Universidade de Aveiro
Departamento de Eletrónica,
Telecomunicações e Informática

Mestrado Integrado em Engenharia Eletrónica e Telecomunicações
Licenciatura em Engenharia Aeroespacial

Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas – PROE

Ano letivo 2023/24

Prof. Pedro Pinho
ptpinho@ua.pt

O docente agradece o apoio na elaboração dos diapositivos ao Prof. Armando Rocha

Grandezas eletromagnéticas

- Grandezas vetoriais:
  - Campo Elétrico $\vec{E}$ (V/m);
  - Densidade de Fluxo Elétrico $\vec{D}$ (C/m^2);
  - Campo Magnético $\vec{H}$ (A/m);
  - Densidade de Fluxo Magnético $\vec{B}$ (Wb/m^2);
  - Densidade de Corrente $\vec{J}$ (A/m^2) pode ter duas contribuições;
    - Corrente de condução;
    - Corrente de deslocamento;
  - Polarização Elétrica $\vec{P}$;
  - Polarização Magnética $\vec{M}$;

- Grandezas escalares
  - Tensão V (V);
  - Densidade volúmica de carga ρ (C/m^3);
  - ϵ (F/m) , μ (H/m) (permitividade e permeabilidade) podem ser função das coordenadas.

Equações de Maxwell I

- Descrição macroscópica do comportamento do campo eletromagnético;
  - Forma diferencial (ou local):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \qquad \vec{\nabla} . \vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla} . \vec{B} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

  - No vazio:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

  - Em meios materiais:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

  - Em meios materiais lineares, homogéneos e isotrópicos:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Resolução das equações de Maxwell em regime harmonico sinusoidal

- Considerando, um meio linear, homogéneo, isotrópico, sem cargas $(\rho = 0)$, sem fontes $(\vec{J} = 0)$, e sem perdas $(\sigma = 0)$ temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}.\vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

  - Cuja resolução, utilizando fasores, resulta na equação de onda ou de Helmholtz, que fisicamente se traduz na existência de duas ondas que se propagam em direções opostas.

$$\boxed{\begin{array}{c} \nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \varepsilon\mu \underline{E} = 0 \qquad \nabla^2 \underline{H} + \omega^2 \varepsilon\mu \underline{H} = 0 \\ \gamma^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \end{array}}$$

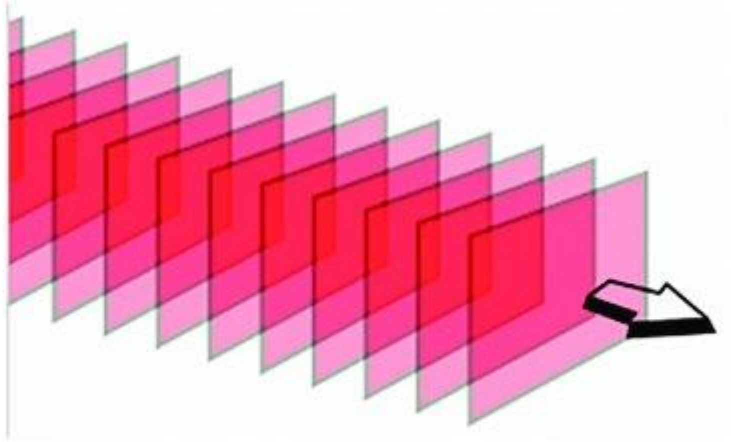
Solução da equação de onda

- Uma solução básica de onda plana, para a equação de onda anterior, pode ser encontrada considerando a onda a propagar-se segundo $\hat{z}$, e com o campo elétrico apenas com uma componente em $\hat{x}$.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{E_x}}{\partial z^2} + \gamma^2 \mathrm{E_x} = 0}$$

$$\mathrm{E_x(z)} = \mathrm{E^+ e^{-\gamma z}} + \mathrm{E^- e^{+\gamma z}}$$
$$\mathrm{E_x(z)} = \mathrm{E^+ e^{-j\beta z}} + \mathrm{E^- e^{+j\beta z}}$$

$$\mathrm{E_x}(z,t) = \mathrm{E^+}\cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) + \mathrm{E^-}\cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)$$



$$\mathrm{H_y(z)} = \frac{\mathrm{E^+}}{\eta}\mathrm{e^{-\gamma z}} - \frac{\mathrm{E^-}}{\eta}\mathrm{e^{+\gamma z}}$$
$$\mathrm{H_y(z)} = \mathrm{H^+ e^{-j\beta z}} - \mathrm{H^- e^{+j\beta z}}$$

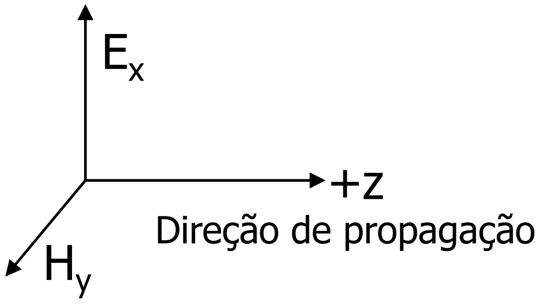
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\eta_0 = 120\pi = 377\Omega \quad \text{para o ar}$$

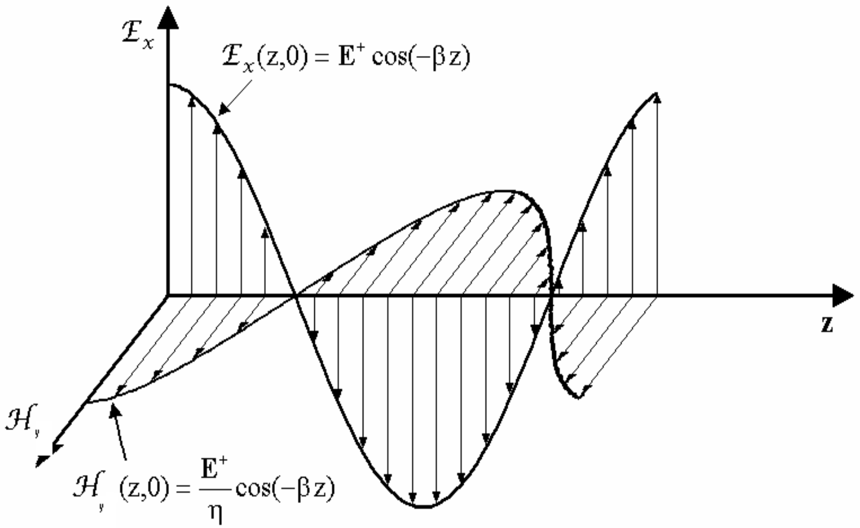
$$H_y(z,t) = H^+\cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) - H^-\cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)$$

Conclusões:

- A onda propaga-se com dois campos E e H que são:
  - Perpendiculares entre si;
  - Perpendiculares à direção de propagação;
  - Temos uma onda TEM (Transversal Elétrica/Magnética);
  - A direção de propagação segue a Lei da Mão Direita.



- Parâmetros:
  - Constante de propagação; velocidade; impedância de onda;



$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta \qquad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Equações de Maxwell no domínio da frequência

- Considerando, agora um meio linear, homogéneo, isotrópico, mas com perdas, assumindo uma condutividade $(\sigma \neq 0)$ temos:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla^2 \underline{\vec{E}} + \omega^2 \epsilon\mu \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \underline{\vec{E}} = 0 \\ \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \alpha + j\beta \\ \gamma = j\omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}\sqrt{\mu_r\varepsilon_{r(1-j\tan\delta)}} \\ \gamma = j\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_{r(1-j\tan\delta)}}\end{gathered}}$$

$$\sqrt{1-x} \cong 1 - \frac{x}{2} \quad \text{se } |x| \ll 1$$

$$\gamma \cong j\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\left(1 - j\frac{\tan\delta}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{z}^2} - \gamma^2 \mathrm{E_x} = 0}$$

$$\mathrm{E_x(z)} = \mathrm{E}^+\mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{z}} + \mathrm{E}^-\mathrm{e}^{+\gamma \mathrm{z}}$$

$$\mathrm{E_x(z)} = \mathrm{E}^+\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta \mathrm{z}} + \mathrm{E}^-\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{z}}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta \mathrm{z}}$$

$$\mathrm{E_x}(z,t) = \mathrm{E}^+\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) + \mathrm{E}^-\,\mathrm{e}^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)$$

$$\mathrm{H_y(z)} = \frac{\mathrm{E}^+}{\eta}\mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{z}} - \frac{\mathrm{E}^-}{\eta}\mathrm{e}^{+\gamma \mathrm{z}} \qquad \eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

$$\mathrm{H_y(z)} = \mathrm{H}^+\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta \mathrm{z}} - \mathrm{H}^-\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{z}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta \mathrm{z}}$$

$$H_y(z,t) = H^+\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) - H^-\,\mathrm{e}^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)$$

Solução da equação de onda

- Se assumirmos novamente um campo elétrico com apenas uma componente $\hat{x}$ e uniforme em x e y, a equação de onda anterior reduz-se a:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0$$

- Cuja solução é:

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{+\gamma z}$$
$$E_x(z) = E^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E^- e^{\alpha z} e^{+j\beta z}$$

$$E_x(z,t) = E^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) + E^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)$$

$$H_y(z) = \frac{E^+}{\eta} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{\eta} e^{+\gamma z} \qquad \eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$
$$H_y(z) = H^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - H^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

$$H_y(z,t) = H^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi^+) - H^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)$$

Ondas eletromagnéticas em bons dielétricos (dielétrico de baixas perdas)

- Dependendo da frequência o mesmo meio pode ser ou não um bom dielétrico;
- Meio caracterizado por: $\omega\epsilon \gg \sigma$ ou $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$
  - Normalmente a aproximação é válida em meios dielétricos com fracas perdas;

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]$$

Ondas eletromagnéticas em bons condutores

- Meio caracterizado por: $\omega\epsilon \ll \sigma$ ou $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$

$$\alpha = \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad \eta = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \qquad v \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

- Conclusões:
  - α: Aumenta com a raiz da frequência e com a condutividade;
  - η: Tem fase 45º (indutiva) !!
  - v: Varia com a raiz da frequência (meio dispersivo);
  - δ : Muito curto ou seja a onda atenua-se rapidamente dentro do condutor (slide seguinte…)

Ondas eletromagnéticas em bons condutores

- Profundidade de penetração δ
  - Distância percorrida pela onda até que o campo decai $1/e$:

$$E_0 e^{-\alpha\delta} = E_0 e^{-1} \qquad \delta = \frac{1}{\alpha}$$

  - Em bons condutores: efeito pelicular

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Onda plana propagando-se numa direção arbitrária

- A solução equação do campo E
  - $\vec{r}$: vetor posição (coordenadas)
  - $\vec{k}$: vetor de onda (rad/m) na direção de propagação;
  - $\beta_{x,y,z}$: constante de fase (rad/m) em cada um dos eixos;
  - Comprimentos de onda ao longo dos eixos;

$$\nabla^2 \underline{\vec{E}} + K_0^2 \underline{\vec{E}} = 0$$

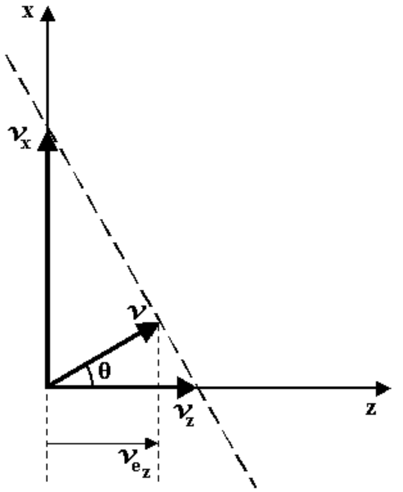
$$E_x(x, y, z) = Ae^{-j(\beta_x \hat{x} + \beta_y \hat{y} + \beta_z \hat{z})} = Ae^{-j\vec{k}.\vec{r}}$$

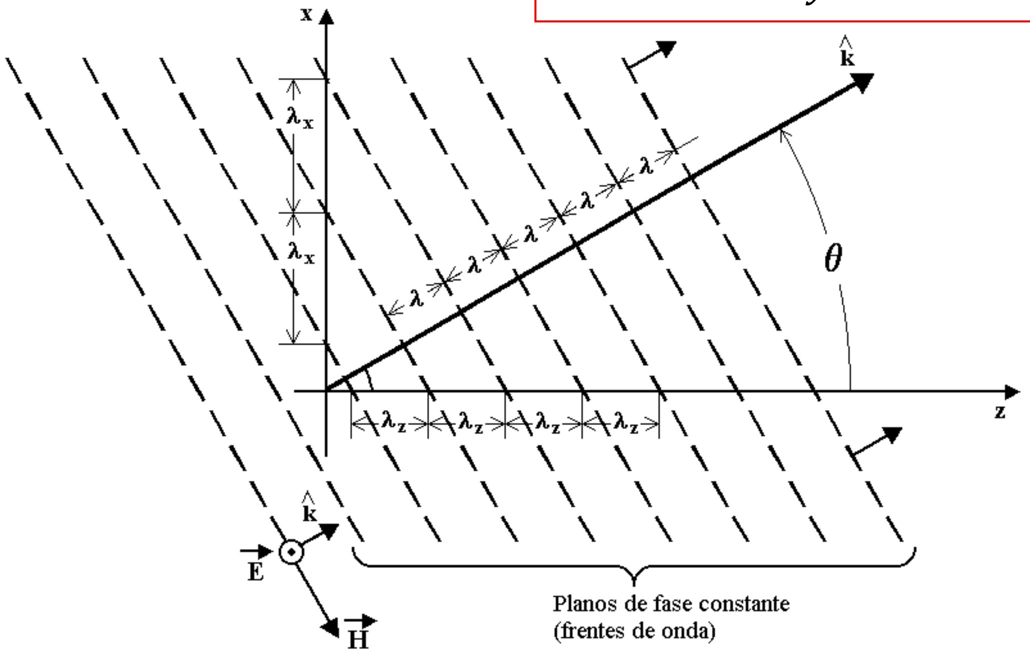
$$E_y(x, y, z) = Be^{-j\vec{k}.\vec{r}}$$

$$E_z(x, y, z) = Ce^{-j\vec{k}.\vec{r}}$$

$$\vec{k} = \beta_x \hat{x} + \beta_y \hat{y} + \beta_z \hat{z} = \beta \hat{k} \quad e \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$





Onda plana propagando-se numa direção arbitrária

➢Conhecendo:

- Um dos campos, a direção de propagação e a impedância de onda podemos sempre obter o outro campo;

$$\vec{\mathrm{H}} = \frac{1}{\eta}\hat{k} \times \vec{\mathrm{E}} \qquad\qquad \vec{\mathrm{E}} = \eta\left(\vec{\mathrm{H}} \times \hat{k}\right)$$

- Os dois campos podemos obter a direção de propagação:

$$\hat{k} = \frac{\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}}{\left|\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}\right|}$$

- A onda propaga-se com campos E e H ortogonais entre si e à direção de propagação obedecendo à regra da mão direita

Exercício

- Considere uma onda a propagar-se no sentido do vetor dado por $\vec{V} = \sqrt{3}\hat{x} + \sqrt{2}\hat{y} + 2\hat{z}$. O campo elétrico na origem é $\vec{E} = \sqrt{3}\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y} - 0.5\hat{z}$, o meio de propagação é o ar e a frequência 300MHz.
  - Calcule os vetores: versor na direção de propagação e de onda k;
  - Escreva a expressão do vetor campo elétrico;
  - Escreva a expressão para o campo magnético.

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{3}\hat{x} + \sqrt{2}\hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{3}\hat{y} + \frac{2}{3}\hat{z} \qquad \vec{k} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{3}\hat{y} + \frac{2}{3}\hat{z}\right)\frac{2\pi}{1} rad/m$$

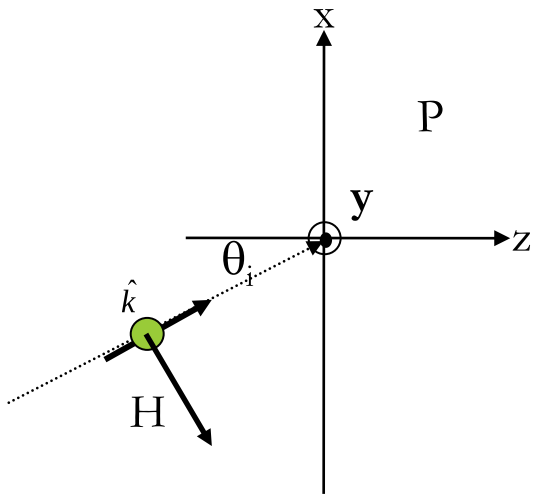
$$\vec{E} = \left(\sqrt{3}\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y} - 0.5\hat{z}\right)e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x}+\frac{\sqrt{2}}{3}\hat{y}+\frac{2}{3}\hat{z}\right)\frac{2\pi}{1}.\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{120\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{3}\hat{y} + \frac{2}{3}\hat{z}\right) \times \left(\sqrt{3}\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y} - 0.5\hat{z}\right)e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x}+\frac{\sqrt{2}}{3}\hat{y}+\frac{2}{3}\hat{z}\right)\frac{2\pi}{1}.\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{120\pi}\left(\frac{1.5\sqrt{2}}{3}\hat{x} + \frac{2.5\sqrt{3}}{3}\hat{y} - \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}\hat{z}\right)e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x}+\frac{\sqrt{2}}{3}\hat{y}+\frac{2}{3}\hat{z}\right)\frac{2\pi}{1}.\vec{r}}$$

Exercício

- Uma onda propaga-se no plano XoZ e faz um ângulo θ_i com o eixo dos z+. O campo elétrico tem componente ao longo de y+ (aponta para o leitor).
  - Determine o versor do vetor número de onda;
  - Escreva a equação do campo elétrico no ponto P(x,z);
  - Escreva a equação do campo magnético;



$$\hat{k}_i = sen\theta_i\hat{x} + \cos\theta_i\hat{z}$$

$$\vec{\mathrm{E}} = E_{0y}e^{-j\beta(x\hat{x}+z\hat{z}).(\hat{x}sen\theta_i+\hat{z}\cos\theta_i)}\hat{y} = E_{0y}e^{-j\beta(xsen\theta_i+z\cos\theta_i)}\hat{y}$$

$$\vec{\mathrm{H}} = \frac{E_{0y}}{\eta}(-\cos\theta_i\,\hat{x} + \sin\theta_i\,\hat{z})e^{-j\beta(xsen\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

- Suponha agora o campo elétrico no plano do diapositivo e a onda a propagar-se no mesmo sentido. Escreva as equações vetoriais do campo elétrico e do campo magnético.

Vetor de Poynting

- $\vec{S}(\vec{r},t)$: amplitude da densidade de potência associada à onda, $[W/m^2]$;
- $\vec{a}_k$: direção de propagação (simultaneamente ortogonal aos campos elétrico e magnético);

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$$

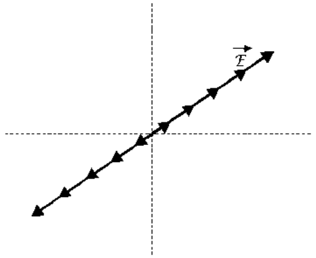
- Em regime harmónico sinusoidal o vetor de Poynting instantâneo é variável ao longo do tempo. É então usual a utilização do seu valor médio:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

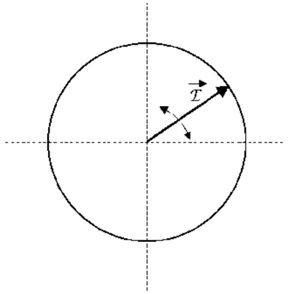
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{|E|^2}{2\eta}$$

Polarização de uma onda

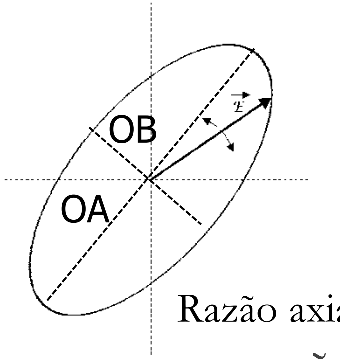
- A polarização é definida pela figura descrita pelo afixo do vetor campo elétrico no tempo (num plano perpendicular à direção de propagação) e a direção em que roda (CW ou CCW).
  - Polarização linear (horizontal, vertical e obliqua)



  - Polarização circular



  - Polarização elíptica



Razão axial: OA/OB

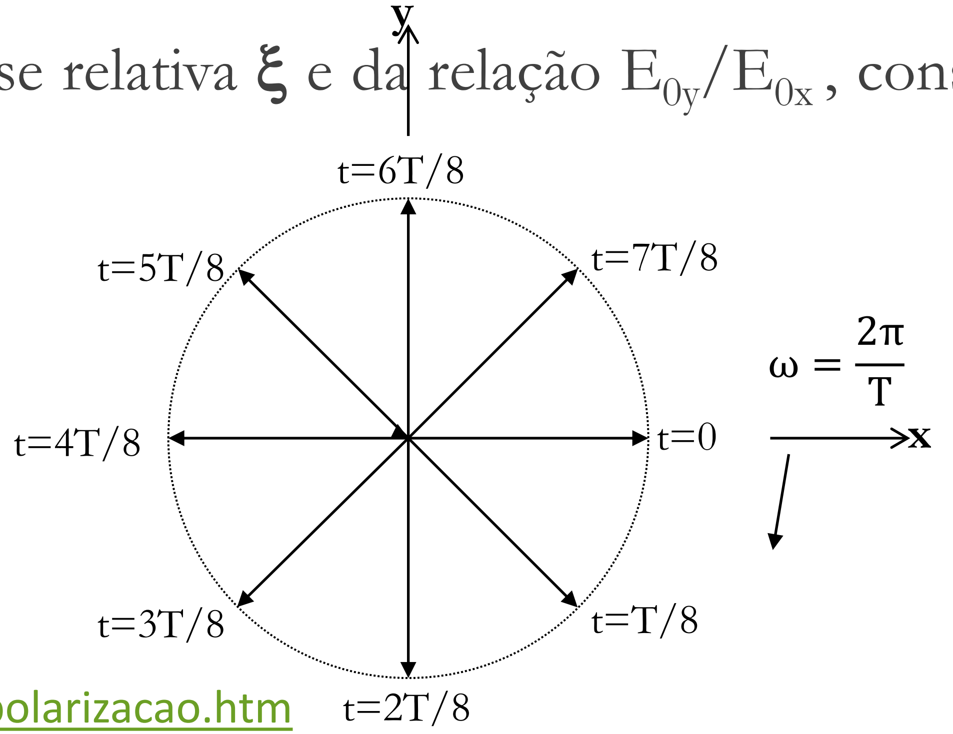
- Podemos dizer que todas as polarizações serão elípticas
  - A linear com o eixo menor nulo (razão axial infinita)
  - A circular com o eixo menor igual ao maior (razão axial de 1)
    - $1<AR<\infty$ $AR=1$ (circular) a $AR=\infty$ (linear)

Caracterização da polarização

- Escrever o campo vetorial no domínio do tempo (pode ser para $z = 0$), e esboçar a evolução no tempo do campo a propagar-se em z^+

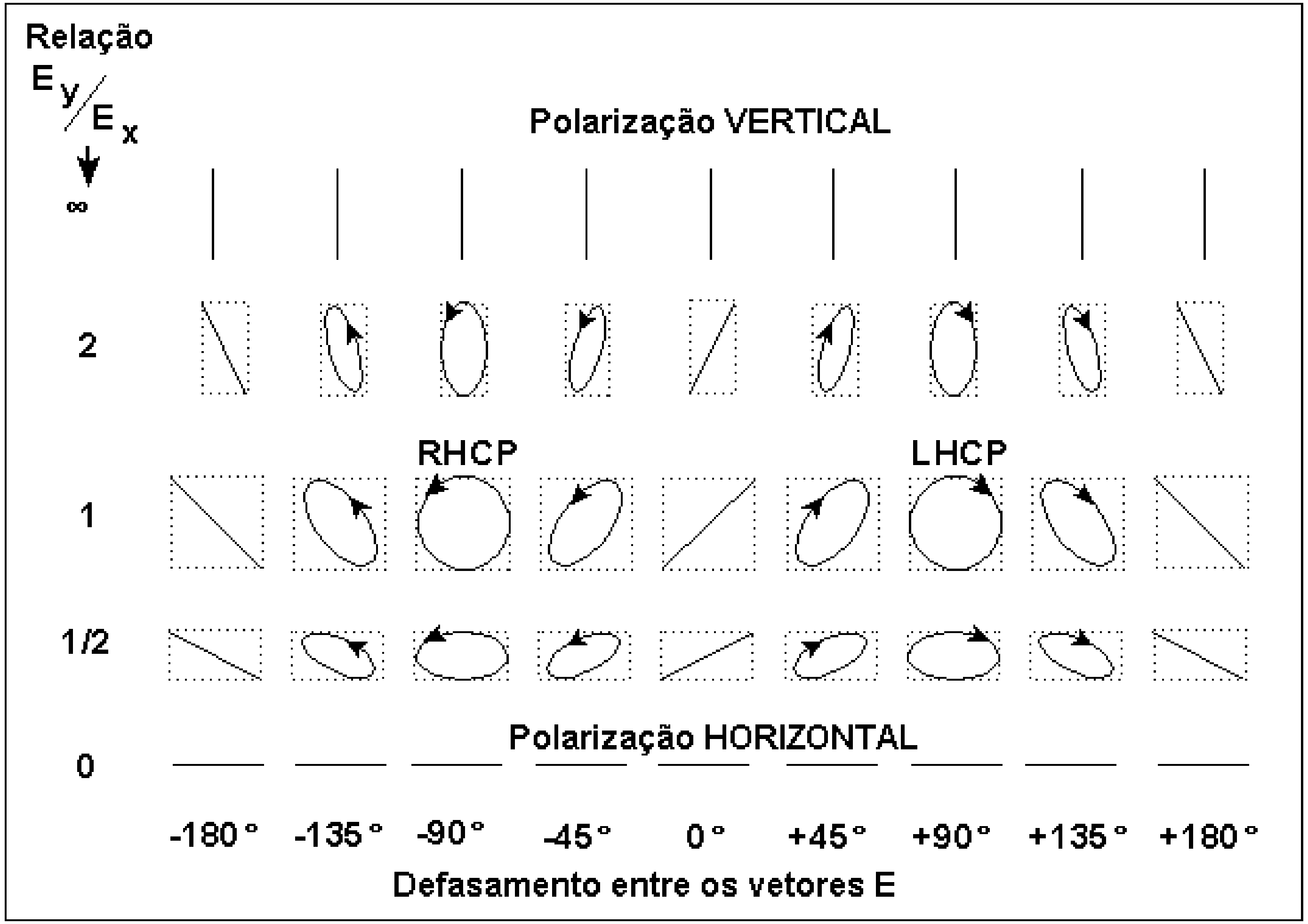
$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{E}_x(z,t) = E_{ox}\cos(\omega t - \beta z) \\ \mathrm{E}_y(z,t) = E_{oy}\cos(\omega t - \beta z + \xi) \end{array}\right| z = 0 \qquad \vec{\mathrm{E}}(0,t) = E_{ox}\cos\omega t\,\hat{x} + E_{oy}\cos(\omega t + \xi)\,\hat{y}$$

- A polarização vai depender da fase relativa ξ e da relação $\mathrm{E}_{0y}/\mathrm{E}_{0x}$, considerando $E_{0x} = E_{0y}$ e ξ=90º:



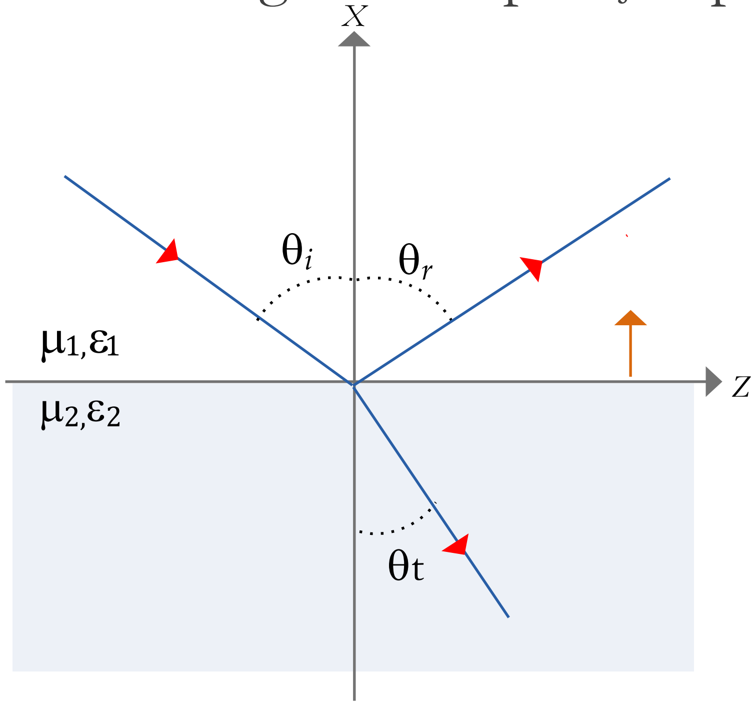
http://www.qsl.net/py4zbz/antenas/polarizacao.htm

Mapa de polarizações: amplitude relativa e fase



Lei de Snell: reflexão e refração

- OEM plana incide numa região de separação plana que separa dois dielétricos semi limitados e sem perdas;



$$\theta_i = \theta_r$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

- Plano de incidência: plano que contêm a normal à região de separação e a direção de propagação
  - Nota: Não é o plano onde a onda incide!!

Incidência normal na interface entre dois meios

- A onda incide perpendicularmente, temos os campos da onda:
  - Onda incidente;

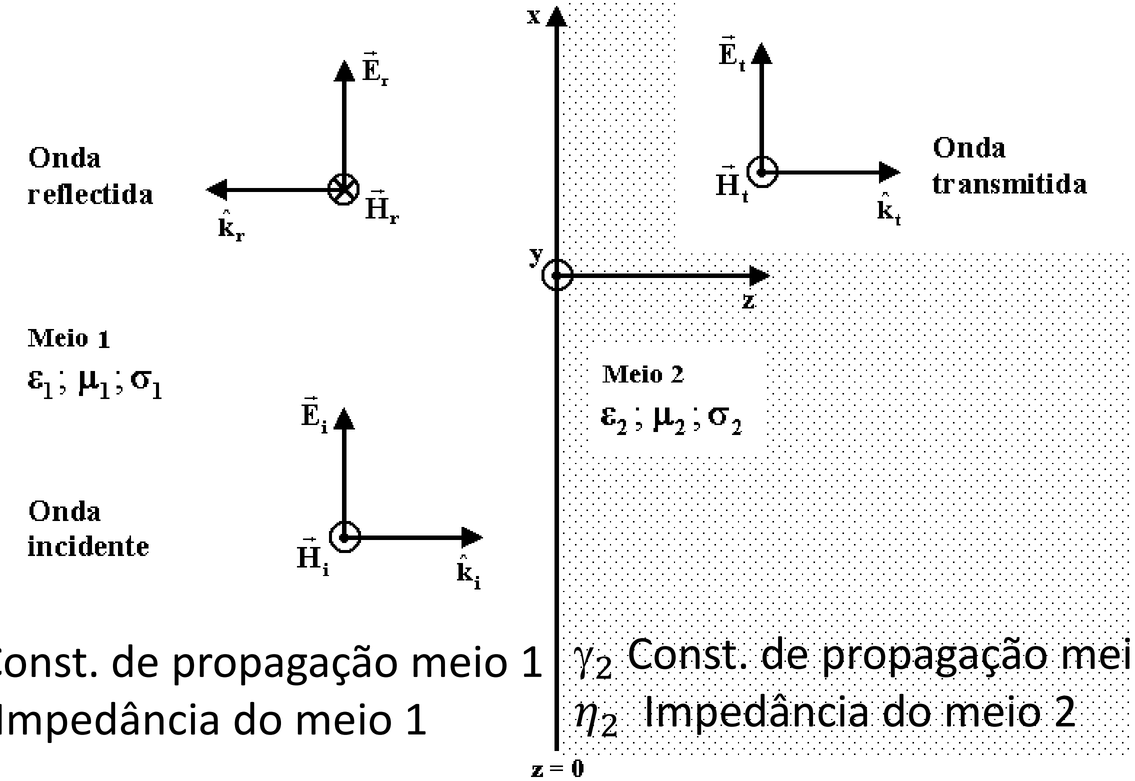
$$\vec{E}_i(z) = \hat{x}E_i e^{-\gamma_1 z}$$
$$\vec{H}_i(z) = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z}$$

  - Onda refletida (aplicar a regra da mão direita)

$$\vec{E}_r(z) = \hat{x}E_r e^{+\gamma_1 z}$$
$$\vec{H}_r(z) = -\hat{y}\frac{E_r}{\eta_1} e^{+\gamma_1 z}$$

  - Onda transmitida (similar à incidente)

$$\vec{E}_t(z) = \hat{x}E_t e^{-\gamma_2 z}$$
$$\vec{H}_t(z) = \hat{y}\frac{E_t}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z}$$



γ_1 Const. de propagação meio 1
η_1 Impedância do meio 1

γ_2 Const. de propagação meio 2
η_2 Impedância do meio 2

Incidência normal na interface entre dois meios

- Coeficientes de reflexão Γ e transmissão T

$$\boxed{\Gamma = \frac{\mathrm{E_r}}{\mathrm{E_i}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} \qquad \boxed{\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E_t}}{\mathrm{E_i}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\,\Omega$$

  - Evidente semelhança com linhas de transmissão em que $\eta_1 = Z_0$ e $\eta_2 = Z_L$;
  - Naturalmente como η_1 e η_2 podem ser complexos e os coeficientes também o serão;

- Utilizando o índice de refração, $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$, podemos ainda escrever:

$$\Gamma = \frac{\mathrm{n_1 - n_2}}{\mathrm{n_1 + n_2}} \qquad \mathrm{T} = \frac{2\mathrm{n_1}}{\mathrm{n_1 + n_2}}$$

$$Se \quad \mu_{r_1,r_2} = 1 \quad \Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r_1}} - \sqrt{\varepsilon_{r_2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}} + \sqrt{\varepsilon_{r_2}}} \qquad \mathrm{T} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r_1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}} + \sqrt{\varepsilon_{r_2}}}$$

Campos nos meios 1 e 2 (dielétricos sem perdas): conclusões generalizáveis

- À semelhança de linhas de transmissão, o campo no meio 1 é a soma dos campos incidente e refletido;

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z) = \hat{x}E_i\left(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{+j\beta_1 z}\right)$$

$$\left(\vec{S}_{av}\right)_1 = \hat{z}\frac{E_i^2}{2\eta_1}\left(1 - |\Gamma|^2\right)$$

$$\vec{H}_1(z) = \vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z) = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{+j\beta_1 z}\right)$$

  - Aplicam-se os conceitos já abordados: posição e amplitude de máximos e mínimos, VSWR, etc;
  - Máximos e mínimos ocorrem no meio 1 em planos de z=constante

- Temos uma onda transmitida
  - Aqui "ultrapassa" fisicamente o "plano da carga" (interface);

$$\vec{E}_2(z) = \hat{x}TE_{io}e^{-j\beta_2 z}$$

$$\vec{H}_2(z) = \hat{y}\frac{E_{io}}{\eta_2}T\ e^{-j\beta_2 z}$$

  - A potência transmitida (vetor de Poynting) é dada por:

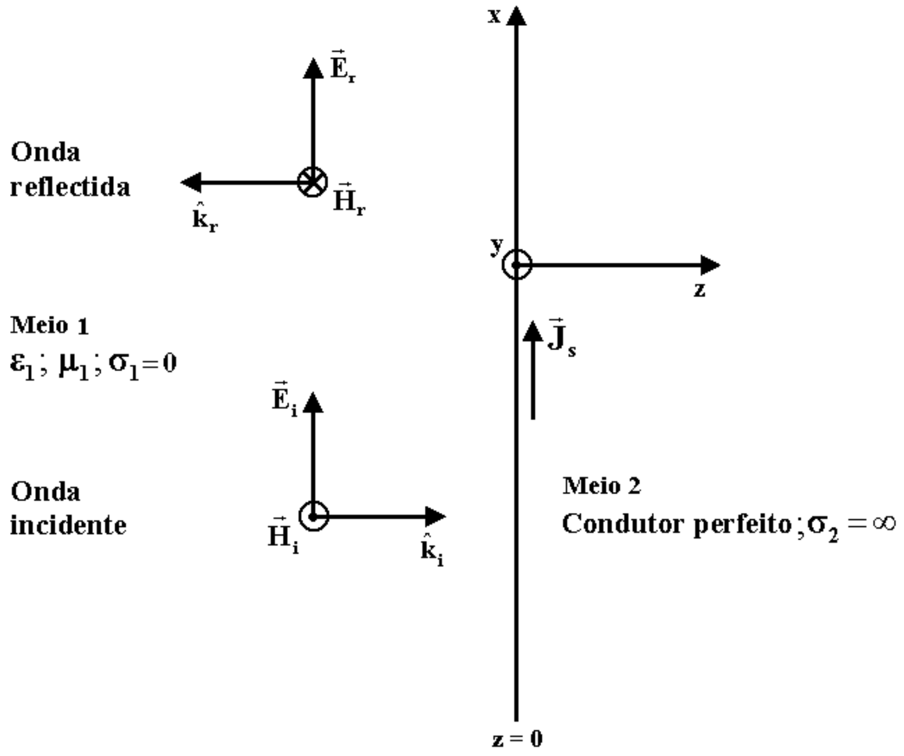
$$\left(\vec{S}_{av}\right)_2 = \frac{1}{2}R_e\left[\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*\right] = \hat{z}\frac{E_i^2}{2\eta_2}|T|^2$$

Campos nos meios 1 e 2 (Meio 2: condutor elétrico perfeito (PEC))

- Sendo $\sigma_2 = \infty$, então $\eta_2 = 0$ e $\Gamma = -1$ e $T = 0$
  - A onda transmitida é nula

$$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z) = \hat{x}E_i\left(e^{-j\beta_1 z} - e^{+j\beta_1 z}\right) = -\hat{x}E_i j2sen(\beta_1 z)$$

$$\vec{H}_1(z) = \vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z) = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} + e^{+j\beta_1 z}\right) = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_1}2\cos(\beta_1 z)$$



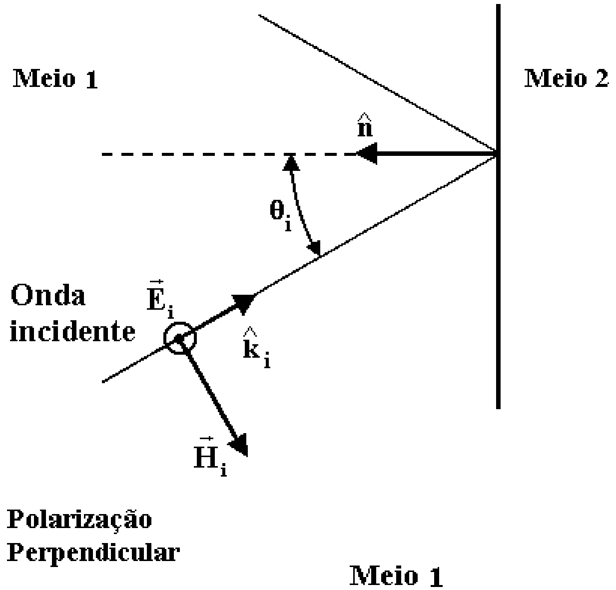
- Que ocorre na superfície do plano PEC?
  - "Desliza" uma "*folha de corrente*" perpendicular a H1(plano z=0) com densidade linear Js (A/m) na direção de x;

$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_1(z=0) = (-\hat{z} \times \hat{y})\frac{2E_{io}}{\eta_1} = \hat{x}\frac{2E_{io}}{\eta_1}$$

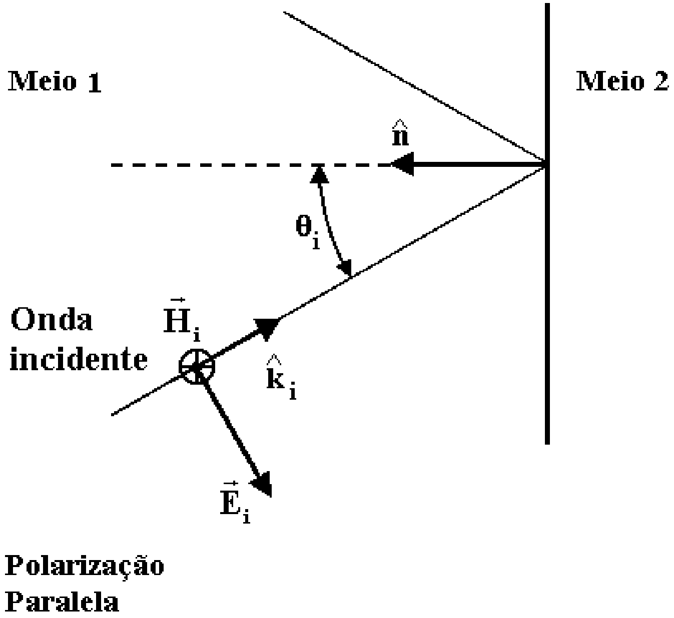
Analogia com CC a terminar linha de transmissão

Incidência oblíqua: geometria e polarizações

- Polarização perpendicular ⊥
  - Campo elétrico E_i é perpendicular ao plano de incidência;
    - Neste caso aponta ao leitor;
  - Campo H_i é paralelo ao plano de incidência;



- Polarização paralela ||
  - Campo elétrico E_i é paralelo ao plano de incidência
  - Campo H_i é perpendicular ao plano de incidência



- Porquê distinguir estas situações?
  - Podemos ter diferentes coeficientes de reflexão e de transmissão

Incidência oblíqua entre dois meios dielétricos sem perdas: polarização ⊥

- Campos da onda incidente: elétrico e magnético

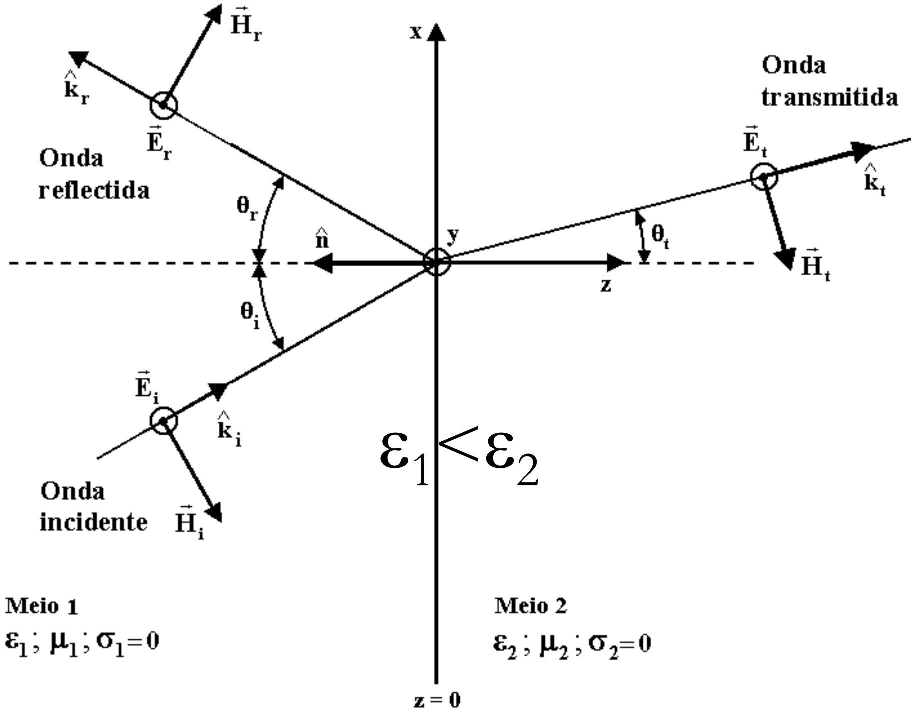
$$\vec{E}_i(x,z) = \hat{y}E_{io}e^{-j\beta_1(x sen\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{H}_i(x,z) = \frac{E_{io}}{\eta_1}(-\hat{x}\cos\theta_i + \hat{z}sen\theta_i)e^{-j\beta_1(x sen\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

- Campos da onda refletida:

$$\vec{E}_r(x,z) = \hat{y}E_{io}\Gamma e^{-j\beta_1(x sen\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\vec{H}_r(x,z) = \frac{E_{io}}{\eta_1}\Gamma(\hat{x}\cos\theta_r + \hat{z}sen\theta_r)e^{-j\beta_1(x sen\theta_r - z\cos\theta_r)}$$



- Campos da onda transmitida:

$$\vec{E}_t(x,z) = \hat{y}E_{io}Te^{-j\beta_2(x sen\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\vec{H}_t(x,z) = \frac{E_{io}}{\eta_2}T(-\hat{x}\cos\theta_t + \hat{z}sen\theta_t)e^{-j\beta_2(x sen\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

Incidência entre dois meios dielétricos: polarização ⊥

- Coeficiente de reflexão:

$$\Gamma_\perp = \frac{\mathrm{E_r}}{\mathrm{E_i}} = \frac{\eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_t)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)}$$

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos(\theta_i) - \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}{\cos(\theta_i) + \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}$$

- Coeficiente de transmissão:

$$\mathrm{T}_\perp = \frac{\mathrm{E_t}}{\mathrm{E_i}} = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_t)} = 1 + \Gamma_\perp$$

$$\mathrm{T}_\perp = \frac{2\cos(\theta_i)}{\cos(\theta_i) + \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}$$

- Reflexão interna total:

$$\varepsilon_{1r} > \varepsilon_{2r} \Rightarrow \theta_{ic} = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}}}\right)$$

Incidência oblíqua entre um dielétrico e um condutor: polarização ⊥

- Campos da onda incidente: elétrico e magnético

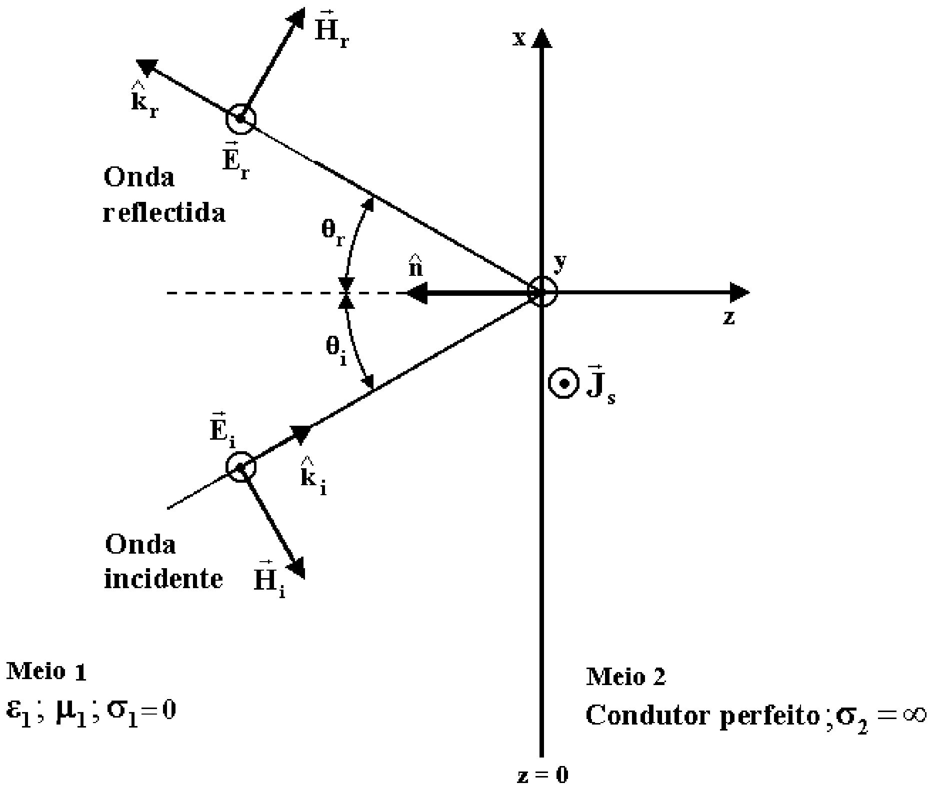
$$\boxed{\vec{E}_i(x,z) = \hat{y}E_i e^{-j\beta_1(xsen\theta_i + z\cos\theta_i)}}$$

$$\boxed{\vec{H}_i(x,z) = \frac{E_i}{\eta_1}(-\hat{x}\cos\theta_i + \hat{z}sen\theta_i)e^{-j\beta_1(xsen\theta_i + z\cos\theta_i)}}$$

- Campos da onda refletida:

$$\boxed{\vec{E}_r(x,z) = \hat{y}E_r e^{-j\beta_1(xsen\theta_r - z\cos\theta_r)}}$$

$$\boxed{\vec{H}_r(x,z) = \frac{E_r}{\eta_1}(\hat{x}\cos\theta_r + \hat{z}sen\theta_r)e^{-j\beta_1(xsen\theta_r - z\cos\theta_r)}}$$



- Interferência entre onda incidente e refletida

$$\vec{E}_1(x,z) = \vec{E}_i(x,z) + \vec{E}_r(x,z) = \hat{y}E_i\left(e^{-j\beta_1 z\cos\theta_i} - e^{+j\beta_1 z\cos\theta_i}\right)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

$$\vec{E}_1(x,z) = -\hat{y}E_i j2sen(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

interferência em zz- progresso em xx+

Interferência entre onda incidente e refletida na pol. perpendicular: caso PEC

- Campo elétrico (meio 1):

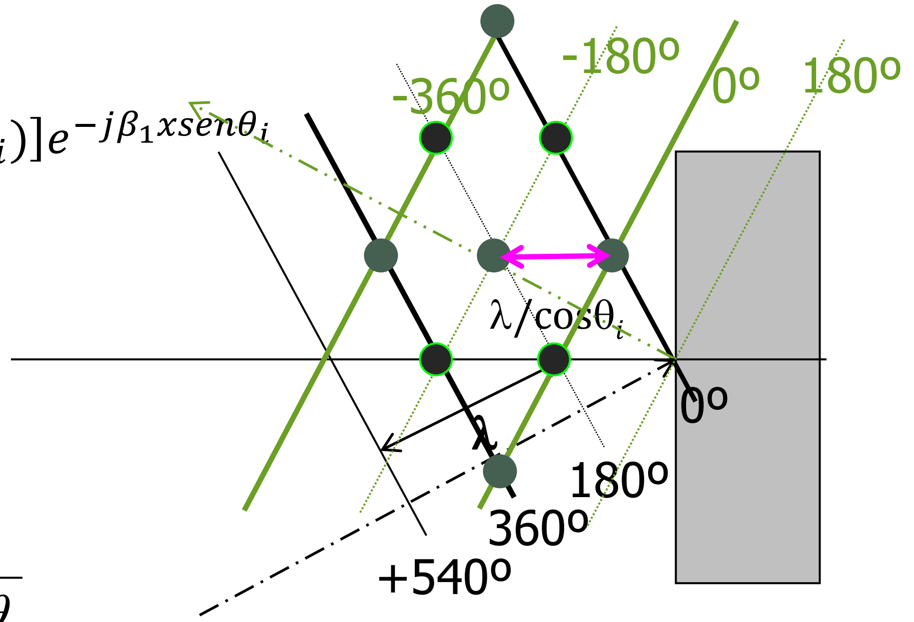
$$\vec{E}_1(x,z) = \vec{E}_i(x,z) + \vec{E}_r(x,z) = \hat{y}E_i\left(e^{-j\beta_1 z\cos\theta_i} - e^{+j\beta_1 z\cos\theta_i}\right)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$
$$\vec{E}_1(x,z) = -\hat{y}E_{io}j2sen(\beta_1 z\cos\theta_i)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$$

- Campo magnético (meio 1):

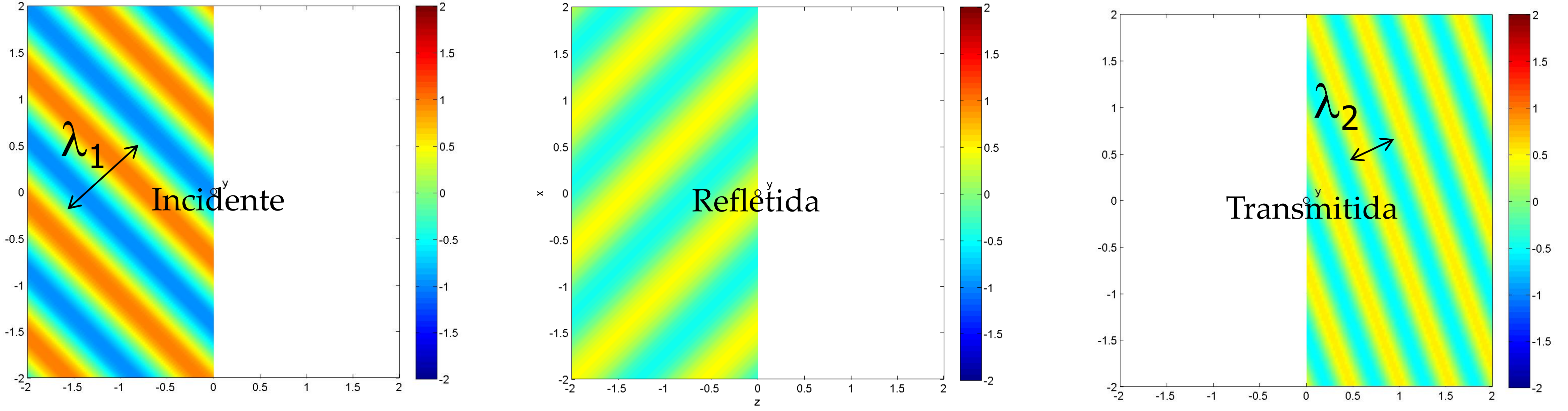
$$\vec{H}_1(x,z) = \vec{H}_i(x,z) + \vec{H}_r(x,z)$$
$$= -\frac{2E_{io}}{\eta_1}[\hat{x}\cos\theta_i\cos(\beta_1 z\cos\theta_i) + \hat{z}sen\theta_i sen(\beta_1 z\cos\theta_i)]e^{-j\beta_1 x sen\theta_i}$$

- Interferência
  - Pontos de reforço: máximos
  - **Pontos de cancelamento: mínimos**
- Repetição em

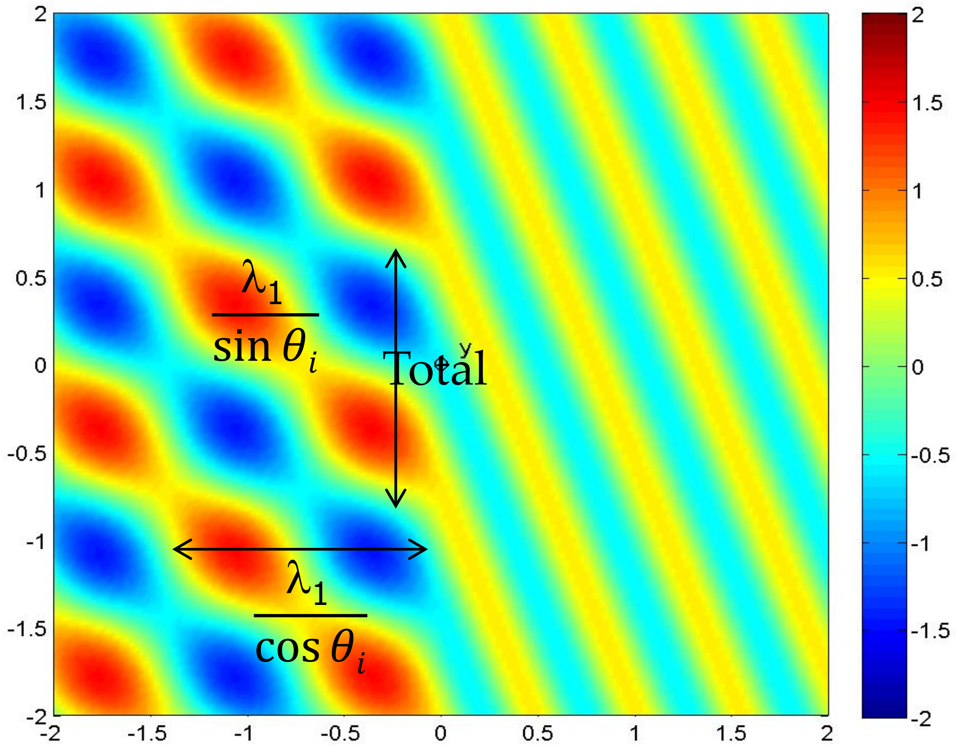
$$sen(\beta_1 z\cos\theta_i) \to \frac{2\pi}{\lambda}z\cos\theta_i = 2\pi \to d_R = \frac{\lambda}{\cos\theta_i}$$



Polarização $\perp$: $(\theta_i = 45º, \epsilon_{r_1} = 1, \epsilon_{r_2} = 4)$

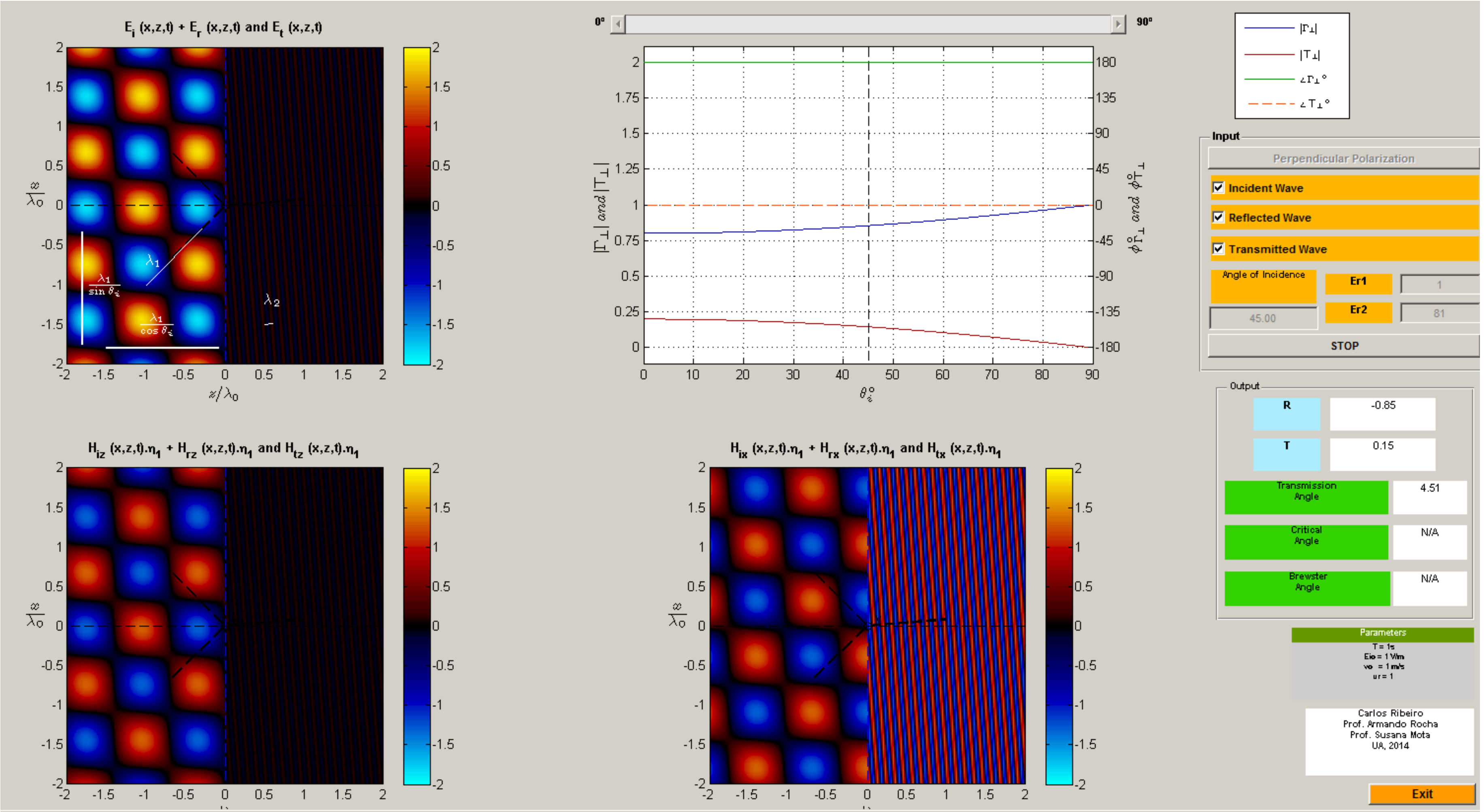


Polarização $\perp$: $(\theta_i = 45º, \epsilon_{r_1} = 1, \epsilon_{r_2} = 4)$

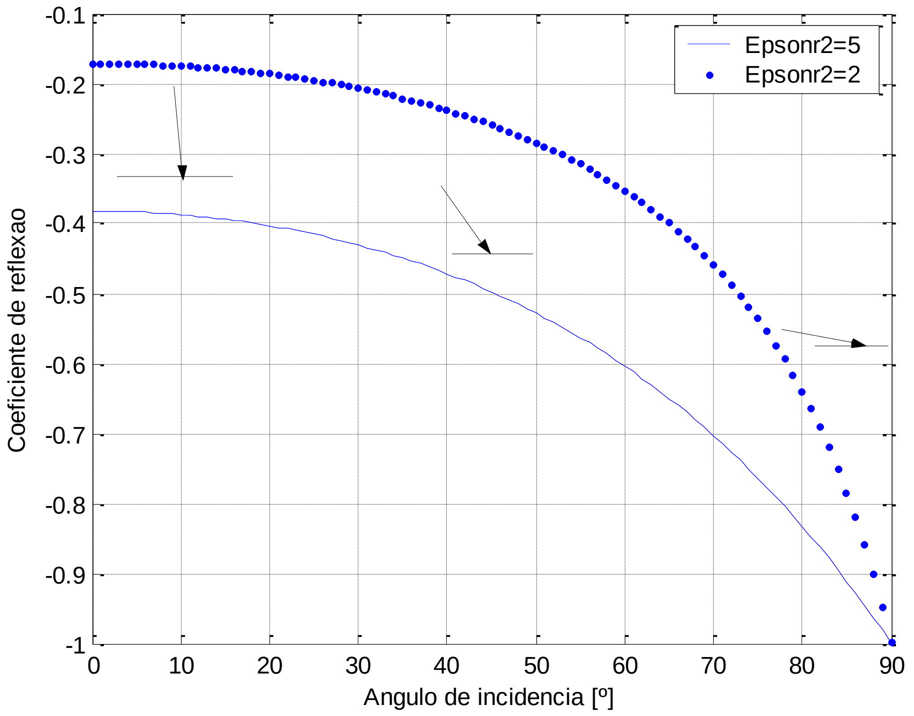


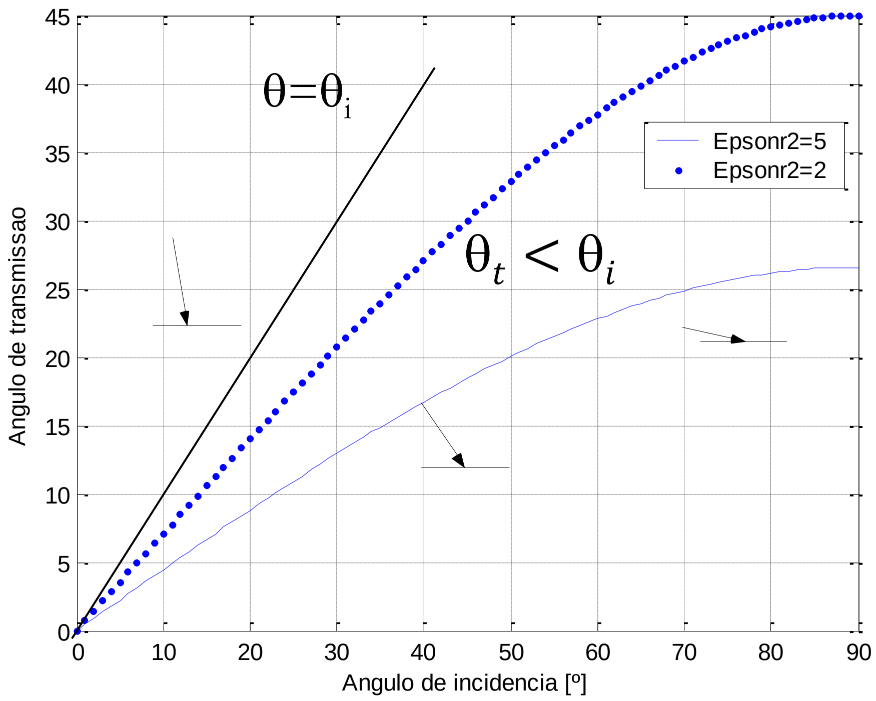
Polarização ⊥ : $(\theta_i = 45º, \epsilon_{r_1} = 1, \epsilon_{r_2} = 81)$

- Interferência: todos os campos.



Incidência de meio menos denso em mais denso ($\epsilon_{r_2} > \epsilon_{r_1}$): dependências de θ_i





O módulo do coeficiente de reflexão é:

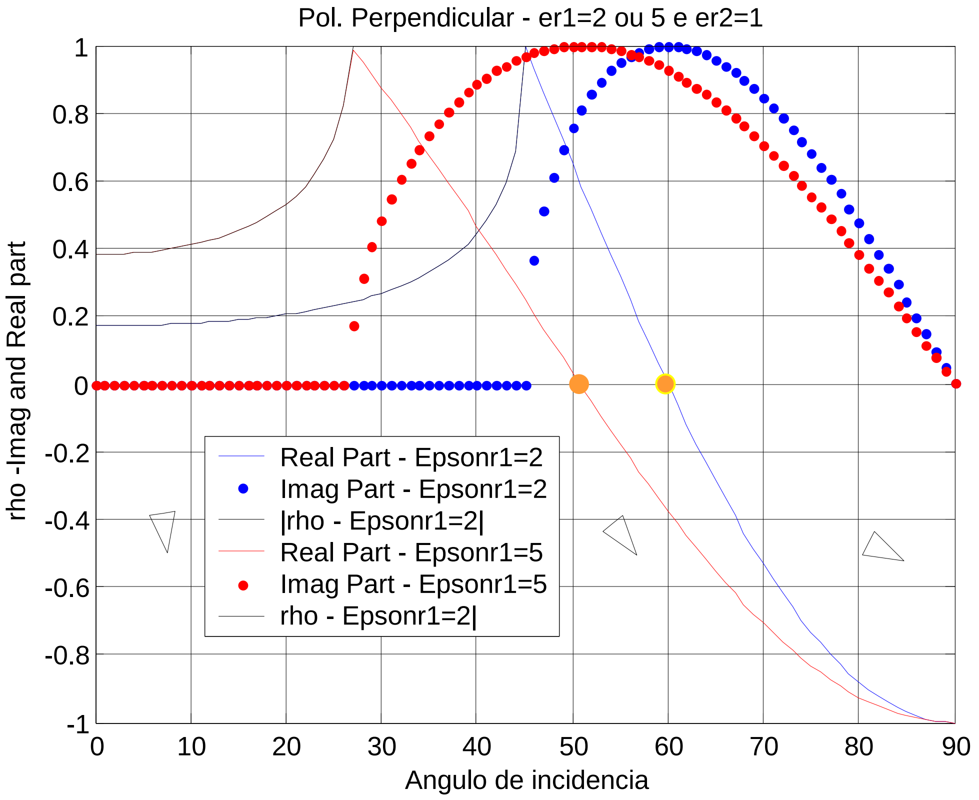
- Mínimo para incidência normal (θ_i=0º)
- Máximo para incidência tangencial (θ_i=90º)

$$\theta_{ic} = sen^{-1}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$$

Como esperado, quanto mais similares os ε_r

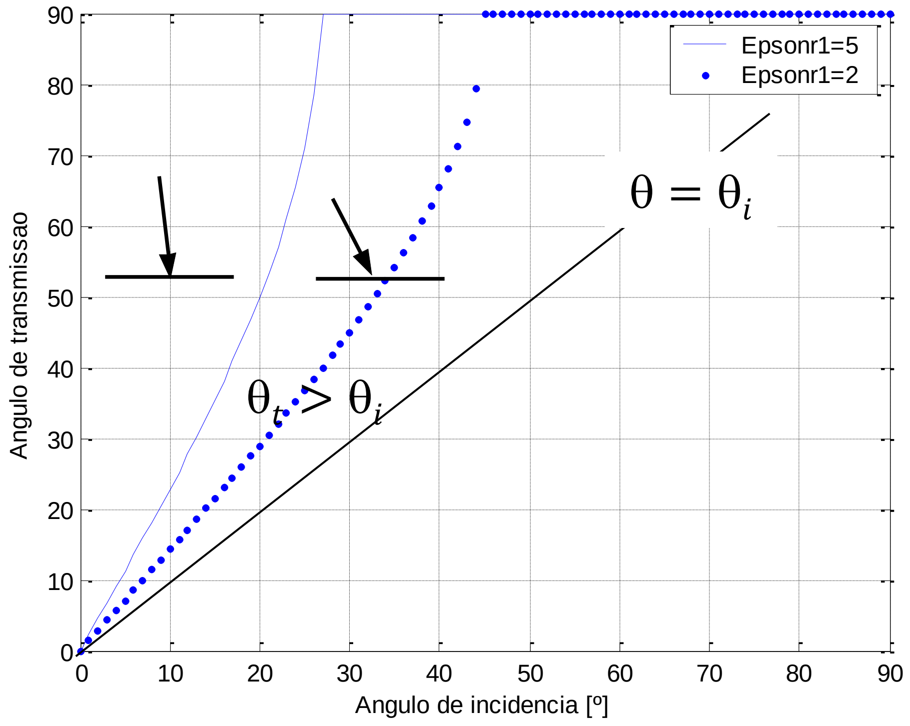
- Menor o coeficiente de reflexão
- Menor a diferença entre θ_i e θ_t

Incidência de meio mais denso em menos denso ($\epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_2}$): dependências de θ_i



$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos(\theta_i) - \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}{\cos(\theta_i) + \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}$$

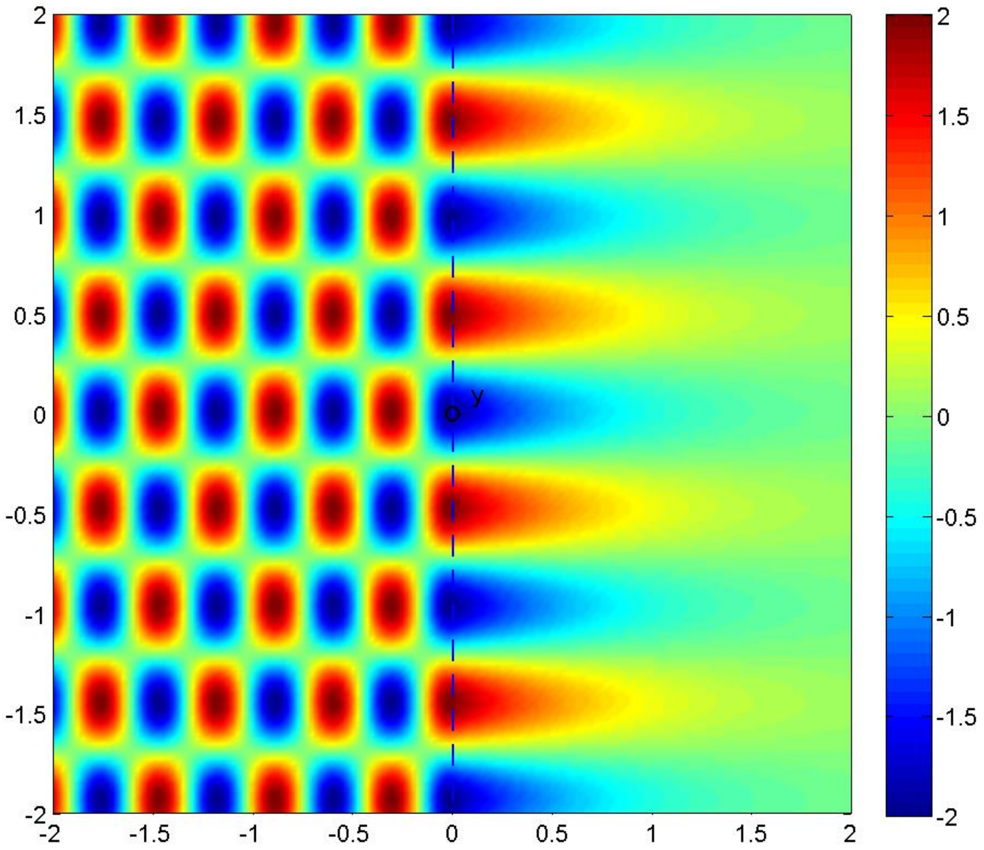
Quando $\theta_i > \theta_{ic}$ $|\Gamma_{\perp}| = 1$ → reflexão total (onda não penetra no meio menos denso)



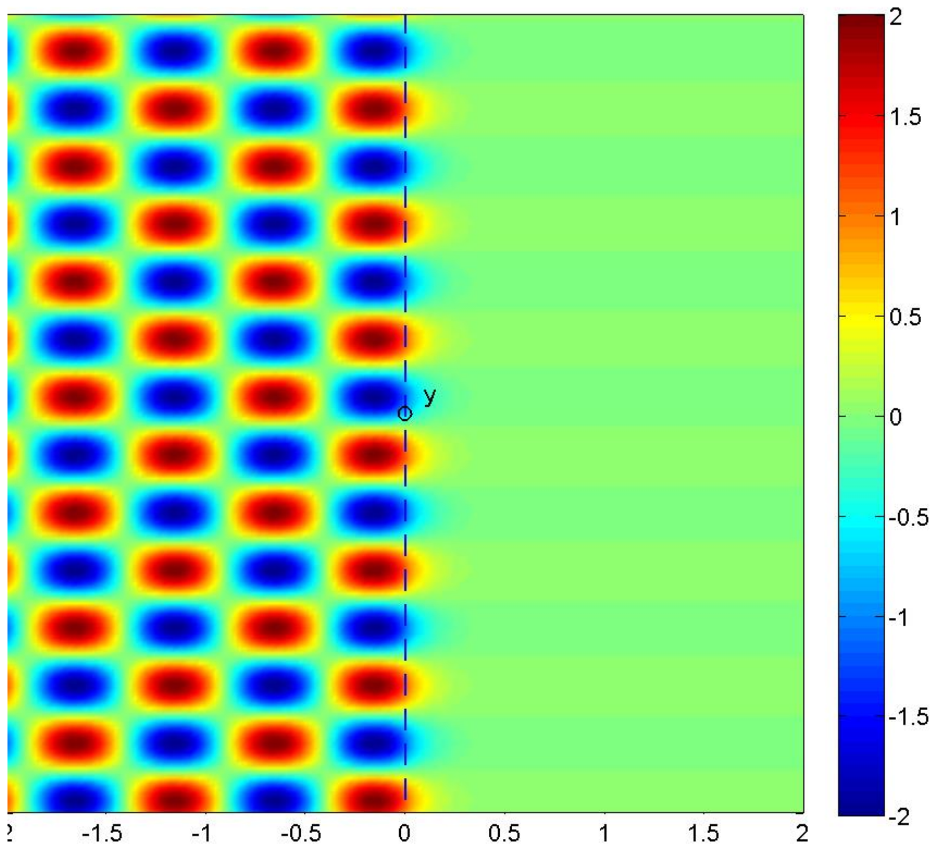
Ao aumentar θ_i o coeficiente de reflexão:

- Começa por assumir um valor real;
- Torna-se **complexo unitário** a partir de θ_{ic}
- Passa por um valor imaginário
- Torna-se complexo de novo e tende a -1

Polarização ⊥ : ($\theta_i = 31°$ e 60º, $\epsilon_{r_1} = 4, \epsilon_{r_2} = 1$). $\theta_i > \theta_{ic}$



$\theta_i = 31°$



$\theta_i = 60°$

Exercício

- Uma onda com polarização perpendicular (no sistema de eixos utilizado nos diapositivos), com um campo elétrico em módulo de 10V/m e λ de 1m propagando-se no ar incide num meio com um $\epsilon_r = 5$ (vidro). Sabendo que o ângulo de incidência é 45º:
  - Calcule o ângulo de reflexão. $\theta_i = \theta_r = 45°$;
  - Calcule o ângulo de transmissão. $\theta_t = 18.4°$;
  - Calcule as amplitudes do campo elétrico da onda refletida e da transmitida. $\Gamma_\perp = -0.5$; $T_\perp = 0.5$; $E_r = -0.5 * 10$ V/m; $Et = 0.5 * 10$ V/m;
  - Escreva a equação vetorial dos campos no meio 1 e meio 2;
  - Calcule o módulo do vetor de Poynting de todas as ondas: $S_t = 1/2\,\mathrm{Real}(\mathrm{EXH}^*) = 0.148\, W/m^2, S_i = 0.265\, W/m^2, S_r = 0.066\, W/m^2$
  - Mostre que a potência que atravessou uma área A no plano refletor para o meio 2 é igual à potência incidente menos a refletida nessa mesma área;
  - Suponha a incidência do meio mais denso, $\epsilon_r = 5$, no menos denso $\epsilon_r = 1$, com $\theta_i = 20°$. Calcule $\Gamma_\perp$ e $T_\perp$;
  - Que acontece, nas condições da alínea anterior, para $\theta_i = 60°$? Reflexão interna total
  - Qual o valor de $\Gamma_\perp$ para $\theta_i = 60°$? $\Gamma_\perp = -0.3750 + 0.9270i$

Incidência oblíqua entre dois meios: polarização paralela ||:

- Campos da onda incidente: elétrico e magnético:

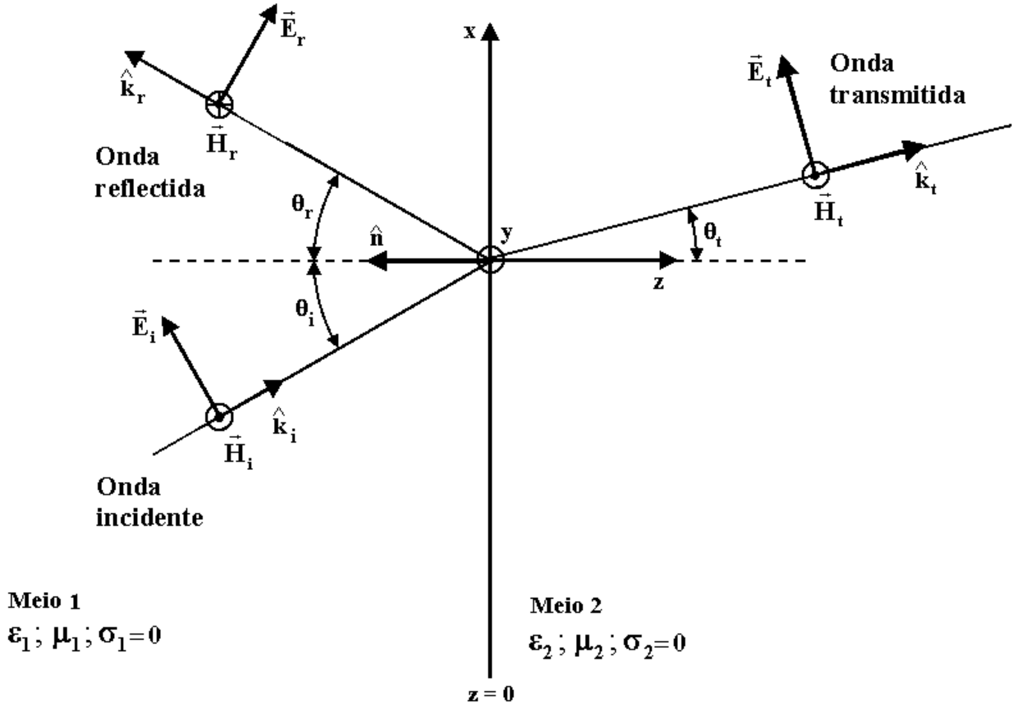
$$\vec{E}_i(x,z) = E_i(\hat{x}\cos\theta_i - \hat{z}sen\theta_i)e^{-j\beta_1(xsen\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{H}_i(x,z) = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_1}e^{-j\beta_1(xsen\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

- Campos da onda refletida:

$$\vec{E}_r(x,z) = E_i\Gamma(\hat{x}\cos\theta_r + \hat{z}sen\theta_r)e^{-j\beta_1(xsen\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\vec{H}_r(x,z) = -\hat{y}\frac{E_i}{\eta_1}\Gamma e^{-j\beta_1(xsen\theta_r - z\cos\theta_r)}$$



- Campos da onda transmitida:

$$\vec{E}_t(x,z) = E_i T(\hat{x}\cos\theta_t - \hat{z}sen\theta_t)e^{-j\beta_2(xsen\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\vec{H}_t(x,z) = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_2}Te^{-j\beta_2(xsen\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

Incidência entre dois meios dielétricos: polarização ||

- Coeficiente de reflexão:

$$\Gamma_{||} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t}$$

$$\Gamma_{||} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\left(1 - \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} sen^2\theta_i\right)} - \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\left(1 - \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} sen^2\theta_i\right)} + \cos\theta_i}$$

- Coeficiente de transmissão:

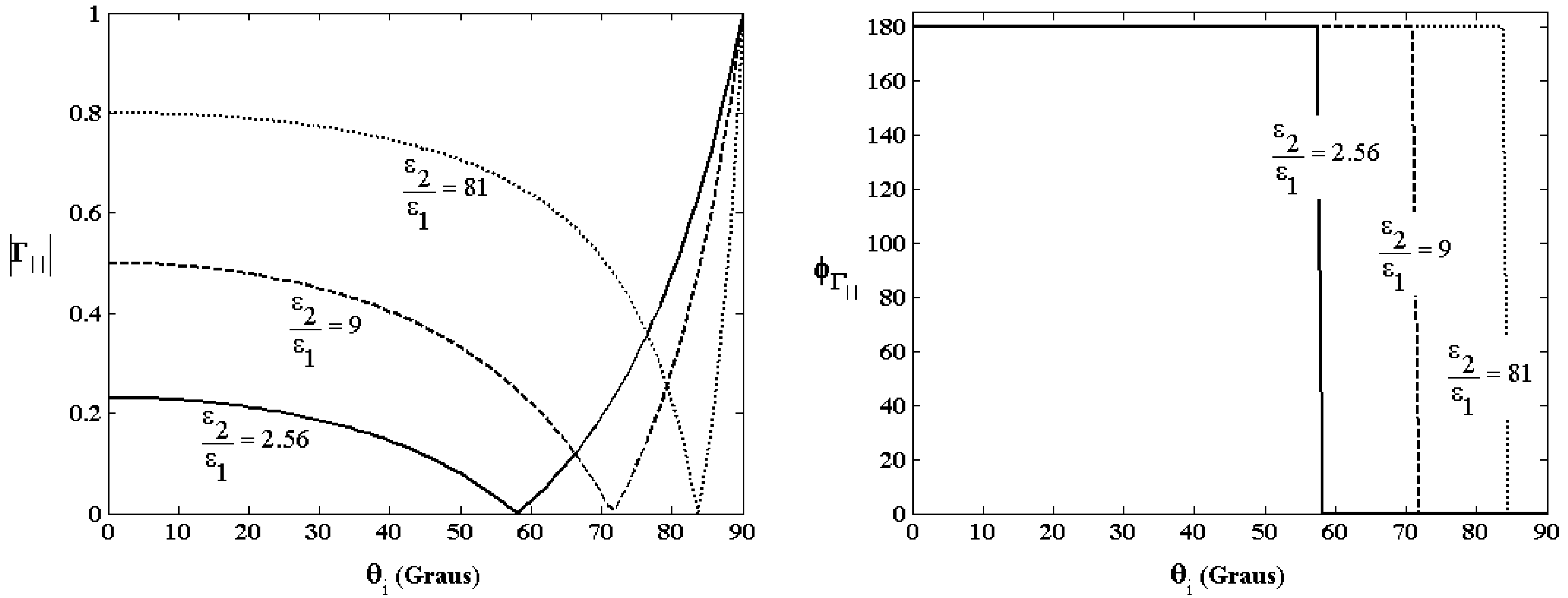
$$T_{||} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t}$$

$$1 + \Gamma_{||} = T_{||}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

Atenção: Para a polarização paralela o <u>coeficiente de transmissão</u> <u>não é igual à soma do coeficiente de reflexão com a unidade.</u>

Incidência na polarização || entre dois dielétricos ($\epsilon_{r_2} > \epsilon_{r_1}$): dependências de θ_i

- Coeficiente $\Gamma_{||}$ (Incidência no meio mais denso)



- Existe um ângulo θ_{iB}:
  - Para o qual o coeficiente de reflexão é nulo (transmissão é máxima);

- Para $\theta_i > \theta_{iB}$ a fase do coeficiente de reflexão inverte-se;
  - $\theta_i < \theta_B \rightarrow \Gamma$ tem fase 180º; $\theta_i > \theta_B \rightarrow \Gamma$ tem fase 0º

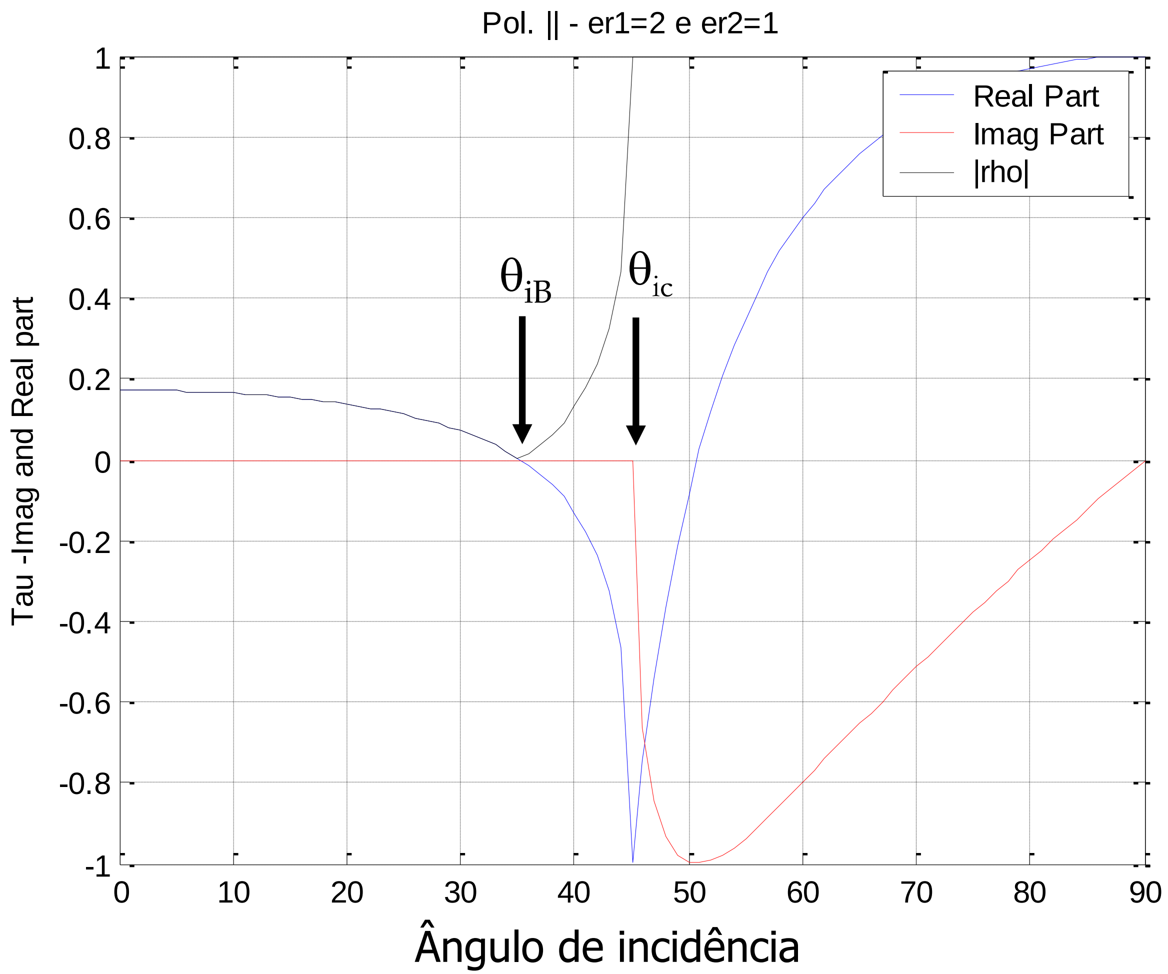
Ângulo de Brewster: aplica-se apenas à polarização | |

➢ Existe um ângulo θ_{iB}, para o qual o coeficiente de reflexão é nulo (transmissão é máxima);

$$\Gamma_{||} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\left(1 - \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} sen^2\theta_i\right)} - \cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\left(1 - \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} sen^2\theta_i\right)}} = 0 \longrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\left(1 - \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}} sen^2\theta_i\right)} = \cos\theta_i$$

$$\boxed{\theta_i = \theta_B = sen^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}} = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}$$

Polarização paralela (| |): Incidência em meio menos denso



Mudança de fase de $\Gamma_{||}$ após θ_{iB}

$|\Gamma_{||}|=1$ após $\theta>\theta_{ic}$

$\Gamma_{||}=1$ para incidência tangencial

Exercício

- Uma onda com polarização paralela (sistema de eixos dos diapositivos), E=10V/m e λ=1m incide do ar num meio com $\epsilon_r = 5$.
  - Calcule o ângulo de Brewster. $\theta_{iB} = 65.9°$
  - Calcule o ângulo de transmissão correspondente a uma incidência segundo o ângulo de Brewster. $\theta_{tB} = 24.1°$;
  - Calcule o ângulo de transmissão e os coeficientes de reflexão e transmissão para um ângulo de incidência de $\theta_i = 45°$. $\theta_t = 18.4°$; $\Gamma_{||} = -0.25; T_{||} = 0.559$
  - Calcule os coeficientes de reflexão e transmissão para um ângulo de incidência de $\theta_i = \theta_{iB}$. $\Gamma_{||} = 0; T_{||} = 0.447$;
  - Calcule o vetor de Poynting da onda incidente. $S_i = 0.265 W/m^2$;
  - Calcule o vetor de Poynting da onda transmitida ao meio 2 para incidência segundo o ângulo de Brewster. $S_t = 0.119 W/m^2$;
  - Calcule o ângulo de transmissão e os coeficientes de reflexão e transmissão para um ângulo de incidência de $\theta_i = 80°$. $\theta_t = 26.1°$; $\Gamma_{||} = 0.392; T_{||} = 0.27$

Incidência entre dois meios dielétricos sem perdas: sistematizando

Polarização ⊥

$T_\perp$ é dado por $T_\perp = 1 + \Gamma_\perp$

Polarização | |

$T_{||}$ é dado por $1 + \Gamma_{||} = T_{||} \dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$

Incidência num meio mais denso

- $\Gamma_\perp$ tem sempre fase 180º
- $\Gamma_\perp \rightarrow$ -1 monotonamente com $\theta_i \rightarrow$ 90º

Ver slide 39

- Γ_{II} tem fase 180º até ao ângulo de Brewster e 0º acima deste
- $\Gamma_{II} \rightarrow 0$ com $\theta_i \rightarrow \theta_{iB}$ e $\Gamma_{II} \rightarrow 1$ com $\theta_i \rightarrow$ 90º

Incidência num meio menos denso

- *Se* $\theta > \theta_{ic}$ $|\Gamma|$ =1 e é complexo

- $\Gamma_\perp$ com:
  - θ_i até θ_{ic} é real positivo e → 1
  - $\theta_i > \theta_{ic}$ é complexo e com $\theta_i \rightarrow$ 90º :
    - Parte real varia de 1 a -1
    - Parte imaginária varia de 0→1→0

- Γ_{II} com:
  - θ_i até θ_{iB} é real positivo;
  - θ_i entre θ_{iB} e θ_{ic} é negativo e varia entre 0 e -1
  - $\theta > \theta_{ic}$ é complexo e com $\theta_i \rightarrow$ 90º
    - Parte real varia de -1 a +1
    - Parte imaginária varia de 0→-1→0

Polarização da onda refletida e transmitida

- A incidência de uma onda, só em casos particulares de polarização linear, é que o seu campo elétrico está alinhado com polarização || ou ⊥
  - Restantes situações exigem a decomposição nestes dois tipos de incidência (|| e ⊥);
  - Os coeficientes de reflexão/transmissão (|| e ⊥) para cada tipo de incidência deverão ser calculados;
  - As amplitudes da onda refletida e transmitida deverão ser calculadas usando:
    - $Ei_{\perp}$ e $(\Gamma\perp, T_{\perp})$
    - Ei_{II} e (Γ_{II}, T_{II})
- A polarização da onda refletida (e da onda transmitida) é de uma forma geral distinta da incidente pois:
  - Os coeficientes –módulo e/ou fase- de reflexão/transmissão não são iguais para as polarizações || e ⊥
  - Exemplo óbvio: Caso da incidência segundo o ângulo de Brewster
    - A onda refletida só terá componente do campo elétrico na componente perpendicular ($Ei_{\perp}$) ao plano de incidência → Onda refletida tem polarização linear.