\,\theta \, \hat{i} + \omega R \,\mathrm{tg}^2\theta \, \hat{j} \end{cases}$$

b) $\vec{a}_B$?

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B'} + \vec{a}_{B/R} + \vec{a}_C$$

ABSOLUTA — TRANSPORTE — EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R — COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \left[\vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R})\right] + \vec{a}_{B/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega} \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha} \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{AB} \\ \vec{v}_{B/R} = \omega R \operatorname{tg}\theta\,\hat{i} + \omega R \operatorname{tg}^2\theta\,\hat{j} \quad \text{(cf. ALÍNEA a)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) + \vec{a}_{B/R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{B/R}$$

MAIS UMA VEZ, DE ACORDO COM O RACIOCÍNIO DA ALÍNEA a, $\vec{a}_B /\!/ \hat{j}$ E $\vec{a}_{B/R} /\!/ \vec{AB}$, SENDO

$$\vec{a}_B = \|\vec{a}_B\|\,\hat{m}_{\vec{a}_B} = a_B\,\hat{m}_{\vec{a}_B} = a_B\,\hat{j}$$

$$\vec{a}_{B/R} = \|\vec{a}_{B/R}\|\,\hat{m}_{\vec{a}_{B/R}} = a_{B/R}\,\hat{m}_{\vec{a}_{B/R}} = a_{B/R}\,(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j})$$

2 INCÓGNITAS

ASSIM:

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) + \vec{a}_{B/R} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{B/R} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ a_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ R\operatorname{tg}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ R\operatorname{tg}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} a_{B/R}\cos\theta \\ a_{B/R}\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \omega R\operatorname{tg}\theta \\ \omega R\operatorname{tg}^2\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ a_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha R\operatorname{tg}\theta \\ \alpha R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\omega R\operatorname{tg}\theta \\ \omega R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{B/R}\cos\theta \\ a_{B/R}\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\omega^2 R\operatorname{tg}^2\theta \\ 2\omega^2 R\operatorname{tg}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

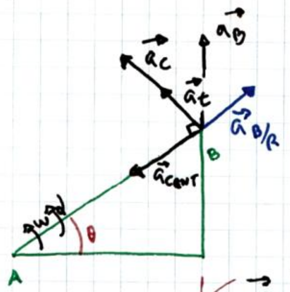
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ a_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha R \,\mathrm{tg}\theta \\ \alpha R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega^2 R \\ -\omega^2 R \,\mathrm{tg}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_{B/R} \cos\theta \\ a_{B/R} \,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\omega^2 R \,\mathrm{tg}^2\theta \\ 2\omega^2 R \,\mathrm{tg}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\alpha R \,\mathrm{tg}\theta - \omega^2 R + a_{B/R} \cos\theta - 2\omega^2 R \,\mathrm{tg}^2\theta \\ \underline{a_B} = \alpha R - \omega^2 R \,\mathrm{tg}\theta + a_{B/R} \,\mathrm{sen}\theta + 2\omega^2 R \,\mathrm{tg}\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{B/R} = (\alpha R \,\mathrm{tg}\theta + \omega^2 R + 2\omega^2 R \,\mathrm{tg}^2\theta)/\cos\theta \\ \underline{a_B} = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2 \,\mathrm{tg}\theta\right) \end{cases} \quad //$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{a}_B = R/\cos^2\theta \,(\alpha + 2\omega^2 \,\mathrm{tg}\theta)\,\hat{j} \\ \vec{a}_{B/R} = (\alpha R \,\mathrm{tg}\theta + \omega^2 R + 2\omega^2 R \,\mathrm{tg}^2\theta)\,(\hat{i} + \mathrm{tg}\theta\,\hat{j}) \end{cases}$$

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE PARA O INSTANTE CONSIDERADO:



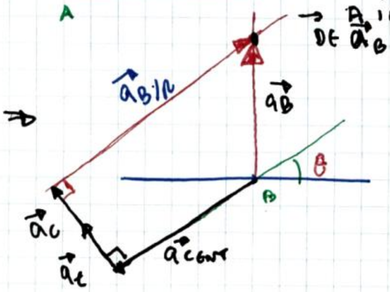
SOMA $\vec{a}_t + \vec{a}_{CENT} + \vec{a}_{B/R} + \vec{a}_C = \vec{a}_B \,//\, \hat{j}$

TANGENCIAL — CENTRÍPETA — CORIOLIS — ABSOLUTA

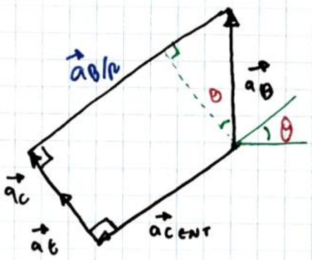
EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R

→ A INTERSECÇÃO DEFINE AS MAGNITUDES DE $\vec{a}_B$ E $\vec{a}_{B/R}$

$\Rightarrow$



TEM-SE ENTÃO:



$\Rightarrow$ NO SENTIDO E NA DIRECÇÃO DE $\vec{a}_t$:

$$a_t + a_c = a_B \cos\theta \Rightarrow$$

$$\alpha R/\cos\theta + 2\,\omega^2 R \operatorname{tg}\theta/\cos\theta = a_B \cos\theta \Rightarrow$$

$$a_B = \frac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2 \operatorname{tg}\theta\right) \,//$$

$\Rightarrow$ NO SENTIDO E NA DIRECÇÃO DE $\vec{a}_{CENT}$:

$$a_{B/R} = a_{CENT} + a_B \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

$$a_{B/R} = \omega^2 R/\cos\theta + \frac{R}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\left(\alpha + 2\omega^2 \operatorname{tg}\theta\right)$$

$$\Rightarrow a_{B/R} = \left(\omega^2 R + \alpha R \operatorname{tg}\theta + 2\omega^2 R \operatorname{tg}^2\theta\right)/\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2 \operatorname{tg}\theta\right)\hat{j} \\ \vec{a}_{B/R} = \left(\alpha R \operatorname{tg}\theta + \omega^2 R + 2\omega^2 R \operatorname{tg}^2\theta\right)\left(\hat{i} + \operatorname{tg}\theta\,\hat{j}\right) \end{cases} \,//$$

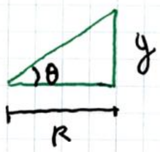
v) CONCLUSÃO:

a) $\vec{v}_B = \omega R/\cos^2\theta \,\hat{j}$

b) $\vec{a}_B = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2 \operatorname{tg}\theta\right)\hat{j}$

NOTA FINAL: ESTE PROBLEMA PODE TAMBÉM SER RESOLVIDO CONSIDERANDO AS COORDENADAS POLARES, VINDO BASTANTE SIMPLIFICADA A SUA RESOLUÇÃO NESTE CASO VISTO SER R CONSTANTE!

ASSIM:



$$y = R \operatorname{tg}\theta = y(\theta)$$

$\hookrightarrow \dot{y} = \left(R \operatorname{tg}\theta\right)^{\cdot} = R\dfrac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}$. COMO $\dot{\theta} = \omega$ TEM-SE:

$\dot{y} = \dfrac{R\omega}{\cos^2\theta} \Rightarrow \boxed{v_B = \dfrac{R\omega}{\cos^2\theta}}$ POIS $\dot{y} = v_B$

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) ● versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica ● Universidade de Aveiro

POR OUTRO LADO,

$$\ddot{y} = (\dot{y})^{\bullet} = \left(\frac{R\omega}{\cos^2\theta}\right)^{\bullet} = R\,(\dot{\theta}\cos^{-2}\theta)^{\bullet} =$$

$$= R\left[\ddot{\theta}\cos^{-2}\theta + \dot{\theta}(-2)\cos^{-3}\theta\,(-\operatorname{sen}\theta)\,\dot{\theta}\right] =$$

$$= R\left[\frac{\ddot{\theta}}{\cos^2\theta} + 2(\dot{\theta})^2 \operatorname{tg}\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}\right]$$

SENDO $\ddot{\theta} = \alpha$ E $\dot{\theta} = \omega$, VEM

$$\ddot{y} = \frac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2 \operatorname{tg}\theta\right)$$

MAS $\ddot{y} = a_B \Rightarrow \boxed{a_B = \frac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2\operatorname{tg}\theta\right)}$

ASSIM, PARA A OBTENÇÃO DOS VECTORES, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \|\vec{v}_B\|\,\hat{n}_{v_B} = \dfrac{R\omega}{\cos^2\theta}\,\hat{j} \\ \vec{a}_B = \|\vec{a}_B\|\,\hat{n}_{a_B} = \dfrac{R}{\cos^2\theta}\left(\alpha + 2\omega^2\operatorname{tg}\theta\right)\hat{j} \end{cases}$$

= FIM =

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 7: No sistema biela-manivela mostrado, a manivela *AB* roda com uma velocidade angular constante de 2000 rpm no sentido horário. Para a posição indicada da manivela, determine:

a) a velocidade angular da biela *BD*;

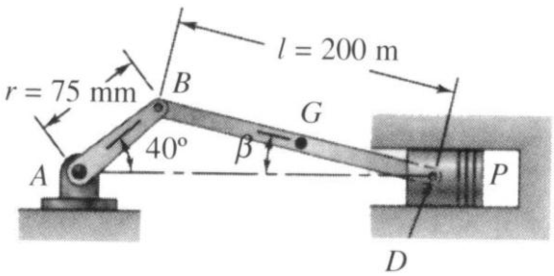
b) a velocidade do pistão *P*;

c) a aceleração angular da biela *BD*;

d) a aceleração do pistão *P*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado dos problemas-tipo 15.3, 15.5 e 15.7 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw- -Hill, 1998)

EXERCÍCIO 7: RESOLUÇÃO

DADOS: $n_{AB} = 2000\ rpm$

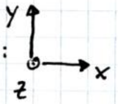
MEDIDAS GEOMÉTRICAS

PEDIDO: a) $\vec{\omega}_{BP}$

b) $\vec{v}_P$

c) $\vec{\alpha}_{BP}$

d) $\vec{a}_P$

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL: 

ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

ESTRUTURA: MOVIMENTO PLANO
BIELA BP: MOVIMENTO PLANO GERAL
MANIVELA AB: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
PISTÃO P: TRANSLAÇÃO RECTILÍNEA

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

NO CASO DO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA CONSIDERA-SE O MOVIMENTO DE ROTAÇÃO DO CORPO RÍGIDO DE ACORDO COM AS DECOMPOSIÇÕES SEJA DA VELOCIDADE SEJA DA ACELERAÇÃO. POR OUTRO LADO, CONSIDERANDO O MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS TEM-SE QUE O REFERENCIAL ROTATIVO SE ENCONTRA ASSOCIADO AO MOVIMENTO DA MANIVELA AB. SERÁ COM A VELOCIDADE ANGULAR DA MANIVELA QUE OCORRERÁ O TRANSPORTE, FICANDO O MOVIMENTO DA BIELA BD ASSOCIADO A UM MOVIMENTO RELATIVO.

ASSIM, TEM-SE QUE

$$\vec{\omega}_{BIELA} = \vec{\omega}_{MANIVELA} + \vec{\omega}_{BIELA/MANIVELA} \Rightarrow$$

$$\vec{\omega}_{BD} = \vec{\omega}_{AB} + \vec{\omega}_{BD/AB}$$

1- MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

A ESTRUTURA É CONSTITUÍDA POR 3 PARTES MÓVEIS: MANIVELA AB, BIELA BD E PISTÃO P. A APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO DA VELOCIDADE ÀS 3 COMPONENTES EM SEPARADO VAI PERMITIR OBTER $\vec{\omega}_{BD}$ E $\vec{v}_P$. POR OUTRO LADO, A APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO DA ACELERAÇÃO ÀS 3 COMPONENTES EM SEPARADO VAI PERMITIR OBTER $\vec{\alpha}_{BD}$ E $\vec{a}_P$. A LIGAÇÃO ENTRE COMPONENTES É FEITA COM BASE NOS PONTOS COMUNS, NESTE CASO OS PONTOS B E D, CARACTERIZADOS POR VELOCIDADES E ACELERAÇÕES COMUNS.

CÁLCULO DE VELOCIDADES

$$\begin{cases} \text{MANIVELA AB:} & \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} \\ \text{BIELA BD:} & \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{D/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{r}_{BD} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} \\ \text{PISTÃO P:} & \vec{v}_{D'} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D'/D} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{DD'} \times \vec{r}_{DD'} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{DD'} \times \vec{DD'} \end{cases}$$

NO PRESENTE PROBLEMA, TEM-SE QUE

$\vec{v}_A = \vec{0}$ POIS A MANIVELA TEM MOVIMENTO PLANO DE ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO QUE PASSA EM A.

$\vec{\omega}_{DD'} = \vec{0}$ POIS O PISTÃO P TEM MOVIMENTO PLANO DE TRANSLAÇÃO RECTILÍNEA. ASSIM $\vec{v}_{D'} = \vec{v}_D = \vec{v}_P$ (TODOS OS PONTOS TÊM A MESMA VELOCIDADE $\vec{v}_P = \vec{v}_D$).

DESTE MODO, AS EQUAÇÕES ANTERIORES CORRESPONDEM A:

$$\begin{cases} \text{MANIVELA AB:} & \vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} \\ \text{BIELA BD:} & \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} \\ \text{PISTÃO P:} & \vec{v}_P = \vec{v}_D \end{cases}$$

CONSIDERE-SE ENTÃO, EM PRIMEIRO LUGAR, A MANIVELA AB. A EQUAÇÃO APRESENTADA (VECTORIAL) CORRESPONDE A 2 EQUAÇÕES ESCALARES EM X E Y, VISTO ESTA DEGENERAR EM 0=0 EM Z DE ACORDO COM O REFERENCIAL SELECCIONADO. DE FACTO, $\vec{v}$ E $\vec{a}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM X E Y (MOVIMENTO PLANO), E $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM Z. DESTE MODO, A REFERIDA EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A 2 EQUAÇÕES QUE PERMITEM OBTER AS 2 COMPONENTES DE $\vec{v}_B$.

DESTE MODO HÁ QUE DEFINIR OS RESTANTES VECTORES:

$\vec{\omega}_{AB}$?

$$\|\vec{\omega}_{AB}\| = 2000 \ \frac{ROT}{MIN} \times \left(\frac{1 \ MIN}{60 \ s}\right) \times \left(\frac{2\pi \ rad}{1 \ ROT}\right) = 209{,}4 \ rad/s \ \circlearrowright \Rightarrow$$

$$\vec{\omega}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} rad/s$$

$\vec{AB}$?

$$\vec{AB} = \|\vec{AB}\| \ \hat{n}_{\vec{AB}} = 75\,(\cos 40^\circ \hat{\imath} + \sin 40^\circ \hat{\jmath}) = \begin{Bmatrix} 57{,}5 \\ 48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} mm$$

ENTÃO

2 INCÓGNITAS

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 57{,}5 \\ 48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10093 \\ -12041 \\ 0 \end{Bmatrix} mm/s$$

SABENDO $\vec{v}_B$ PASSA-SE ENTÃO À BIELA BD. NESTE CASO A EQUAÇÃO

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD}$$

TAMBÉM CORRESPONDE, TAL COMO FOI REFERIDO ATRÁS, A 2 EQUAÇÕES ESCALARES. NO ENTANTO, NESTE CASO AS 2 INCÓGNITAS SÃO AS MAGNITUDES DOS VECTORES $\vec{v}_D$ E $\vec{\omega}_{BD}$, POIS NESTE CASO SABE-SE À PARTIDA QUE $\vec{v}_D \parallel \hat{\imath}$ E $\vec{\omega}_{BD} \parallel \hat{k}$.

DESTE MODO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \|\vec{v}_D\| \ \hat{n}_{\vec{v}_D} = v_D \ \hat{\imath} \\ \vec{\omega}_{BD} = \|\vec{\omega}_{BD}\| \ \hat{n}_{\vec{\omega}_{BD}} = \omega_{BD} \ \hat{k} \end{cases}$$

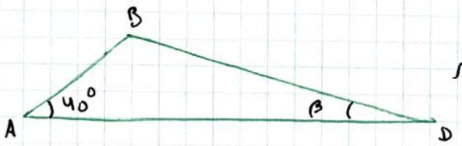
2 INCÓGNITAS

RESULTANDO

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10093 \\ -12041 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BD} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} BD_x \\ BD_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

RESTA AINDA DEFINIR O VECTOR $\overrightarrow{BD}$. ATENDENDO À LEI DOS SENOS TEM-SE



$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen}40^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\operatorname{sen}40^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{75}{200}\times \operatorname{sen}40^\circ\right) \Rightarrow$$

$$\beta = 13{,}95^\circ$$

LOGO,

$$\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BD}\|\,\hat{m}_{\overrightarrow{BD}} = 200\,(\cos\beta\,\hat{i} - \operatorname{sen}\beta\,\hat{j}) = 194{,}1\,\hat{i} - 48{,}2\,\hat{j}$$

ASSIM, RETOMANDO OS CÁLCULOS:

$$\begin{Bmatrix} v_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10093 \\ -12041 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BD} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10093 + 48{,}2\,\omega_{BD} \\ -12041 + 194{,}1\,\omega_{BD} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_D = 10093 + 48{,}2\,\omega_{BD} \\ 0 = -12041 + 194{,}1\,\omega_{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_D = 13081 \text{ mm/s} \\ \omega_{BD} = 62{,}0 \text{ rad/s} \end{cases}$$

LOGO,

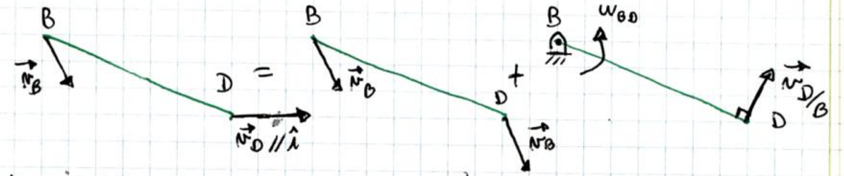
$$\begin{cases} \vec{v}_D = \|\vec{v}_D\|\,\hat{m}_{\vec{v}_D} = 13081\,\hat{i} \\ \vec{\omega}_{BD} = \|\vec{\omega}_{BD}\|\,\hat{m}_{\vec{\omega}_{BD}} = 62{,}0\,\hat{k} \end{cases}$$

ASSIM,

a) $\vec{\omega}_{BD} = 62{,}0\,\hat{k}$ rad/s

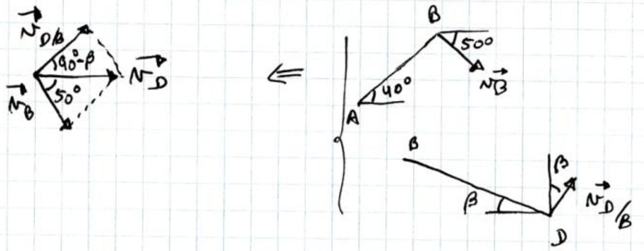
b) $\vec{v}_P = \vec{v}_D = 13081\,\hat{i}$ mm/s $= 13{,}1\,\hat{i}$ m/s

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE A SEGUINTE DECOMPOSIÇÃO

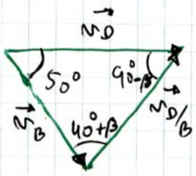


MOVIMENTO PLANO GERAL — TRANSLAÇÃO — ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO

ASSIM, TEM-SE NO PONTO D



OU SEJA, CONSIDERANDO A SOMA DOS VECTORES TEM-SE



PELO QUE COM BASE NA LEI DOS SENOS VEM:

$$\frac{v_D}{\text{sen}(40°+\beta)} = \frac{v_B}{\text{sen}(90°-\beta)} \Rightarrow v_D = v_B \frac{\text{sen}(53,95°)}{\text{sen}(76,05°)} =$$

$$= |\omega_{AB}| \times \overline{AB} \times \frac{\text{sen}(53,95°)}{\text{sen}(76,05°)} =$$

$$= 209,4 \times 75 \frac{\text{sen}(53,95°)}{\text{sen}(76,05°)} \Rightarrow$$

$$v_D \cong 13081 \text{ mm/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_D = 13081 \, \hat{i} \text{ mm/s}$$

POR OUTRO LADO

$$\frac{v_B}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{v_{D/B}}{\sin(50^\circ)} \Rightarrow v_{D/B} = v_B \frac{\sin(50^\circ)}{\sin(76{,}05^\circ)} \Rightarrow$$

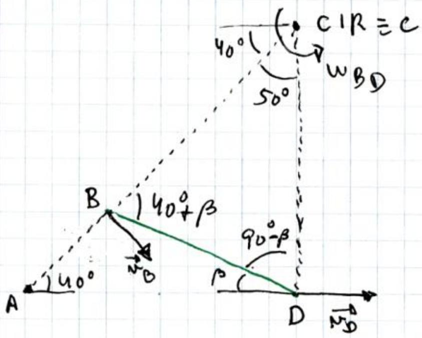
$$v_{D/B} = 12396 \text{ mm/s}$$

ASSIM, SENDO

$$v_{D/B} = \omega_{BD}\,\overline{BD} \Rightarrow \omega_{BD} \cong 62{,}0 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{BD} = \|\vec{\omega}_{BD}\|\,\hat{k} = 62{,}0\,\hat{k} \text{ rad/s}$$

NOTA: O PROBLEMA TAMBÉM PODERIA TER SIDO RESOLVIDO COM BASE NO CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO. NESTE CASO, PROLONGANDO PERPENDICULARES A $\vec{v}_B$ E $\vec{v}_D$, ELAS INTERSECTAM-SE NO CIR:



LEI DOS SENOS:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin(40^\circ+\beta)} = \frac{\overline{BD}}{\sin(50^\circ)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{BC} = \overline{BD} \times \dfrac{\sin(76{,}05^\circ)}{\sin(50^\circ)} = 253 \text{ mm} \\ \overline{CD} = \overline{BD} \times \dfrac{\sin(53{,}95^\circ)}{\sin(50^\circ)} = 211 \text{ mm} \end{cases}$$

ASSIM, VEM

$$v_B = \omega_{BD}\,\overline{BC} \Rightarrow \omega_{BD} = \frac{v_B}{\overline{BC}} = |\omega_{AB}|\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 209{,}4 \times \frac{75}{2\ldots} = 62{,}0 \text{ rad/s}$$

E AINDA $v_D = \omega_{BD}\,\overline{CD} = 62{,}0 \times 211 \cong 13081$ mm/s

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_{BD} = 62{,}0\,\hat{k} \text{ rad/s} \\ \vec{v}_D = 13031\,\hat{\imath} \text{ mm/s} \end{cases}$$

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) ● versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica ● Universidade de Aveiro

CÁLCULO DE ACELERAÇÕES

MANIVELA AB : $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{AB})$

BIELA BD : $\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{r}_{BD} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{r}_{BD})$

PISTÃO P : $\vec{a}_{D'} = \vec{a}_D + \vec{a}_{D'/D} = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_{D'D} \times \vec{r}_{D'D} + \vec{\omega}_{D'D} \times (\vec{\omega}_{D'D} \times \vec{r}_{D'D})$

NO PRESENTE PROBLEMA TEM-SE QUE

$\vec{a}_A = \vec{0}$ POIS A ESTÁ FIXO, POR OUTRO LADO O PISTÃO P ESTÁ EM TRANSLAÇÃO $\Rightarrow$ $\vec{\omega}_{DD'} = \vec{\alpha}_{DD'} = \vec{0}$. POR OUTRO LADO $\vec{\alpha}_{AB} = \vec{0}$, POIS CONSIDERA-SE $\vec{\omega}_{AB}$ CONSTANTE. ASSIM, VEM

MANIVELA AB: $\vec{a}_B = \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB})$

BIELA BD: $\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD})$

PISTÃO P: $\vec{a}_P = \vec{a}_D$

CONSIDERANDO, EM PRIMEIRO LUGAR, A MANIVELA AB, VERIFICA-SE QUE A ACELERAÇÃO NO PONTO B CORRESPONDE APENAS À COMPONENTE CENTRÍPETA. DE ACORDO COM O QUE SE REFERIU NO CÁLCULO DE VELOCIDADES, AS 2 EQUAÇÕES ESCALARES ASSOCIADAS À VECTORIAL PERMITEM DEFINIR AS 2 COMPONENTES DE $\vec{a}_B$.

ASSIM, $\vec{a}_B = \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}) =$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209,4 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 57,5 \\ 48,2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 10093 \\ -12041 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} -2521,4 \times 10^3 \\ -2113,5 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} mm/s^2 = \begin{Bmatrix} -2521,4 \\ -2113,5 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2$$

SABENDO-SE $\vec{a}_B$ PASSA-SE ENTÃO À BIELA BD. NESTE CASO A EQUAÇÃO

$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD})$

TRADUZ O FACTO DE A ACELERAÇÃO EM D SER A DE TRANSLAÇÃO DE B ADICIONADA ÀS COMPONENTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO EM TORNO DE B.

NESTE CASO, TAL COMO OCORREU NO CÁLCULO DE VELOCIDADES, A EQUAÇÃO DE $\vec{a}_D$ CORRESPONDE A 2 EQUAÇÕES ESCALARES, SENDO AS 2 INCÓGNITAS AS MAGNITUDES DOS VECTORES $\vec{a}_D$ E $\vec{\alpha}_{BD}$, POIS SABE-SE QUE $\vec{a}_D \parallel \hat{\imath}$ E $\vec{\alpha}_{BD} \parallel \hat{k}$ (ESTA ÚLTIMA CONSTATAÇÃO SÓ É VÁLIDA PORQUE O MOVIMENTO É PLANO $\Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$!)

DESTE MODO, VEM

$$\begin{cases} \vec{a}_D = \|\vec{a}_D\| \, \hat{m}_{\vec{a}_D} = a_D \hat{\imath} \\ \vec{\alpha}_{BD} = \|\vec{\alpha}_{BD}\| \, \hat{m}_{\vec{\alpha}_{BD}} = \alpha_{BD} \hat{k} \end{cases}$$

2 INCÓGNITAS

RESULTANDO

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{BD} \times (\vec{\omega}_{BD} \times \vec{BD}) \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2521{,}4 \times 10^3 \\ -2113{,}5 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{BD} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 62{,}0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 62{,}0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2521{,}4 \times 10^3 \\ -2113{,}5 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 48{,}2\,\alpha_{BD} \\ 194{,}1\,\alpha_{BD} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 62{,}0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2988{,}4 \\ 12034{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2521{,}4 \times 10^3 \\ -2113{,}5 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 48{,}2\,\alpha_{BD} \\ 194{,}1\,\alpha_{BD} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -746{,}1 \times 10^3 \\ 185{,}3 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_D = -2521{,}4 \times 10^3 + 48{,}2\,\alpha_{BD} - 746{,}1 \times 10^3 \\ 0 = -2113{,}5 \times 10^3 + 194{,}1\,\alpha_{BD} + 185{,}3 \times 10^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_D = -2787681 \text{ mm/s}^2 = -2787{,}7 \text{ m/s}^2 \\ \alpha_{BD} = 9934 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

(NOTA: COMO $a_D < 0$, SIGNIFICA QUE A HIPÓTESE INICIAL NÃO É CORRECTA E QUE O SENTIDO É O CONTRÁRIO)

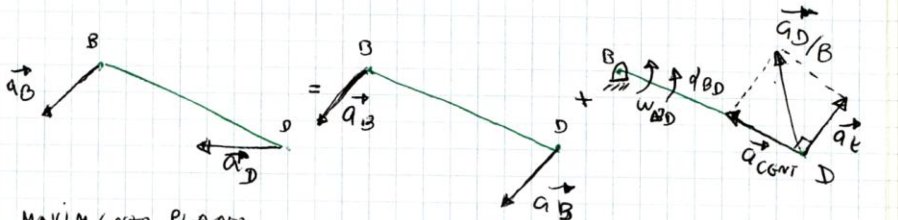
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_D = -2787{,}7 \hat{\imath} \text{ m/s}^2 \\ \vec{\alpha}_{BD} = 9934 \hat{k} \text{ rad/s}^2 \end{cases} \quad //$$

ASSIM,

c) $\vec{\alpha}_{BD} = 9934\,\hat{k}$ rad/s²

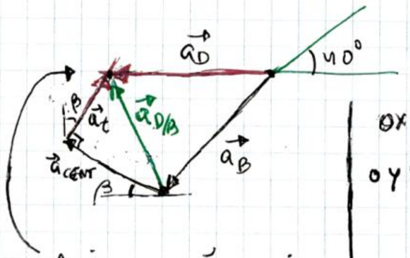
d) $\vec{a}_P = \vec{a}_D = -2787{,}7\,\hat{i}$ m/s²

<u>NOTA</u>: GEOMETRICAMENTE TEM-SE A SEGUINTE DECOMPOSIÇÃO:



MOVIMENTO PLANO GERAL | TRANSLAÇÃO | ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO

ASSIM, TEM-SE NO PONTO D



A INTERSECÇÃO DEFINE AS MAGNITUDES DE $\vec{a}_t$ E $\vec{a}_D$

DECOMPONDO EM OX E OY, TEM:

$$\begin{cases} OX: & -a_D + a_t \sin\beta - a_{CENT}\cos\beta - a_B\cos 40^\circ = 0 \\ OY: & a_t\cos\beta + a_{CENT}\sin\beta - a_B \sin 40^\circ = 0 \end{cases}$$

$$OY \Longrightarrow a_t = a_B \frac{\sin 40^\circ}{\cos\beta} - a_{CENT}\,\mathrm{tg}\,\beta$$

SENDO
$$\begin{cases} a_B = \omega_{AB}^2\,\overline{AB} = (209{,}4)^2 \times 75 = 3288{,}6 \times 10^3 \text{ mm/s}^2 \\ \beta = 13{,}95^\circ \\ a_{CENT} = \omega_{BD}^2\,\overline{BD} = (62{,}0)^2 \times 200 = 768{,}8 \times 10^3 \text{ mm/s}^2 \end{cases}$$

$\therefore\; a_t = 1987{,}1 \times 10^3$ mm/s² $\Rightarrow$

$$\alpha_{BD} = \frac{a_t}{\overline{BD}} \Rightarrow \alpha_{BD} \simeq 9934 \text{ rad/s}^2$$

SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO EM OX, N.GM

$$a_D = a_t \sin\beta - a_{cent} \cos\beta - a_B \cos 40° \Rightarrow$$

$$a_D \cong -2787{,}7 \times 10^3 \ mm/s^2$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{\alpha}_{BD} = 9934 \hat{k} \ rad/s^2 \\ \vec{a}_D = -2787{,}7 \hat{i} \ m/s^2 \end{cases}$$

=

NOTA: O PROBLEMA TAMBÉM PODERIA TER SIDO RESOLVIDO COM BASE NO CENTRO INSTANTÂNEO DE ACELERAÇÕES. NO ENTANTO, ESTE PONTO NÃO CORRESPONDE EM GERAL AO CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO (CENTRO INSTANTÂNEO DE VELOCIDADES). ASSIM, A METODOLOGIA É DISTINTA DA APRESENTADA PARA A DETERMINAÇÃO DE VELOCIDADES. TODAVIA, ESTE ASSUNTO NÃO SE ENQUADRA NO ÂMBITO DO PROGRAMA DO PROGRAMA DA PRESENTE DISCIPLINA, PELO QUE NÃO SE ABORDARÁ O SEU ESTUDO.

=

2 - MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO CONSIDERA-SE UMA DECOMPOSIÇÃO DE VELOCIDADE E DE ACELERAÇÃO DE TRANSPORTE E EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO. NO CASO DA ACELERAÇÃO SURGE O TERMO COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS.

ASSIM, TEM-SE

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{v}_{D'} + \vec{v}_{D/R} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_{D'} + \vec{a}_{D/R} + \vec{a}_C \end{cases}$$

DESTE MODO,

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{D1} + \vec{v}_{D/R}$$

ABSOLUTA TRANSPORTE EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R

$$\Rightarrow \vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{v}_{D/R}$$

TEM-SE QUE $\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_{AB} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{AD} \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{r}_{BD} = \vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD} \end{cases}$

IMPORTANTE!! →

$$\Rightarrow \vec{v}_D = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AD} + \vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD}$$

ESTA EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A DUAS EQUAÇÕES ESCALARES EM X E Y, VISTO A EQUAÇÃO EM Z DEGENERAR EM 0=0 EM FUNÇÃO DO REFERENCIAL SELECCIONADO. DE FACTO $\vec{v}$ E $\vec{a}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM X E Y (MOVIMENTO PLANO), E $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$ SÓ TÊM COMPONENTES EM Z.

ASSIM, HÁ 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS. NO CASO PRESENTE TEM-SE QUE $\vec{v}_D // \hat{i}$ E $\vec{\omega}_{BD/AB} // \hat{k}$, SENDO AS SUAS MAGNITUDES AS INCÓGNITAS.

DE FACTO, $\begin{cases} \vec{v}_D = \|\vec{v}_D\| \hat{m}_{\vec{v}_D} = v_D \hat{i} \\ \vec{\omega}_{BD/AB} = \|\vec{\omega}_{BD/AB}\| \hat{m}_{\vec{\omega}_{BD/AB}} = \omega_{BD/AB} \hat{k} \end{cases}$

2 INCÓGNITAS

ASSIM, SENDO $\overline{AD} = \overline{AB}\cos(40°) + \overline{BD}\cos(13{,}95°) = 251{,}6$ mm, VEM

$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AD} + \vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 251{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} v_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -52685 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 48{,}2\,\omega_{BD/AB} \\ 194{,}1\,\omega_{BD/AB} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_D = 48{,}2\ \omega_{BD/AB} \\ 0 = -52685 + 194{,}1\ \omega_{BD/AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_D \cong 13081 \text{ mm/s} \\ \omega_{BD/AB} = 271{,}4 \text{ rad/s} \end{cases}$$

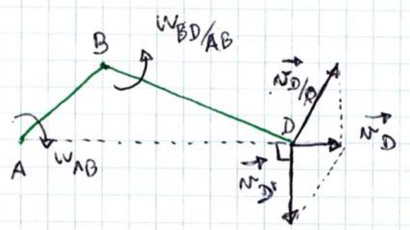
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_D = 13081\ \hat{\imath} \text{ mm/s} \\ \vec{\omega}_{BD/AB} = 271{,}4 \hat{k} \text{ rad/s} \end{cases}$$

POR FIM, $\vec{\omega}_{BD} = \vec{\omega}_{AB} + \vec{\omega}_{BD/AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 271{,}4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{\omega}_{BD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 62{,}0 \end{Bmatrix} = 62{,}0\ \hat{k} \text{ rad/s}$$

ENTÃO, $\begin{cases} a)\ \vec{\omega}_{BD} = 62{,}0\ \hat{k} \text{ rad/s} \\ b)\ \vec{v}_P = \vec{v}_D = 13081\ \hat{\imath} \text{ mm/s} \end{cases}$

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE



ATENDA-SE AO FACTO DE QUE $\omega_{BD/AB} = \omega_{BD} - \omega_{AB}$

EM RELAÇÃO ÀS ACELERAÇÕES, TEM-SE QUE

$$\underbrace{\vec{a}_D}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{a}_{D'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{a}_{D/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} + \underbrace{\vec{a}_C}_{\text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_D = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R}) + \vec{a}_{D/R} + 2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}_{D/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{0} \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha} = \vec{0} \quad (\text{POIS } \vec{\Omega} = \vec{\omega}_{AB} \text{ É CONSTANTE}) \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_{AB} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{AD} \\ \vec{a}_{D/R} = \vec{\alpha}_{BD/AB} \times \vec{r}_{BD} + \vec{\omega}_{BD/AB} \times (\vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{r}_{BD}) = \\ \quad = \vec{\alpha}_{BD/AB} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{BD/AB} \times (\vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD}) \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{r}_{BD} \quad (\text{JÁ CALCULADO!!}) \end{cases}$$

IMPORTANTE!! →

$$\Rightarrow \vec{a}_D = \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AD}) + \left[\vec{\alpha}_{BD/AB} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{BD/AB} \times (\vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD})\right] + 2\,\vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD})$$

DE ACORDO COM O QUE JÁ FOI REFERIDO, HÁ 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS, QUE NESTE CASO CORRESPONDEM ÀS MAGNITUDES DE $\vec{a}_D // \hat{\imath}$ E $\vec{\alpha}_{BD/AB} // \hat{k}$.

DE FACTO,
$$\begin{cases} \vec{a}_D = \|\vec{a}_D\|\, \hat{m}_{\vec{a}_D} = a_D\, \hat{\imath} \\ \vec{\alpha}_{BD/AB} = \|\vec{\alpha}_{BD/AB}\|\, \hat{m}_{\vec{\alpha}_{BD/AB}} = \alpha_{BD/AB}\, \hat{k} \end{cases}$$

↓

2 INCÓGNITAS

ASSIM, TEM-SE QUE

$$\vec{a}_D = \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{AD}) + \left[\vec{\alpha}_{BD/AB} \times \vec{BD} + \vec{\omega}_{BD/AB} \times (\vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD})\right] + 2\,\vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{BD/AB} \times \vec{BD}) \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 251{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{BD/AB} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 271{,}4 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 271{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \right] + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209{,}4 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 271{,}4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 194{,}1 \\ -48{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -52685 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 48,2\,\alpha_{BD/AB} \\ 194,1\,\alpha_{BD/AB} \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 271,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 13081 \\ 52679 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -209,4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 13081 \\ 52679 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_D \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11032 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 48,2\,\alpha_{BD/AB} \\ 194,1\,\alpha_{BD/AB} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -14297 \times 10^3 \\ 3550 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22062 \times 10^3 \\ -5478 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_D = -11032 \times 10^3 + 48,2\,\alpha_{BD/AB} - 14297 \times 10^3 + 22062 \times 10^3 \\ 0 = 194,1\,\alpha_{BD/AB} + 3550 \times 10^3 - 5478 \times 10^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_D \cong -2787,7 \times 10^3\ mm/s^2 = -2787\ m/s^2 \\ \alpha_{BD/AB} \cong 9934\ rad/s^2 \end{cases}$$

MAIS UMA VEZ, O SENTIDO DE $\vec{a}_D$ É CONTRÁRIO AO ASSUMIDO.

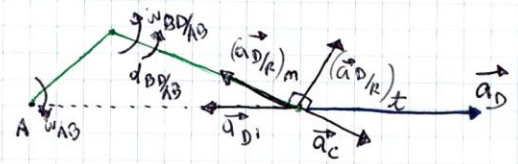
ASSIM, $\begin{cases} \vec{a}_D = -2787\,\hat{i}\ m/s^2 \\ \vec{\alpha}_{BD/AB} = 9934\,\hat{k}\ rad/s^2 \end{cases}$

POR OUTRO LADO,

$$\vec{\alpha}_{BD} = \vec{\alpha}_{AB} + \vec{\alpha}_{BD/AB} = \vec{0} + \vec{\alpha}_{BD/AB} = 9934\,\hat{k}\ rad/s^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c)\ \vec{\alpha}_{AB} = 9934\,\hat{k}\ rad/s^2 \\ d)\ \vec{a}_D = -2787\,\hat{i}\ m/s^2 \end{cases}$$

NOTA: GEOMETRICAMENTE TEM-SE QUE



— // FIM // —

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

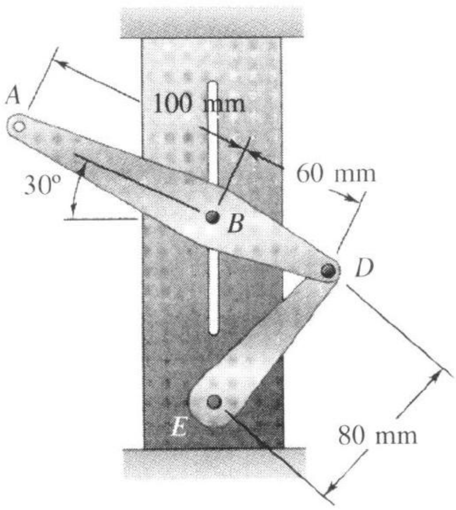
Exercício 8: A barra *ABD* é ligada a uma corrediça no ponto *B*. Sabendo que na posição mostrada a velocidade angular da barra *DE* é de 3 rad/s no sentido horário, determine:

(a) a velocidade angular da barra *ABD*;

(b) a velocidade do ponto *A*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



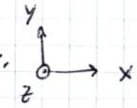
(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.93 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 8: RESOLUÇÃO

DADOS: $\|\vec{\omega}_{DE}\| = 3\,rad/s$ ↻ PEDIDO: a) $\vec{\omega}_{ABD}$

MEDIDAS GEOMÉTRICAS b) $\vec{v}_A$

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

ESTRUTURA: MOVIMENTO PLANO
BARRA DE: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
BARRA ABD: MOVIMENTO PLANO GERAL
PINO B: TRANSLACÇÃO RECTILÍNEA (CONSIDERADO PARTE DA BARRA ABD)

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

NESTE CASO A ESTRUTURA TEM APENAS 2 PARTES MÓVEIS ⇒

CÁLCULO DE VELOCIDADES

$$\begin{cases} \text{BARRA DE: } \vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_{D/E} = \vec{v}_E + \vec{\omega}_{ED} \times \vec{r}_{ED} = \vec{v}_E + \vec{\omega}_{ED} \times \vec{ED} \\ \text{BARRA ABD: } \vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{v}_{B/D} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{ABD} \times \vec{r}_{DB} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{ABD} \times \vec{DB} \end{cases}$$

NOTE-SE QUE NO PONTO B É SABIDO QUE $\vec{v}_B // \hat{j}$ E $\vec{a}_B // \hat{j}$, PELO QUE SE USA ESTE PONTO EM VEZ DE A. POSTERIORMENTE PODE DETERMINAR-SE $\vec{v}_A$ COM BASE NA DE B E EM $\vec{\omega}_{ABD}$.

NO PRESENTE PROBLEMA TEM-SE QUE

$\vec{v}_E = \vec{0}$ ⇒

$$\begin{cases} \text{BARRA DE: } \vec{v}_D = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{ED} \\ \text{BARRA ABD: } \vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{ABD} \times \vec{DB} \end{cases}$$

DE ACORDO COM AS ANÁLISES PRÉVIAS, TEM-SE 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS PARA CADA EQUAÇÃO VECTORIAL.

NO QUE CONCERNE A PRIMEIRA EQUAÇÃO, AS 2 EQUAÇÕES ESCALARES PERMITEM DETERMINAR $\vec{v}_D$. EM RELAÇÃO À SEGUNDA EQUAÇÃO, AS 2 INCÓGNITAS SÃO AS MAGNITUDES DE $\vec{v}_B // \hat{j}$ E $\vec{\omega}_{ABD} // \hat{k}$.

ASSIM, TEM-SE

$$\vec{\omega}_{ED} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

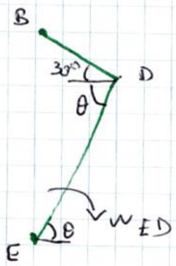
$\vec{ED}$?

CONSIDERANDO A ORIGEM EM E, TEM-SE

$$\overline{BD} \cos 30^\circ = \overline{ED} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{ED}} \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$\theta = 49{,}5^\circ$$



ASSIM, $\vec{ED} = 80(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}) \Rightarrow \vec{ED} = \begin{Bmatrix} 52 \\ 61 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\therefore \vec{v}_D = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{ED} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 52 \\ 61 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 183 \\ -156 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

POR OUTRO LADO, 2 INCÓGNITAS

$\vec{\omega}_{ABD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ABD} \end{Bmatrix}$ e $\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -v_B \\ 0 \end{Bmatrix}$ (POIS SABE-SE QUE O PINO D DESCE)

$$\vec{DB} = 60(-\cos 30^\circ\,\hat{i} + \operatorname{sen} 30^\circ\,\hat{j}) \Rightarrow \vec{DB} = \begin{Bmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

PORQUE

$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{ABD} \times \vec{DB} = \begin{Bmatrix} 183 \\ -156 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ABD} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -v_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 183 \\ -156 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30\,\omega_{ABD} \\ -52\,\omega_{ABD} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 183 - 30\,w_{ABD} \\ -v_B = -156 - 52\,w_{ABD} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} w_{ABD} = 6,1 \text{ rad/s} \\ v_B = 473,2 \text{ mm/s} \end{cases}$$

ASSIM, $\begin{cases} \vec{w}_{ABD} = 6,1\,\hat{k} \text{ rad/s} \\ \vec{v}_B = -473,2\,\hat{j} \text{ mm/s} \end{cases}$

AGORA, INDO DO PONTO B (OU DO PONTO D!) PARA O PONTO A, TEM-SE

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{w}_{ABD} \times \vec{r}_{BA} = \vec{w}_{ABD} \times \vec{BA}$$

SENDO $\vec{BA} = 100(-\cos(30°)\hat{i} + \sin(30°)\hat{j}) \Rightarrow \vec{BA} = \begin{Bmatrix} -87 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ -473,2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -87 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -305,0 \\ -1003,9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ASSIM,

a) $\vec{w}_{ABD} = 6,1\,\hat{k}$ rad/s

b) $\vec{v}_A = (-305,0\,\hat{i} - 1003,9\,\hat{j})$ mm/s

2- MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

O REFERENCIAL ROTATIVO IRÁ RODAR COM $\vec{w}_{ED}$, PELO QUE O MOVIMENTO RELATIVO DA BARRA ABD SERÁ DESCRITO POR

$$\vec{w}_{ABD/ED} = \vec{w}_{ABD} - \vec{w}_{ED}$$

ASSIM, APLICANDO A ANÁLISE DE VELOCIDADE AO PONTO B SERÁ POSSÍVEL OBTER $\vec{w}_{ABD/ED}$ E CONSEQUENTEMENTE PODER-SE-Á POSTERIORMENTE OBTER $\vec{w}_{ABD}$ E $\vec{v}_A$.

DESTE MODO,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{B/R}$$

$\vec{v}_B$ → ABSOLUTA; $\vec{v}_{B'}$ → TRANSPORTE; $\vec{v}_{B/R}$ → EM RELAÇÃO AO EIXO ROTATIVO R

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_E + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{EB} + \vec{v}_{B/R}$$

SENDO
$$\begin{cases} \vec{v}_E = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_{ED} \\ \vec{r}_{EB} = \vec{EB} \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{r}_{DB} = \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DB} \end{cases}$$

IMPORTANTE!!

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{EB} + \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DB}$$

MAIS UMA VEZ, TEM-SE 2 EQUAÇÕES PARA 2 INCÓGNITAS QUE SÃO AS MAGNITUDES DE $\vec{v}_B // \hat{\imath}$ E $\vec{\omega}_{ABD/ED} // \hat{k}$.

ASSIM, SENDO

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \|\vec{v}_B\| \, \hat{m}_{\vec{v}_B} = v_B \, \hat{\imath} \\ \vec{\omega}_{ABD/ED} = \|\vec{\omega}_{ABD/ED}\| \, \hat{m}_{\vec{\omega}_{ABD/ED}} = \omega_{ABD/ED} \, \hat{k} \end{cases}$$

↘ 2 INCÓGNITAS

MAS $\vec{EB} = \vec{ED} + \vec{DB} = \begin{Bmatrix} 52 \\ 61 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 91 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (VER ATRÁS)

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{EB} + \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DB} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 91 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ABD/ED} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 273 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -30\,\omega_{ABD/ED} \\ -52\,\omega_{ABD/ED} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 273 - 30\,\omega_{ABD/ED} \\ v_B = -52\,\omega_{ABD/ED} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_{ABD/ED} = 9{,}1 \text{ rad/s} \\ v_B = -473{,}2 \text{ mm/s} \end{cases}$$ (O SENTIDO É DESCENDENTE!)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_{ABD/ED} = 9{,}1\,\hat{k} \text{ rad/s} \\ \vec{v}_B = -473{,}2\,\hat{\imath} \text{ mm/s} \end{cases}$$

APLICANDO AGORA A EQUAÇÃO EM A $\Rightarrow$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_E + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{EA} + \vec{v}_{A/R}$$

SENDO
$$\begin{cases} \vec{v}_E = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_{ED} \\ \vec{r}_{EA} = \vec{EA} \\ \vec{v}_{A/R} = \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{r}_{DA} = \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DA} \end{cases}$$
IMPORTANTE!

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{EA} + \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DA}$$

AGORA AS 2 EQUAÇÕES SERVEM PARA DEFINIR $\vec{v}_A$!

$$\vec{EA} = \vec{EB} + \vec{BA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 91 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -87 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -87 \\ 141 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{DA} = \vec{DB} + \vec{BA} = \begin{Bmatrix} -52 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -87 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -139 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ (VER ATRÁS)

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -87 \\ 141 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9{,}1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -139 \\ 80 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 423 \\ 261 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -728 \\ -1265 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -305{,}0 \\ -1003{,}9 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

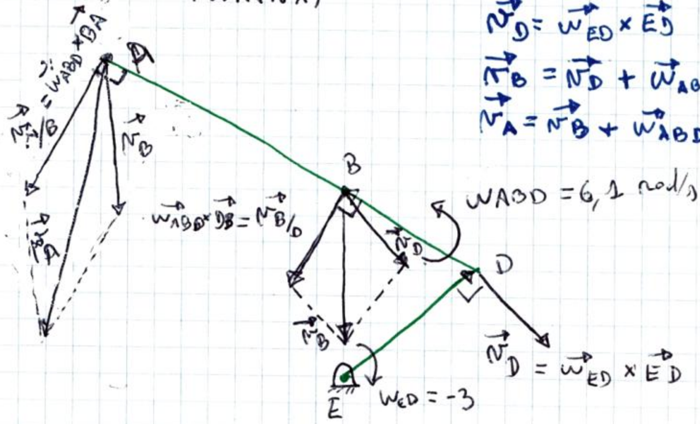
a) $\vec{\omega}_{ABD} = 6{,}1\,\hat{k}$ rad/s $\left(= \vec{\omega}_{ABD/ED} + \vec{\omega}_{ED}\right)$

b) $\vec{v}_A = (-305{,}0\,\hat{\imath} - 1003{,}9\,\hat{\jmath})$ mm/s

NOTA GEOMETRICAMENTE ANÁLISE DE MODO ESQUEMÁTICO:

MÉTODO 1 (DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA)

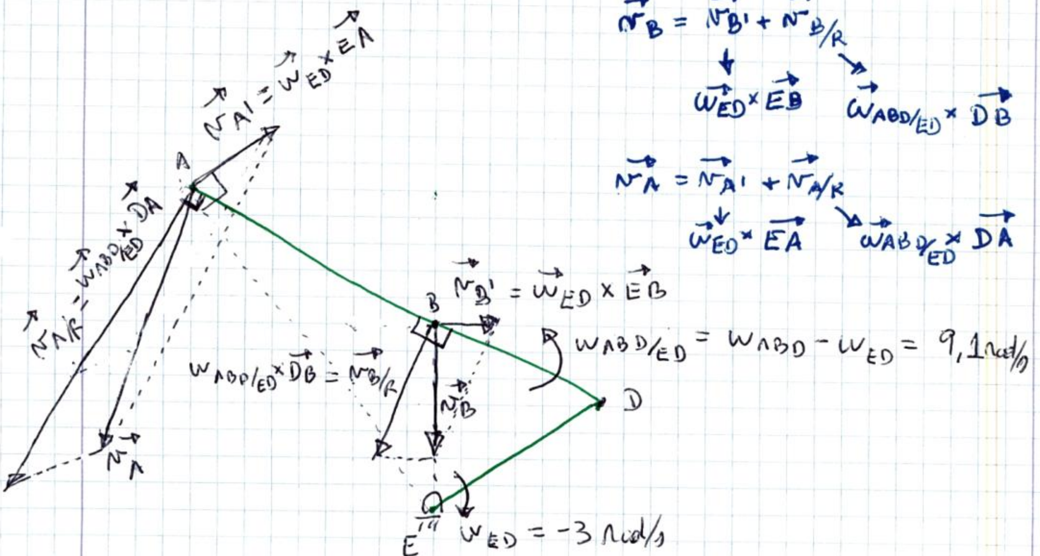
$$\vec{v}_D = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{ED}$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{ABD} \times \vec{DB}$$
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{ABD} \times \vec{BA}$$



MÉTODO 2 (REFERENCIAIS ROTATIVOS)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{B/R}$$
$$\vec{v}_{B'} = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{EB} \qquad \vec{v}_{B/R} = \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DB}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{v}_{A/R}$$
$$\vec{v}_{A'} = \vec{\omega}_{ED} \times \vec{EA} \qquad \vec{v}_{A/R} = \vec{\omega}_{ABD/ED} \times \vec{DA}$$



=

—//FIM//—

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

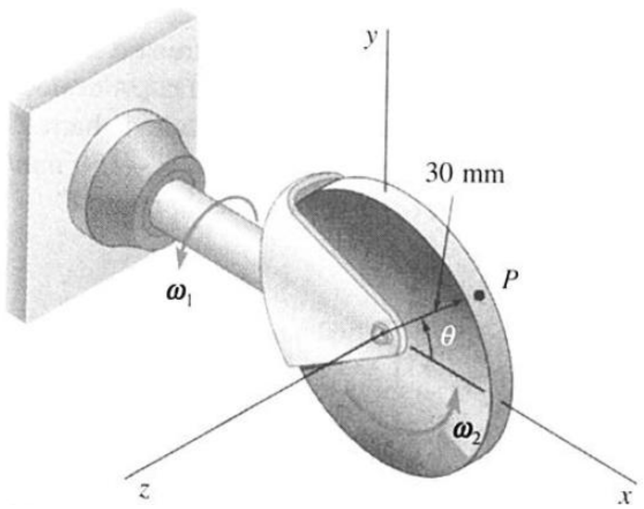
Exercício 9: Um disco com um raio de 30 mm gira com uma velocidade angular constante $\omega_2 = 4$ rad/s em torno de um eixo, apoiado na extremidade de um veio que pode rodar com velocidade angular constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Sabendo que $\theta = 30°$, determine:

(a) a velocidade do ponto *P* da periferia do disco;

(b) a aceleração do ponto *P* da periferia do disco;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



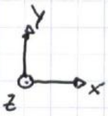
(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.193 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 9: RESOLUÇÃO

DADOS: $w_1 = 5$ rad/s (CONSTANTE)
$w_2 = 4$ rad/s (CONSTANTE)
$\theta = 30^o$
$R = 30$ mm

PEDIDO: a) $\vec{v}_P$
b) $\vec{a}_P$

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

EIXO HORIZONTAL DE SUPORTE DO DISCO: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
DISCO: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE DETERMINAR A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DO PONTO P. ESTE PONTO PERTENCE AO DISCO RÍGIDO, QUE RODA EM RELAÇÃO AO SEU SUPORTE COM $\vec{w}_2$, VECTOR QUE RODARÁ NUM PLANO VERTICAL COM BASE NA ROTAÇÃO DO SUPORTE COM $\vec{w}_1$ CONSTANTE. ASSIM, POR UM LADO, A VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DO DISCO CORRESPONDE A:

$$\vec{w}_{disco} = \vec{w}_{suporte} + \vec{w}_{disco/suporte} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

POR OUTRO LADO, OS DOIS EIXOS DE ROTAÇÃO DE $\vec{w}_1$ E $\vec{w}_2$ CRUZAM-SE NA ORIGEM DO SISTEMA DE EIXOS REPRESENTADO NA FIGURA, OU SEJA, NO CENTRO DO DISCO. ASSIM, ESTE PONTO ESTÁ FIXO, O QUE SIGNIFICA QUE A VELOCIDADE DO CENTRO DO DISCO (PONTO O) E A CORRESPONDENTE ACELERAÇÃO SÃO NULAS! ESTE FACTO PODE SER USADO PARA O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA!!

NESTE CASO, A UTILIZAÇÃO DE UM PONTO FIXO NO MÉTODO DESIGNADO MDTRR CORRESPONDE A UMA TÉCNICA QUE SE DESIGNARÁ DE MÉTODO DO PONTO FIXO.

POR FIM, REFIRA-SE QUE O REFERENCIAL INERCIAL OXYZ SELECCIONADO COINCIDE, PARA O INSTANTE APRESENTADO, COM O REFERENCIAL ROTATIVO Oxyz.

1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

A ESTRUTURA É CONSTITUÍDA POR 2 PARTES MÓVEIS: SUPORTE E DISCO. NESTE CASO, NO ENTANTO, VISTO EXISTIR O PONTO FIXO O, ENTÃO AS EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DE $\vec{v}_P$ E $\vec{a}_P$ CORRESPONDEM A:

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \cancel{\vec{v}_O}^{\vec{0}} + \vec{v}_{P/O} \\ \vec{a}_P = \cancel{\vec{a}_O}^{\vec{0}} + \vec{a}_{P/O} \end{cases} \Leftarrow \vec{v}_O = \vec{a}_O \text{ POIS O ESTÁ FIXO.}$$

COMO P É UM PONTO DO CORPO RÍGIDO, ENTÃO A SUA DISTÂNCIA A O, ISTO É, $\|\overline{OP}\|$, SERÁ CONSTANTE. DESTE MODO, O SEU MOVIMENTO (DE P) SERÁ DE ROTAÇÃO EM TORNO DO PONTO FIXO O COM VALORES ABSOLUTOS $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$.

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{0} + \vec{v}_{P/O} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} \\ \vec{a}_P = \vec{0} + \vec{a}_{P/O} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OP} \end{cases}$$

$\vec{\omega}$?

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad \text{(COMO JÁ REFERIMOS)}$$
$$= 5\hat{i} + 4\hat{k}$$

NOTA: NESTE PROBLEMA $\vec{\omega}_1$ É CONSTANTE (PORQUÊ?)

NO ENTANTO, $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2(t)$. ESTE VECTOR TEM NORMA CONSTANTE (POIS ω_2 É CONSTANTE), MAS A SUA DIRECÇÃO VARIA. ASSIM, A SUA DERIVADA ($\dot{\vec{\omega}}_2$) SERÁ PERPENDICULAR A $\vec{\omega}_2$! (O VECTOR SÓ RODA).

LOGO, $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2(t)$, SENDO O VECTOR ACIMA REFERIDO O CORRESPONDENTE A $\vec{\omega}(t)$ APENAS NO INSTANTE APRESENTADO NO ENUNCIADO!

$\vec{\alpha}$?

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left[\frac{d(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)}{dt}\right]_{Oxyz} = \cancel{\left[\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right]_{Oxyz}}^{\vec{0}} + \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} =$$

$$= \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz}$$

ATENDENDO A QUE O DISCO RODA COM $\vec{\omega}_2$ "EM CIMA" DE UM SUPORTE QUE RODA COM $\vec{\omega}_1$, ENTÃO PODE RECORRER-SE À REGRA ÇÃO

$$\vec{\alpha} = \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{Oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_2$$

COMO O VECTOR $\vec{\omega}_2$ TEM $\|\vec{\omega}_2\|$ CONSTANTE ENTÃO QUEM RODA NO REFERENCIAL $Oxyz$ VÊ O VECTOR $\vec{\omega}_2$ ESTACIONÁRIO $\Rightarrow$

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{Oxyz} = \vec{0}$$

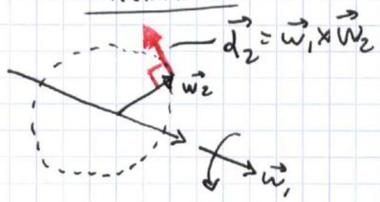
POR OUTRO LADO, SENDO $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1$ (VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DE $Oxyz$) ENTÃO

$$\vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \quad \longleftarrow$$

ESTA REGRA INDICA QUE: "UM VECTOR $\vec{\omega}_2$ DE NORMA CONSTANTE QUE RODE COM $\vec{\omega}_1$ TEM $\vec{\alpha}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$".

IMPORTANTE!

ASSIM, TEM-SE QUE



$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} \\ \vec{a}_P = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) + \vec{\alpha} \times \vec{OP} \end{cases}$$

EM QUE

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 5\hat{i} + 4\hat{k} \text{ rad/s} \\ \vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 5\hat{i} \times 4\hat{k} = -20\hat{j} \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

SENDO, AINDA,

$$\vec{OP} = R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} + 0\hat{k}) = 30(\cos 30\hat{i} + \sin 30\hat{j}) = 26\hat{i} + 15\hat{j} \text{ mm}$$

ASSIM,

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60 \\ 104 \\ 75 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}$$

$$\vec{a}_P = \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{\vec{v}_P} + \vec{\alpha} \times \vec{OP} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -60 \\ 104 \\ 75 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -416 \\ -615 \\ 520 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 520 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -416 \\ -615 \\ 1040 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2$$

2- MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, TEM-SE

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/R} \\ \vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_C \end{cases}$$

$\vec{v}_P$?

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{v}_{P'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{v}_{P/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/R} + \vec{v}_{P/R}$$

TEM-SE QUE $\begin{cases} \vec{v}_0 = \vec{0} \text{ (PONTO FIXO!)} \\ \vec{\Omega} = \vec{w}_1 \\ \vec{r}_{P/R} = \vec{OP} = \vec{oP} \\ \vec{v}_{P/R} = \vec{w}_2 \times \vec{OP} = \vec{w}_2 \times \vec{oP} \end{cases}$ (OS REFERENCIAIS OXYZ E oxyz COINCIDEM NO INSTANTE CONSIDERADO!)

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \underbrace{\vec{w}_1 \times \vec{OP}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{w}_2 \times \vec{oP}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}}$$

NESTE CASO, A EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A 3 EQUAÇÕES ESCALARES EM X, Y E Z, VISTO O MOVIMENTO SER NÃO-PLANO!

NESTE CASO, HÁ 3 EQUAÇÕES PARA AS 3 INCÓGNITAS QUE SÃO AS 3 COMPONENTES DE $\vec{v}_P$. ASSIM,

$$\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} v_{P_x} \\ v_{P_y} \\ v_{P_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -60 \\ 104 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60 \\ 104 \\ 75 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

→ 3 INCÓGNITAS

$\vec{a}_P$?

$$\underbrace{\vec{a}_P}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{a}_{P'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{a}_{P/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} + \vec{a}_C \rightarrow \text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/R}) + \vec{a}_{P/R} + 2\,\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/R}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{a}_O = \vec{0} \quad \text{(PONTO FIXO!)} \\ \dot{\vec{\Omega}} = (\dot{\vec{\omega}}_1) = \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \quad \text{(POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE)} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{P/R} = \vec{OP} \\ \vec{a}_{P/R} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OP}) \\ \vec{v}_{P/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{OP} \quad \text{(JÁ CALCULADO)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OP})}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OP})}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OP})}_{\text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}}$$

NESTE CASO, A EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE, MAIS UMA VEZ, A 3 EQUAÇÕES ESCALARES EM X, Y E Z, VISTO O MOVIMENTO SER NÃO-PLANO.

NESTA SITUAÇÃO, HÁ 3 EQUAÇÕES PARA 3 INCÓGNITAS QUE SÃO AS 3 COMPONENTES DE $\vec{a}_P$. ASSIM,

$$\vec{a}_P = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \\ a_{Pz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \underbrace{\left(\begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)}_{\vec{v}_{P'}} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \underbrace{\left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)}_{\vec{v}_{P/R}} + 2 \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \underbrace{\left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 26 \\ 15 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)}_{\vec{v}_{P/R}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -60 \\ 104 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -60 \\ 104 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -375 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -416 \\ -240 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1040 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -416 \\ -615 \\ 1040 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \quad //$$

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 10: O corpo cilíndrico gira a uma velocidade angular constante ω_2 = 8 rad/s em relação à barra *CD*, que roda com velocidade angular constante ω_1 = 6 rad/s em torno do eixo *X*. Para a posição mostrada, determine:

(a) a velocidade ponto *A* na aresta do cilindro;

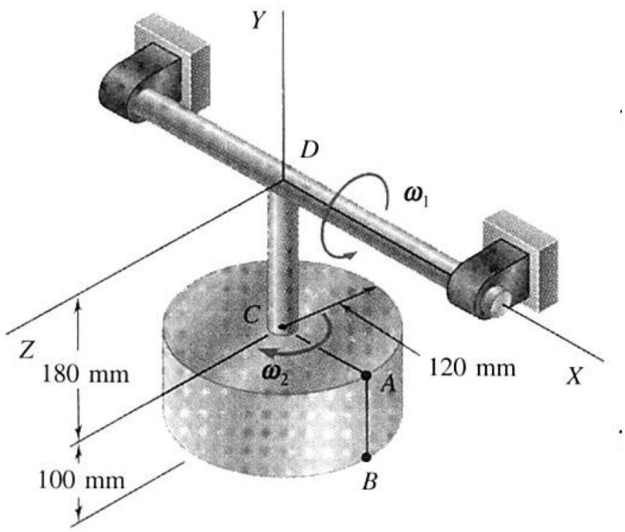
(b) a aceleração ponto *A* na aresta do cilindro;

(c) a velocidade ponto *B* na aresta do cilindro;

(d) a aceleração ponto *B* na aresta do cilindro;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado dos exercícios propostos 15.244 e 15.245 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 10: RESOLUÇÃO

DADOS: $w_1 = 6$ rad/s (CONSTANTE)

$w_2 = 8$ rad/s (CONSTANTE)

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

PEDIDO:

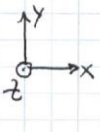
a) $\vec{v}_A$

b) $\vec{a}_A$

c) $\vec{v}_B$

d) $\vec{a}_B$

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO

CILINDRO: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
SUPORTE DO DISCO: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLACÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE DETERMINAR A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DOS PONTOS A E B. ESTES PONTOS PERTENCEM AO CILINDRO, QUE RODA EM RELAÇÃO AO SEU SUPORTE COM $\vec{w}_2$, QUE RODA NUM PLANO VERTICAL COM BASE NA ROTAÇÃO DO SUPORTE COM $\vec{w}_1$ CONSTANTE. ASSIM, POR UM LADO, A VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DO CILINDRO CORRESPONDE A:

$$\vec{w}_{CILINDRO} = \vec{w}_{SUPORTE} + \vec{w}_{CILINDRO/SUPORTE} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2.$$

POR OUTRO LADO, OS DOIS EIXOS DE ROTAÇÃO DE $\vec{w}_1$ E $\vec{w}_2$ CRUZAM-SE NA ORIGEM DO SISTEMA DE EIXOS REPRESENTADO: PONTO D. ASSIM, ESTE PONTO ESTÁ FIXO, O QUE SIGNIFICA QUE A VELOCIDADE DE D E A SUA ACELERAÇÃO SÃO NULAS. A CONSIDERAÇÃO DESTE PONTO FIXO NO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA DESIGNA-SE POR MÉTODO DO PONTO FIXO.

J. Alexandre M. de Pinho da Cruz (jpc@ua.pt) ● versão 1.0
Departamento de Engenharia Mecânica ● Universidade de Aveiro

1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

A ESTRUTURA É CONSTITUÍDA POR 2 PARTES MÓVEIS: SUPORTE E CILINDRO. NESTE CASO, VISTO EXISTIR O PONTO FIXO D, ENTÃO AS EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DE $\vec{v}$ E $\vec{a}$ NOS PONTOS A E B CORRESPONDEM A:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_D}^{\vec{0}} + \vec{v}_{A/D} \\ \vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_D}^{\vec{0}} + \vec{v}_{B/D} \\ \vec{a}_A = \cancel{\vec{a}_D}^{\vec{0}} + \vec{a}_{A/D} \\ \vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_D}^{\vec{0}} + \vec{a}_{B/D} \end{cases} \quad \text{E} \quad \vec{a}_D = \vec{v}_D = \vec{0} \text{ POIS D ESTÁ FIXO.}$$

SENDO D UM PONTO UM PONTO FIXO, ENTÃO COMO A E B SÃO PONTOS DO CORPO RÍGIDO CILÍNDRICO, RESULTA QUE AS SUAS DISTÂNCIAS A D ($\|\vec{DA}\|$ e $\|\vec{DB}\|$) SERÃO CONSTANTES. ASSIM, ESTES PONTOS CORRESPONDEM A ROTAÇÕES EM TORNO DO PONTO FIXO D COM VALORES ABSOLUTOS $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$.

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} + \vec{v}_{A/D} = \vec{\omega} \times \vec{DA} \\ \vec{v}_B = \vec{0} + \vec{v}_{B/D} = \vec{\omega} \times \vec{DB} \\ \vec{a}_A = \vec{0} + \vec{a}_{A/D} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA} \\ \vec{a}_B = \vec{0} + \vec{a}_{B/D} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DB}) + \vec{\alpha} \times \vec{DB} \end{cases}$$

$\vec{\omega}$?

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad \text{(COMO JÁ REFERIMOS)}$$
$$= 6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$$

NOTA: NESTE PROBLEMA $\vec{\omega}_1$ É CONSTANTE (PORQUÊ?)

NO ENTANTO, $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2(t)$. ESTE VECTOR TEM NORMA CONSTANTE (POIS ω_2 É CONSTANTE), MAS A SUA DIRECÇÃO VARIA. ASSIM, A SUA DERIVADA ($\vec{\alpha}_2$) SERÁ PERPENDICULAR A $\vec{\omega}_2$! (O VECTOR SÓ RODA).

LOGO, $\vec{\omega}(t) = \omega_1 + \vec{\omega}_2(t)$, SENDO O VECTOR ACIMA REFERIDO O CORRESPONDENTE A $\vec{\omega}(t)$ APENAS NO INSTANTE CONSIDERADO NO ENUNCIADO.

$\vec{\alpha}$? $\quad \vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\right]_{Oxyz} = \cancel{\left[\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right]_{Oxyz}}^{\vec{0}} + \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} =$

$$= \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{Oxyz}$$

ATENDENDO A QUE O CILINDRO RODA COM $\vec{\omega}_2$ "EM CIMA" DE UM SUPORTE QUE RODA COM $\vec{\omega}_1$, ENTÃO PODE RECORRER-SE À RELAÇÃO

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{oxyz} + \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_2$$

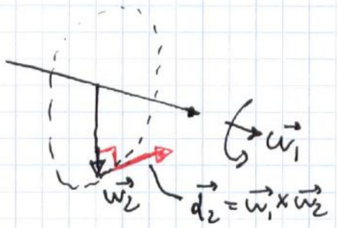
COMO $\vec{\omega}_2$ TEM $\|\vec{\omega}_2\|$ CONSTANTE, ENTÃO QUEM RODA NO REFERENCIAL $oxyz$ VÊ O VECTOR $\vec{\omega}_2$ ESTACIONÁRIO $\rightarrow$

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{oxyz} = \vec{0}$$

POR OUTRO LADO, SENDO $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1$ (VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DE $oxyz$)

$\vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \quad \leftarrow$ "$\vec{\omega}_2$ RODA, TENDO NORMA CONSTANTE, COM $\vec{\omega}_1$"

ASSIM, TEM-SE QUE



$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA} \\ \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB} \\ \vec{a}_A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OA}) + \vec{\alpha} \times \vec{OA} \\ \vec{a}_B = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OB}) + \vec{\alpha} \times \vec{OB} \end{cases}$$

EM QUE

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 6\hat{i} - 8\hat{j} \text{ rad/s} \\ \vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 6\hat{i} \times (-8\hat{j}) = -48\hat{k} \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

SENDO, AINDA,

$$\begin{cases} \vec{OA} = 120\hat{i} - 180\hat{j} \text{ mm} \\ \vec{OB} = 120\hat{i} - 280\hat{j} \text{ mm} \end{cases}$$

Assim,

$$\left\{\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{\omega}\times\vec{DA} = \begin{Bmatrix}6\\-8\\0\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}120\\-180\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\-120\end{Bmatrix} \text{ mm/s} \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega}\times\vec{DB} = \begin{Bmatrix}6\\-8\\0\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}120\\-280\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\-720\end{Bmatrix} \text{ mm/s} \end{aligned}\right.$$

e

$$\left\{\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{\omega}\times\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{DA})}_{\vec{v}_A} + \vec{\alpha}\times\vec{DA} = \begin{Bmatrix}6\\-8\\0\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}0\\0\\-120\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\0\\-48\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}120\\-180\\0\end{Bmatrix} \\ \vec{a}_B &= \vec{\omega}\times\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{DB})}_{\vec{v}_B} + \vec{\alpha}\times\vec{DB} = \begin{Bmatrix}6\\-8\\0\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}0\\0\\-720\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\0\\-48\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}120\\-280\\0\end{Bmatrix} \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} \vec{a}_A &= \begin{Bmatrix}960\\720\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-8640\\-5760\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-7680\\-5040\\0\end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \\ \vec{a}_B &= \begin{Bmatrix}5760\\4320\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-13440\\-5760\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-7680\\-1440\\0\end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}\right.$$

2 - MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, TEM-SE

$$\left\{\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/R} \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_C \end{aligned}\right.$$

$\vec{v}_{P/R}$?

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{\text{absoluta}} = \underbrace{\vec{v}_{P'}}_{\text{transporte}} + \vec{v}_{P/R} \rightarrow \text{em relação ao eixo de rotação } R$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_{A'} + \vec{v}_{A/R} \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{B/R} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/R} + \vec{v}_{A/R} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{v}_{B/R} \end{cases}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{0} \quad \text{(PONTO FIXO)} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{A/R} = \vec{DA} = \vec{DA} \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{DB} = \vec{DB} \\ \vec{v}_{A/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DA} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DA} \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DB} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DB} \end{cases}$$

(POIS OS REFERENCIAIS OXYZ E OUVZ COINCIDEM NO INSTANTE CONSIDERADO!)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{DA} + \vec{\omega}_2 \times \vec{DA} \\ \vec{v}_B = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times \vec{DB}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{DB}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} \end{cases}$$

NESTE CASO, CADA EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A 3 EQUAÇÕES ESCALARES EM X, Y E Z, VISTO O MOVIMENTO SER NÃO-PLANO.

NESTE CASO HÁ 3 INCÓGNITAS QUE SÃO AS 3 COMPONENTES DA VELOCIDADE. ASSIM,

$$\vec{v}_A = \underbrace{\begin{Bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Az} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -180 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -180 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1080 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -280 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -280 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1680 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -720 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

$\underline{\underline{\vec{a}_P ?}}$

$$\underbrace{\vec{a}_P}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{a}_{P_1}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{a}_{P/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} + \vec{a}_C$$

COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_D + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{A/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/R}) + \vec{a}_{A/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{A/R} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_D + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R}) + \vec{a}_{B/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/R} \end{cases}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{a}_D = \vec{0} \quad \text{(PONTO FIXO)} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \quad \text{(POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE)} \\ \vec{r}_{A/R} = \vec{DA} = \vec{DA} \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{DB} = \vec{DB} \\ \vec{a}_{A/R} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{DA}) \\ \vec{a}_{B/R} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{DB}) \\ \left.\begin{array}{l} \vec{v}_{A/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DA} \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DB} \end{array}\right\} \text{(JÁ CALCULADAS)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_A = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{DA}) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{DA}) + 2\,\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{DA}) \\ \vec{a}_B = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{DB})}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{DB})}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{DB})}_{\text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}} \end{cases}$$

NESTE CASO, CADA EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE, OUTRA VEZ, A 3 EQUAÇÕES ESCALARES EM X, Y E Z, VISTO O MOVIMENTO SER NÃO-PLANO.

HÁ 3 EQUAÇÕES PARA AS 3 INCÓGNITAS ASSOCIADAS ÀS 3 COMPONENTES DE $\vec{a}$. ASSIM,

$$\vec{a}_A = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ a_{Az} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -180 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_A'} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -180 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{A/R}} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -180 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{A/R}} \right)$$

$$\vec{a}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \\ a_{Bz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -280 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_B'} \right) + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -280 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{B/R}} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 120 \\ -280 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{B/R}} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1080 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{Bmatrix} \\ \\ \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1680 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 960 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6480 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -7680 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -11520 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7680 \\ -5040 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \\ \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10080 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -7680 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -11520 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7680 \\ -1440 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \end{cases}$$

NOTA: ESTE PROBLEMA É SEMELHANTE, EM TERMOS DE FORMULAÇÃO AO PROBLEMA 9. DE FACTO, PODE CONSTATAR-SE QUE OS DOIS PROBLEMAS CORRESPONDEM A UM CORPO QUE RODA COM $\vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$ E $\vec{\alpha}=\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2$ EM TORNO DE UM PONTO FIXO!!

FORMALMENTE TÊM A MESMA RESOLUÇÃO!!

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exercício 11: Uma placa quadrada com 180 mm de lado é ligada em *A* e em *B* a um garfo. A placa roda com velocidade angular constante $\omega_2 = 4$ rad/s em relação ao garfo, que por sua vez roda ele próprio em torno do eixo Y com velocidade angular constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Para a posição mostrada, determine:

(a) a velocidade do ponto *C*;

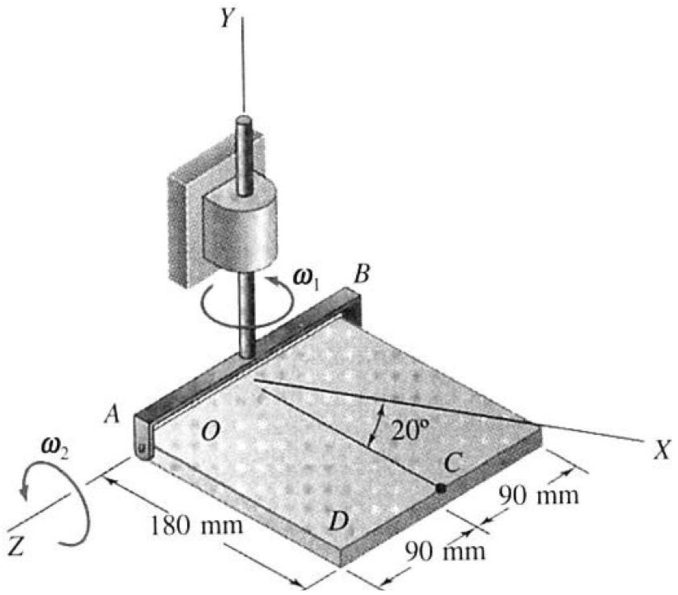
(b) a aceleração do ponto *C*;

(c) a velocidade do canto *D*;

(d) a aceleração do canto *D*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado dos exercícios propostos 15.244 e 15.245 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 11: RESOLUÇÃO

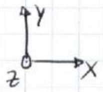
DADOS: $w_1 = 3$ rad/s (CONSTANTE) PEDIDO: a) $\vec{v}_C$

$w_2 = 4$ rad/s (CONSTANTE) b) $\vec{a}_C$

MEDIDAS GEOMÉTRICAS c) $\vec{v}_D$

d) $\vec{a}_D$

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

PLACA: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
GARFO DE SUPORTE DA PLACA: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE DETERMINAR A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DOS PONTOS C E D. ESTES PONTOS PERTENCEM À PLACA, QUE RODA EM RELAÇÃO AO SEU SUPORTE COM $\vec{w}_2$, QUE RODA NUM PLANO HORIZONTAL COM BASE NA ROTAÇÃO DO SUPORTE COM $\vec{w}_1$ CONSTANTE. ASSIM, POR UM LADO, A VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DO CILINDRO CORRESPONDE A:

$$\vec{w}_{PLACA} = \vec{w}_{SUPORTE} + \vec{w}_{PLACA/SUPORTE} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 .$$

POR OUTRO LADO, OS DOIS EIXOS DE ROTAÇÃO DE $\vec{w}_1$ E $\vec{w}_2$ CRUZAM-SE NA ORIGEM DO SISTEMA DE EIXOS REPRESENTADO: PONTO O. ASSIM, ESTE PONTO ESTÁ FIXO, O QUE SIGNIFICA QUE A VELOCIDADE DE O E A SUA ACELERAÇÃO SÃO NULAS. A CONSIDERAÇÃO DESTE PONTO FIXO NO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA DESIGNA-SE POR MÉTODO DO PONTO FIXO.

1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

A ESTRUTURA É CONSTITUÍDA POR 2 PARTES MÓVEIS: SUPORTE E PLACA. NESTE CASO, VISTO EXISTIR O PONTO FIXO O, ENTÃO AS EQUAÇÕES PARA O CÁLCULO DE $\vec{v}$ E $\vec{a}$ NOS PONTOS C E D CORRESPONDEM A:

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \cancel{\vec{v}_O}^{\vec{0}} + \vec{v}_{C/O} \\ \vec{v}_D = \cancel{\vec{v}_O}^{\vec{0}} + \vec{v}_{D/O} \\ \vec{a}_C = \cancel{\vec{a}_O}^{\vec{0}} + \vec{a}_{C/O} \\ \vec{a}_D = \cancel{\vec{a}_O}^{\vec{0}} + \vec{a}_{D/O} \end{cases}$$

E $\vec{a}_O = \vec{v}_O = \vec{0}$ POIS O ESTÁ FIXO.

SENDO O UM PONTO FIXO, ENTÃO COMO C E D SÃO PONTOS DA PLACA RÍGIDA, RESULTA QUE AS SUAS DISTÂNCIAS A O ($\|\vec{OC}\|$ E $\|\vec{OD}\|$) SERÃO CONSTANTES. ASSIM, ESTES PONTOS CORRESPONDEM A ROTAÇÕES EM TORNO DO PONTO FIXO O COM VALORES ABSOLUTOS $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$.

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{0} + \vec{v}_{C/O} = \vec{\omega} \times \vec{OC} \\ \vec{v}_D = \vec{0} + \vec{v}_{D/O} = \vec{\omega} \times \vec{OD} \\ \vec{a}_C = \vec{0} + \vec{a}_{C/O} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OC}) + \vec{\alpha} \times \vec{OC} \\ \vec{a}_D = \vec{0} + \vec{a}_{D/O} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OD}) + \vec{\alpha} \times \vec{OD} \end{cases}$$

$\vec{\omega}$ // ? $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (COMO JÁ REFERIMOS)

$= 3\hat{j} + 4\hat{k}$

NOTA: NESTE CASO $\vec{\omega}_1$ É CONSTANTE (MAIS UMA VEZ, PORQUÊ?)

DE IGUAL MODO, $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2(t)$. EMBORA A SUA NORMA SEJA CONSTANTE A SUA DIRECÇÃO VARIA. LOGO, A SUA DERIVADA ($\vec{\alpha}_2$) SERÁ PERPENDICULAR A $\vec{\omega}_2$! (O VECTOR SÓ RODA).

LOGO, $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2(t)$, SENDO O VECTOR ACIMA CORRESPONDENTE A $\vec{\omega}(t)$ APENAS NO INSTANTE CONSIDERADO NO ENUNCIADO.

$\vec{\alpha}$? $\quad \vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_{Oxyz} = \left[\frac{d(\vec{w}_1+\vec{w}_2)}{dt}\right]_{Oxyz} = \cancelto{\vec{0}}{\left(\frac{d\vec{w}_1}{dt}\right)_{Oxyz}} + \left(\frac{d\vec{w}_2}{dt}\right)_{Oxyz} =$

$$\left(\frac{d\vec{w}_2}{dt}\right)_{Oxyz}$$

ATENDENDO A QUE A PLACA RODA COM $\vec{w}_2$ "EM CIMA" DE UM SUPORTE QUE RODA COM $\vec{w}_1$, ENTÃO PODE RECORRER-SE À RELAÇÃO

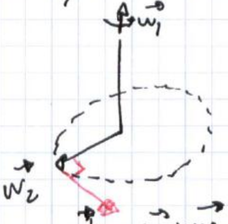
$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{w}_2}{dt}\right)_{Oxyz} = \left(\frac{d\vec{w}_2}{dt}\right)_{Ouyz} + \vec{\Omega}\times\vec{w}_2$$

COMO $\vec{w}_2$ TEM $\|\vec{w}_2\|$ CONSTANTE, ENTÃO QUEM RODA NO REFERENCIAL Ouyz VÊ O VECTOR $\vec{w}_2$ ESTACIONÁRIO $\Rightarrow$

$$\left(\frac{d\vec{w}_2}{dt}\right)_{Ouyz} = \vec{0}$$

POR OUTRO LADO, SENDO $\vec{\Omega} = \vec{w}_1$ (VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DE Ouyz)

$\vec{\alpha} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \quad \leftarrow \quad$ "$\vec{w}_2$ RODA, TENDO NORMA CONSTANTE, COM $\vec{w}_1$"



$\vec{\alpha}_2 = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$

ASSIM, TEM-SE

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{w}\times\vec{OC} \\ \vec{v}_D = \vec{w}\times\vec{DC} \\ \vec{a}_C = \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{OC}) + \vec{\alpha}\times\vec{OC} \\ \vec{a}_D = \vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{OD}) + \vec{\alpha}\times\vec{OD} \end{cases}$$

EM QUE $\begin{cases} \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = 3\hat{j} + 4\hat{k} \ \text{rad/s} \\ \vec{\alpha} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = 3\hat{j}\times 4\hat{k} = 12\hat{i} \ \text{rad/s}^2 \end{cases}$

SENDO AINDA,

$$\begin{cases} \vec{OC} = 180\,(\cos 20^\circ\,\hat{i} - \sin 20^\circ\,\hat{j} + 0\hat{k}) = 169\hat{i} - 62\hat{j} \quad \text{mm} \\ \vec{OD} = 180\,(\cos 20^\circ\,\hat{i} - \sin 20^\circ\,\hat{j} + 90\hat{k}) = 169\hat{i} - 62\hat{j} + 90\hat{k} \quad \text{mm} \end{cases}$$

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{OC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ -507 \end{Bmatrix} \text{ mm/s} \\ \\ \vec{v}_D = \vec{\omega} \times \vec{OD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 518 \\ 676 \\ -507 \end{Bmatrix} \text{ mm/s} \end{cases}$$

E

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{\omega} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OC}}_{\vec{v}_C}) + \vec{\alpha} \times \vec{OC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ -507 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \\ \vec{a}_D = \vec{\omega} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OD}}_{\vec{v}_D}) + \vec{\alpha} \times \vec{OD} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 518 \\ 676 \\ -507 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} -4225 \\ 992 \\ -744 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -744 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4225 \\ 992 \\ -1488 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \\ \\ \vec{a}_D = \begin{Bmatrix} -4225 \\ 2072 \\ -1554 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1080 \\ -744 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4225 \\ 992 \\ -2298 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \end{cases}$$

2- MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO TEM-SE

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/R} \\ \\ \vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_c \end{cases}$$

$\vec{v}_{P/R}$?

$\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/R} \rightarrow$ EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R

$\downarrow$ ABSOLUTA $\quad \downarrow$ TRANSPORTE

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_{C'} + \vec{v}_{C/R} \\ \\ \vec{v}_D = \vec{v}_{D'} + \vec{v}_{D/R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/R} + \vec{v}_{C/R} \\ \vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{v}_{D/R} \end{cases}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{v}_O = \vec{0} \quad \text{(PONTO FIXO)} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{C/R} = \vec{OC} = \vec{oc} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{OD} = \vec{oD} \\ \vec{v}_{C/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{OC} = \vec{\omega}_2 \times \vec{oc} \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{OD} = \vec{\omega}_2 \times \vec{oD} \end{cases}$$

(POIS OS REFERENCIAIS OXYZ E oxyz COINCIDEM NO INSTANTE CONSIDERADO)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_C = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times \vec{OC}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{oc}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} \\ \vec{v}_D = \vec{\omega}_1 \times \vec{OD} + \vec{\omega}_2 \times \vec{oD} \end{cases}$$

NESTE CASO, CADA EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A 3 EQUAÇÕES ESCALARES EM X, Y E Z, VISTO O MOVIMENTO SER NÃO-PLANO.

HÁ 3 EQUAÇÕES PARA AS 3 INCÓGNITAS QUE SÃO AS 3 COMPONENTES DE $\vec{v}$, VINDO

$$\vec{v}_C = \underbrace{\begin{Bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \\ v_{Cz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -507 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ -507 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

$$\vec{v}_D = \underbrace{\begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ v_{Dz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 270 \\ 0 \\ -507 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 518 \\ 676 \\ -507 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

$\vec{a}_P$?

$$\underbrace{\vec{a}_P}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{a}_{P_1}}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{a}_{P/R}}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} + \vec{a}_c \rightarrow \text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{C/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/R}) + \vec{a}_{C/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{C/R} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/R}) + \vec{a}_{D/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{D/R} \end{cases}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{a}_O = \vec{0} \quad \text{(PONTO FIXO)} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{q}}_1 = \vec{0} \quad \text{(POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE)} \\ \vec{r}_{C/R} = \vec{OC} = \vec{OC} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{OD} = \vec{OD} \\ \vec{a}_{C/R} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OC}) \\ \vec{a}_{D/R} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OD}) \\ \left.\begin{array}{l} \vec{v}_{C/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{OC} \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{OD} \end{array}\right\} \text{(JÁ CALCULADAS)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OC}) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OC}) + 2\,\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OC}) \\ \vec{a}_D = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OD})}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OD})}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{OD})}_{\text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}} \end{cases}$$

NESTE CASO, CADA EQUAÇÃO VECTORIAL CORRESPONDE A 3 EQUAÇÕES ESCALARES EM X, Y E Z, VISTO O MOVIMENTO SER NÃO-PLANO.

HÁ 3 EQUAÇÕES PARA AS 3 INCÓGNITAS ASSOCIADAS ÀS 3 COMPONENTES DE $\vec{a}$. ASSIM,

$$\vec{a}_C = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ a_{Cz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 164 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{C'}} \Bigg) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{C/R}} \Bigg) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 164 \\ -62 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{C/R}} \Bigg)$$

$$\vec{a}_D = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Dx} \\ a_{Dy} \\ a_{Dz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{D'}} \Bigg) + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 169 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{D/R}} \Bigg) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 164 \\ -62 \\ 90 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{D/R}} \Bigg)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -507 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vec{a}_D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 270 \\ 0 \\ -507 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 248 \\ 676 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} -1521 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2704 \\ 992 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1488 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4225 \\ 992 \\ -1488 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \\ \vec{a}_D = \begin{Bmatrix} -1521 \\ 0 \\ -810 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2704 \\ 992 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1488 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4225 \\ 992 \\ -2298 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}^2 \end{cases}$$

NOTA: MAIS UMA VEZ, ESTE PROBLEMA É FORMALMENTE EQUIVALENTE AOS 2 ANTERIORES! TEM-SE UM CORPO RÍGIDO QUE RODA COM $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ E $\vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$ EM TORNO DE UM PONTO FIXO!

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

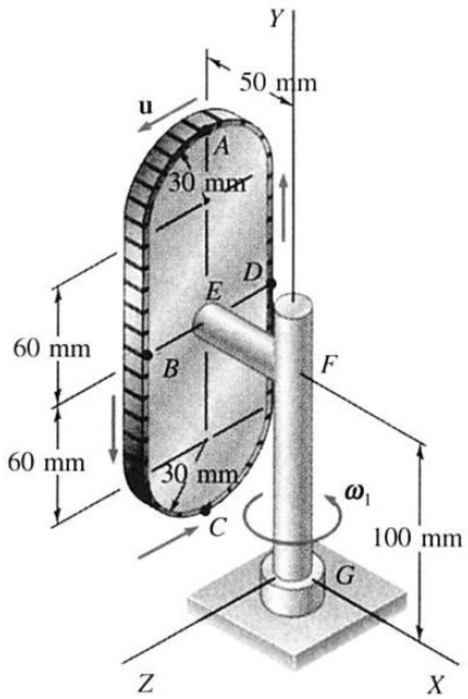
Exercício 12: A placa vertical mostrada está soldada ao braço *EFG* e o conjunto roda com velocidade angular constante ω_1 = 1,6 rad/s em torno do eixo *Y*. Ao mesmo tempo, uma corrente desloca-se ao longo do perímetro da placa com uma velocidade constante u = 45 mm/s. Para a posição mostrada, determine:

(a) as velocidades dos elos da corrente situados nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*;

(b) as acelerações dos elos da corrente situados nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado dos exercícios propostos 15.246 e 15.247 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

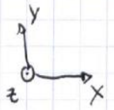
EXERCÍCIO 12: RESOLUÇÃO

DADOS: $W_1 = 1{,}6$ rad/s (CONSTANTE)   PEDIDO: a) $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_C$ e $\vec{v}_D$

$u = 45$ mm/s (CONSTANTE)   b) $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$, $\vec{a}_C$ e $\vec{a}_D$

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

SUPORTE DA CORRENTE: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
CORRENTE: MOVIMENTO NÃO-PLANO GERAL
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

PRETENDE-SE DETERMINAR AS VELOCIDADES E AS ACELERAÇÕES EM VÁRIOS ELOS DE UMA CORRENTE. NO PROBLEMA ASSUME-SE QUE O MOVIMENTO DA CORRENTE EM RELAÇÃO AO SUPORTE É DE TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA OU RECTILÍNEA DEPENDENDO DO TROÇO. ESTE FACTO CORRESPONDE A CONSIDERAR NULA A ESPESSURA PARA OS ELOS DA CORRENTE, CASO CONTRÁRIO ESTES TERIAM MOVIMENTO PLANO GERAL EM RELAÇÃO AO SUPORTE.

1- MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

NESTE CASO, TEMOS UM CORPO RÍGIDO QUE SE MOVE COM ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO E HÁ PONTOS SUPERFICIAIS QUE SE MOVEM NA SUPERFÍCIE DO CORPO RÍGIDO COM UMA VELOCIDADE $\vec{u}$. NO PRESENTE PROBLEMA ASSUME-SE QUE $\|\vec{u}\|$ É CONSTANTE, EMBORA NO CASO GERAL POSSA NÃO O SER!

COMO SE ANALISA ESTE PROBLEMA COM BASE NO MDTRR?

AS EQUAÇÕES SÃO AS APRESENTADAS NA PARTE B-2 NO INÍCIO DA ANÁLISE DA CINEMÁTICA DE CORPOS RÍGIDOS.

MAS, NA PRÁTICA COMO SE PODEM OBTER DIRECTAMENTE ESSAS EQUAÇÕES COM BASE NAS EQUAÇÕES PARA O CORPO RÍGIDO SEM PARTES MÓVEIS? NESTE CASO, ELAS SÃO, DE ACORDO COM PARTE B-1):

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP} \\ \vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A} = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP}) + \vec{\alpha} \times \vec{AP} \end{cases}$$

QUANDO SE CONSIDERA QUE O PONTO P NÃO É DO CORPO RÍGIDO, MAS DESLIZA, PODE CONSIDERAR-SE O PONTO P' QUE COINCIDE COM A NESSE INSTANTE E QUE PERTENCE AO CORPO RÍGIDO. NESSE CASO AS DECOMPOSIÇÕES VÊM:

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P'/A} + \vec{v}_{P/P'} \\ \vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P'/A} + \vec{a}_{P/P'} \end{cases}$$

AGORA, COMO P' PERTENCE AO CORPO RÍGIDO, TEM-SE DE ACORDO COM AS EQUAÇÕES ACIMA:

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \left[\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP'}\right] + \vec{v}_{P/P'} \\ \vec{a}_P = \left[\vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP'}) + \vec{\alpha} \times \vec{AP'}\right] + \vec{a}_{P/P'} \end{cases}$$

SENDO $\vec{v}_{P/P'} = \vec{\mu}$ A VELOCIDADE COM QUE O PONTO P SE DESLOCA SOBRE O CORPO RÍGIDO EM RELAÇÃO A P', ENTÃO

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP'} + \vec{\mu}$$

EM RELAÇÃO À ACELERAÇÃO, HÁ QUE CONSIDERAR A DERIVADA DE $\vec{\mu} \Rightarrow \dot{\vec{\mu}}$, QUE CORRESPONDE À ACELERAÇÃO DO PONTO P EM RELAÇÃO AO PONTO P' DO CORPO RÍGIDO. ALÉM DISSO, SURGE UMA ACELERAÇÃO DE CORIOLIS, POIS O PONTO DEIXOU DE ESTAR A UMA DISTÂNCIA CONSTANTE EM RELAÇÃO AO PONTO DE ROTAÇÃO A.

DE FACTO, EM RELAÇÃO A P' NÃO HÁ CORIOLIS, MAS COMO P SE MOVE COM $\vec{\mu}$ EM RELAÇÃO A P', ENTÃO SURGE O TERMO $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{\mu}$!

ASSIM, TEM-SE

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP'}) + \vec{\alpha} \times \vec{AP'} + \dot{\vec{\mu}} + 2\vec{\omega} \times \vec{\mu}$$

POR FIM, COMO NO INSTANTE CONSIDERADO SE TEM QUE OS PONTOS P E P' COINCIDEM, ENTÃO $\vec{AP} \equiv \vec{AP'}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP} + \vec{u} \\ \vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP}) + \vec{\alpha} \times \vec{AP} + \dot{\vec{u}} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} \end{cases}$$

TAL COMO SE DEDUZIU NA PARTE B-2!

NO PROBLEMA ACTUAL O PONTO P PODE SER A, B, C OU D. ALÉM DISSO, A ORIGEM DO REFERENCIAL, QUE ACIMA CORRESPONDE AO PONTO A, PASSA A SER G. NOTE-SE QUE O PONTO G ESTÁ SOBRE O EIXO DE ROTAÇÃO FIXO DO SUPORTE, PELO QUE $\vec{v}_G = \vec{a}_G = \vec{0}$.

ASSIM, TEM-SE:

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \cancelto{\vec{0}}{\vec{v}_G} + \vec{\omega} \times \vec{GP} + \vec{u} \\ \vec{a}_P = \cancelto{\vec{0}}{\vec{a}_G} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{GP}) + \vec{\alpha} \times \vec{AP} + \dot{\vec{u}} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} \end{cases}$$

NESTE CASO:

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$ (CONSTANTE) $\Rightarrow$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{OXYZ} = \vec{0}$$

POR OUTRO LADO, $\|\vec{u}\|$ É CONSTANTE, MAS HÁ ZONAS COM CURVATURA FINITA NA TRAJECTÓRIA DA CORRENTE. DECOMPONDO $\dot{\vec{u}}$ NAS COMPONENTES TANGENCIAL E CENTRÍPETA, VEM:

$$\dot{\vec{u}} = \cancelto{0}{\frac{du}{dt}}\hat{t} + \frac{u^2}{\rho}\hat{n} \Rightarrow \dot{\vec{u}} = \frac{u^2}{\rho}\hat{n}$$

, EM QUE ρ É O RAIO DE CURVATURA, QUE PODE SER R OU $+\infty$.

ASSIM, AS EQUAÇÕES CORRESPONDEM A:

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \times \vec{GP} + \vec{u} \\ \vec{a}_P = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GP}) + \frac{u^2}{\rho}\hat{n} + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{u} \end{cases}$$

SENDO

$\vec{w}_1 = 1,6\,\hat{j}$ rad/s

$\|\vec{u}\| = 45$ mm/s

E

$$\begin{cases} \vec{GA} = -50\hat{i} + 190\hat{j} \\ \vec{u}_A = \|\vec{u}\|\,\hat{k} = 45\hat{k} \\ \hat{m}_A = -\hat{j} \;;\; \rho_A = R = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{GB} = -50\hat{i} + 100\hat{j} + 30\hat{k} \\ \vec{u}_B = -\|\vec{u}\|\,\hat{j} = -45\hat{j} \\ \hat{m}_B = \pm\hat{k} \;;\; \rho_B = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{GC} = -50\hat{i} + 10\hat{j} \\ \vec{u}_C = -\|\vec{u}\|\,\hat{k} = -45\hat{k} \\ \hat{m}_C = \hat{j} \;;\; \rho_C = R = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{GD} = -50\hat{i} + 100\hat{j} - 30\hat{k} \\ \vec{u}_D = \|\vec{u}\|\,\hat{j} = 45\hat{j} \\ \hat{m}_D = \pm\hat{k} \;;\; \rho_D = +\infty \end{cases}$$

ENTÃO

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{w}_1 \times \vec{GA} + \vec{u}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 190 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 125 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_B = \vec{w}_1 \times \vec{GB} + \vec{u}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 100 \\ 30 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -45 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 48 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -45 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 48 \\ -45 \\ 80 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_C = \vec{w}_1 \times \vec{GC} + \vec{u}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_D = \vec{w}_1 \times \vec{GD} + \vec{u}_D = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 100 \\ -30 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48 \\ 45 \\ 80 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \end{cases}$$

E

$$\vec{a}_A = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GA}) + \frac{v_A^2}{\rho_A}\hat{n}_A + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_A =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \frac{45^2}{30} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 128 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 67{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 144 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 272 \\ -67{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

$$\vec{a}_B = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GB}) + \cancel{\frac{v_B^2}{\rho_B}\hat{n}_B}^{\,\to 0} + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_B =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 100 \\ 30 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -45 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 48 \\ 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 128 \\ 0 \\ -76{,}8 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

$$\vec{a}_C = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GC}) + \frac{v_C^2}{\rho_C}\hat{n}_C + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_C =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \frac{45^2}{30} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 128 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 67{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -144 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 67{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

$$\vec{a}_D = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GD}) + \cancel{\frac{v_D^2}{\rho_D}\hat{n}_D}^{\,\to 0} + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_D =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -50 \\ 100 \\ -30 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -48 \\ 0 \\ -80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 128 \\ 0 \\ 76{,}8 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

2- MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/R} \\ \vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_C \end{cases}$$

$\vec{v}_P$ // ?

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{v}_{P'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \vec{v}_{P/R} \rightarrow \text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R$$

NESTE CASO, O PONTO P PODE ASSUMIR AS DESIGNAÇÕES A, B, C OU D.

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/R} + \vec{v}_{A/R} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{v}_{B/R} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/R} + \vec{v}_{C/R} \\ \vec{v}_D = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{v}_{D/R} \end{cases}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{v}_G = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{A/R} = \vec{GA} = \vec{GA} \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{GB} = \vec{GB} \\ \vec{r}_{C/R} = \vec{GC} = \vec{GC} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{GD} = \vec{GD} \\ \vec{v}_{A/R} = \vec{\mu}_A = \vec{\mu}_A \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\mu}_B = \vec{\mu}_B \\ \vec{v}_{C/R} = \vec{\mu}_C = \vec{\mu}_C \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\mu}_D = \vec{\mu}_D \end{cases}$$

(POIS OS REFERENCIAIS OXYZ E OUVW COINCIDEM NO INSTANTE CONSIDERADO)

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{GA} + \vec{\mu}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 125 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{GB} + \vec{\mu}_B = \begin{Bmatrix} 48 \\ -45 \\ 80 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_C = \vec{\omega}_1 \times \vec{GC} + \vec{\mu}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \\ \vec{v}_D = \vec{\omega}_1 \times \vec{GD} + \vec{\mu}_D = \begin{Bmatrix} -48 \\ 45 \\ 80 \end{Bmatrix} \text{mm/s} \end{cases}$$

AS FÓRMULAS SÃO AS DO MDTRR ⇒ DE ACORDO COM OS RESULTADOS DO MDTRR!!

NESTE CASO AS VÁRIAS EQUAÇÕES VECTORIAIS PERMITEM, CADA UMA, OBTER AS 3 COMPONENTES DE $\vec{v}$ COM BASE EM 3 EQUAÇÕES ESCALARES, POIS O MOVIMENTO É NÃO-PLANO.

$\vec{a} \, // \, ?$

$\vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/R} + \vec{a}_C \rightarrow$ COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS

ABSOLUTA — TRANSPORTE — EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R

$\Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{P/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{P/R}) + \vec{a}_{P/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/R}$

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{A/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/R}) + \vec{a}_{A/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{A/R} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R}) + \vec{a}_{B/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/R} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{C/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/R}) + \vec{a}_{C/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{C/R} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_G + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{D/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{D/R}) + \vec{a}_{D/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{D/R} \end{cases}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{a}_G = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \quad (\text{POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE}) \\ \vec{r}_{A/R} = \vec{GA} = \vec{GA} \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{GB} = \vec{GB} \\ \vec{r}_{C/R} = \vec{GC} = \vec{GC} \\ \vec{r}_{D/R} = \vec{GD} = \vec{GD} \\ \vec{a}_{A/R} = \dot{\vec{\mu}}_A = \frac{\mu^2}{\rho_A} \hat{m}_A \\ \vec{a}_{B/R} = \dot{\vec{\mu}}_B = \mu^2/\rho_B \, \hat{m}_B \\ \vec{a}_{C/R} = \dot{\vec{\mu}}_C = \mu^2/\rho_C \, \hat{m}_C \\ \vec{a}_{D/R} = \dot{\vec{\mu}}_D = \mu^2/\rho_D \, \hat{m}_D \\ \vec{v}_{A/R} = \vec{\mu}_A = \vec{\mu}_A \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\mu}_B = \vec{\mu}_B \\ \vec{v}_{C/R} = \vec{\mu}_C = \vec{\mu}_C \\ \vec{v}_{D/R} = \vec{\mu}_D = \vec{\mu}_D \end{cases}$$

NOTA: $\frac{d\hat{m}_t}{dt} = \vec{0}$; VER MOTRR!

(POIS OS REFERENCIAIS OXYZ E Oxyz COINCIDEM NO INSTANTE CONSIDERADO)

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GA}) + \dfrac{\mu_A^2}{\rho_A} \hat{n}_A + 2\,\vec{\omega}_1 \times \vec{\mu}_A \\ \vec{a}_B = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GB}) + \dfrac{\mu_B^2}{\rho_B} \hat{n}_B + 2\,\vec{\omega}_1 \times \vec{\mu}_B \\ \vec{a}_C = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GC}) + \dfrac{\mu_C^2}{\rho_C} \hat{n}_C + 2\,\vec{\omega}_1 \times \vec{\mu}_C \\ \vec{a}_D = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{GD}) + \dfrac{\mu_D^2}{\rho_D} \hat{n}_D + 2\,\vec{\omega}_1 \times \vec{\mu}_D \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 272 \\ -67{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} mm/s^2 \\ \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 128 \\ 0 \\ -76{,}8 \end{Bmatrix} mm/s^2 \\ \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} -16 \\ 67{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} mm/s^2 \\ \vec{a}_D = \begin{Bmatrix} 128 \\ 0 \\ 76{,}8 \end{Bmatrix} mm/s^2 \end{cases}$$

(DE ACORDO COM O MDTRR, POIS AS EQUAÇÕES SÃO AS MESMAS!)

ATENDA-SE AO FACTO DE ESTE PROBLEMA SER FORMALMENTE DISTINTO DOS 3 PROBLEMAS ANTERIORES. NESTE CASO TEM-SE UM CORPO RÍGIDO QUE SE MOVE, I.E., RODA COM $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$ E $\vec{\alpha} = \vec{0}$ EM TORNO DE UM PONTO FIXO, MAS HÁ PONTOS SOBRE O CORPO QUE SE MOVEM, NO PRESENTE CASO, COM TRANSLAÇÃO!!

PODE DIZER-SE QUE, ATÉ AGORA, SE ABORDARAM 2 TIPOS DISTINTOS DE PROBLEMA EM QUE HÁ MOVIMENTO NÃO-PLANO:

TIPO I: PROBLEMAS 9, 10 E 11

TIPO II: PROBLEMA 12

EM SEGUIDA VAI SER ABORDADO UM 3.º: A CONSIDERAÇÃO SIMULTÂNEA DOS 2 EFEITOS!!

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

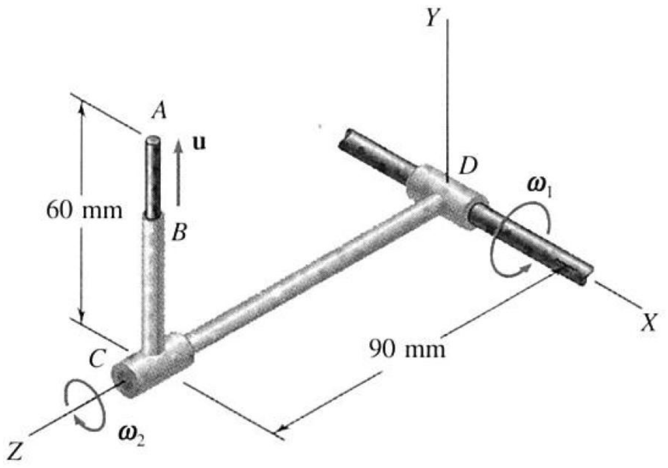
Exercício 13: Na posição mostrada, a barra delgada desloca-se para o exterior do tubo *BC* com velocidade constante u = 30 mm/s. Ao mesmo tempo o tubo *BC* gira a uma velocidade angular constante ω_2 = 1,5 rad/s em relação ao braço *CD*. Sabendo que o conjunto roda em torno do eixo *X* a uma velocidade angular constante ω_1 = 1,2 rad/s, determine:

(a) a velocidade da extremidade *A* da barra;

(b) a aceleração da extremidade *A* da barra;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.243 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 13: RESOLUÇÃO

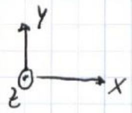
DADOS: $w_1 = 1,2$ rad/s (CONSTANTE) PEDIDO: a) $\vec{v}_A$

$w_2 = -1,5$ rad/s (CONSTANTE) b) $\vec{a}_A$

$\mu = 30$ mm/s (CONSTANTE)

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

TUBO BC: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
BARRA AB: MOVIMENTO NÃO-PLANO GERAL
SUPORTE DA BARRA AB: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE DETERMINAR, NESTE CASO, A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DO PONTO A, A BARRA DELGADA DESLOCA-SE PARA O EXTERIOR DO TUBO BC.

ATENDA-SE ENTÃO AO FACTO DE QUE NESTA SITUAÇÃO OCORREM OS 2 CASOS DOS PROBLEMAS 9, 10 E 11 + PROBLEMA 12 EM SIMULTÂNEO!

DE FACTO, SE A VELOCIDADE $\vec{\mu}$ FOSSE NULA, A BARRA DELGADA AB RODARIA (APENAS!) EM RELAÇÃO AO SEU SUPORTE (DC) COM $\vec{w_2}$, TENDO O SUPORTE UMA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO $\vec{w_1}$ CONSTANTE, PELO QUE

$$\vec{\omega}_{BARRA\,AB} = \vec{\omega}_{SUPORTE} + \vec{\omega}_{BARRA\,AB/SUPORTE} = \vec{w_1} + \vec{w_2}$$

NO ENTANTO, A BARRA AB MOVE-SE EM RELAÇÃO AO CORPO RÍGIDO (BARRA BC) COM UMA VELOCIDADE $\vec{\mu}$ (MAIS UMA VEZ SE ASSUME QUE $\|\vec{\mu}\|$ É CONSTANTE, MAS PODERIA NÃO O SER!)

DESTA SIMULTANEIDADE RESULTA QUE A BARRA BC TEM MOVIMENTO DE ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO D!!, MAS A BARRA AB NÃO! TEM SIM, MOVIMENTO NÃO-PLANO GERAL (PORQUÊ?).

1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

NESTE CASO AS EQUAÇÕES PARA O MDTRR NÃO FORAM APRESENTADAS ANTERIORMENTE, MAS SÃO FACILMENTE OBTIDAS! DE FACTO, CONSIDEREMOS AS EQUAÇÕES PARA O CORPO RÍGIDO SEM PARTES MÓVEIS (PARTE B-1):

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AP} \\ \vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P/A} = a_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP}) + \vec{\alpha} \times \vec{AP} \end{cases}$$

AGORA, CONSIDERE-SE O MODO QUE PENSO SER O MAIS FÁCIL DE GENERALIZAR A EQUAÇÃO.

DE FACTO, EM VEZ DE CONSIDERAR O CAMINHO (CORRECTO) DE ~~EFECTUAR~~ A DECOMPOSIÇÃO DA $\vec{v}$ E $\vec{a}$ EM 3 PONTOS, NO CASO CONCRETO DO ENUNCIADO, NOS PONTOS D, B E A, VAI ALTERNATIVAMENTE CONSIDERAR-SE NO INSTANTE EM ANÁLISE QUE O CORPO RÍGIDO QUE RODA EM TORNO DE CD É AC = AB + BC, MAS OS PONTOS DE BA TÊM UM MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO RECTILÍNEA EM RELAÇÃO A BC!

ASSIM, VAMOS CONSIDERAR OS 2 EFEITOS NAS EQUAÇÕES ANTERIORES ATENDENDO A QUE O TUBO BC RODA EM TORNO DO PONTO FIXO D. ASSIM, ASSUMINDO QUE $\vec{u} = \vec{0}$ EM PRIMEIRO LUGAR, OU SEJA, QUE AB+BC CORRESPONDE A UM CORPO RÍGIDO, ENTÃO TEM-SE:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{v}_{A/D} = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \vec{DA} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{a}_{A/D} = \vec{a}_D + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA} \end{cases}$$

NOTANDO QUE $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, ENTÃO

$$\vec{\alpha} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right]_{Oxyz} = \cancelto{\vec{0}}{\left[\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right]_{Oxyz}} + \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} = \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz}$$

COMO $\vec{\omega}_2$ TEM NORMA CONSTANTE E RODA COM $\vec{\omega}_1$, ENTÃO

$\vec{\alpha}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = \vec{\alpha}$!!

DE FACTO, $\left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} = \cancelto{\vec{0}}{\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{oxyz}} + \cancelto{\vec{\omega}_1}{\vec{\Omega}} \times \vec{\omega}_2 = \vec{0} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$ // QED!

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \vec{DA} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA} \end{cases}$$

$$\text{c/} \begin{cases} \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \\ \vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \end{cases}$$

AGORA, VAMOS CONSIDERAR O SEGUNDO EFEITO, QUE CORRESPONDE A UMA TRANSLAÇÃO RECTILÍNEA DA BARRA AB EM RELAÇÃO AO TUBO BC!

ENTÃO, CONSIDERANDO QUE O PONTO A NÃO É DO CORPO RÍGIDO, MAS DESLIZA SOBRE ESTE COM VELOCIDADE $\vec{\mu}$ NO INSTANTE CONSIDERADO, TEM-SE PARA UM SUPOSTO PONTO A' COM O QUAL COINCIDIRIA NESSE INSTANTE:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{v}_{A'/D} + \vec{v}_{A/A'} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{a}_{A'/D} + \vec{a}_{A/A'} \end{cases}$$

ASSIM, DE ACORDO COM AS EQUAÇÕES ACIMA (TOPO DA PÁGINA) TEM-SE (PARA A' EM VEZ DE A):

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \vec{DA'} + \vec{v}_{A/A'} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA'}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA'} + \vec{a}_{A/A'} \end{cases}$$

SENDO $\vec{v}_{A/A'} = \vec{\mu}$ A VELOCIDADE COM QUE O PONTO A SE DESLOCA EM RELAÇÃO A A', ENTÃO

$$\vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \vec{DA'} + \vec{\mu}$$

EM RELAÇÃO À ACELERAÇÃO, HÁ QUE CONSIDERAR A DERIVADA DE $\vec{\mu} \Rightarrow \dot{\vec{\mu}}$, QUE CORRESPONDE À ACELERAÇÃO DO PONTO A' EM RELAÇÃO A A. ALÉM DISSO, SURGE UMA ACELERAÇÃO DE CORIOLIS, POIS O PONTO A AFASTA-SE DO PONTO FIXO D COM VELOCIDADE RELATIVA $\vec{\mu}$

ASSIM, TEM-SE

$$\vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA'}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA'} + \dot{\vec{\mu}} + 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mu}$$

ATENDENDO A QUE NO INSTANTE CONSIDERADO SE TEM QUE $\vec{DA'} \equiv \vec{DA}$, ENTÃO

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \vec{DA} + \vec{\mu} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA} + \dot{\vec{\mu}} + 2\vec{\omega} \times \vec{\mu} \end{cases}$$

ESTAS SÃO AS EQUAÇÕES GENERALIZADAS! DE FACTO, SE $\vec{\mu} = \dot{\vec{\mu}} = \vec{0}$, ENTÃO OBTÊM-SE AS EQUAÇÕES DEDUZIDAS NA PARTE B-1 E QUE FORAM UTILIZADAS NOS PROBLEMAS 9 A 11.

POR OUTRO LADO, SE $\vec{\omega}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1$, E OBTÊM-SE AS EQUAÇÕES UTILIZADAS NO PROBLEMA 12.

ATENDA-SE A QUE EM TERMOS FORMAIS AS EQUAÇÕES OBTIDAS ACIMA SÃO SEMELHANTES ÀS OBTIDAS NA PARTE B-2 E UTILIZADAS NO PROBLEMA 11. A DIFERENÇA CONSISTE NO FACTO DE NO PROBLEMA 11 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1$ E NO PRESENTE SE TER QUE $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$!!

ENTÃO, TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{0} \quad \text{(D É FIXO)} \\ \vec{a}_D = \vec{0} \quad \text{(D É FIXO)} \\ \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 1{,}2\,\hat{i} + 1{,}5\,\hat{k} \ \text{rad/s} \\ \vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 1{,}2\,\hat{i} \times 1{,}5\,\hat{k} = -1{,}8\,\hat{j} \ \text{rad/s}^2 \\ \vec{\mu} = 30\,\hat{j} \ \text{mm/s} \\ \dot{\vec{\mu}} = \vec{0} \quad \text{(POIS O VECTOR } \vec{\mu} \text{ DE VELOCIDADE RELATIVA É CONSTANTE!)} \\ \vec{DA} = 60\,\hat{j} + 90\,\hat{k} \ \text{mm} \end{cases}$$

ASSIM,

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{DA} + \vec{\mu} = \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 90 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ -108 \\ 72 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ -78 \\ 72 \end{Bmatrix} \text{mm/s}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{DA}) + \vec{\alpha} \times \vec{DA} + 2\vec{\omega} \times \vec{\mu} = \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 90 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ -1{,}8 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 90 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 90 \\ -108 \\ 72 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \\ 72 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -162 \\ -221{,}4 \\ -129{,}6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \\ 72 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 162 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 90 \\ -221{,}4 \\ -57{,}6 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

2-MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \vec{v}_{A/R} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_{A'} + \vec{a}_{A/R} + \vec{a}_C \end{cases}$$

$\vec{v}_A$ #?

$$\underbrace{\vec{v}_A}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{v}_{A'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \vec{v}_{A/R}.$$

→ EM ROTAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/R} + \vec{v}_{A/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{A/R} = \vec{DA} \\ \vec{v}_{A/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{CA} + \vec{u} \end{cases}$$

ASSIM,

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{DA} + \vec{\omega}_2 \times \vec{CA} + \vec{u}$$

<u>NOTA:</u> ATENDA-SE AO FACTO DE QUE DE ACORDO COM O MOTOR SE OBTEVE

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{DA} + \vec{u}$ c/ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

HÁ DIFERENÇA?

NÃO, POIS COMO $\vec{DA} = \vec{DC} + \vec{CA}$, ENTÃO

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{DA} = \vec{\omega}_2 \times \vec{DC} + \vec{\omega}_2 \times \vec{CA}$$

MAS $\vec{\omega}_2 \times \vec{DC} = \vec{0}$ POIS $\vec{\omega}_2 \parallel \vec{DC}$ (PARALELOS), PELO QUE

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{DA} = \vec{\omega}_2 \times \vec{CA} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{DA} + \vec{\omega}_2 \times \vec{CA} + \vec{u} = \vec{\omega}_1 \times \vec{DA} + \vec{\omega}_2 \times \vec{DA} + \vec{u} =$$
$$= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{DA} + \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{DA} + \vec{u} \quad \checkmark \; \underline{OK!}$$

DESTE MODO, TEM-SE, PARA $\vec{\omega}_1 = 1{,}2\hat{i}$, $\vec{\omega}_2 = 1{,}5\hat{k}$ E $\vec{CA} = 60\hat{j}$:

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 90 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

3 INCÓGNITAS

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -108 \\ 72 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ -78 \\ 72 \end{Bmatrix} \text{ mm/s}$$

A EQUAÇÃO ANTERIOR VECTORIAL PERMITIU OBTER 3 INCÓGNITAS, NOMEADAMENTE AS 3 COMPONENTES DE $\vec{v}$, POIS O MOVIMENTO É NÃO PLANO.

$\vec{a}$ // ?

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A'} + \vec{a}_{A/R} + \vec{a}_C$$

$\vec{a}_A$: ABSOLUTA; $\vec{a}_{A'}$: TRANSPORTE; $\vec{a}_{A/R}$: EM RELAÇÃO AO EIXO R; $\vec{a}_C$: COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_D + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{A/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/R}) + \vec{a}_{A/R} + 2 \times \vec{\Omega} \times \vec{v}_{A/R}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{a}_D = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \text{ (POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE)} \\ \vec{r}_{A/R} = \vec{AD} \\ \vec{a}_{A/R} \\ \vec{v}_{A/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{CA} + \vec{\mu} \end{cases}$$

NOTA: COMO A VELOCIDADE RELATIVA TEM 2 COMPONENTES, UMA EXTERNA $\vec{\omega}_2 \times \vec{CA} + \vec{\mu}$ E UMA INTERNA $\vec{\mu}$, VAI HAVER 2 COMPONENTES DE CORIOLIS: $\vec{\omega}_1 = \vec{\Omega}$ COM A EXTERNA E $\vec{\omega}_2$ COM $\vec{\mu}$.

$$\vec{a}_{A/R} = \Big[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{CA})}_{\text{NOVO TRANSPORTE}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\mu}}}^{\,\vec{0}}}_{\text{NOVO EM RELAÇÃO AO EIXO}_2} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_2 \times \vec{\mu}}_{\text{NOVO DE CORIOLIS}}\Big]$$

NOTA: AO PASSARMOS PARA O NOVO EIXO DE ROTAÇÃO NO PONTO C, É COMO SE PASSÁSSEMOS A TER UM NOVO TERMO DE TRANSPORTE, UM NOVO RELATIVO E UM NOVO DE CORIOLIS!

ASSIM, TEM-SE

$$\vec{a}_A = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{DA})}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\left[\overbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{CA})}^{\text{TRANSPORTE INTERIOR}} + \overbrace{2\,\vec{\omega}_2 \times \vec{M}}^{\text{CORIOLIS INTERIOR}} \right]}_{\text{EM ROLAÇÃO AO GIRO DE ROTAÇÃO R}} + \underbrace{2\,\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{CA} + \vec{M})}_{\text{CORIOLIS (EXTERIOR)}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ a_{Az} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 90 \end{Bmatrix} \right) + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] +$$

$$+ 2 \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} 90 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{A/R}} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -108 \\ 72 \end{Bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 72 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -86{,}4 \\ -129{,}6 \end{Bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ -135 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 72 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ -221{,}4 \\ -57{,}6 \end{Bmatrix} \text{mm/s}^2$$

—— // ——

ESTE PROBLEMA NÃO É FORMALMENTE EQUIVALENTE A NENHUM DOS ANTERIORES, PELO QUE, AO SER A GENERALIZAÇÃO DO 2 TIPOS JÁ VISTOS, CONSTITUI UM NOVO TIPO 3, MAIS GERAL.

ASSIM, SE $\vec{M} = \vec{0} = \dot{\vec{M}}$, O PROBLEMA DEGENERA NO TIPO 1 E SE $\vec{\omega}_2 = \vec{\alpha}_2 = \vec{0}$, O PROBLEMA DEGENERA NO TIPO 2.

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

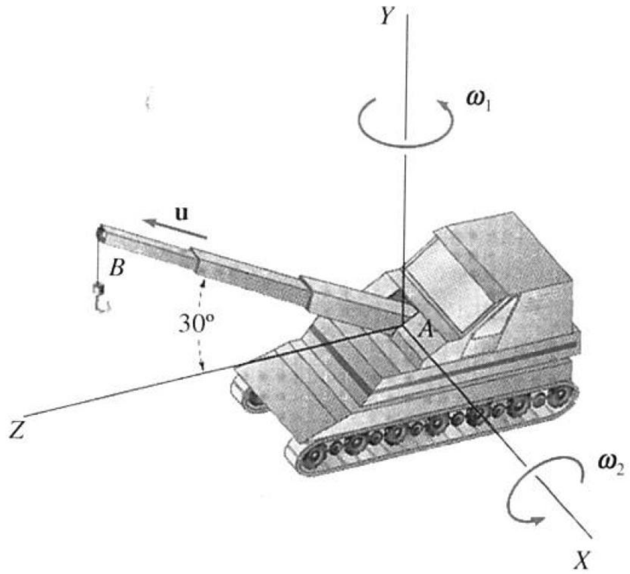
Exercício 14: A grua mostrada roda a velocidade angular constante ω_1 = 0,25 rad/s e simultaneamente a lança telescópica baixa com a velocidade angular constante ω_2 = 0,4 rad/s. Sabendo que, para a posição mostrada, o comprimento da lança é de 6,1 m e que este aumenta à velocidade u = 0,457 m/s, determine:

(a) a velocidade do ponto *B*;

(b) a aceleração do ponto *B*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado do exercício proposto 15.237 da obra Mecânica vectorial para engenheiros – Dinâmica (sexta edição); Ferdinand P. Beer & E. Russel Johnston Jr.; McGraw-Hill, 1998)

EXERCÍCIO 14: RESOLUÇÃO

DADOS: $w_1 = 0{,}25$ rad/s (CONSTANTE)

$w_2 = 0{,}40$ rad/s (CONSTANTE)

$u = 0{,}457$ m/s (CONSTANTE)

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

PEDIDO: a) $\vec{v}_B$

b) $\vec{a}_B$

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL: z ⊙ $\rightarrow x$, $\uparrow y$

ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

LANÇA TELESCÓPICA (INTERIOR DA LANÇA): MOVIMENTO NÃO-PLANO GERAL
BASE DA LANÇA: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
GRUA: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE DETERMINAR A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DO PONTO B DA LANÇA TELESCÓPICA.

ATENDA-SE AO FACTO DE QUE ESTE PROBLEMA É FORMALMENTE IGUAL AO PROBLEMA 13. DE FACTO, A LANÇA TELESCÓPICA RODA EM RELAÇÃO AO SEU SUPORTE COM $\vec{w}_2$, TENDO O SEU SUPORTE UMA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO $\vec{w}_1$ CONSTANTE, PELO QUE

$$\vec{w}_{LANÇA} = \vec{w}_{SUPORTE} + \vec{w}_{LANÇA/SUPORTE} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

NO ENTANTO, A EXTREMIDADE DA LANÇA MOVE-SE EM RELAÇÃO À SUA BASE A COM UMA VELOCIDADE $\vec{u}$ (SENDO NESTE CASO $\|\vec{u}\|$ CONSTANTE).

DESTA SIMULTANEIDADE RESULTA QUE AS PEÇAS MÓVEIS DA LANÇA TELESCÓPICA (EXCEPTUANDO A SUA BASE QUE SERVE DE CARCAÇA EXTERIOR) TÊM MOVIMENTO PLANO GERAL (PORQUÊ?).

1 - MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

NESTE CASO AS EQUAÇÕES FORAM OBTIDAS ANTERIORMENTE NO EXERCÍCIO 13. AÍ CONCLUIU-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} + \vec{m} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + \dot{\vec{m}} + 2\vec{\omega} \times \vec{m} \end{cases}$$

NESTE CONTEXTO, TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{a}_A = \vec{0} \\ \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0,40\hat{i} + 0,25\hat{j} \\ \vec{\alpha} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 0,25\hat{j} \times 0,40\hat{i} = -0,10\hat{k} \\ \vec{m} = \|\vec{m}\| \operatorname{sen}\theta\, \hat{j} + \|\vec{m}\| \cos\theta\, \hat{k} = 0,23\hat{j} + 0,40\hat{k} \\ \dot{\vec{m}} = \vec{0} \quad (\text{POIS } \|\vec{m}\| \text{ É CONSTANTE}) \\ \vec{AB} = l \operatorname{sen}\theta\, \hat{j} + l \cos\theta\, \hat{k} = 3,1\hat{j} + 5,3\hat{k} \end{cases}$$

ASSIM,

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{AB} + \vec{m} = \begin{Bmatrix} 0,40 \\ 0,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1 \\ 5,3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,23 \\ 0,40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,33 \\ -2,12 \\ 1,24 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,23 \\ 0,40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,33 \\ -1,89 \\ 1,64 \end{Bmatrix} \text{m/s}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) + \vec{\alpha} \times \vec{AB} + 2\vec{\omega} \times \vec{m} = \begin{Bmatrix} 0,40 \\ 0,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0,40 \\ 0,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1 \\ 5,3 \end{Bmatrix} \right) +$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,10 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3,1 \\ 5,3 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 0,40 \\ 0,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,23 \\ 0,40 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0,40 \\ 0,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1,33 \\ -2,12 \\ 1,24 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,31 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,2 \\ -0,32 \\ 0,18 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,31 \\ -0,50 \\ -1,18 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,31 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,2 \\ -0,32 \\ 0,18 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0,82 \\ -0,82 \\ -1,0 \end{Bmatrix} \text{m/s}^2$$

2- MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_{B'} + \vec{v}_{B/R} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_{B'} + \vec{a}_{B/R} + \vec{a}_C \end{cases}$$

$\vec{v}_{B//}$?

$$\underbrace{\vec{v}_B}_{\text{ABSOLUTA}} = \underbrace{\vec{v}_{B'}}_{\text{TRANSPORTE}} + \vec{v}_{B/R} \rightarrow \text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{v}_{B/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{AB} \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{AB} + \vec{\mu} \end{cases}$$

ASSIM,

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB} + \vec{\omega}_2 \times \vec{AB} + \vec{\mu}$$

DESTE MODO, TEM-SE, SENDO $\vec{\omega}_1 = 0{,}25\hat{j}$ E $\vec{\omega}_2 = 0{,}4\hat{i}$:

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3{,}1 \\ 5{,}3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3{,}1 \\ 5{,}3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}23 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} =$$

3 INCÓGNITAS

$$= \begin{Bmatrix} 1{,}33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -2{,}12 \\ 1{,}24 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}23 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 1{,}33 \\ -1{,}89 \\ 1{,}64 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

A EQUAÇÃO VECTORIAL ANTERIOR PERMITIU OBTER AS 3 COMPONENTES DE $\vec{v}_B$.

$\vec{a}$ // ?

$$\underset{\text{ABSOLUTA}}{\vec{a}_B} = \underset{\text{TRANSPORTE}}{\vec{a}_{B_1}} + \underset{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO R}}{\vec{a}_{B/R}} + \vec{a}_C \rightarrow \text{COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{B/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{B/R}) + \vec{a}_{B/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{B/R}$$

TEM-SE QUE
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}_1 = \vec{0} \quad (\text{POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE}) \\ \vec{r}_{B/R} = \vec{AB} \\ \vec{a}_{B/R} = \Big[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AB})}_{\text{NOVO TRANSPORTE}} + \underbrace{\cancel{\dot{\vec{\mu}}}}_{\substack{\text{NOVO} \\ \text{EM RELAÇÃO} \\ \text{AO EIXO } R_2}}^{\vec{0}} + \underbrace{2\vec{\omega}_2 \times \vec{\mu}}_{\text{NOVO DE CORIOLIS}}\Big] \\ \vec{v}_{B/R} = \vec{\omega}_2 \times \vec{AB} + \vec{\mu} \end{cases}$$

ASSIM, TEM-SE

$$\vec{a}_B = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{AB})}_{\text{TRANSPORTE}} + \underbrace{\left[\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AB}) + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{\mu}\right]}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AB} + \vec{\mu})}_{\substack{\text{CORIOLIS} \\ \text{(EXTERIOR)}}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \\ a_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3{,}1 \\ 5{,}3 \end{Bmatrix} \right) + \left[\begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 3{,}1 \\ 5{,}3 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}23 \\ 0{,}14 \end{Bmatrix} \right]$$

3 INCÓGNITAS

$$+ 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \Bigg(\underbrace{\begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}31 \\ 5{,}3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}23 \\ 0{,}14 \end{Bmatrix}}_{\vec{v}_{B/R}} \Bigg) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1{,}33 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2{,}12 \\ 1{,}24 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}32 \\ 0{,}18 \end{Bmatrix} \right] + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -1{,}89 \\ 1{,}64 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}33 \end{Bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}50 \\ -0{,}85 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}32 \\ 0{,}18 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 0{,}82 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0{,}82 \\ -0{,}82 \\ -1{,}0 \end{Bmatrix} \; m/s^2 \; //$$

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

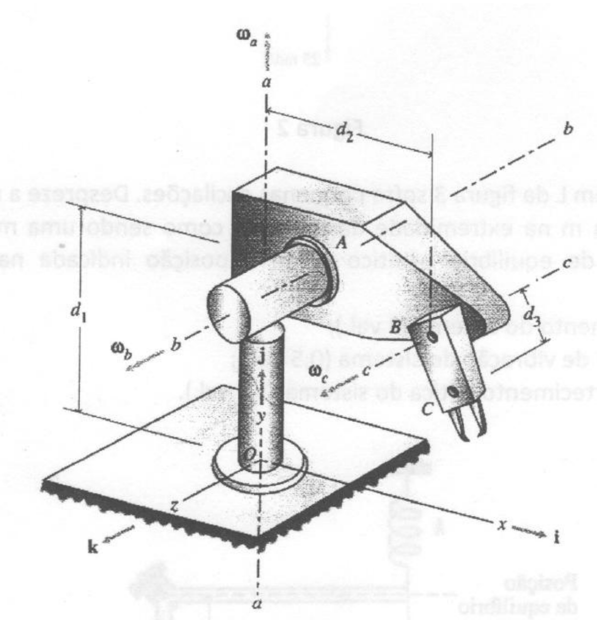
Exercício 15: Um manipulador robótico de três membros tem 3 eixos de rotação: *a-a*, *b-b* e *c-c*, conforme se ilustra. No instante representado, as linhas de centro dos membros são todas paralelas ao plano *OXY*. Atendendo não só a que $\omega_a = 100$ rad/s, $\omega_b = 25$ rad/s e $\omega_c = 50$ rad/s mas também que aos valores de d_1, d_2 e d_3 correspondem **OA** = 1,5 **j** m, **OB** = (**i** + **j**) m, **OC** = (1,2 **i** +0,8 **j**) m, determine:

(a) a velocidade do ponto *C*;

(b) a aceleração do ponto *C*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado do exercício 1 do exame de Mecânica Aplicada de 2010, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade da Aveiro)

EXERCÍCIO 15: RESOLUÇÃO

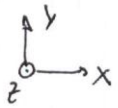
DADOS: $\omega_1 = \omega_a = 100$ rad/s (CONSTANTE) PEDIDO a) $\vec{v}_C$

$\omega_2 = \omega_b = 25$ rad/s (CONSTANTE) b) $\vec{a}_C$

$\omega_3 = \omega_c = 50$ rad/s (CONSTANTE)

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

i) SELECÇÃO DE REFERENCIAL:



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

VEIO VERTICAL: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
MEMBRO AB: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
BRAÇO BC: MOVIMENTO PLANO GERAL
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE DETERMINAR A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DO PONTO C.

ESTE PROBLEMA É UMA GENERALIZAÇÃO DOS PROBLEMAS ANTERIORES. DE FACTO, TEM-SE QUE HÁ 3 EIXOS DE ROTAÇÃO, ENQUANTO ATÉ AGORA NOS PROBLEMAS DE MOVIMENTO NÃO-PLANO TINHAM SURGIDO NO MÁXIMO 2 EIXOS DE ROTAÇÃO.

NESTE CONTEXTO, ESTE SERÁ O PROBLEMA MAIS COMPLEXO DE TODOS OS RELATIVOS AO MOVIMENTO NÃO-PLANO. NO ENTANTO, PENSO QUE A SUA COMPREENSÃO PODERÁ REVELAR CERTOS ASPECTOS QUE FACILITAM A ABSTRACÇÃO DE IDEIAS RELATIVAS AOS 2 MÉTODOS UTILIZADOS.

1- MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

EM PRIMEIRO LUGAR, O BRAÇO BC TEM MOVIMENTO GERAL E ENCONTRA-SE LIGADO NO PONTO B AO MEMBRO AB, QUE RODA EM TORNO DO PONTO FIXO A.

NESTE CONTEXTO, CONSIDERA-SE A SEGUINTE DECOMPOSIÇÃO:

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{C/B} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_{C/B} \end{cases}$$

NOTE-SE QUE NESTE CASO NÃO SE PODE UTILIZAR O PONTO FIXO DIRECTAMENTE DE A PARA C POIS O BRAÇO BC NÃO RODA EM TORNO DO PONTO A! DE FACTO, BASTA VER QUE, AO CONTRÁRIO DO QUE OCORRE NOS PROBLEMAS ANTERIORES EM QUE SE USA O PONTO FIXO, NESTE PROBLEMA O EIXO DE ROTAÇÃO c-c NÃO INTERSECTA a-a NEM b-b, PELO QUE O BRAÇO BC NÃO RODA COM A SUA VELOCIDADE ANGULAR ABSOLUTA EM TORNO DE NENHUM PONTO FIXO!

IMPORTANTE!

ASSIM, COM BASE NAS EQUAÇÕES DEDUZIDAS NA PARTE B-1, TEM-SE:

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB}$$ ROTAÇÃO EM TORNO DO PONTO FIXO A, COM VELOCIDADE ANGULAR ABSOLUTA $\vec{\omega}_{A2}$

$$\vec{v}_{C/B} = \vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC}$$ ROTAÇÃO EM TORNO DO PONTO (NÃO-FIXO) B, COM VELOCIDADE ANGULAR ABSOLUTA $\vec{\omega}_{A3}$

ASSIM, TEM-SE QUE

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC}$$

POR OUTRO LADO, EM RELAÇÃO À ACELERAÇÃO:

$$\vec{a}_{B/A} = \underbrace{\vec{\omega}_{A2} \times (\vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB})}_{\text{CENTRÍPETA}} + \underbrace{\vec{\alpha}_{A2} \times \vec{AB}}_{\text{TANGENCIAL}}$$

$$\vec{a}_{C/B} = \underbrace{\vec{\omega}_{A3} \times (\vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC})}_{\text{CENTRÍPETA}} + \underbrace{\vec{\alpha}_{A3} \times \vec{BC}}_{\text{TANGENCIAL}}$$

DESTE MODO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\omega}_{A2} \times (\vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB}) + \vec{\alpha}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times (\vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC}) + \vec{\alpha}_{A3} \times \vec{BC} \end{cases}$$

MAS, NESTE MÉTODO HÁ QUE DEFINIR OS VALORES ABSOLUTOS DE $\vec{\omega}$ E $\vec{\alpha}$ PARA CADA COMPONENTE. NOS PROBLEMAS ANTERIORES, HAVIA A NECESSIDADE DE DEFINIR $\vec{\omega}_1$, $\vec{\alpha}_1$ (QUE ERA NULA), $\vec{\omega}_2$ E $\vec{\alpha}_2$ (QUE ERA $\vec{\alpha}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$).

NESTE CASO, HÁ 3 SITUAÇÕES $\Rightarrow$

1

$$\vec{\omega}_{A1} = \vec{\omega}_1$$

$$\vec{\alpha}_{A1} = \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{A1})\right]_{OXYZ} = \vec{0}$$

(POIS $\vec{\omega}_1$ É CONSTANTE!)

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{A1} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{\alpha}_{A1} = \vec{0} \end{cases}$$

SEMELHANTE AO JÁ VISTO!

A DIFERENÇA VAI ESTAR NO 3º CASO:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{A3} \;! \\ \vec{\alpha}_{A3} \;! \end{cases}$$

2

$$\vec{\omega}_{A2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\alpha}_{A2} = \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\right]_{OXYZ} = \left[\cancel{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}}\right]_{OXYZ}^{\vec{0}} + \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{OXYZ} = \left(\cancel{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}}\right)_{Ox_3y_3z_3}^{\vec{0}} + \vec{\Omega}_1 \times \vec{\omega}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{A2} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_2$$

$\vec{\Omega}$ É A VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DO REFERENCIAL EM QUE ESTÁ ASSENTE $\vec{\omega}_2$, OU SEJA, É $\vec{\omega}_1$!
$\underset{\vec{\omega}_{A1}}{\parallel}$

ENTÃO:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{A2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \\ \vec{\alpha}_{A2} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \end{cases}$$

3

$$\vec{\omega}_{A3} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

$$\vec{\alpha}_{A3} = \left[\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3)\right]_{OXYZ} = \left[\cancel{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}}\right]_{OXYZ}^{\vec{0}} + \left[\cancel{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}}\right]_{OXYZ}^{\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2} + \left[\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\right]_{OXYZ} =$$

$$= \vec{0} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\right)_{Ox_3'y_3'z_3'} + \vec{\Omega}_2 \times \vec{\omega}_3$$

$\vec{\Omega}_2$ É A VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DO REFERENCIAL $Ox_3'y_3'z_3'$ EM QUE $\vec{\omega}_3$ ESTÁ ASSENTE, OU SEJA, $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$!
$\underset{\vec{\omega}_{A2}}{\parallel}$

ENTÃO:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{A3} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \\ \vec{\alpha}_{A3} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3 \end{cases}$$

GENERALIZAÇÃO!

Departamento de Engenharia Mecânica ● Universidade de Aveiro

ASSIM, TEM-SE QUE

$$\left\{\begin{array}{l}
\vec{v}_A = \vec{0} \\
\vec{a}_A = \vec{0} \\
\vec{\omega}_{A1} = \vec{\omega}_1 = 100\hat{j} \\
\vec{\omega}_{A2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 100\hat{j} + 25\hat{k} \\
\vec{\omega}_{A3} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = 100\hat{j} + 75\hat{k} \\
\vec{\alpha}_{A2} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 100\hat{j} \times 25\hat{k} = 2500\hat{i} \\
\vec{\alpha}_{A3} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3 = 2500\hat{i} + (100\hat{j} + 25\hat{k}) \times 50\hat{k} = 7500\hat{i} \\
\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \hat{i} + \hat{j} - 1{,}5\hat{j} = \hat{i} - 0{,}5\hat{j} \\
\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = 1{,}2\hat{i} + 0{,}8\hat{j} - (\hat{i} + \hat{j}) = 0{,}2\hat{i} - 0{,}2\hat{j}
\end{array}\right.$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC} = \left\{\begin{matrix}0\\100\\25\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}1\\-0{,}5\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\100\\75\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}0{,}2\\-0{,}2\\0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}12{,}5\\25\\-100\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}15\\15\\-20\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}27{,}5\\40\\-120\end{matrix}\right\} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}_C = \vec{\omega}_{A2} \times (\vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB}) + \vec{\alpha}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times (\vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC}) + \vec{\alpha}_{A3} \times \vec{BC}$$

$$= \left\{\begin{matrix}0\\100\\25\end{matrix}\right\} \times \left(\left\{\begin{matrix}0\\100\\25\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}1\\-0{,}5\\0\end{matrix}\right\} \right) + \left\{\begin{matrix}2500\\0\\0\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}1\\-0{,}5\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\100\\75\end{matrix}\right\} \times \left(\left\{\begin{matrix}0\\100\\75\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}0{,}2\\-0{,}2\\0\end{matrix}\right\} \right) + \left\{\begin{matrix}7500\\0\\0\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}0{,}2\\-0{,}2\\0\end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix}0\\100\\25\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}12{,}5\\25\\-100\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\0\\-1250\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\100\\75\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}15\\15\\-20\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\0\\-1500\end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}-10625\\312{,}5\\-1250\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\0\\-1250\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}-3125\\1125\\-1500\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\0\\-1500\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_C = \left\{\begin{matrix}-13750\\1437{,}5\\-5500\end{matrix}\right\} \text{ m/s}^2$$

NOTA: NO MOTOR SÓ HÁ CORIOLIS QUANDO, TAL COMO NOS PROBLEMAS 13 E 14, HÁ UM PONTO QUE SE AFASTA DO PONTO CONSIDERADO PARA A ROTAÇÃO RELATIVA!

IMP!

2 - MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, VEM

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_{C1} + \vec{v}_{C/R} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_{E1} + \vec{a}_{C/R} + \vec{a}_{COR} \end{cases}$$

$\vec{v}_{C1}$?

$$\underset{\text{ABSOLUTA}}{\vec{v}_C} = \underset{\text{TRANSPORTE}}{\vec{v}_{C1}} + \vec{v}_{C/R}$$

VEM ROTAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{C/R} + \vec{v}_{C/R}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{v}_O = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \vec{r}_{C/R} = \vec{OC} \\ \vec{v}_{C/R} = \left[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}}_{\text{NOVO TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_3 \times \vec{BC}}_{\text{NOVA EM ROTAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R_2} \right] \end{cases}$$

ASSIM,

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} v_{Cx} \\ v_{Cy} \\ v_{Cz} \end{Bmatrix} = \vec{\omega}_1 \times \vec{OC} + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{BC} =$$

3 INCÓGNITAS

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1,2 \\ 0,8 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1,2 \\ -0,7 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,2 \\ -0,2 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 17,5 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27,5 \\ 40 \\ -120 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

A EQUAÇÃO VECTORIAL ANTERIOR PERMITIU OBTER AS 3 COMPONENTES DE $\vec{v}_C$.

$\vec{a}_c // ?$

$\vec{a}_C = \vec{a}_{C'} + \vec{a}_{c/R} + \vec{a}_{cor}$ → COMPLEMENTAR OU DE CORIOLIS

ABSOLUTA — TRANSPORTE — EM RELAÇÃO AO EIXO R

$$\Rightarrow \vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{c/R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{c/R}) + \vec{a}_{c/R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{c/R}$$

TEM-SE QUE

$$\begin{cases} \vec{a}_O = \vec{0} \\ \vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 \\ \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\lambda}_1 = \vec{0} \ (\text{POIS } \vec{\omega}_1 \text{ É CONSTANTE}) \\ \vec{r}_{c/R} = \vec{OC} \\ \vec{a}_{c/R} = \Big[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC})}_{\text{NOVO TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{BC})}_{\text{NOVO EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R_2} + \underbrace{2\vec{\omega}_2 \times [\vec{\omega}_3 \times \vec{BC}]}_{\text{NOVO CORIOLIS}}\Big] \\ \vec{v}_{c/R} = \Big[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}}_{\text{NOVO TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_3 \times \vec{BC}}_{\text{NOVO EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R_2}\Big] \ (\text{VISTO ATRÁS!}) \end{cases}$$

ASSIM, TEM-SE

$$\vec{a}_C = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OC})}_{\text{TRANSPORTE}} + \Big[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{BC}) + 2\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{BC})}_{\text{EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO R}}\Big] + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{BC})}_{\text{CORIOLIS EXTERIOR}}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = \underbrace{\begin{Bmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ a_{Cz} \end{Bmatrix}}_{\text{3 INCÓGNITAS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}8 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}7 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \right.$$

$$\left. \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \right] +$$

$$2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1{,}2 \\ -0{,}7 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = \left\{\begin{matrix}0\\100\\0\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}0\\0\\-120\end{matrix}\right\} + \left[\left\{\begin{matrix}0\\0\\25\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}17{,}5\\30\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0\\0\\50\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}10\\10\\0\end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix}0\\0\\25\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}10\\10\\0\end{matrix}\right\} \right]$$

$$+ 2\left\{\begin{matrix}0\\100\\0\end{matrix}\right\} \times \left(\left\{\begin{matrix}17{,}5\\30\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}10\\10\\0\end{matrix}\right\} \right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}-12000\\0\\0\end{matrix}\right\} + \left[\left\{\begin{matrix}-750\\437{,}5\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}-500\\500\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}-500\\500\\0\end{matrix}\right\} \right] + \left\{\begin{matrix}0\\0\\-5500\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_C = \left\{\begin{matrix}-13750\\1437{,}5\\-5500\end{matrix}\right\} \quad //$$

CAPÍTULO II: CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

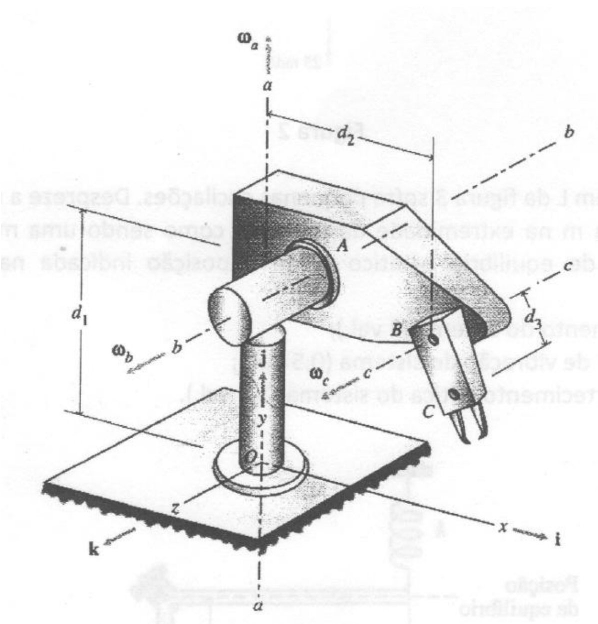
Exercício 16: Considere novamente o manipulador robótico de três membros. Tal como anteriormente, no instante representado as linhas de centro dos membros são todas paralelas ao plano *OXY*. No entanto, neste agora tem-se que o motor situado no ponto *A* induz uma aceleração angular contante $\alpha_b = 5$ rad/s² em torno do eixo de rotação *b-b*. Nesta situação, atendendo a que neste instante se tem não só que $\omega_a = 100$ rad/s, $\omega_b = 25$ rad/s e $\omega_c = 50$ rad/s mas também que aos valores de d_1, d_2 e d_3 correspondem **OA** = 1,5 **j** m, **OB** = (**i** + **j**) m, **OC** = (1,2 **i** +0,8 **j**) m, determine:

(a) a velocidade do ponto *C*;

(b) a aceleração do ponto *C*;

recorrendo

1. ao **método da decomposição em translação e rotação relativa**;
2. ao **método dos referenciais rotativos**.



(Enunciado adaptado do exercício 1 do exame de Mecânica Aplicada de 2010, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade da Aveiro)

EXERCÍCIO 16: RESOLUÇÃO

DADOS: $w_1 = w_a = 100$ rad/s (CONSTANTE)

PEDIDO: a) $\vec{v}_C$ b) $\vec{a}_C$

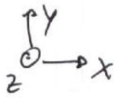
$w_2 = w_b = 25$ rad/s (VARIÁVEL)

$\alpha_2 = \alpha_b = 5$ rad/s^2 (CONSTANTE)

$w_3 = w_c = 50$ rad/s (CONSTANTE)

MEDIDAS GEOMÉTRICAS

i) SELECÇÃO DO REFERENCIAL



ii) IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE MOVIMENTO:

VEIO VERTICAL: ROTAÇÃO EM TORNO DE EIXO FIXO
MEMBRO AB: ROTAÇÃO EM TORNO DE PONTO FIXO
BRAÇO BC: MOVIMENTO PLANO GERAL
ESTRUTURA: MOVIMENTO NÃO-PLANO

iii) CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA:

PROBLEMA DE CINEMÁTICA DE CORPO RÍGIDO

iv) RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS E AINDA PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA.

PRETENDE-SE, MAIS UMA VEZ, DETERMINAR A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DO PONTO C. NO ENTANTO, ESTE PROBLEMA DIFERE DO ANTERIOR NO FACTO DE A ACELERAÇÃO α_2 SER NÃO-NULA NO INSTANTE CONSIDERADO!

NESTE CONTEXTO, AS DIFERENÇAS ENTRE OS DOIS PROBLEMAS SÃO PONTUAIS, PELO QUE EM SEGUIDA SE PROCEDE A UMA APRESENTAÇÃO SIMPLIFICADA, NÃO SE REPETINDO MUITOS DOS PASSOS QUE SÃO COMUNS COM O PROBLEMA ANTERIOR.

1- MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO RELATIVA

DE ACORDO COM O QUE FOI VISTO NO EXERCÍCIO 18, TEM-SE

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\omega}_{A2} \times (\vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB}) + \vec{\alpha}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times (\vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC}) + \vec{\alpha}_{A3} \times \vec{BC} \end{cases}$$

DEFINIÇÃO DE $\vec{\omega}_A$ E α_A :

(1)

$\vec{\omega}_{A1} = \vec{\omega}_1$

$\vec{\alpha}_{A1} = \vec{0}$

(POIS $\vec{\omega}_1$ É CONSTANTE!)

(2)

$\vec{\omega}_{A2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$

$$\vec{\alpha}_{A2} = \cancel{\left[\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right]_{Oxyz}}^{\vec{0}} + \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} =$$

$$= \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{Ox_3y_3z_3} + \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_2$$

$$= \alpha_b \hat{k} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$$

$$= S\hat{k} + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$$

ESTA É A DIFERENÇA! NESTE CASO O VECTOR $\vec{\omega}_2$ CRESCE NO REFERENCIAL ROTATIVO, E NO INSTANTE CONSIDERADO ESTE VECTOR CRESCE NA DIRECÇÃO DE $\hat{k}$!

ASSIM,

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{A2} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \\ \vec{\alpha}_{A2} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + \alpha_b \hat{k} \end{cases}$$

(3)

$\vec{\omega}_{A3} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$

$$\vec{\alpha}_{A3} = \cancel{\left[\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right]_{Oxyz}}^{\vec{0}} + \left[\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right]_{Oxyz} + \left[\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\right]_{Oxyz}$$

$$= \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + \alpha_b \hat{k} + \cancel{\left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\right)_{Ox_3y_3z_3}}^{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_2}_{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2} \times \vec{\omega}_3 =$$

$$= \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3 + \alpha_b \hat{k}$$

ENTÃO, NESTE CASO VEM

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{A3} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \\ \vec{\alpha}_{A3} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_3 + \alpha_b \hat{k} \end{cases}$$

ENTÃO NESTE CASO, TEM-SE QUE

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC} = \begin{Bmatrix} 27,5 \\ 40 \\ -120 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$ (DE IGUAL MODO)

E

$$\vec{a}_C = \vec{\omega}_{A2} \times (\vec{\omega}_{A2} \times \vec{AB}) + \underline{\underline{\vec{\alpha}_{A2}}} \times \vec{AB} + \vec{\omega}_{A3} \times (\vec{\omega}_{A3} \times \vec{BC}) + \underline{\underline{\vec{\alpha}_{A3}}} \times \vec{BC}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 2500 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,2 \\ -0,2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} 7500 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,2 \\ -0,2 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 25 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 12,5 \\ 25 \\ -100 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -1250 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 75 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 15 \\ 15 \\ -20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1500 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -10625 \\ 312,5 \\ -1250 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2,5 \\ 5 \\ -1250 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -312,5 \\ 112,5 \\ -1500 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1500 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -13750 + 3,5 \\ 1437,5 + 6 \\ -5500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13753,5 \\ 1443,5 \\ -5500 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

2 - MÉTODO DOS REFERENCIAIS ROTATIVOS

NESTE CASO, TEM-SE QUE

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_1 \times \vec{OC} + \vec{\omega}_2 \times \vec{AC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{BC} = \begin{Bmatrix} 27,5 \\ 40 \\ -120 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$ (DE IGUAL MODO)

$$\vec{a}_C = \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{OC})}_{\text{TRANSPORTE}} + \Big[\underbrace{\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{AC}) + \vec{\alpha}_b \times \vec{AC}}_{\text{NOVO TRANSPORTE}} + \underbrace{\vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{BC})}_{\text{NOVO EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO } R_2} + \underbrace{2\vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{BC})}_{\text{NOVO CORIOLIS}} \Big]$$

DIFERENÇA É A TANGENCIAL!

$$+ \underbrace{2\vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{BC} + \vec{\omega}_3 \times \vec{BC})}_{\text{CORIOLIS EXTERIOR}}$$

Então

$$\vec{a}_C = \begin{Bmatrix}0\\100\\0\end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix}0\\100\\0\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}1,2\\0,7\\0\end{Bmatrix}\right) + \left[\begin{Bmatrix}0\\0\\25\end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix}0\\0\\25\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}1,2\\-0,7\\0\end{Bmatrix}\right) + \begin{Bmatrix}0\\0\\5\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}1,2\\-0,7\\0\end{Bmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{Bmatrix}0\\0\\50\end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix}0\\0\\50\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}0,2\\-0,2\\0\end{Bmatrix}\right) + 2\begin{Bmatrix}0\\0\\25\end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix}0\\0\\50\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}0,2\\-0,2\\0\end{Bmatrix}\right)\right] +$$

$$2\begin{Bmatrix}0\\100\\0\end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix}0\\0\\2,5\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}1,2\\-0,7\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\0\\50\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}0,2\\-0,2\\0\end{Bmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_C = \begin{Bmatrix}-1200\\0\\0\end{Bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix}-750\\437,5\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}3,5\\6\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-500\\500\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-500\\500\\0\end{Bmatrix}\right] + \begin{Bmatrix}0\\0\\-5500\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = \begin{Bmatrix}13750\\1437,5\\-5500\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}3,5\\6\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}13753,5\\1443,5\\-5500\end{Bmatrix} m/s^2$$