



Mestrado Integrado em Engenharia Eletrónica e Telecomunicações Licenciatura em Engenharia Aeroespacial

Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas – PROE

Ano letivo 2023/24

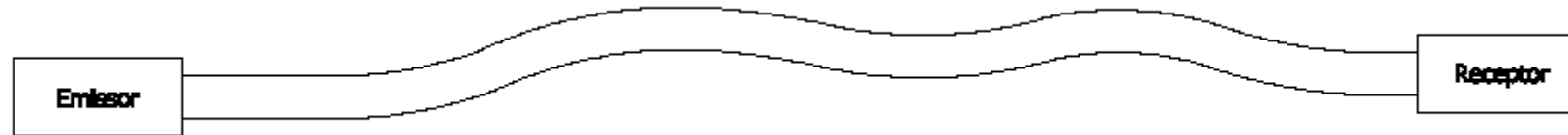
Prof. Pedro Pinho

ptpinho@ua.pt

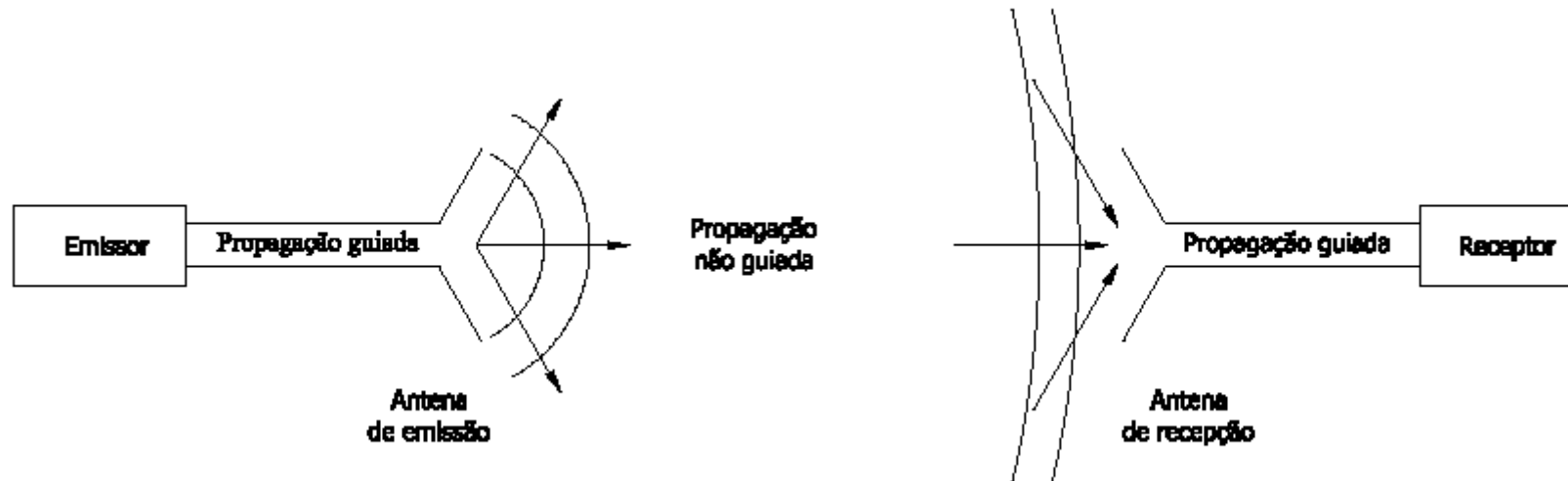
O docente agradece o apoio na elaboração dos diapositivos ao Prof. Armando Rocha

Canal de transmissão

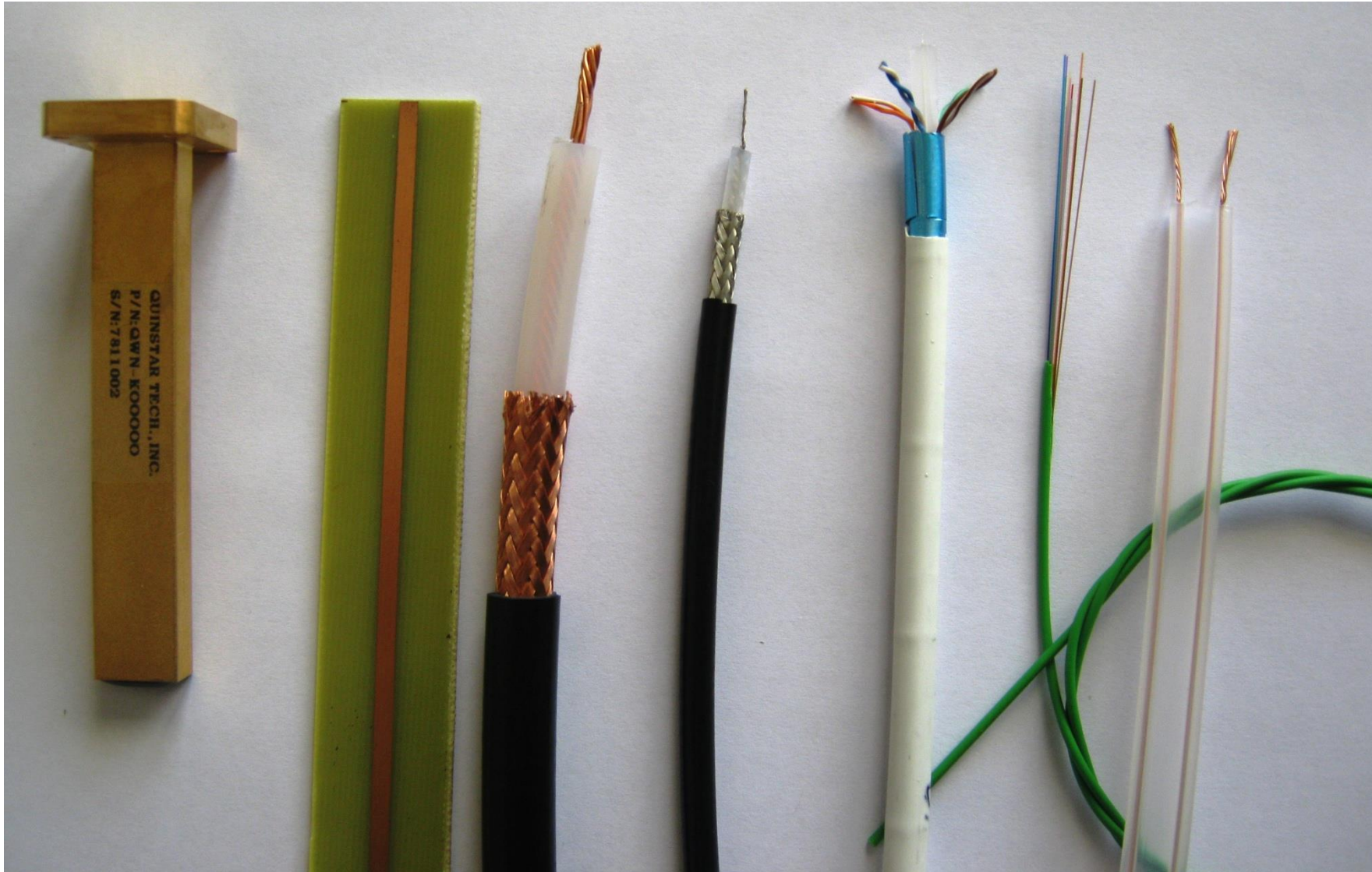
➤ Propagação guiada:



➤ Propagação em espaço livre ou na atmosfera:

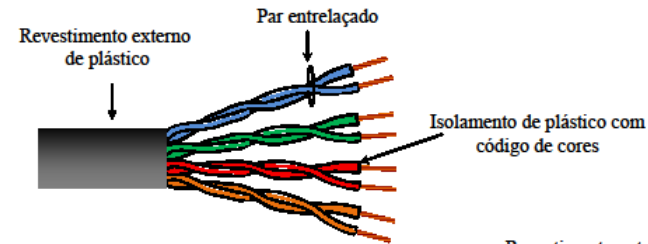


Propagação guiada

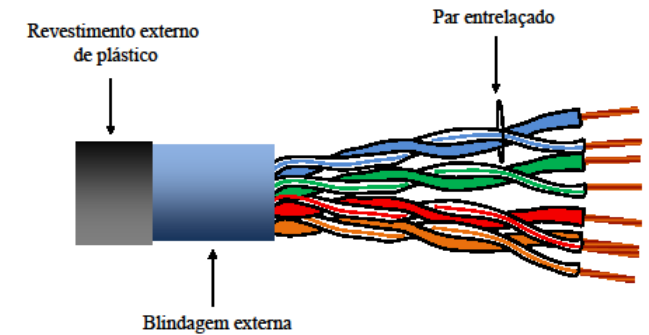


Propagação guiada: Pares de cobre

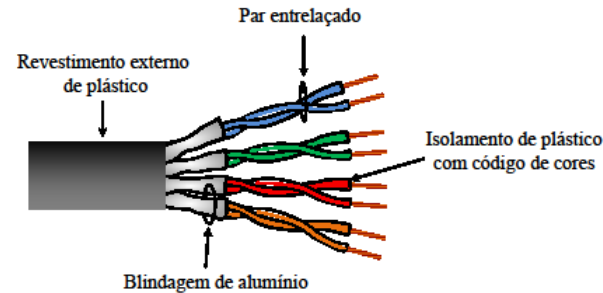
➤ Pares de cobre UTP (*Unshielded Twisted Pair*);



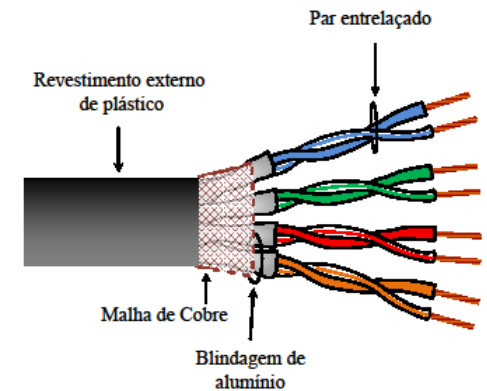
➤ Pares de cobre FTP (*Foiled Twisted Pair*);



➤ Pares de cobre STP (*Shielded Twisted Pair*);



➤ Pares de cobre SSTP (*Screened Shielded Twisted Pair*).



Propagação guiada: Cabo Coaxial

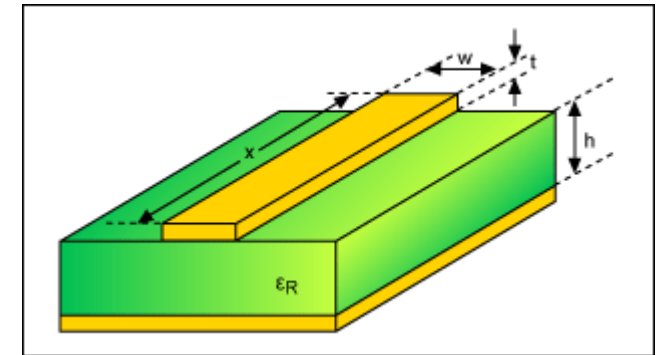
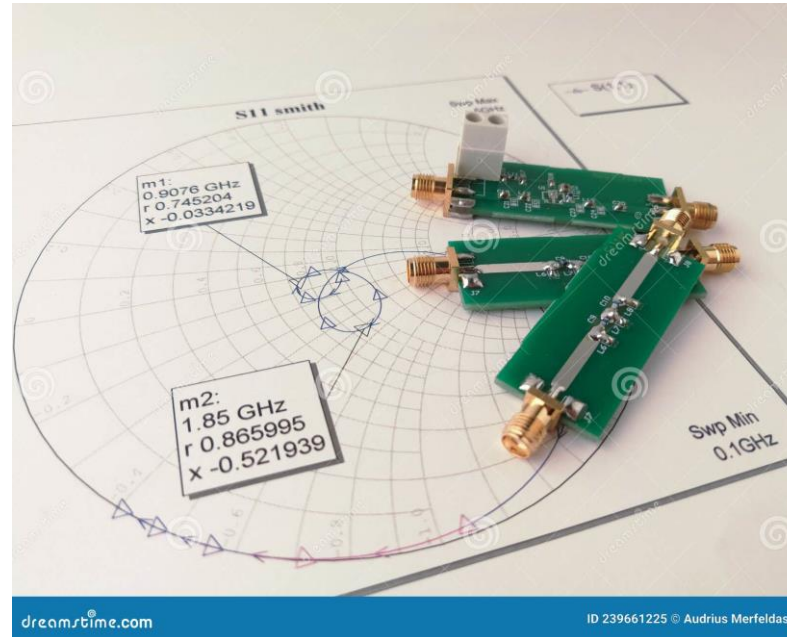
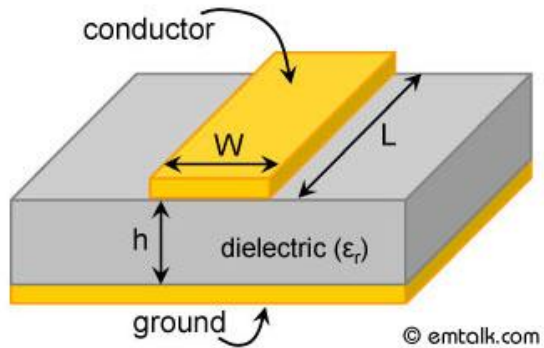
- Um cabo coaxial, na sua forma mais simples, consiste num condutor central, normalmente de cobre, envolvido por um material dielétrico ou isolante e sobre o qual assenta um condutor exterior, designado de malha.



Propagação guiada: Linha *microstrip* ou impressa

➤ Uma linha *microstrip* ou impressa, consiste num condutor de cobre de largura W , comprimento L e espessura t colocada a uma altura h de um plano de massa sobre um dielétrico com permissividade relativa ϵ_r .

- A espessura do cobre, t , tipicamente é de $35\text{ }\mu\text{m}$;

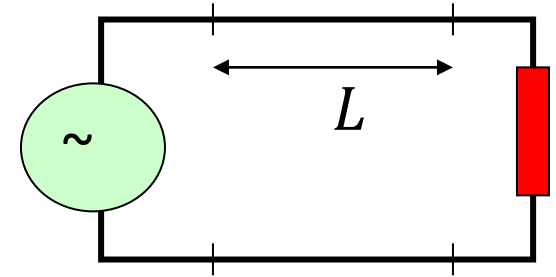


Linha de transmissão: definição

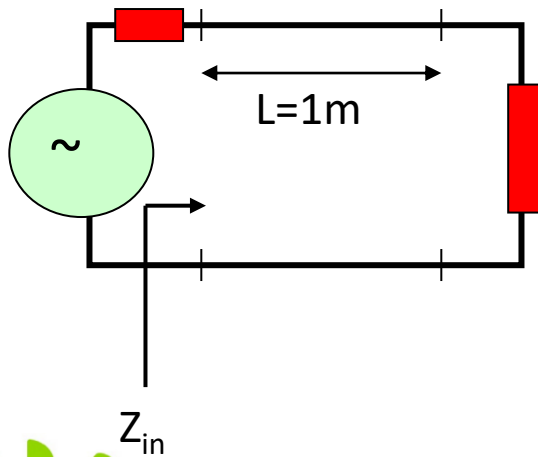
➤ Linha cujo comprimento físico (L) é da ordem de grandeza do comprimento de onda λ .

- Se $n = 1, c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, para $f = 50 \text{ Hz}$ temos $\lambda = 6 \times 10^6 \text{ m}$;
- Se $n = 1, c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, para $f = 1 \text{ GHz}$ temos $\lambda = 0.3 \text{ m}$;
- Se $n = 1, c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, para $f = 200 \text{ THz}$ temos $\lambda = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$;

$$\lambda = \frac{c}{nf}$$



➤ Com o aumento de f , λ diminui podendo tender para valores da ordem de grandeza do comprimento físico da linha (L) ou do circuito em análise, resultando em implicações em termos de análise;



Verifica-se uma variação da impedância de entrada da linha com a frequência!!

Frequência	0 Hz	1 kHz	100 kHz	1 MHz	100 MHz	300 MHz
$Z_{in}(\Omega)$	100	$99.9-j0.0031$	$99.87-j0.314$	$99.87-j3.14$	$30.77+j19.99$	100

Modelo da linha de transmissão

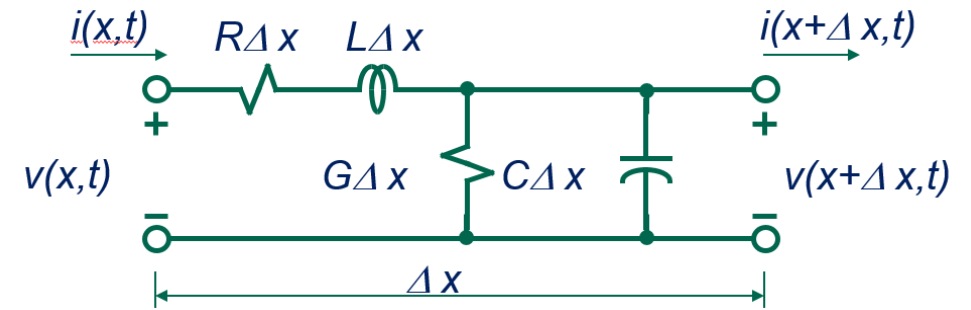
- Porque temos dois condutores separados por um dielétrico há um efeito capacitivo representado por uma capacidade C distribuída paralelo (F/m) relacionada com a permissividade do dielétrico;
- Aos condutores que transportam a corrente está associada uma indutância L série distribuída (H/m), devida ao campo magnético entre os condutores;
- Os condutores têm uma condutividade finita, pelo que possuem uma resistência R distribuída série (Ω /m), a qual causa as perdas ohmicas;
- Os condutores estão separados por um dielétrico que pode não ser ideal (condutividade não nula) ou seja pode haver condução entre ambos. Uma condutância distribuída G paralelo (S/m) justificará as perdas no dielétrico;
 - As grandezas L , C , R e G estão uniformemente distribuídas ao longo da linha e o seu valor depende da frequência e da geometria da própria LT.



Parâmetros distribuídos

➤ São 4 os parâmetros distribuídos:

- R (Ω/m) \rightarrow Resistência distribuída (em série)
 - Resistência dos condutores (ida/retorno): **Contribui para as perdas na linha**
- L (H/m) \rightarrow Indutância distribuída (em série)
 - Indutância devido ao fluxo magnético (entre e nos condutores)
- C (F/m) \rightarrow Capacidade distribuída (em paralelo)
 - Capacidade entre os condutores
- G (S/m) \rightarrow Condutância distribuída (paralelo)
 - Condutividade ou histerese no dielétrico: **Contribui para perdas na linha**

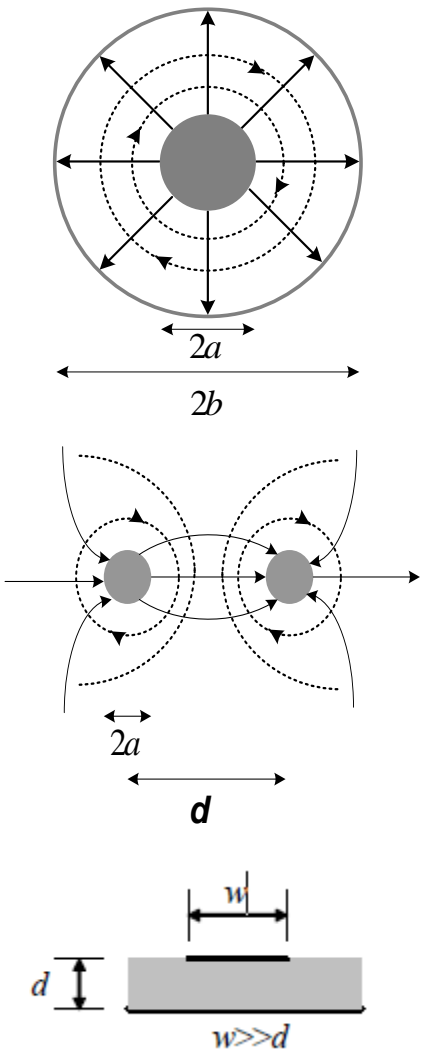


➤ Os parâmetros distribuídos dependem das características geométricas da linha:

- Forma, dimensões e distância entre condutores;
- Dielétrico: ϵ (permitividade: F/m) e μ (permeabilidade: H/m);



Parâmetros distribuídos: Linha bifilar, *microstrip* e cabo coaxial



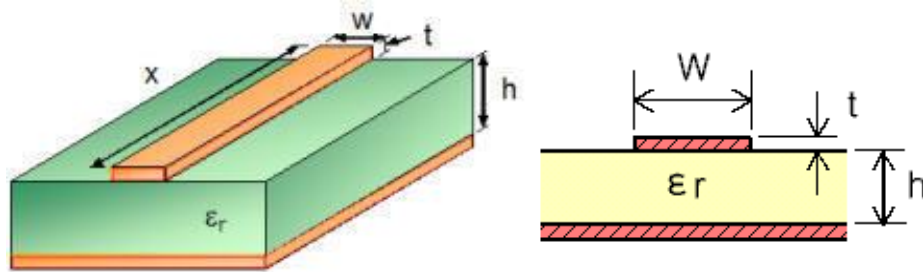
Parâmetro	Cabo coaxial	Linha bifilar	L. Microstrip
C [F/m]	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)}$	$\epsilon\frac{w}{d}$
L [H/m]	$\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{d}{a}\right)$	$\mu\frac{d}{w}$
R [Ω /m]	$\frac{R_s}{2\pi}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2}{w}R_s$
G [S/m]	$\omega C \operatorname{tg}\delta$	$\omega C \operatorname{tg}\delta$	$\sigma\frac{w}{d}$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}}$$



Linhas microstrip e coplanar waveguide

➤ Linha microstrip



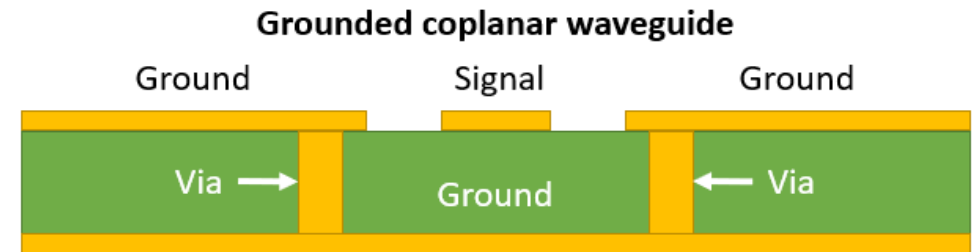
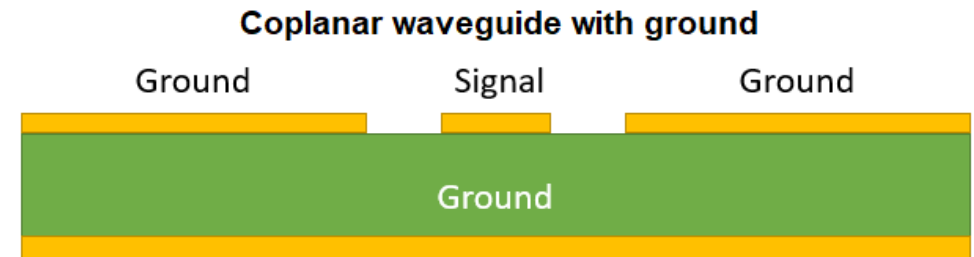
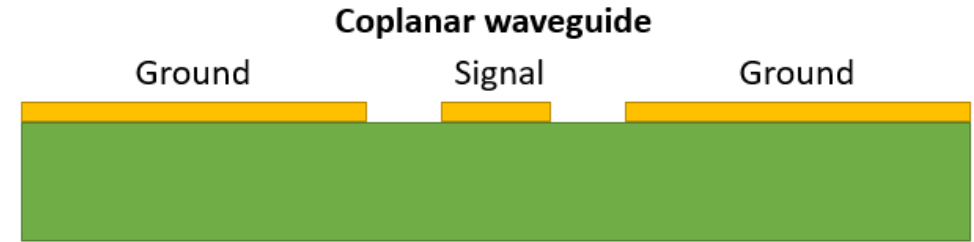
- W aumenta $\rightarrow C$ aumenta
- h aumenta $\rightarrow C$ diminui

➤ Dois problemas (dadas as características do substrato):

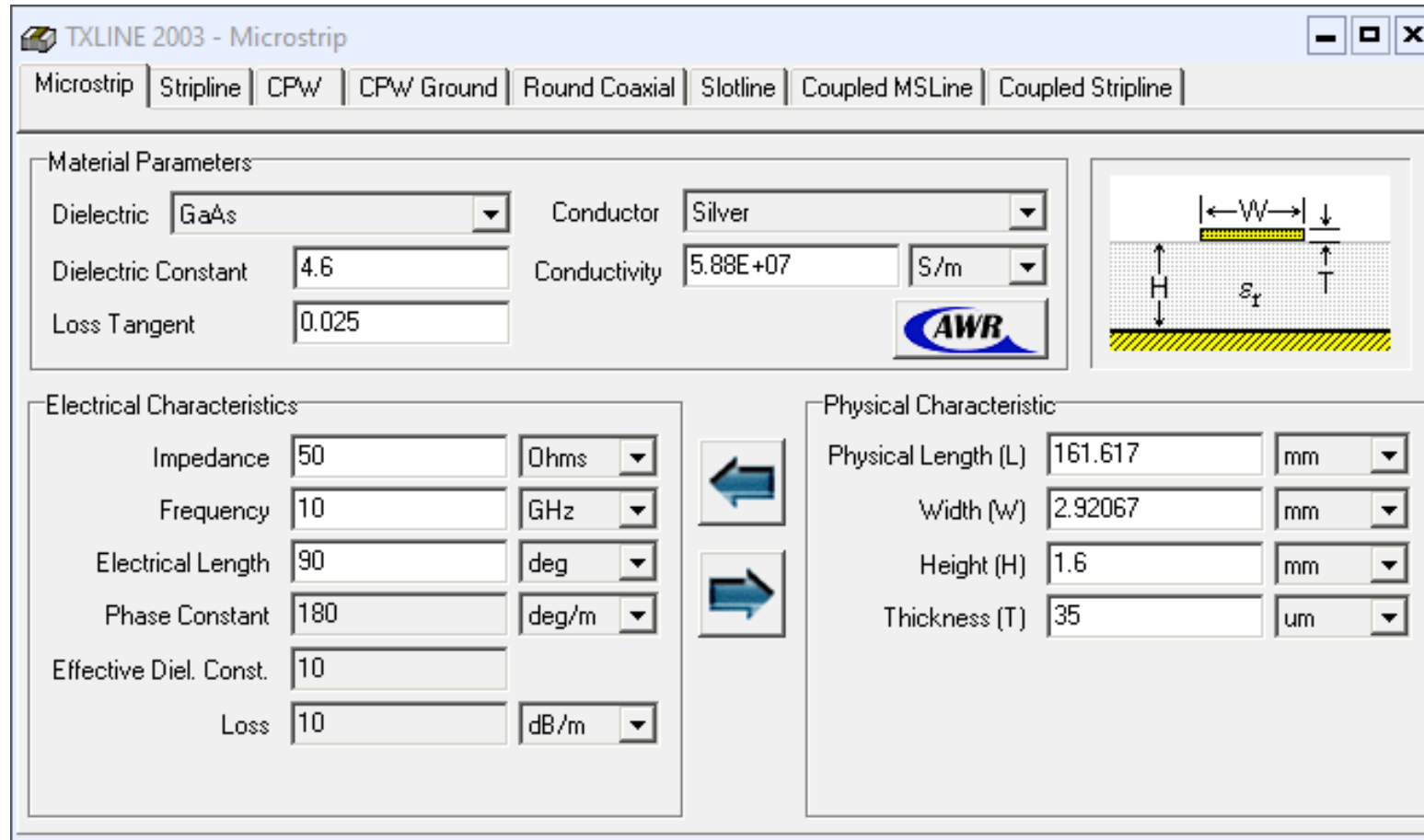
- **Análise:** Dá-se a largura da linha e pede-se Z_0 e ϵ_{eff}
- **Síntese:** Dá-se impedância característica pretendida e pede-se a largura da linha W

➤ <https://www.microwaves101.com/calculators>

➤ Coplanar waveguide - CPW



TXLine: a ferramenta grátis para dimensionar/ analisar linhas de transmissão

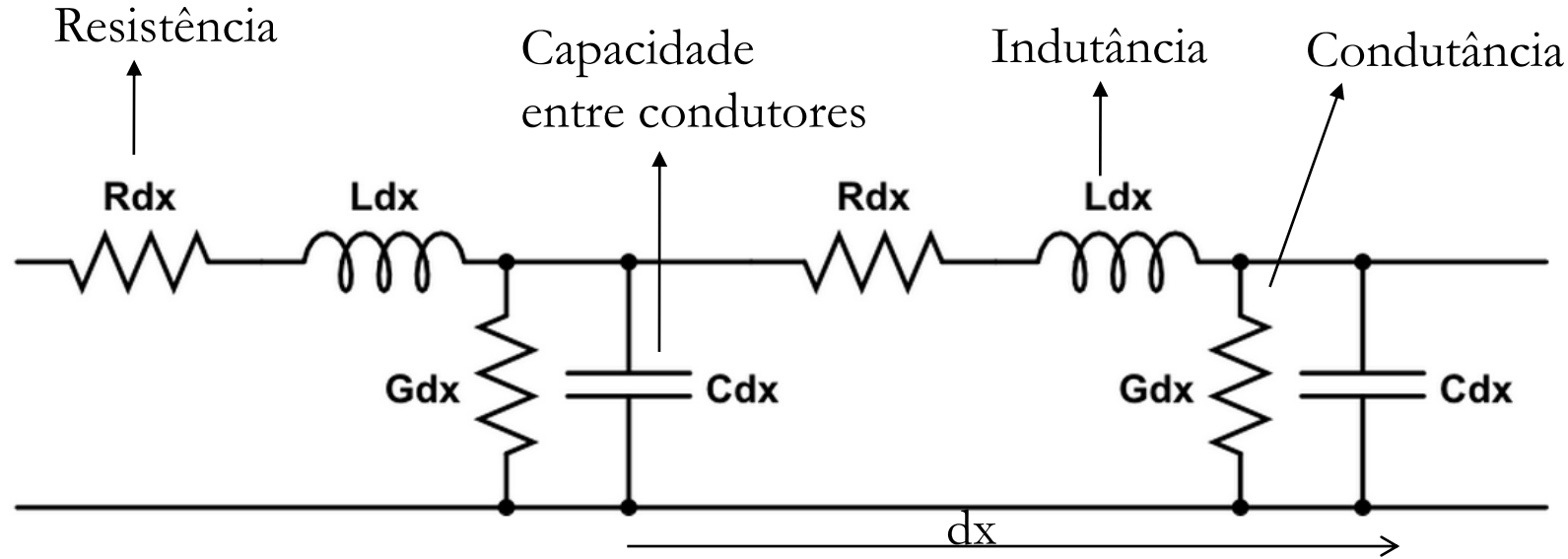


"TX-LINE software is a FREE and interactive transmission-line utility for the analysis and synthesis of transmission-line structures that can be used directly in Microwave Office for matching-circuit and other high-frequency designs."

https://www.cadence.com/en_US/home/tools/system-analysis/rf-microwave-design/awr-tx-line.html

Linha de transmissão: modelo de circuito

➤ Aplicando a lei de Kirchhoff, malhas e nós, ao modelo equivalente de uma LT, temos:



Lei das malhas

$$-v(x, t) + (Rdx)i(x, t) + (Ldx)\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + v[(x + dx), t] = 0$$

Lei dos nós

$$-i(x, t) + (Gdx)V(x + dx, t) + (Cdx)\frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial t} + i[(x + dx), t] = 0$$



Equações gerais da tensão e corrente numa LT

- Recorrendo aos conceitos de limite e derivada de uma função, omitindo a variável t e x (simplificação das equações) e combinando ambas obtém-se as equações seguintes:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - RGv = 0$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gv + C \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RGi = 0$$

- Solução das equações anteriores:

- O regime harmónico forçado sinusoidal é normalmente de grande interesse prático pois na maioria dos casos as linhas são usadas para transmitir sinais modulados com uma reduzida largura de banda em relação à frequência da portadora.

$$v(x, t) = V(x) \cos[\omega t + \varphi(x)] = \text{Re}(V(x)e^{j\omega t})$$

$$V(x) = V(x)e^{j\varphi(x)}$$

$$i(x, t) = I(x) \cos[\omega t + \varphi(x)] = \text{Re}(I(x)e^{j\omega t})$$

$$I(x) = I(x)e^{j\varphi(x)}$$



Solução para o regime forçado sinusoidal

- Assumindo então a linha excitada por uma tensão sinusoidal pode-se aplicar às equações da tensão e corrente o conceito de fasor, o que faz com que as mesmas possam ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + ZI = 0 \quad Z = R + j\omega L$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} + YV = 0 \quad Y = G + j\omega C$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - ZYV = 0$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - ZYI = 0$$

- Estas são equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes cuja solução é bem conhecida.

- As soluções das equações anteriores são: $V = V_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + V_2 e^{\sqrt{ZY}x}$ $I = \frac{V_1}{\sqrt{Z/Y}} e^{-\sqrt{ZY}x} - \frac{V_2}{\sqrt{Z/Y}} e^{\sqrt{ZY}x}$

$$V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$I = \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{V_2}{Z_0} e^{\gamma x}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY}$$

$$Z_0 = \sqrt{Z/Y} = |Z_0| e^{j\varphi_0}$$

γ é designada por constante de propagação (m^{-1})
 Z_0 é a impedância característica da linha (Ω);



Constante de propagação: γ (m^{-1})

➤ γ é um valor complexo, $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$ m^{-1}

- A raiz quadrada de um complexo tem duas soluções: aproveita-se a que tem parte real positiva;

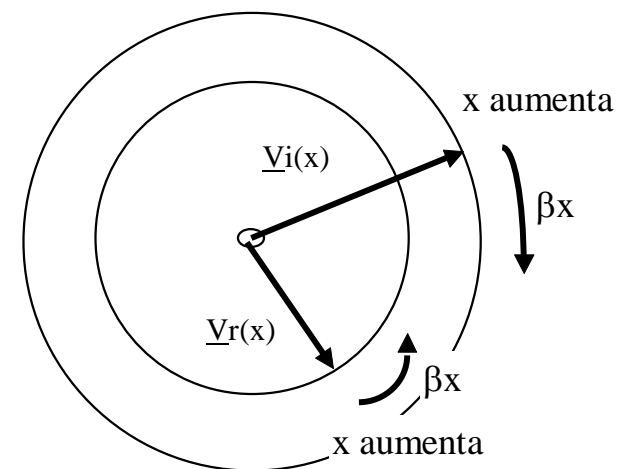
$$V(x) = \underbrace{V_1 e^{-(\alpha + j\beta)x}}_{V_i(x)} + \underbrace{V_2 e^{+(\alpha + j\beta)x}}_{V_r(x)}$$

➤ γ é a constante de propagação, formada por:

- $\alpha \rightarrow$ Constante de atenuação [Np/m]
 - 1 Neper de atenuação $V \rightarrow V/e$ ou $A_t = 20 * \log_{10}(e) = 8.686 \text{ dB}$
- $\beta \rightarrow$ constante de fase [rad/m]
 - $\lambda \rightarrow$ Comprimento de onda (m)
 - Mesmo significado físico na distância x que T (período) no tempo t .

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$1Np = 8.686dB$$

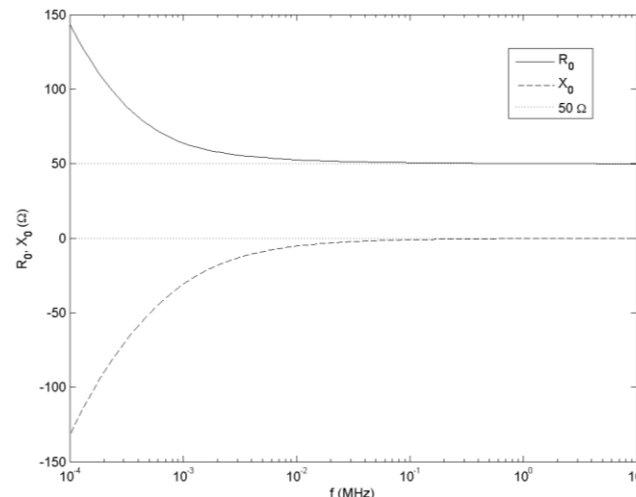


O conceito de impedância característica: $Z_0 (\Omega)$

➤ A Impedância característica Z_0 é uma relação entre:

- A tensão incidente e a corrente incidente;
- Ou o negativo da mesma relação para as correspondentes ondas refletidas;
- Não deve ser vista como uma impedância tradicional mas apenas que... não podemos definir independentemente a tensão e a corrente na linha de transmissão: o elo entre as duas é um escalar !!
- Matematicamente a fase de Z ou Y pode variar entre $[0^\circ \ 90^\circ]$;
 - Logo θ_0 teria fase entre $[-45^\circ \ 45^\circ]$ mas
 - A altas frequências Z_0 é praticamente real (θ_0 é negativo mas muito pequeno) e constante com a frequência
 - $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$;
 - $Z_0 = R_0 + jX_0 \cong R_0 (\Omega)$.

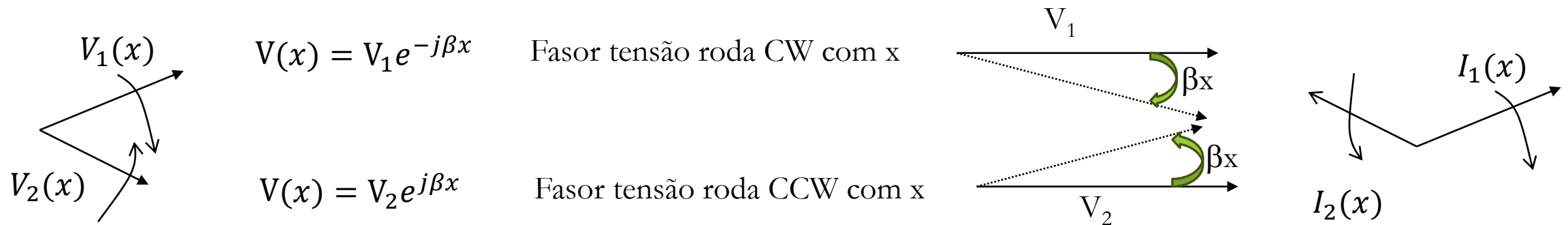
$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L \\ Y &= G + j\omega C \end{aligned} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_0 e^{j\theta_0}$$



Solução da equação de onda

➤ Tensão/corrente no regime forçado sinusoidal é:

- A soma de duas ondas progressivas (representadas por fasores rotativos com a distância x):
 - Uma – incidente – progride no sentido x^+ ➔ Fator roda no sentido dos ponteiros do relógio (CW);
 - Outra – refletida – progride no sentido x^- ➔ Fator roda no sentido contrário aos ponteiros do relógio (CCW);



- Linha com perdas ➔ Amplitude das ondas diminui exponencialmente no seu sentido de propagação;
 - Onda incidente diminui com x^+ ;
 - Onda refletida diminui com x^- ;

➤ Havendo um só gerador a alimentar a LT como será possível existirem duas ondas, propagando-se em sentidos contrários?

Equações de tensão e corrente em regime sinusoidal, no domínio do tempo

➤ Multiplicando a equação fasorial da tensão por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real do resultado obtemos o valor instantâneo da tensão:

$$\begin{aligned}v(x, t) &= R_e(V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}) e^{j\omega t} \\v(x, t) &= R_e(|V_1| e^{j\varphi_1} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + |V_2| e^{j\varphi_2} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)})\end{aligned}$$

$$v(x, t) = |V_1| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + |V_2| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

- Soma de duas tensões que na direção de x^+ :
- Incidente: Fasor roda CW e amplitude diminui exponencialmente;
- Refletida: Fasor roda CCW e amplitude aumenta exponencialmente;
- Tensão refletida comporta-se de forma similar à tensão incidente se airmos progredir no sentido x^- ;
 - A amplitude e a fase da tensão também diminui;

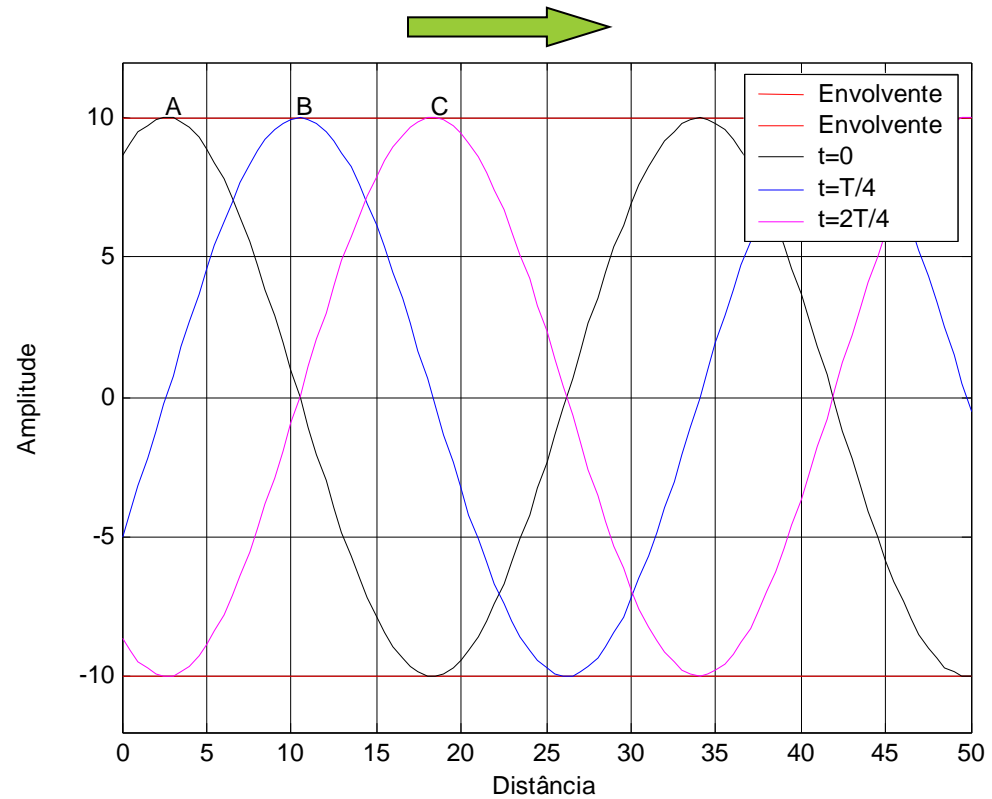
➤ De igual forma, a corrente na linha de transmissão é dada por:

$$i(x, t) = \frac{|V_1|}{|Z_0|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1 - \varphi_0) - \frac{|V_2|}{|Z_0|} e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2 - \varphi_0)$$

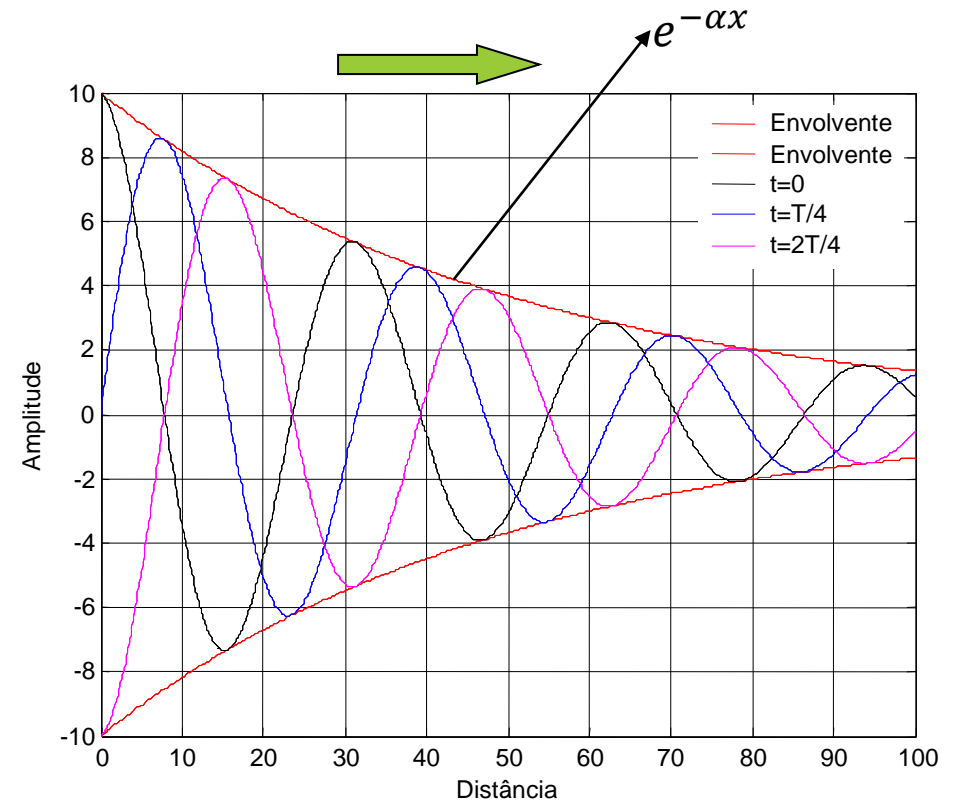


Onda incidente de tensão

➤ Ver script Waves.m



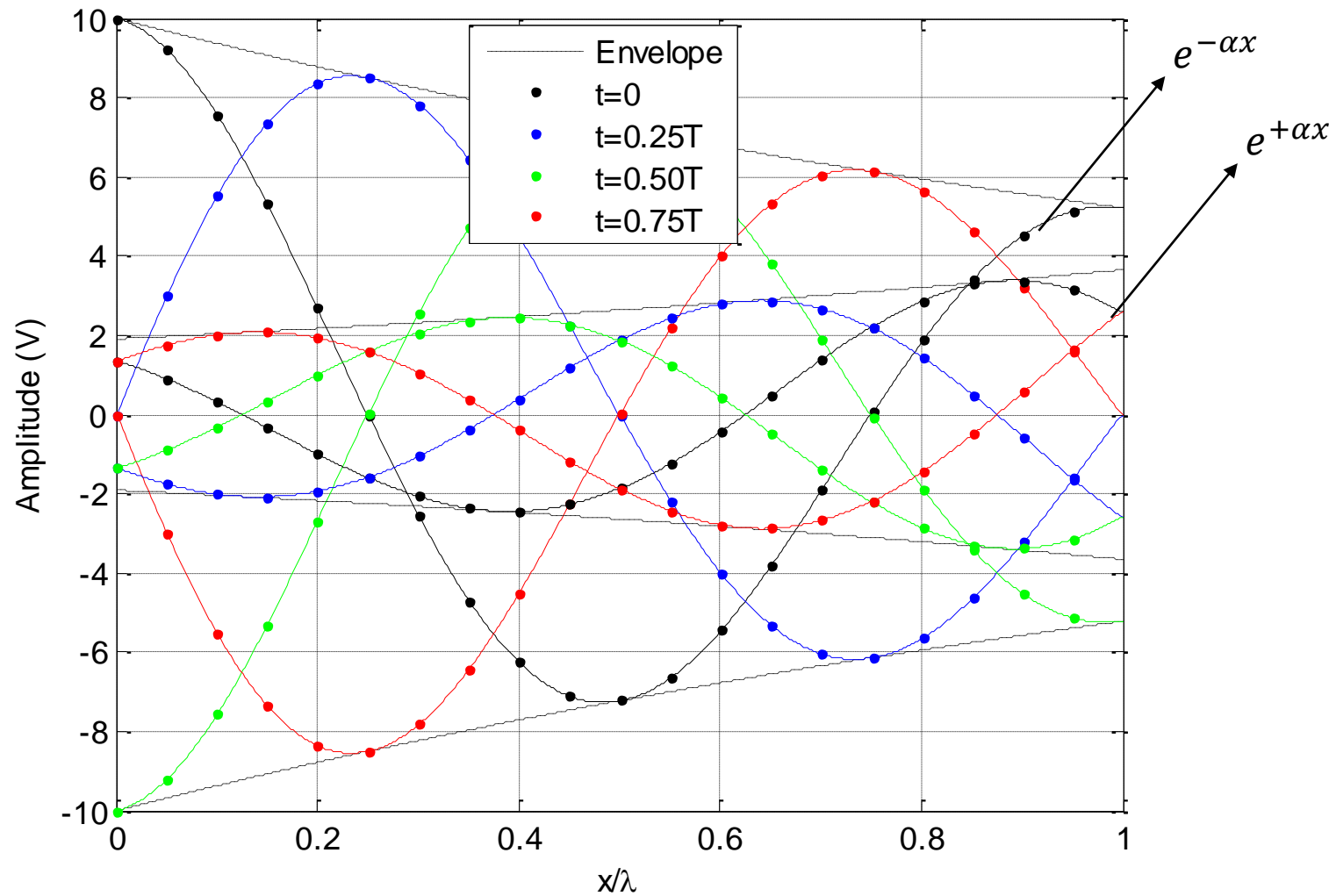
Linha sem perdas: onda incidente



Linha com perdas: onda incidente



Evolução temporal da tensão na LT



Tempo a decorrer: Preto \rightarrow Azul \rightarrow Verde \rightarrow Vermelho

Exercício

- Consider the following equation (function of x that is the distance to the generator plane) for the voltage in a lossless 50Ω characteristic impedance transmission line used at 300 MHz with dielectric air, $l = 10.5 \text{ m}$ long and with $V_1 = 4 \text{ V}$ and $V_2 = (\sqrt{3} + j1) \text{ V}$.
- a) Calculate γ and write the full phasor equation for the voltage in the transmission line. $\gamma = j2\pi \text{ rad/m}$
 - b) Write the phasor equation for the current $I(x)$.
 - c) Write both equations in the time domain as a function of x .
 - d) Calculate the voltage phasor and current phasor at the generator plane $V(x = 0)$ and $I(x = 0)$.
 - $V(x = 0) = 5.73 + 1j \text{ V}$; $I(x = 0) = 0.0454 - 0.02j \text{ A}$
 - e) Calculate the voltage phasor and current phasor at the load impedance plane $V(x = 10.5)$ and $I(x = 10.5)$ and also the load impedance Z_L .
 - $V(x = 10.5) = -5.73 - 1j \text{ V}$; $I(x = 10.5) = -0.0454 + 0.02j \text{ A}$; $Z_L = 97.7 + 65j \Omega$
 - f) Write the voltage equation as a function of d (note that $x + d = l$).
 - g) Write the current equation as a function of d .



Resolução:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f} \quad \begin{array}{l} \lambda = 1 \text{ (m)} \\ \beta = 2\pi \text{ (rad/m)} \end{array}$$

$$V(x) = 4e^{-j2\pi x} + (\sqrt{3} + j)e^{+j2\pi x} = 4e^{-j2\pi x} + 2e^{j\frac{\pi}{6}}e^{+j2\pi x} \text{ (V)} \quad V(d) = 4e^{-j2\pi(\ell-d)} + 2e^{j\frac{\pi}{6}}e^{+j2\pi(\ell-d)}$$

$$I(x) = \frac{V_1}{Z_o}e^{-\gamma x} - \frac{V_2}{Z_o}e^{+\gamma x} = 80e^{-j2\pi x} - 40e^{j\frac{\pi}{6}}e^{+j2\pi x} \text{ (mA)} \quad V(d) = 4e^{-j2\pi(\ell-d)} \left(1 + \frac{2e^{j\frac{\pi}{6}}}{4}e^{+j2\times 2\pi\ell}e^{-j2\times 2\pi d} \right)$$

$$v(x, t) = \Re(V(x)e^{j\omega t})$$

$$v(x, t) = 4 \cos(2\pi \times 300 \times 10^6 t - 2\pi x) + 2 \cos\left(2\pi \times 300 \times 10^6 t + 2\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (V)}$$

$$i(x, t) = \Re(I(x)e^{j\omega t})$$

$$i(x, t) = 80 \cos(2\pi \times 300 \times 10^6 t - 2\pi x) - 40 \cos\left(2\pi \times 300 \times 10^6 t + 2\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (mA)}$$

$$V(0) = 4e^{-j0} + (\sqrt{3} + j)e^{+j0} = (4 + \sqrt{3}) + j \text{ (V)} \quad V(x = 10.5) = 4e^{-j21\pi} + (\sqrt{3} + j)e^{+j21\pi} = -4 - 2e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ (V)}$$

$$I(0) = 80 - 40e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ (mA)} \quad I(x = 10.5) = 80e^{-j21\pi} - 40e^{j\frac{\pi}{6}}e^{+j21\pi} = -80 + 40e^{j\frac{\pi}{6}} \text{ (mA)}$$



Comportamento de uma LT em condições distintas

	Constante de atenuação α	Constante de fase β	Impedância característica	Velocidade de fase
Linha sem perdas ($R = G = 0$)	$\alpha = 0$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Condição de Heaviside ($R/L = G/C$)	$\alpha = \frac{R}{Z_0}$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Aproximação das altas frequências $\omega L \gg R$ $\omega C \gg G$	$\alpha = \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2}$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)} \sqrt{\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_d \epsilon_d}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1 + \frac{R}{j\omega L}}{1 + \frac{G}{j\omega C}}} \quad (\Omega)$$

$$\text{Factor de velocidade} = \frac{v_p}{c} \%$$

Constante de atenuação α em função da frequência

➤ Temos: $\alpha_{Total}(f) = \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2} = \frac{R(f)}{2Z_0} + \frac{G(f)Z_0}{2} = \alpha_R + \alpha_G$

- R que é proporcional a \sqrt{f}
- G que é proporcional a f

➤ A contribuição relativa de α_G para α_{Total} cresce

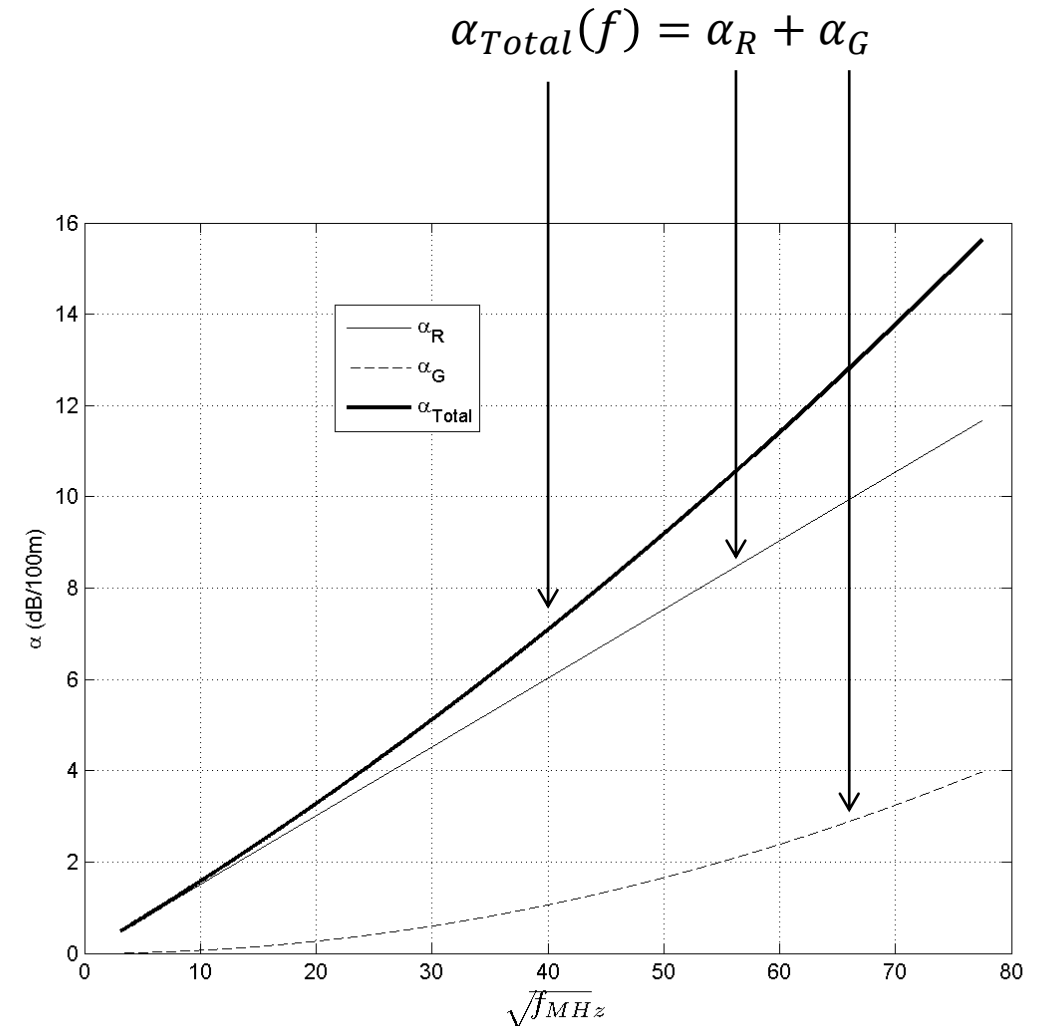
Cabo HJ4-50 Andrew

Attenuation, dB/100 ft (dB/100 m) Standard conditions:

30 MHz	0.442 (1.45)
100 MHz	0.821 (2.69)
450 MHz	1.82 (5.96)
1000 MHz	2.81 (9.23)
2000 MHz	4.17 (13.7)
6000 MHz	8.03 (26.3)
10000 MHz	11.1 (36.4)

Extrapolação:

$$0.442 \sqrt{10000/30} = 8.07 < 11.1$$



Coeficiente de reflexão de tensão ρ

➤ Havendo um só gerador a alimentar a LT como será possível existirem duas ondas, propagando-se em sentidos contrários?

- Só será possível se existirem reflexões na linha: reflexão no plano da carga Z_L da onda lançada pelo gerador;

➤ À razão entre os fasores de tensão refletida e incidente num ponto x da linha, designamos por: Coeficiente de reflexão em tensão:

$$\rho(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)}$$

- No plano da carga teremos: $\rho_L = \frac{V_2 e^{\gamma \ell}}{V_1 e^{-\gamma \ell}}$

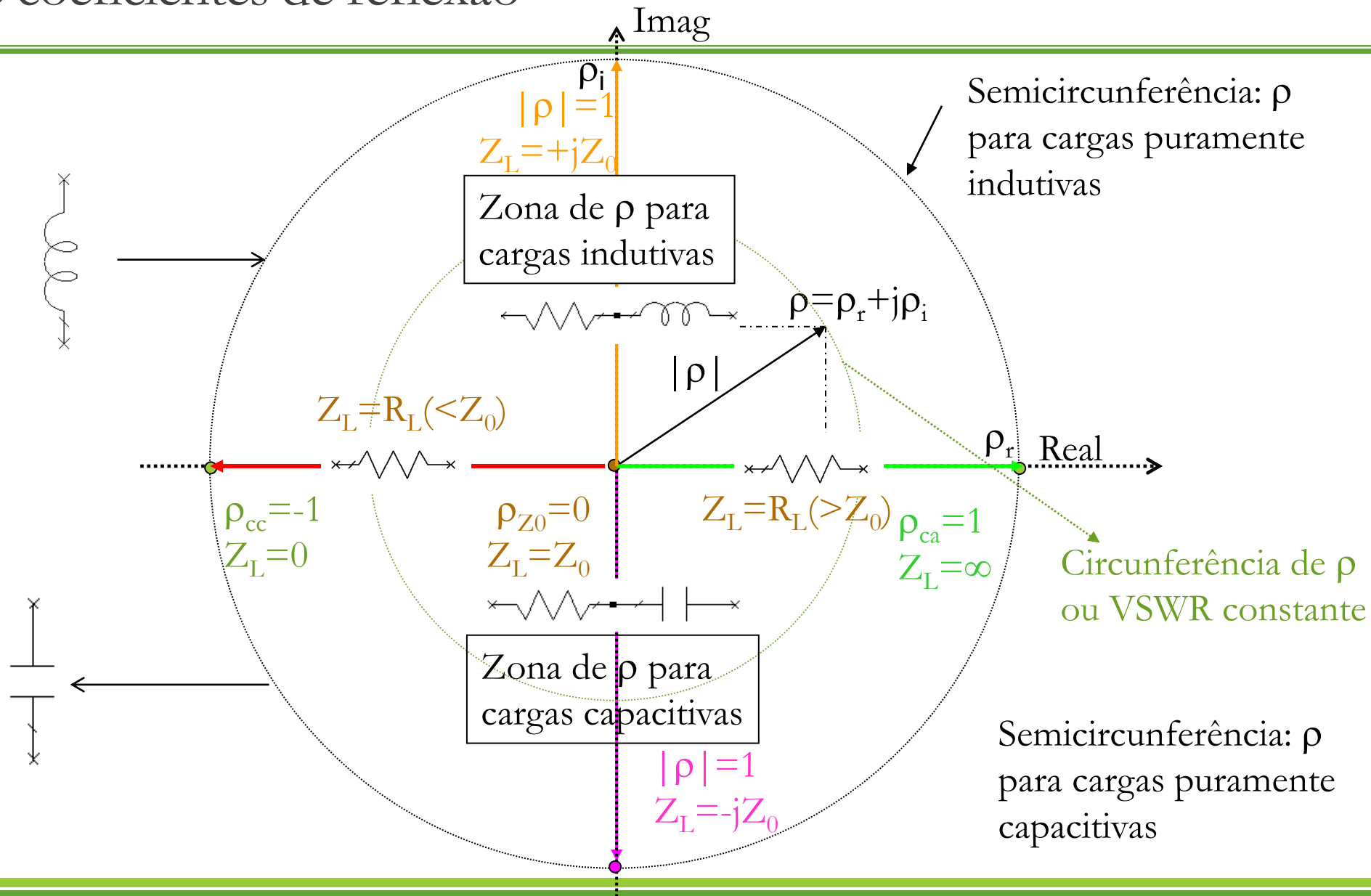
- Atendendo à definição anterior e à definição de impedância de carga podemos escrever:

$$Z_L = Z_0 \frac{V_1 e^{-\gamma \ell} + V_2 e^{\gamma \ell}}{V_1 e^{-\gamma \ell} - V_2 e^{\gamma \ell}} = Z_0 \frac{1 + V_2 e^{\gamma \ell} / V_1 e^{-\gamma \ell}}{1 - V_2 e^{\gamma \ell} / V_1 e^{-\gamma \ell}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L}$$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{+j\varphi_L}$$

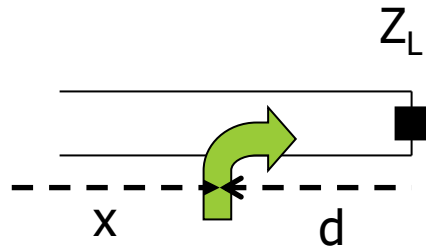


Círculo de coeficientes de reflexão



Coeficiente de reflexão da carga em função de d e de x

➤ Coeficiente de reflexão à distância d da carga:



$$\rho(d) = \frac{V_2 e^{+\gamma l} e^{-\gamma d}}{V_1 e^{-\gamma l} e^{+\gamma d}}$$

$$\rho(d) = \rho_L \frac{e^{-\gamma d}}{e^{+\gamma d}} \rightarrow \rho(d) = \rho_L e^{-2\gamma d} = \underbrace{|\rho_L| e^{-2\alpha d}}_{\text{Módulo}} e^{j(\underbrace{\varphi_L - 2\beta d}_{\text{Fase}})}$$

➤ Módulo do coeficiente de reflexão:

- Mantém-se constante, se a linha não tiver perdas ($\alpha = 0$) e diminui (d^+) se a linha tiver perdas ($\alpha > 0$);

➤ Fase do coeficiente de reflexão:

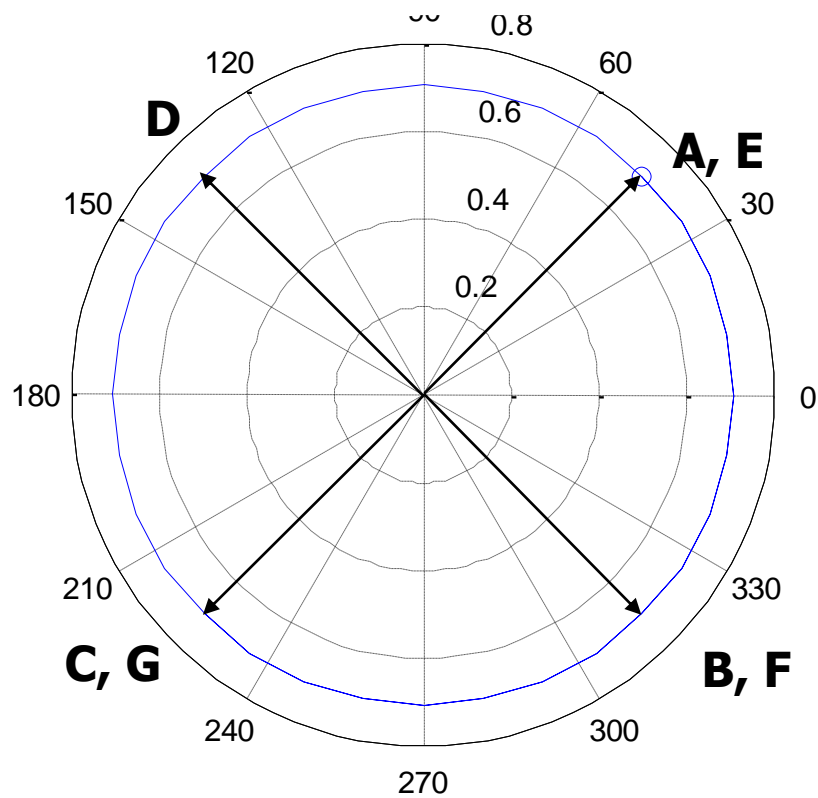
- Roda no sentido dos ponteiros do relógio, ou seja a fase diminui 360° por cada $\lambda/2$ (no sentido d^+).

➤ Coeficiente de reflexão à distância x do gerador:

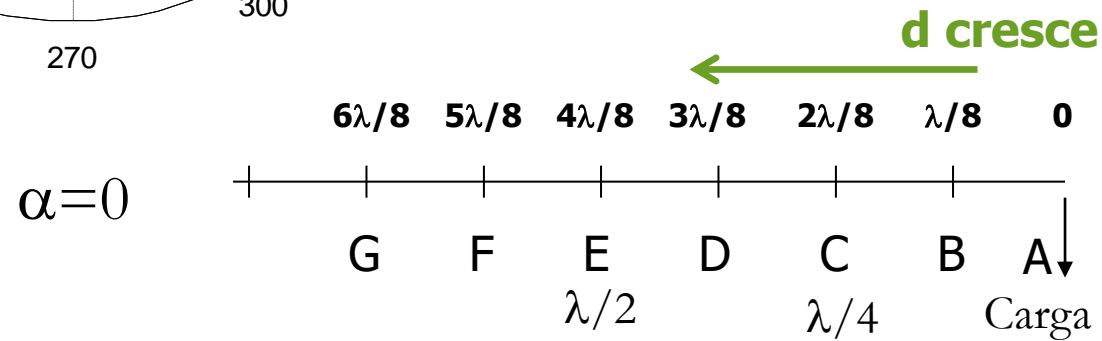
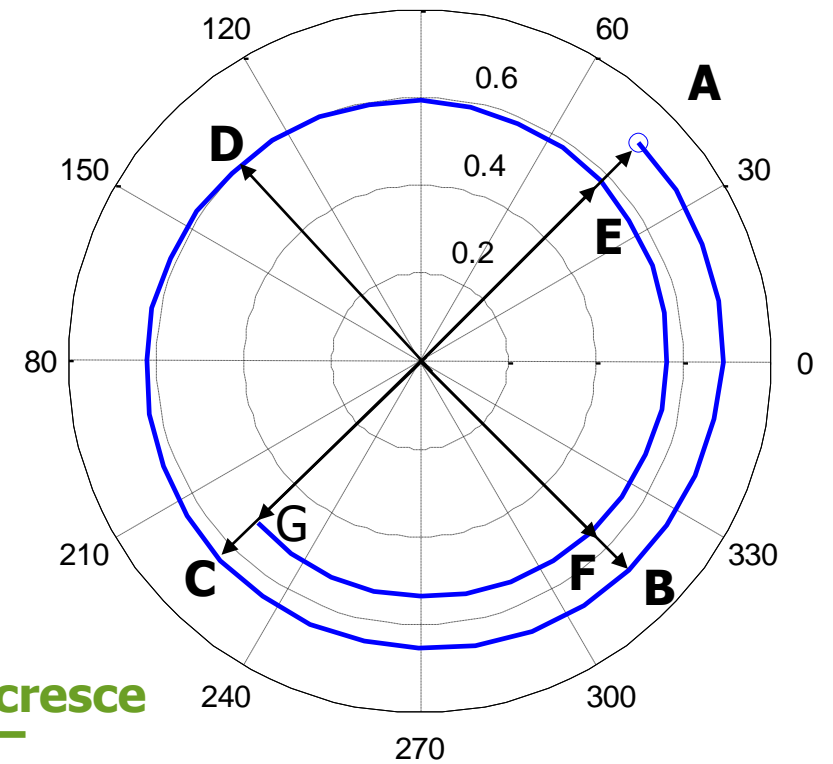
$$\rho(x) = \rho_L e^{-2\gamma l} e^{+2\gamma x}$$



Coeficiente de reflexão $\rho(d)$



$$\rho_L = 0.707e^{j\pi/4}$$



$\alpha>0$



$\rho(d)$ em diagrama polar: d é fixo mas β e α aumentam com a frequência

➤ Linha microstrip terminada em CC (d fixo)

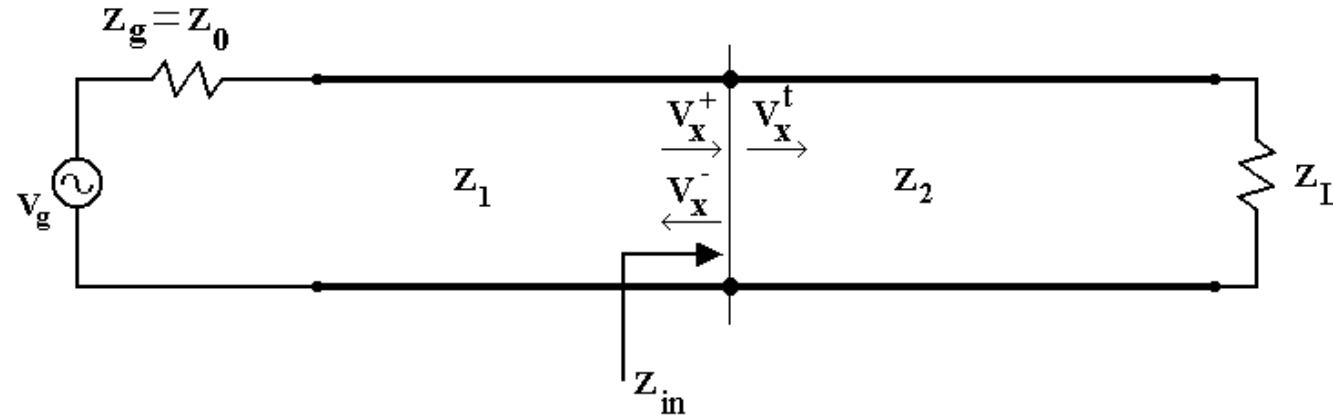
- Varrimento em frequência entre 10 MHz e 1300 MHz;
- Constante de atenuação e de fase aumentam com a frequência;



$$\rho(d) = \underbrace{|\rho_L|e^{-2\alpha d}}_{\text{Módulo}} e^{\underbrace{j\left(\varphi_L - \frac{4\pi d}{\lambda}\right)}_{\text{Fase}}}$$

Coeficiente de transmissão de tensão

- Útil para calcular a amplitude onda que se propaga “para diante” da interface entre duas linhas



- Uma vez que a tensão imediatamente à direita do plano de separação tem de ser igual à tensão imediatamente à esquerda então:

$$V^+(x) + V^-(x) = V^t(x)$$

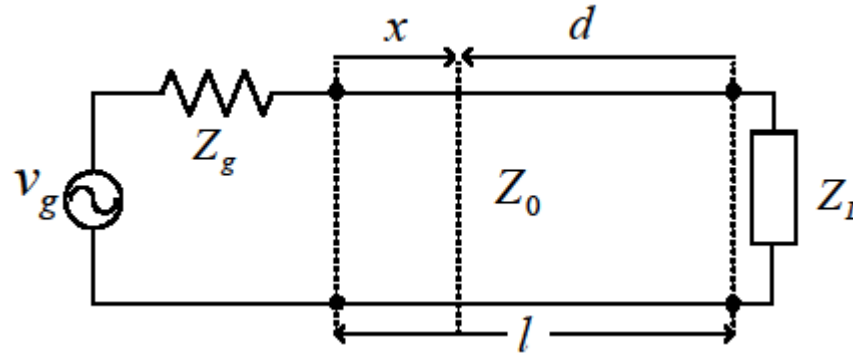
- No plano de separação das duas linhas pode-se definir um coeficiente de transmissão de tensão definido como:

$$\rho_t = \frac{V^t}{V^+}$$

$$\rho_t = \frac{V^+(x) + V^-(x)}{V^+(x)} = 1 + \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = 1 + \rho(x)$$



Equação generalizada da tensão e corrente na linha



$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x}$$

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} + V_1 \rho_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}$$

$$V(x) = V_1 e^{-\gamma x} (1 + \rho_L e^{-2\gamma(l-x)})$$

$$I(x) = I_1 e^{-\gamma x} - I_2 e^{\gamma x}$$

$$I(x) = I_1 e^{-\gamma x} (1 - \rho_L e^{-2\gamma(l-x)})$$

$$V(d) = V_1 e^{-\gamma(l-d)} (1 + \rho_L e^{-2\gamma d})$$

$$I(d) = \frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma(l-d)} [1 - \rho_L e^{-2\gamma d}]$$

➤ Qual a equação da tensão e corrente no circuito anterior dados V_g, Z_g, Z_0, Z_L e γ ?

- $V_1 = ?$ $V_2 = ?$

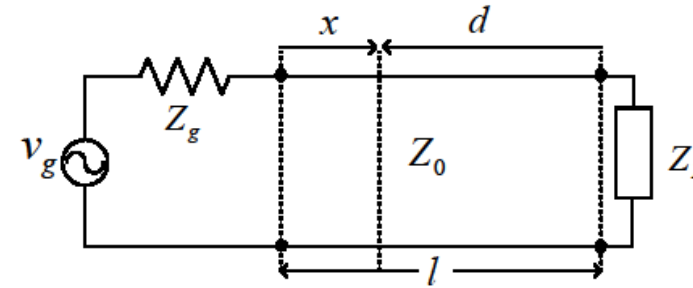


Equação generalizada da tensão e corrente na linha

➤ O gerador está adaptado à linha: $Z_g = Z_0$;

- $V_1 = V_p = V_g/2$;

➤ O gerador não está adaptado à linha: $Z_g \neq Z_0$



$$V_p = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g}$$

$\rightarrow V_p$	$\rightarrow V_p e^{-\gamma x}$	$\rightarrow V_p e^{-\gamma l}$
$V_p e^{-\gamma x} \rho_L e^{-\gamma x} \leftarrow$	$V_p e^{-\gamma x} \rho_L e^{-\gamma x} \leftarrow$	$V_p e^{-\gamma x} \rho_L \leftarrow$
$\rightarrow V_p e^{-2\gamma x} \rho_L \rho_g$	$\rightarrow V_p e^{-2\gamma x} \rho_L \rho_g e^{-\gamma x}$	$\rightarrow V_p e^{-2\gamma x} \rho_L \rho_g e^{-\gamma l}$
$V_p e^{-3\gamma x} \rho_g \rho_L^2 e^{-\gamma x} \leftarrow$	$V_p e^{-3\gamma x} \rho_g \rho_L^2 e^{-\gamma x} \leftarrow$	$V_p e^{-3\gamma x} \rho_g \rho_L^2 \leftarrow$
$\rightarrow V_p e^{-4\gamma x} \rho_L^2 \rho_g^2$	$\rightarrow V_p e^{-4\gamma x} \rho_L^2 \rho_g^2 e^{-\gamma x}$	$\rightarrow V_p e^{-4\gamma x} \rho_L^2 \rho_g^2 e^{-\gamma l}$
$V_p e^{-5\gamma x} \rho_g^2 \rho_L^3 e^{-\gamma x} \leftarrow$	$V_p e^{-5\gamma x} \rho_g^2 \rho_L^3 e^{-\gamma x} \leftarrow$	$V_p e^{-5\gamma x} \rho_g^2 \rho_L^3 \leftarrow$
$\rightarrow V_p e^{-6\gamma x} \rho_L^3 \rho_g^3$	$\rightarrow V_p e^{-6\gamma x} \rho_L^3 \rho_g^3 e^{-\gamma x}$	

$$V(x) = \sum_1^{\infty} V^+(x) + \sum_1^{\infty} V^-(x) \quad \boxed{r = e^{-2\gamma l} \rho_L \rho_g}$$

$$\sum_1^{\infty} V^+(x) = u_1 \frac{1}{1-r} = V_p e^{-\gamma x} \frac{1}{1 - e^{-2\gamma l} \rho_L \rho_g}$$

$$\sum_1^{\infty} V^-(x) = u_1 \frac{1}{1-r} = V_p e^{-2\gamma l} \rho_L e^{\gamma x} \frac{1}{1 - e^{-2\gamma l} \rho_L \rho_g}$$

Equação generalizada da tensão e corrente na linha

➤ Assim, em regime estacionário, a tensão em função de x é dada por:

$$V(x) = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{1}{1 - \rho_L \rho_g e^{-2\gamma \ell}} (e^{-\gamma x} + \rho_L e^{-2\gamma \ell} e^{\gamma x})$$

$$V_1 = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{1}{1 - \rho_L \rho_g e^{-2\gamma \ell}}$$

$$V_2 = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{\rho_L e^{-2\gamma \ell}}{1 - \rho_L \rho_g e^{-2\gamma \ell}}$$



Exercício

➤ Considere uma linha de 50Ω com dielétrico ar e comprimento 10 m atacada por um gerador de impedância interna 50Ω , amplitude 2 V e frequência 300 MHz . Sabendo que a impedância de carga é $50 + j50\Omega$:

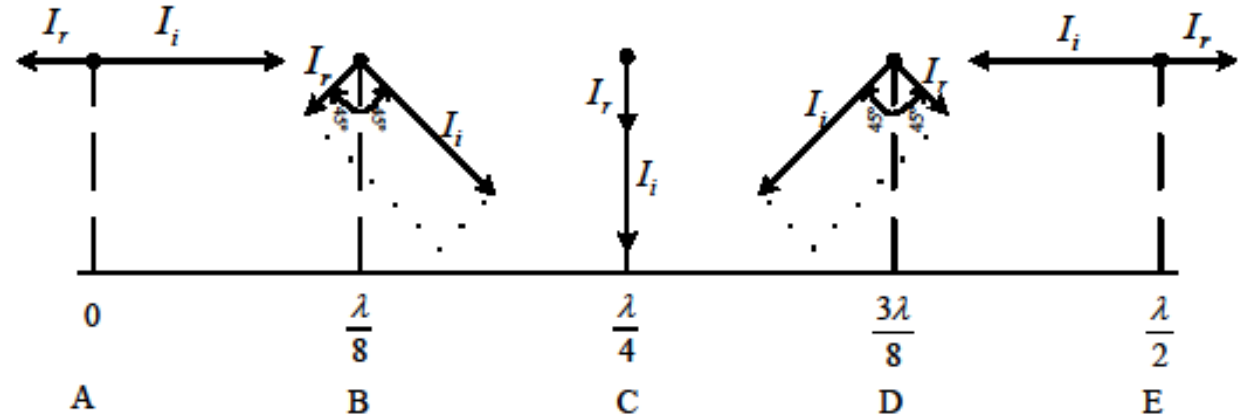
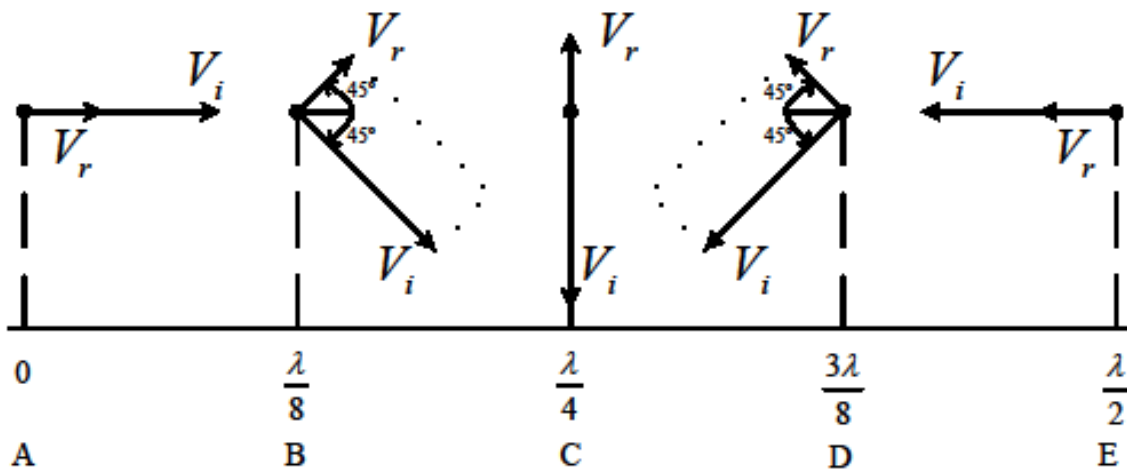
- A equação dos fasores de tensão $V(x)$ e corrente $I(x)$ na linha;
- A equação dos fasores de tensão $V(d)$ e corrente $I(d)$ na linha;
- A equação da tensão e da corrente no domínio do tempo.

$$\begin{aligned} V(d) &= e^{+j2\pi d} + 0.45e^{j(1.107-2\pi d)} \quad \text{V} \\ I(d) &= 20e^{+j2\pi d} - 8.94e^{j(1.107-2\pi d)} \quad \text{mA} \end{aligned}$$



Interferência entre ondas progressivas – Onda estacionária

- Sempre que numa linha existam duas ondas de frequência igual mas propagando-se em sentidos opostos, cria-se um fenómeno de interferência conhecido por onda estacionária;
- A amplitude da tensão e da corrente não é constante ao longo da linha e em determinados locais fixos (daí o nome de “estacionária”) ocorrem os denominados extremos: ou seja valores máximos e valores mínimos de tensão ou de corrente;



$$V(x) = 2e^{-j\beta x} + 1e^{j\beta x}$$



Interferência das duas ondas: onda estacionária

➤ Porquê “onda estacionária”?

- A amplitude da tensão (corrente) “ondula” ao longo da linha mas o padrão criado não se move (estacionário);

➤ As distâncias entre:

- Dois máximos (ou mínimos) consecutivos é $\lambda/2$;
- Máximo (mínimo) e mínimo (máximo) adjacentes é $\lambda/4$;

➤ Para a corrente $I(x)$

- Máximos de corrente coincidem com os mínimos de tensão e vice-versa

➤ Outras conclusões:

- Nos pontos de máximo e mínimo a tensão e a corrente na linha estão em fase;
- A fase entre a tensão (corrente) num extremo (máximo ou mínimo) e no extremo mais próximo da mesma natureza é 180° ;
- A fase entre a tensão (corrente) num extremo (máximo ou mínimo) e o extremo de natureza oposta (mínimo ou máximo) é de $\pm 90^\circ$ (estão em quadratura);



Envolvente da onda estacionária em linhas sem perdas

- A equação da tensão em função de d , pode ser simplificada, sem perda de generalidade no respeitante a análise da interferência, se fizermos $Z_g = Z_0$ e $\alpha = 0$.

$$V(d) = V_1 e^{-\gamma(1-d)} (1 + \rho_L e^{-2\gamma d}) \qquad V(d) = \frac{V_g}{2} e^{-j\beta(1-d)} (1 + \rho_L e^{-j2\beta d})$$

$$\begin{aligned} |V(d)| &= \frac{|V_g|}{2} |1 + |\rho_L| e^{j(\phi_L - 2\beta d)}| \\ |V(d)| &= \frac{|V_g|}{2} \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(\phi_L - 2\beta d)} \end{aligned}$$

- Dois casos interessantes são o da carga adaptada ($Z_L = Z_0$) para o qual a amplitude da tensão na linha é constante e igual a $|V_g|/2$ e o caso de $|\rho_L| = 1$ (CC ou CA) em que a amplitude da tensão variará entre 0 e $|V_g|$;



Localização e amplitude dos extremos de tensão e corrente

➤ A tensão na linha será máxima (e a corrente mínima) quando se verificar a condição:

$$\phi_L - 2\beta d_{max} = -2n\pi$$

$$d_{max} = \frac{\phi_L}{2\beta} + n\frac{\lambda}{2}$$

➤ A amplitude da tensão (máxima) é dada por:

$$|V(d)|_{max} \frac{|V_g|}{2} (1 + |\rho_L|)$$

➤ A amplitude da corrente (mínima) é dada por:

$$|I(d)|_{min} \frac{|V_g|}{2Z_0} (1 - |\rho_L|)$$

➤ A tensão na linha será mínima (e a corrente máxima) quando se verificar a condição:

$$\phi_L - 2\beta d_{min} = -(2n - 1)\pi$$

$$d_{min} = \frac{\phi_L}{2\beta} + (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$$

➤ A amplitude da tensão (mínima) é dada por:

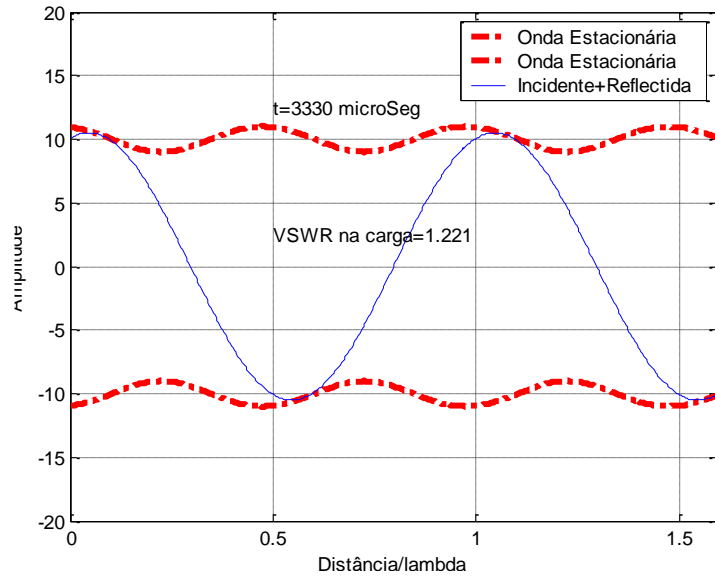
$$|V(d)|_{min} \frac{|V_g|}{2} (1 - |\rho_L|)$$

➤ A amplitude da corrente (máxima) é dada por:

$$|I(d)|_{max} \frac{|V_g|}{2Z_0} (1 + |\rho_L|)$$

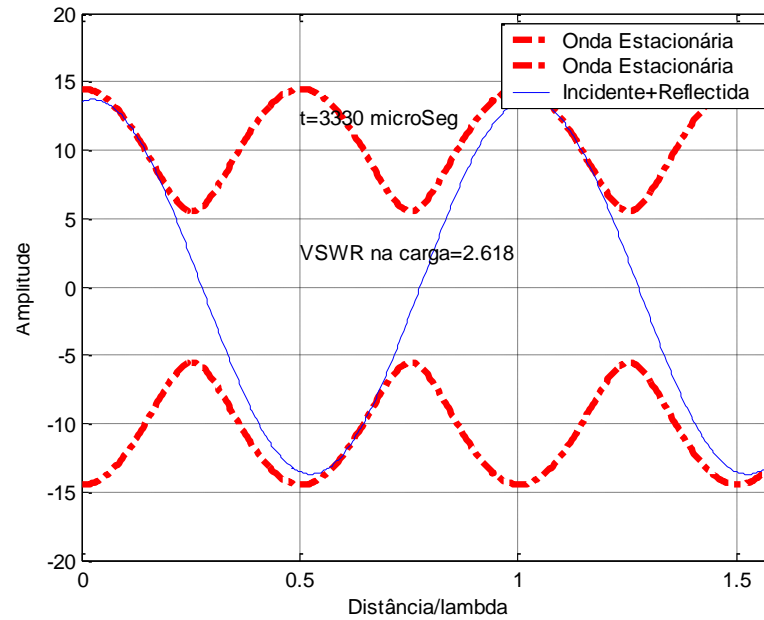


Onda estacionária: exemplos

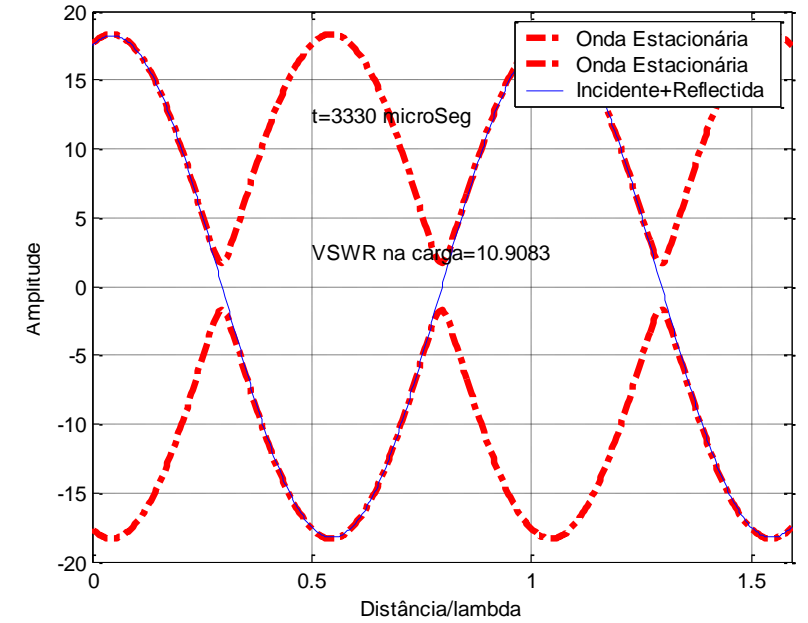


$$|\rho| = 0.18$$

$V_{in} = 10V$ e linha sem perdas ($\alpha = 0$)



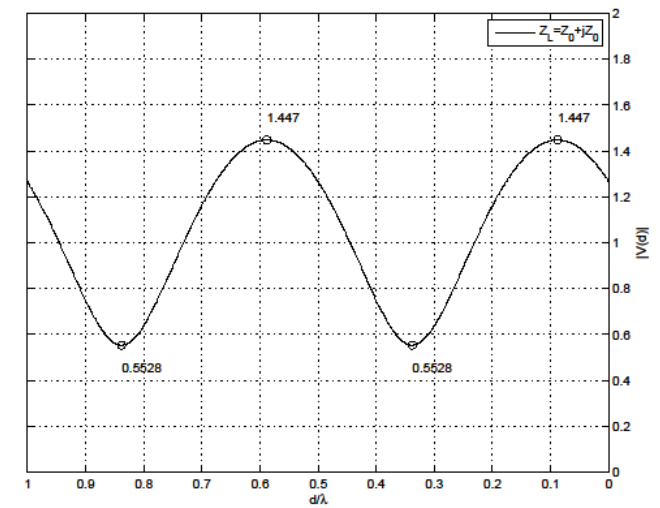
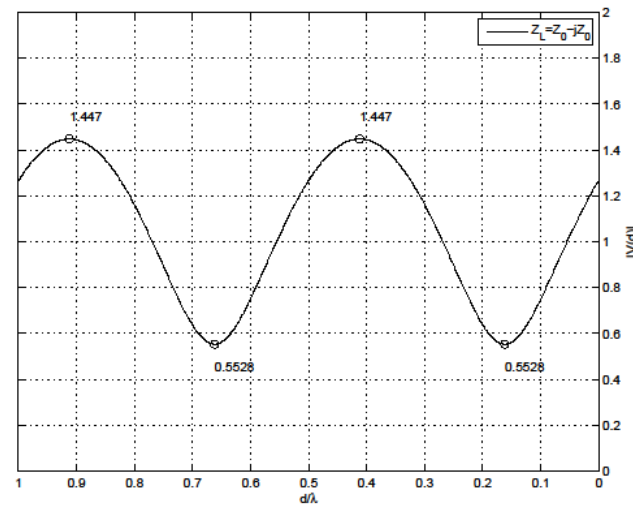
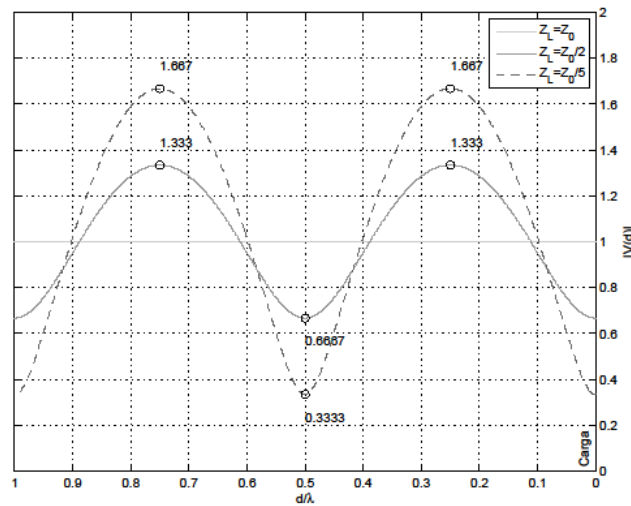
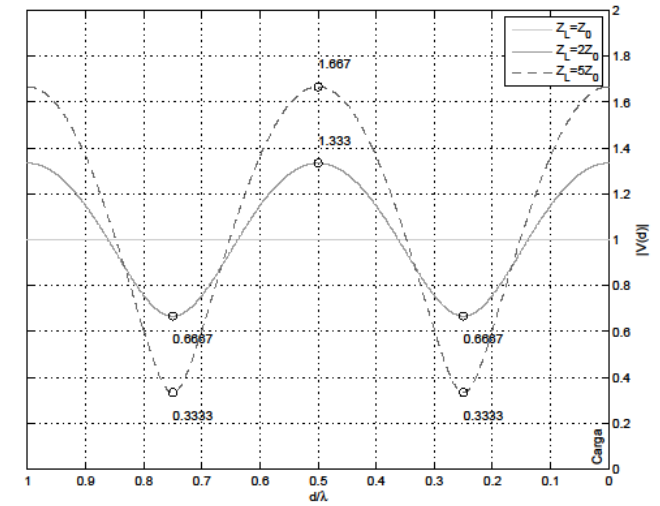
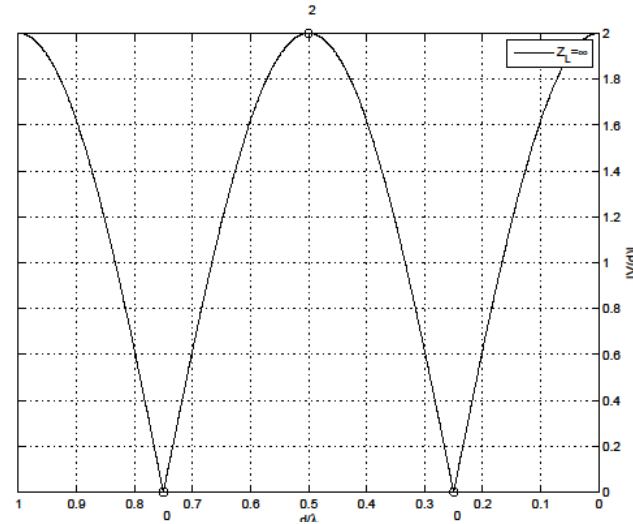
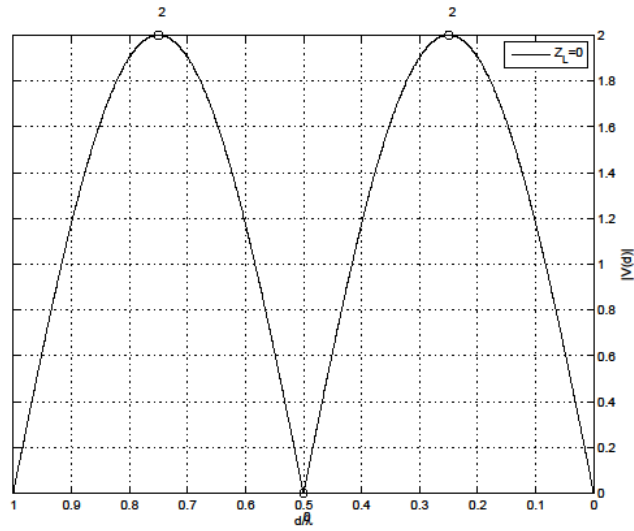
$$|\rho| = 0.48$$



$$|\rho| = 0.83$$



Exemplos de envoltentes de onda estacionária



Coeficiente de onda estacionária VSWR (*Voltage Standing Wave Ratio*)

➤ Define-se como razão de onda estacionária a relação entre a amplitude máxima e a mínima da tensão na linha (igual à relação entre a amplitude máxima e mínima da corrente);

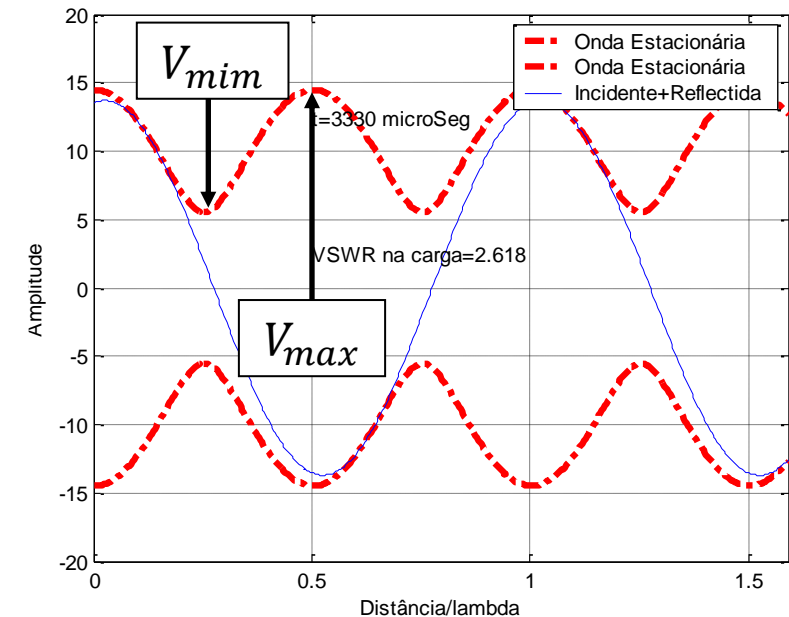
$$VSWR = \frac{|V(d)|_{Max}}{|V(d)|_{min}}$$

$$VSWR = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

➤ O VSWR varia na gama $[1; +\infty[$;

➤ Com potências elevadas e VSWR elevado nos pontos de:

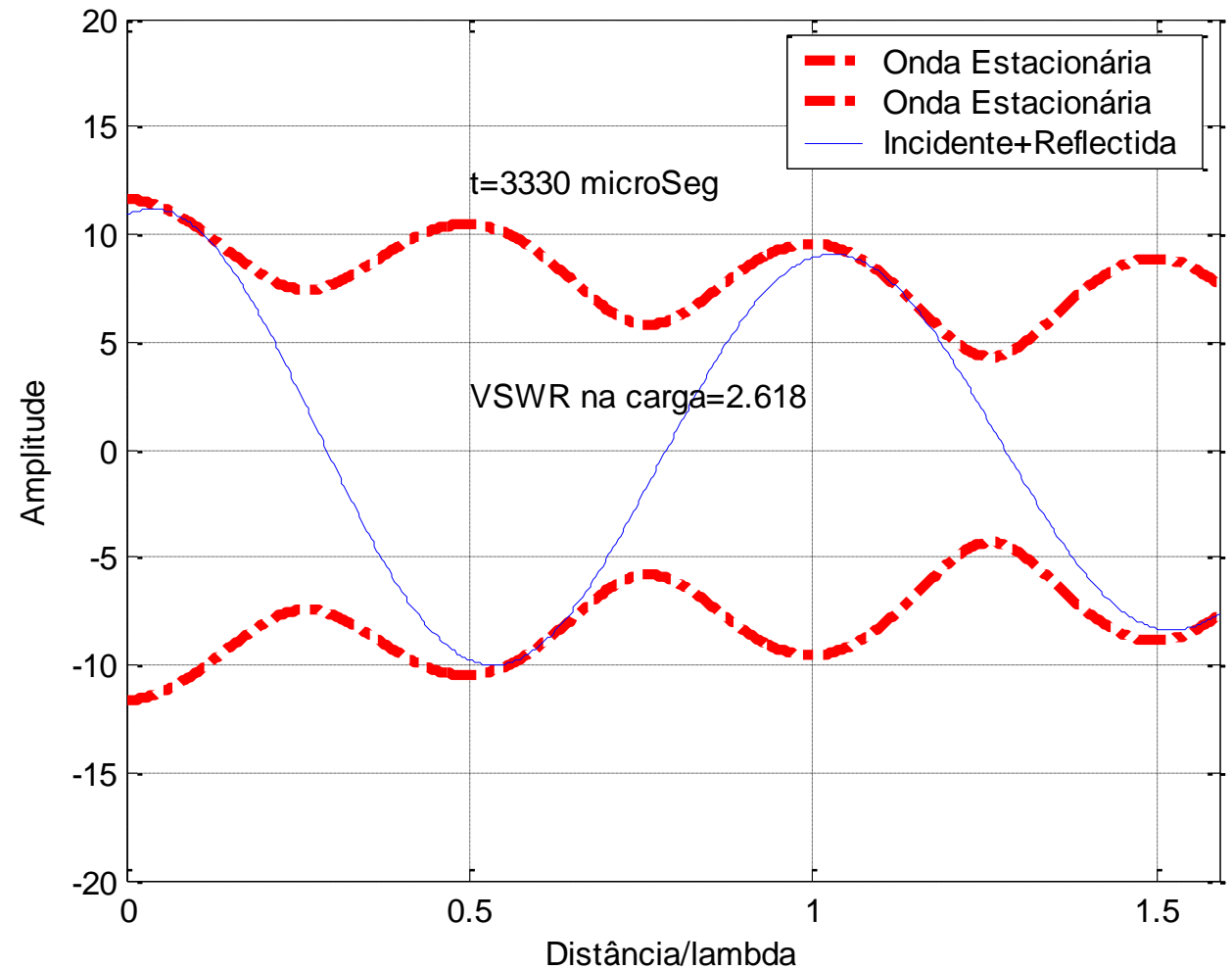
- Máximo de corrente → sobreaquecimento pode danificar a linha (condutor interior mais crítico)
- Máximo de tensão → Sobretensão que pode causar arco elétrico entre condutores



VSWR numa linha com perdas $\alpha > 0$

$$VSWR = \frac{1 + |\rho_L|e^{-2\alpha d}}{1 - |\rho_L|e^{-2\alpha d}}$$

Fórmula útil em trabalhos de laboratório:
Medição da constante atenuação de linhas
de transmissão: Linha de comprimento
conhecido d termina-se em CC ou CA e
mede-se o VSWR ou ρ à entrada.



Exercício

➤ Considere uma linha de 50Ω com dielétrico ar e comprimento 10 m atacada por um gerador de impedância interna 50Ω , amplitude 2 V e frequência 300 MHz . Sabendo que a impedância de carga é $50 + j50\Omega$:

- Calcule o coeficiente de reflexão, o VSWR, o comprimento de onda, a constante de fase e a amplitude da onda incidente;
- $\rho_L = 0.4472e^{j1.107}$, $VSWR = 2.62$, $\lambda = 1\text{ m}$, $\beta = 2\pi\text{ rad/m}$, $V_i = 1\text{ V}$
- A equação dos fasores tensão $V(d)$ e corrente $I(d)$ na linha.

$$\begin{aligned} V(d) &= e^{+j2\pi d} + 0.45e^{j(1.107-2\pi d)} \quad \text{V} \\ I(d) &= 20e^{+j2\pi d} - 8.94e^{j(1.107-2\pi d)} \quad \text{mA} \end{aligned}$$

- A localização do máximo e mínimo de tensão mais próximos da carga.
- $d_{max} = 0.0881\text{ m}$; $d_{min} = 0.3381\text{ m}$
- A amplitude da tensão e corrente num máximo e num mínimo de tensão.
- $V_{max} = 1.447\text{ V}$; $V_{min} = 0.553\text{ V}$; $I_{max} = 28.94\text{ mA}$; $I_{min} = 11.06\text{ mA}$



Impedância ao longo de uma linha

$$\begin{aligned} Z(d) &= Z_0 \frac{e^{\gamma d} + \rho_L e^{-\gamma d}}{e^{\gamma d} - \rho_L e^{-\gamma d}} = Z_0 \frac{e^{\gamma d} + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-\gamma d}}{e^{\gamma d} - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-\gamma d}} = Z_0 \frac{Z_L(e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}) + Z_0(e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})}{Z_0(e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}) + Z_L(e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})} \\ &= Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \frac{(e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})}{(e^{\gamma d} + e^{-\gamma d})}}{Z_0 + Z_L \frac{(e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})}{(e^{\gamma d} + e^{-\gamma d})}} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma d)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma d)} \end{aligned}$$

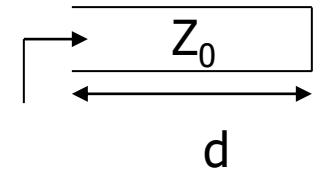
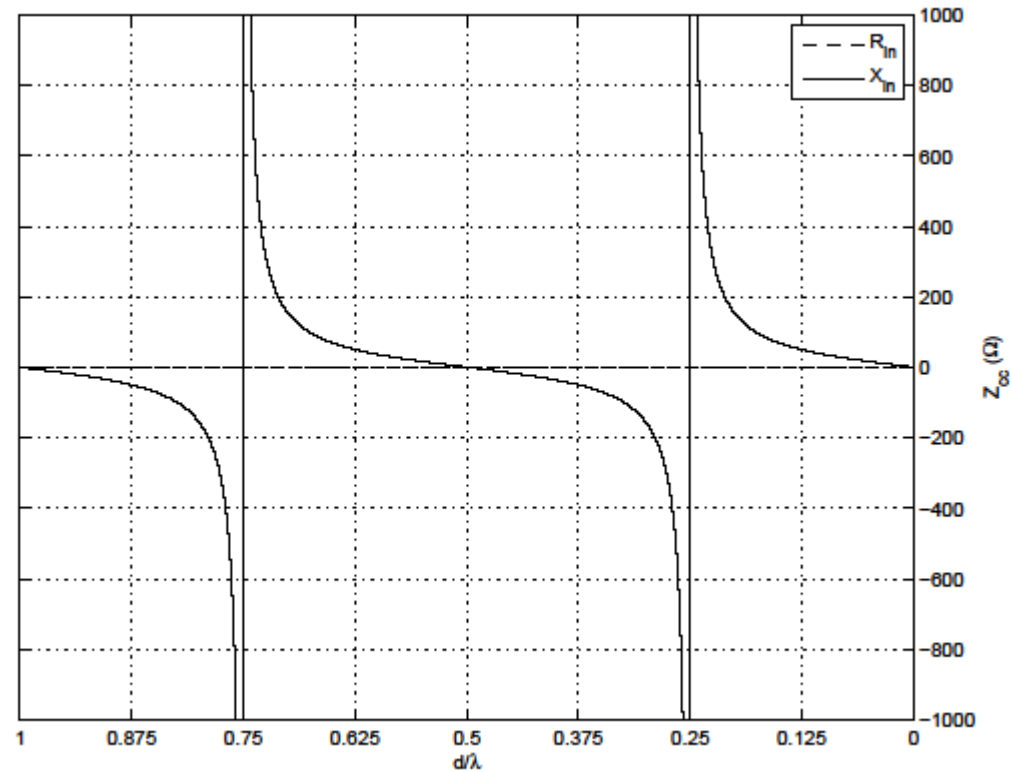
➤ Se $\alpha = 0$ (linha sem perdas) a $\tanh()$ degenera na tangente trigonométrica

$$Z(d) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta d)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta d)}$$



Impedância ao longo de uma linha terminada em CC

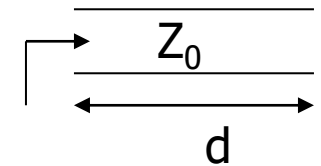
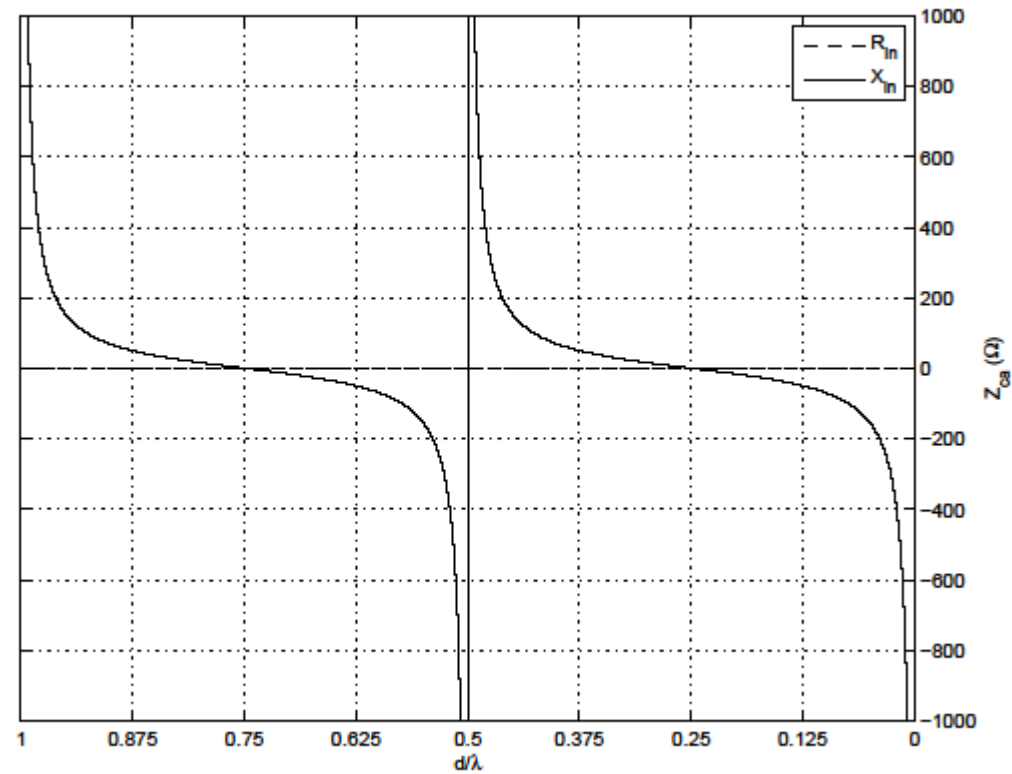
- A impedância é dada por: $Z_{cc} = jZ_0 \tan(\beta\ell)$
 - Podemos observar não apenas a mudança de natureza da carga, como a sua periodicidade com $\lambda/2$;



Impedância ao longo de uma linha terminada em CA

➤ A impedância é dada por: $Z_{ca} = -jZ_0 \cot(\beta\ell)$

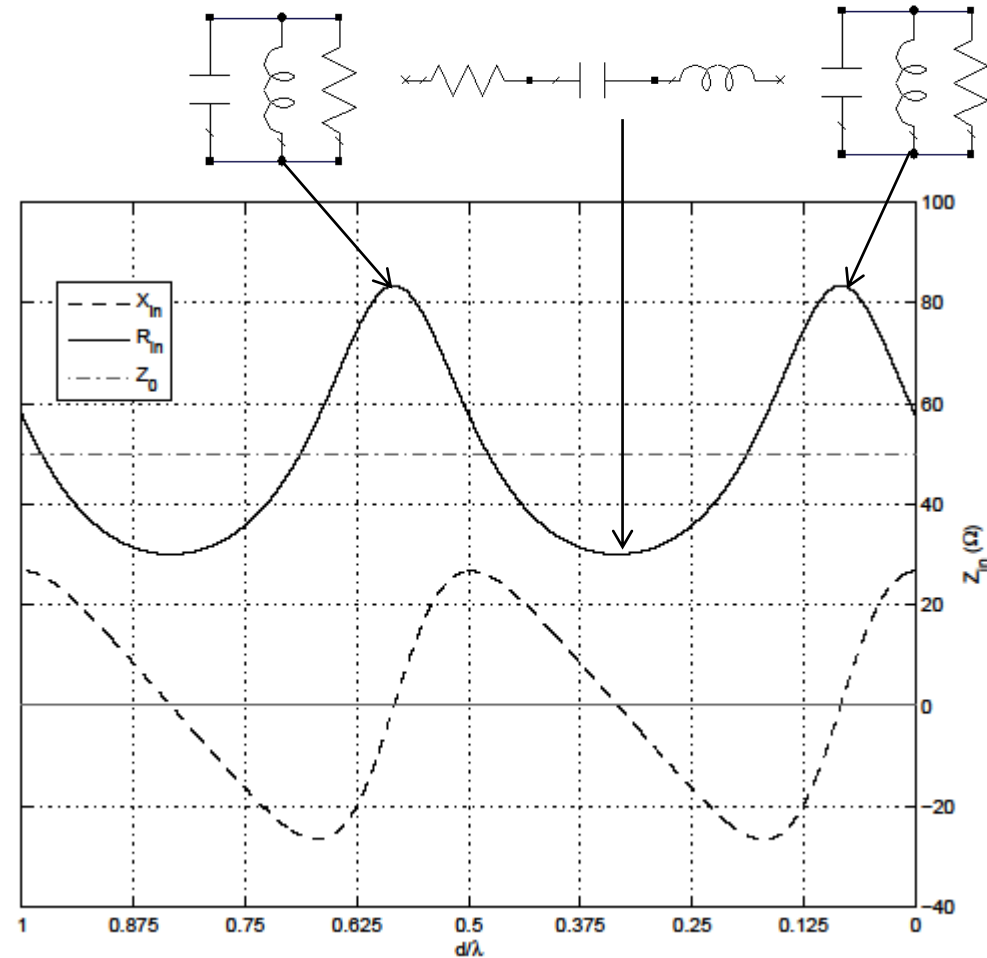
- Podemos observar não apenas a mudança de natureza da carga, como a sua periodicidade com $\lambda/2$;



Propriedades da impedância ao longo de uma linha sem perdas

➤ $Z_L = 57.7 + j26.6 \, \Omega$ ($\rho_L = 0.25e^{j\pi/3}$; $VSWR = 1.7$)

Máximo → Ressonância paralelo
Mínimo → Ressonância série

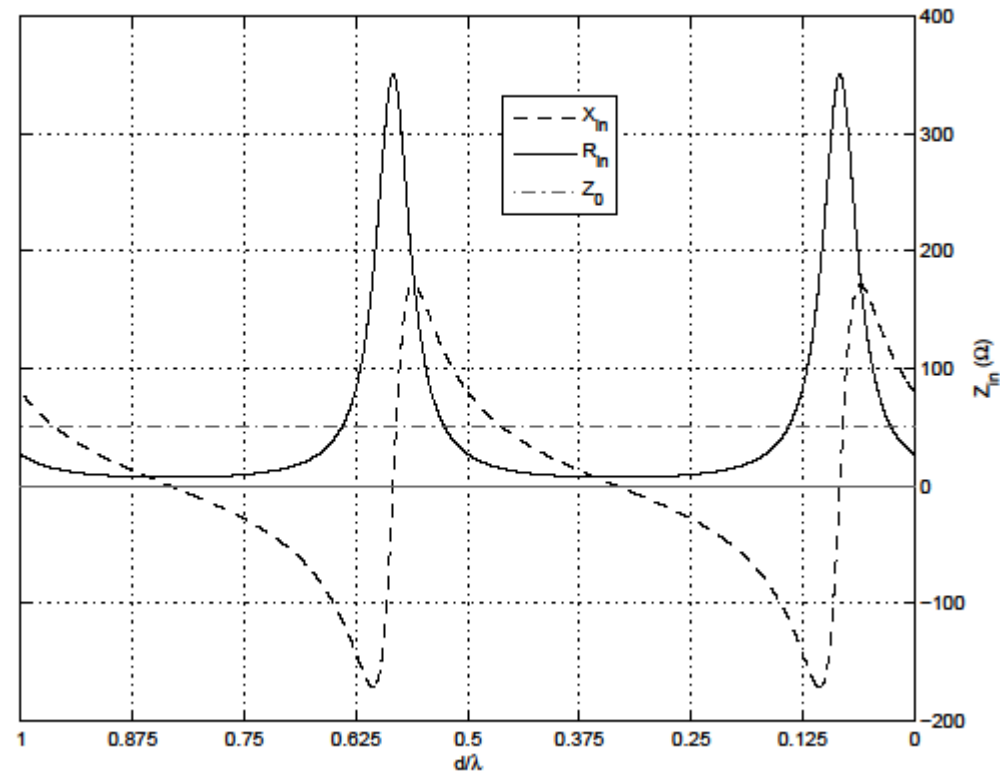


$$Z(d_{\max}) = Z_0 VSWR$$

$$Z(d_{\min}) = \frac{Z_0}{VSWR}$$

Propriedades da impedância ao longo de uma linha sem perdas

➤ $Z_L = 26.9 + j79.9\Omega$ ($\rho_L = 0.75e^{j\pi/3}$; $VSWR = 7.0$)



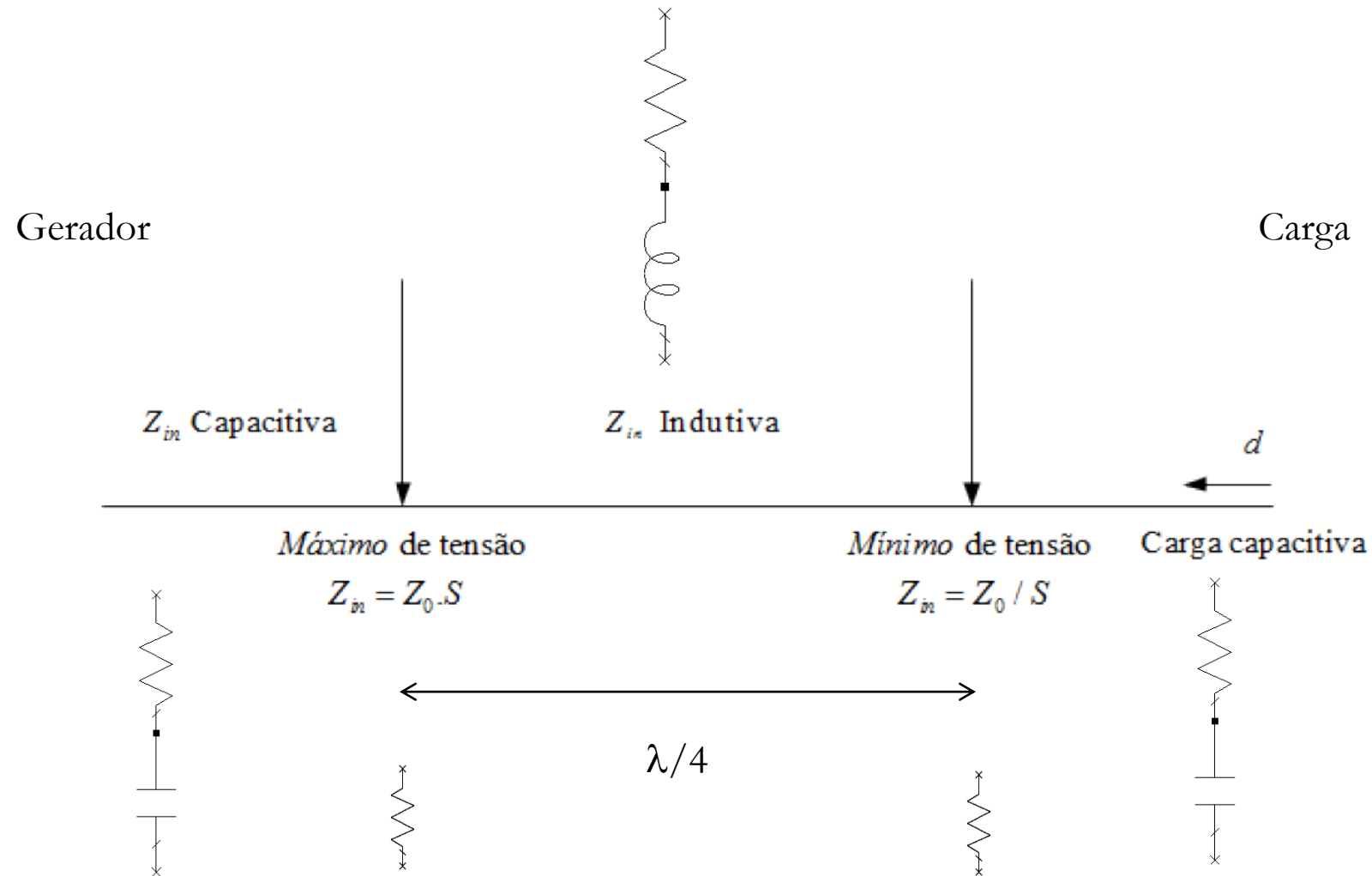
$$Z(d_{\max}) = Z_0 VSWR$$

$$Z(d_{\min}) = \frac{Z_0}{VSWR}$$

➤ Quanto maior for o VSWR mais vincadas serão as excursões na resistência de entrada (R_{in}) e na reactância de entrada (X_{in});



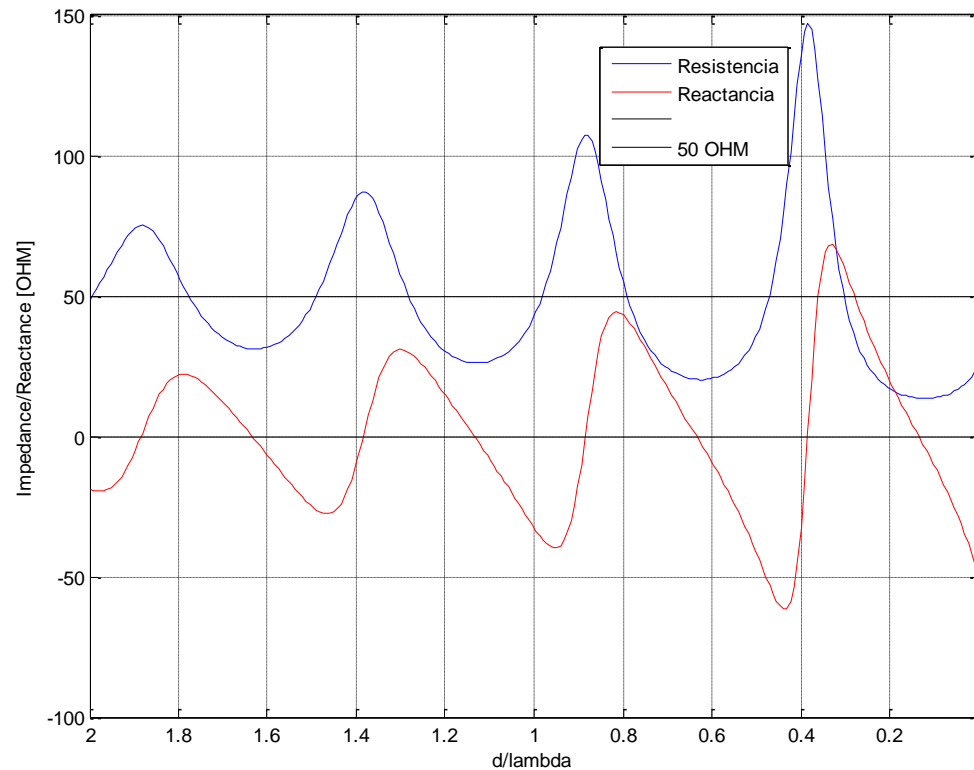
Natureza da impedância de entrada: impedância de carga arbitrária



Impedância de entrada de uma linha com perdas

➤ Quanto mais nos afastamos da carga (aumento de d):

- Menor a onda refletida, apenas a onda incidente permanece e cada vez com mais força, ou seja:
- O coeficiente de reflexão tende a 0 (como se veria) pela expressão de $\rho(d)$;
- Logo a reactância de $Z(d)$ tende a 0 e a resistência tende a Z_0 (50 Ω).

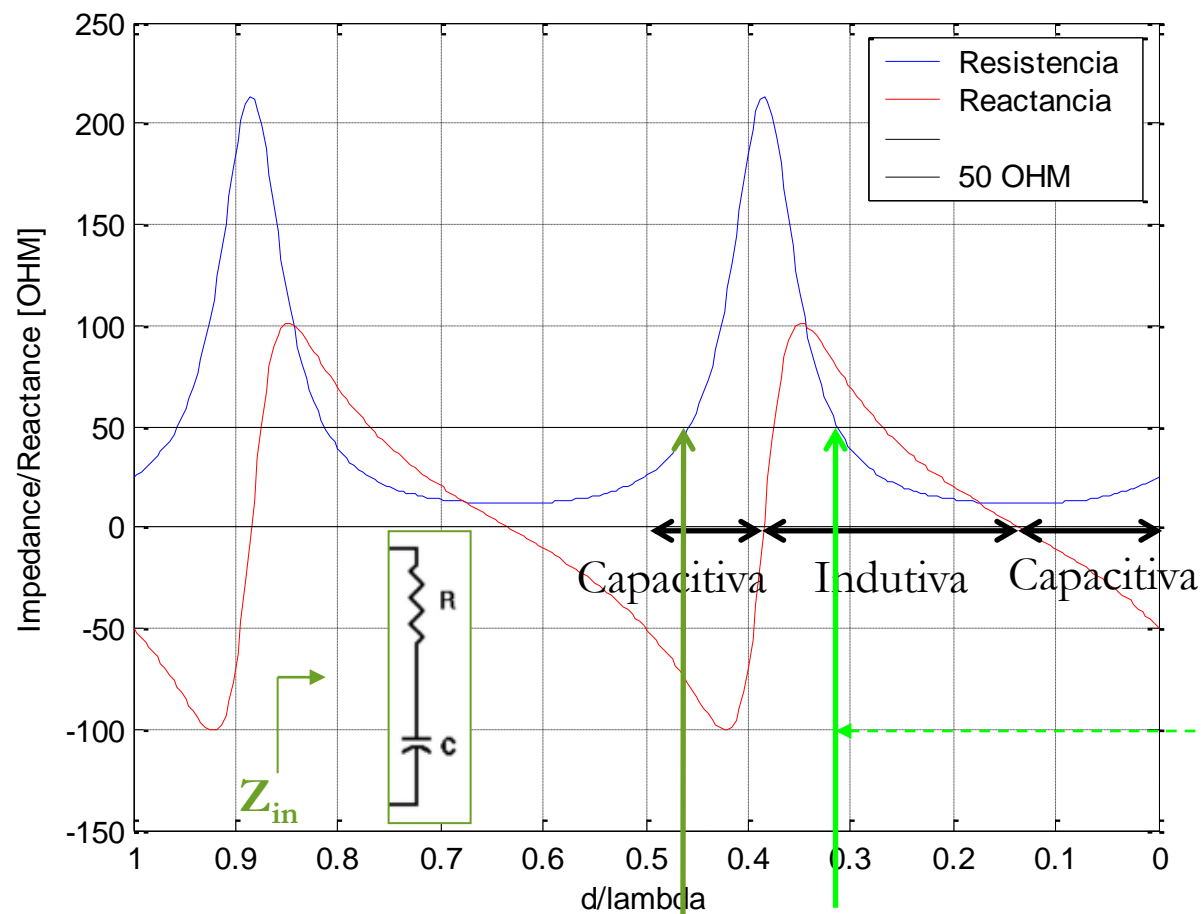


$$\alpha = 0.3 \text{ Np/m}$$



Impedância de entrada: pontos com resistência de entrada igual a Z_0

➤ $Z_L = 25 - j50 \Omega$ e $Z_0 = 50 \Omega$



É possível conseguir $Z_{in} = Z_0 = 50\Omega$ pondo em série na linha um **condensador** ou uma **bobina** (respectivamente): força-se uma ressonância série.

$R=50\Omega$

$$Z_{in} = 50 - jX_{in}$$

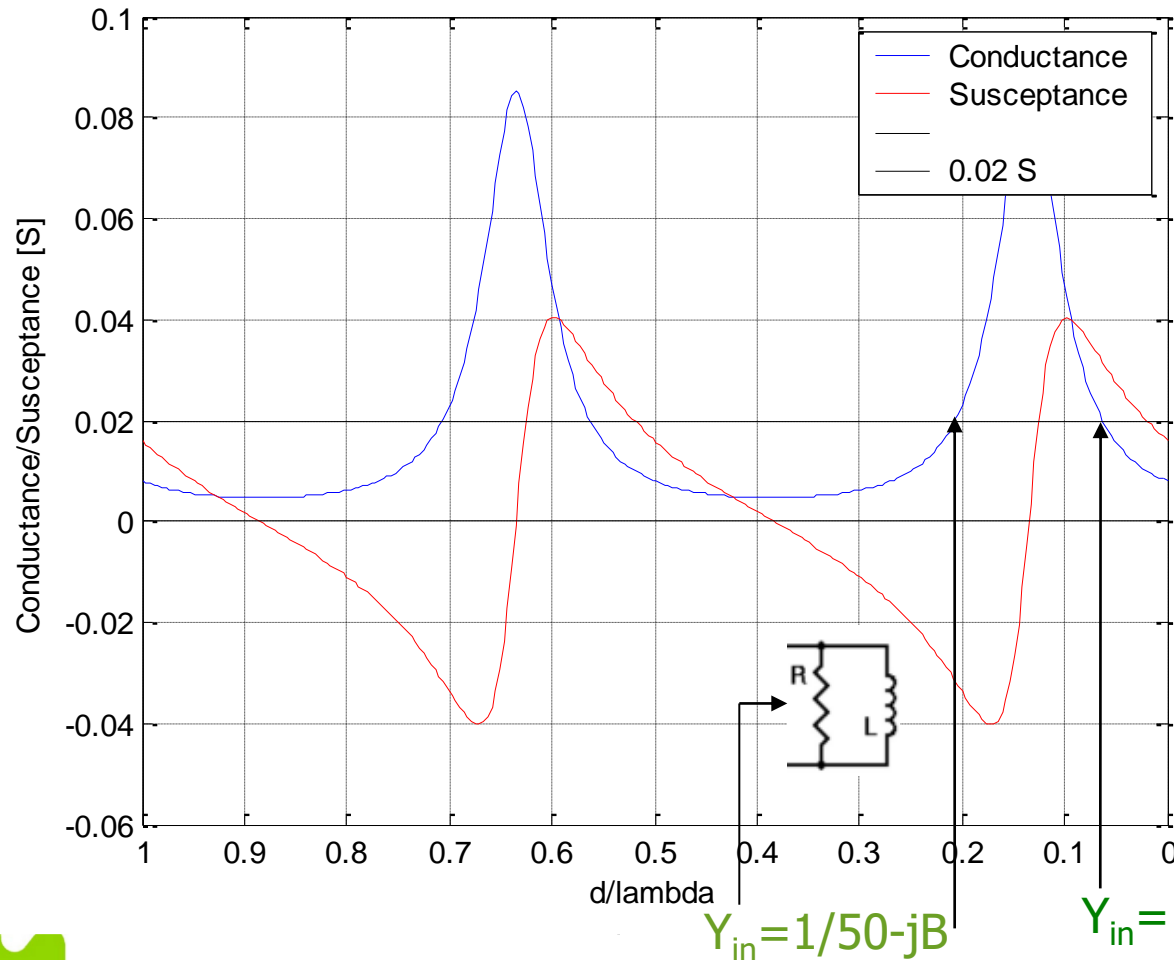
$$Z_{in} = 50 + jX_{in}$$

Z_{in}



Admitância de entrada: pontos com condutância de entrada $1/Z_0$

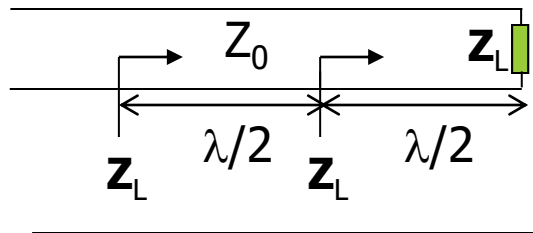
➤ $Z_L = 25 - j50$ e $Z_0 = 50 \Omega$



É possível conseguir $Y_{in} = Y_0 = 20 \text{ mS}$ (50Ω) pondo em paralelo uma **bobina** ou um **condensador** (respectivamente): força-se uma ressonância paralelo.

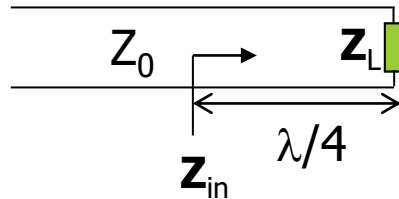
Transformadores com linhas de transmissão

- Transformam a impedância de carga Z_L noutra Z_{in} com características particulares;
 - Transformador de $\lambda/2$;
 - Transformador de $\lambda/4$;
 - Transformador de $\lambda/8$;
- Transformadores de $\lambda/2$
 - Impedância a jusante/montante $\lambda/2$ de um ponto, é igual à impedância desse ponto. Transformador de 1:1;
 - A impedância repete-se de $\lambda/2$ em $\lambda/2$.



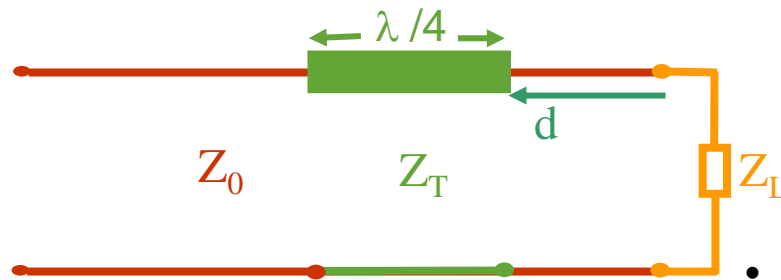
Transformadores de $\lambda/4$

- Consiste num troço de linha com um comprimento de $\lambda/4$, à frequência de interesse, que é colocado num local apropriado.



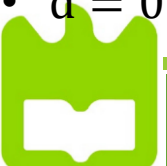
$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

- Caso particular: se Z_L é real então Z_{in} será real
- Se $Z_L = \infty \rightarrow Z_{in} = 0$; Se $Z_L = 0 \rightarrow Z_{in} = \infty$
- Se pretendemos obter Z_{in} real com Z_L real basta usar uma linha de $\lambda/4$ com Z_0 dado pela equação $Z_T = \sqrt{Z_{in}Z_L}$



- Z_L é uma impedância puramente resistiva;
- $d = 0$ e $Z_T = \sqrt{R_L Z_0}$

- Z_L é uma impedância complexa;
- d é obtido na carta de Smith e $Z_T = \sqrt{Z_d Z_0}$



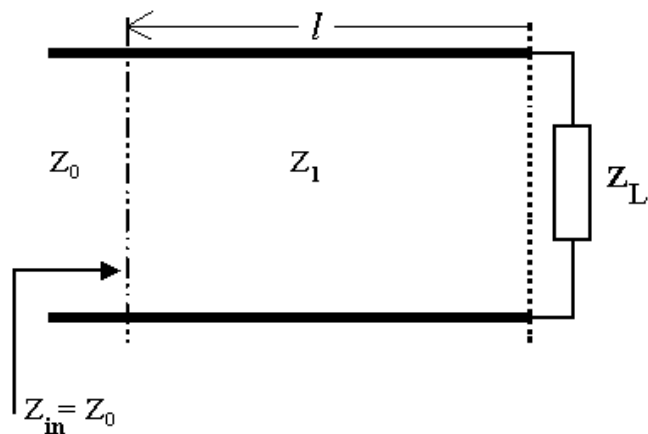
Transformadores de $\lambda/8$

- Considerando a linha terminada em CC ou CA, Z_{in} será:
 - $Z_{in} = jZ_0$ (se Z_L for um CC);
 - $Z_{in} = -jZ_0$ (se Z_L for um CA);
- Importante para os trabalhos laboratoriais;



Adaptação de uma carga com troço de linha de transmissão I

➤ Dado o circuito qual o valor de l e Z_1 (Z_1 é real) de forma a ver Z_0 à entrada ($Z_{in} = Z_0$)?



$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_L + jZ_1 \tan \beta \ell}{Z_1 + jZ_L \tan \beta \ell}$$

$$z_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_0}$$

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R + jX}{Z_0} = r + jx$$

$$z_{in} = 1 + j0 = \frac{Z_1}{Z_0} \left[\frac{(r + jx) + j \left(\frac{Z_1}{Z_0} \right) \tan \beta \ell}{\frac{Z_1}{Z_0} + j(r + jx) \tan \beta \ell} \right]$$

$$Z_1 = Z_0 \left[\frac{r^2 + x^2 - r}{r - 1} \right]^{1/2} \longrightarrow \text{Deve ser positivo}$$

$$\tan \beta \ell = \frac{Z_1}{Z_0} \left[\frac{1 - r}{x} \right] \rightarrow \tan \left(2\pi \frac{\ell}{\lambda} \right) = \frac{Z_1}{Z_0} \left[\frac{1 - r}{x} \right] \rightarrow \frac{\ell}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \text{arctag} \left(\frac{Z_1}{Z_0} \left[\frac{1 - r}{x} \right] \right)$$



Adaptação de uma carga com troço de linha de transmissão II

$$Z_1 = Z_0 \left[\frac{r^2 + x^2 - r}{r - 1} \right]^{1/2} \longrightarrow \text{Deve ser positivo}$$

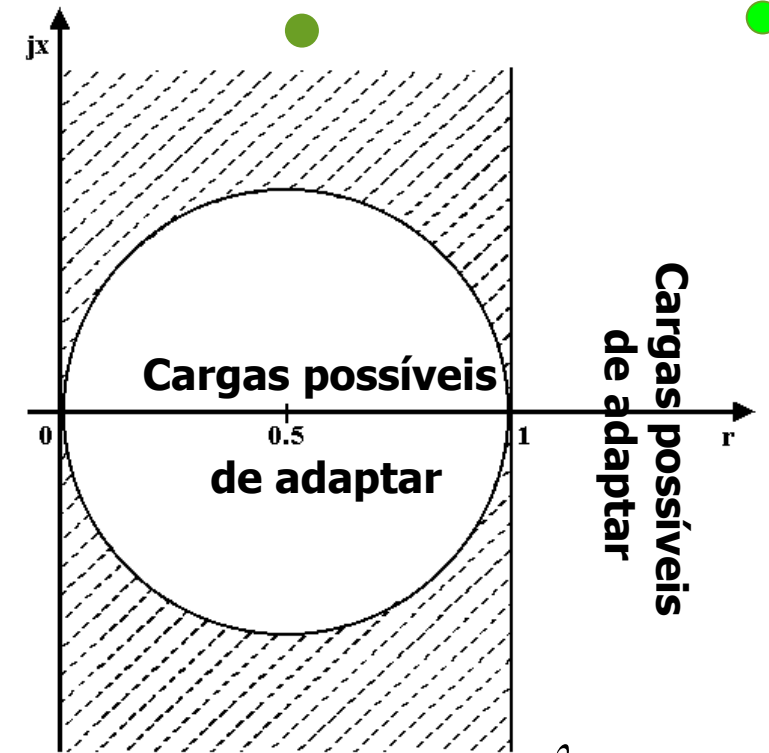
$$\frac{r^2 + x^2 - r}{r - 1} > 0 \quad \frac{(r - 0.5)^2 + x^2 - 0.5^2}{r - 1} > 0$$

➤ Análise:

- Numerador é uma circunferência de raio 0.5 e centro em $(0.5 + j0)$;
- Numerador e denominador devem ser ambos positivos ou ambos negativos;
 - **Intersecção de zonas;**
- Zona a tracejado → Impossível obter adaptação;

➤ Exemplos (em linha de 50Ω):

- Exemplo 1: $Z_L = 25 + j50 \Omega$ ($z_L = 0.5 + j1$)
 - Não pode ser adaptada com este circuito;
- Exemplo 2: $Z_L = 100 + j50 \Omega$ ($z_L = 2 + j1$)
 - Pode ser adaptada com este circuito;
- Veremos outros circuitos que se consegue sempre a adaptação.



➤ Se a carga for resistiva, o sistema reduz-se ao transformador de $\lambda/4$. $\tan \beta l = \infty \Leftrightarrow l = \frac{\lambda}{4}$

Potência em função da amplitude de tensão incidente e refletida

➤ Potência entregue à linha num ponto x qualquer (tal como em análise de circuitos):

- $P(x) = \text{Real}(V(x)I^*(x))$

$$\begin{aligned}\gamma + \gamma^* &= 2\alpha \\ \gamma - \gamma^* &= 2j\beta \\ V_2 &= V_1 \rho_L e^{-2\gamma l}\end{aligned}$$

$$P(x) = \text{Real} \left((V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{+\gamma x}) \left(\frac{V_1}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{V_2}{Z_0} e^{+\gamma x} \right)^* \right)$$

$$P(x) = \text{Real} \left((V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{+\gamma x}) \left(\frac{V_1^*}{Z_0} e^{-\gamma^* x} - \frac{V_2^*}{Z_0} e^{+\gamma^* x} \right) \right)$$

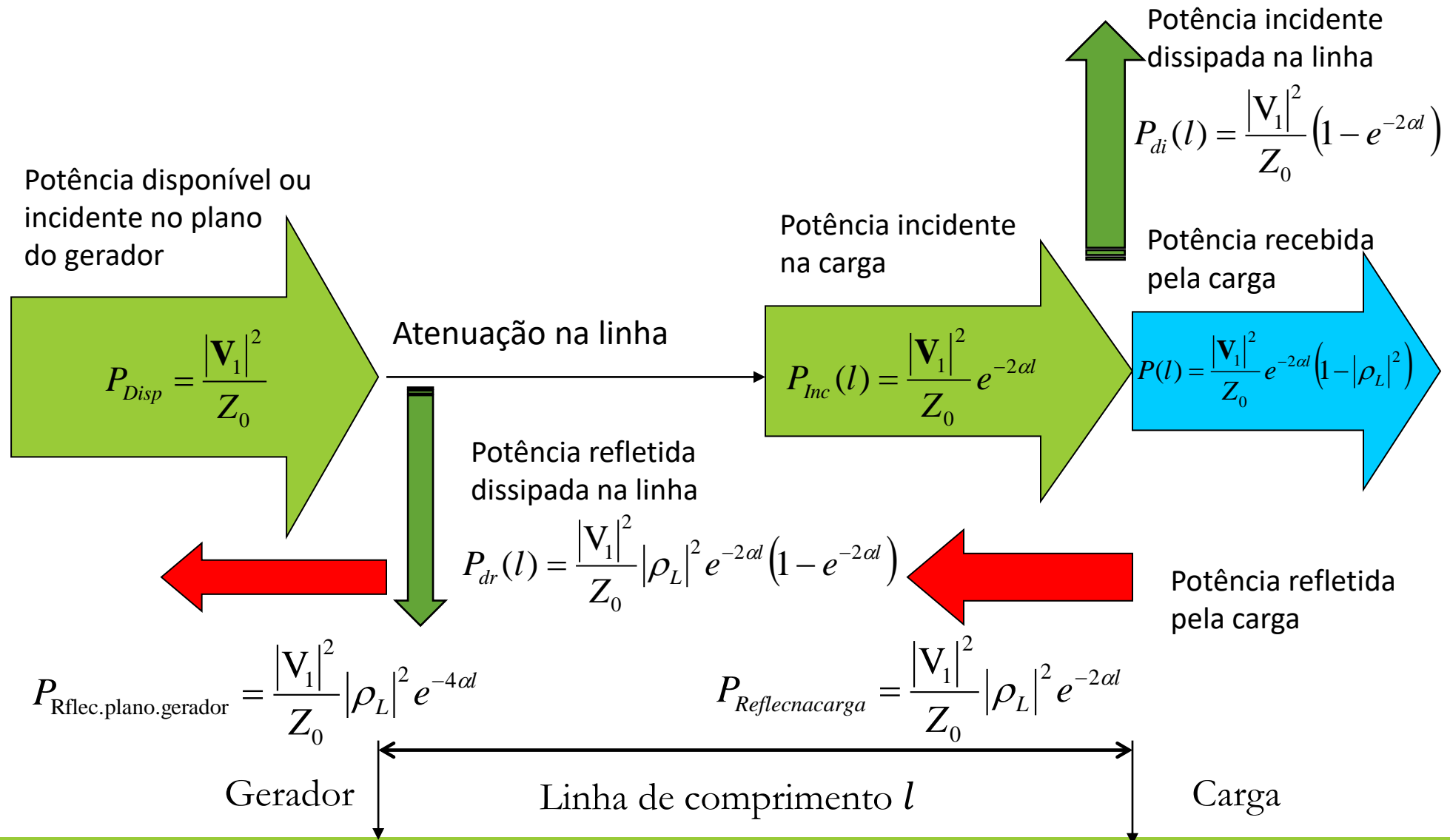
$$P(x) = \text{Real} \left(\frac{|V_1|^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} - \underbrace{\frac{V_1 V_2^* e^{-2j\beta x}}{Z_0} + \frac{V_1^* V_2 e^{+2j\beta x}}{Z_0}}_{\text{Parte Real}=0} - \frac{|V_2|^2}{Z_0} e^{+2\alpha x} \right)$$

$$P(x) = \underbrace{\frac{|V_1|^2}{Z_0} e^{-2\alpha x}}_{P_{inc}} - \underbrace{\frac{|V_1|^2 |\rho_L|^2}{Z_0} e^{+2\alpha x - 4\alpha l}}_{P_{reflec}}$$

$$P(x) = \frac{|V_1|^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} (1 - |\rho_L|^2 e^{4\alpha(x-l)})$$

$$P(x) = \frac{|V_1|^2}{Z_0} e^{-2\alpha x} (1 - |\rho_L|^2 e^{4\alpha(x-l)})$$

Balanço de potência



Exercício

➤ Considere uma linha de transmissão de 10m de comprimento, constante de atenuação $\alpha=0.02$ Np/m e impedância característica $Z_0 = 50\Omega$. O gerador tem impedância interna de 50Ω e tensão $V_g = 20V$. Sabendo que a impedância de carga é $50+j50\Omega$, calcule:

- A potência disponível.
 - Resp: 2W;
- A potência incidente na carga.
 - Resp: 1.34W;
- A potência entregue à carga.
 - Resp: 1.07W;
- A potência incidente dissipada na linha.
 - Resp: 0.66W;
- A potência entregue pelo gerador ao sistema.
 - Resp: 1.82W;
- A potência total dissipada na linha.
 - Resp: 0.75W;



Return Loss (Perdas de retorno)

- O IEEE define as perdas por retorno como a relação (em dB) entre a potência incidente e a potência refletida na carga, sendo dado por:

$$RL = 10 \log \left(\frac{P_{in}}{P_{ref}} \right)$$
$$RL = -20 \log |\rho_L|$$

- Forma de especificação dos dispositivos de RF. Permite quantificar a proximidade das impedâncias de entrada/saída de um valor de referência usado em LT (normalmente 50 Ω);
- Exemplo: +20 dB significa 1% da potência é refletida ($|\rho| = 0.1$).
 - Valores típicos:
 - +12 dB → dispositivo comercial (antena, recetor,..): 6% de potência refletida;
 - +35 dB (ou melhor): cargas adaptadas de laboratório;



- Equipamentos de medida (VNA) representam o simétrico (format “*Log magnitude*”)

$$RL = 20 \log |\rho_L|$$

Reflection/Mismatch Loss e Power Transmission Coefficient

➤ Quantifica a fração da potência incidente entregue à carga devido à reflexão de potência nesta.

$$T_L = 10 \log_{10} \frac{P_{inc}}{P_{Load}} = -10 \log_{10}(1 - |\rho|^2)$$

- $T_L = 0$ dB → Toda a potência incidente é entregue à carga ← Potência refletida é nula ($|\rho| = 0$) 😊;
- $T_L = 6$ dB → Apenas $\frac{1}{4}$ da potência incidente é entregue à carga ← $\frac{3}{4}$ da potência incidente é refletida ($|\rho| = 0.865$) 😞

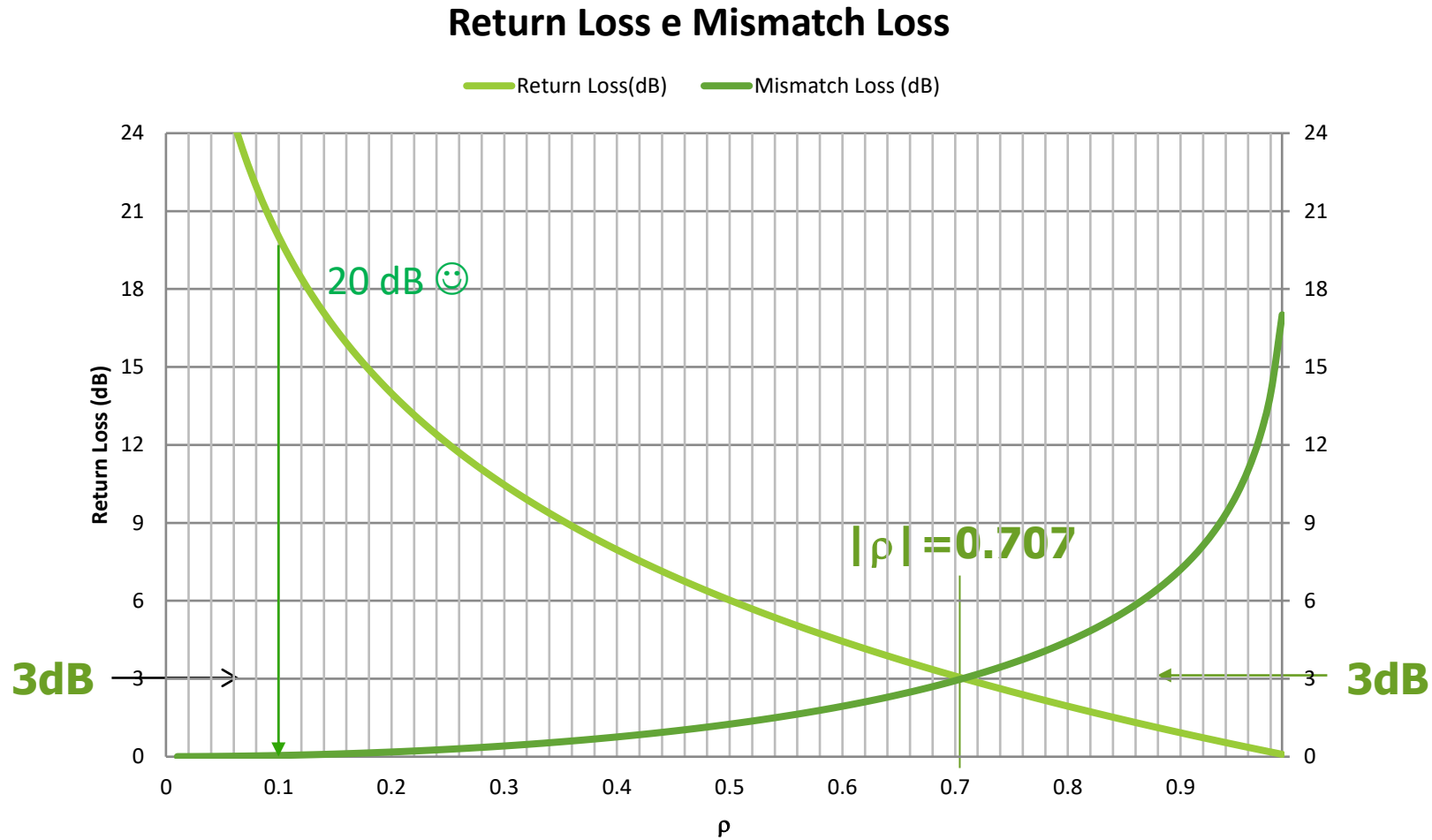
➤ Power Transmission Coefficient (grandeza linear): T_{CP} [0 1]

- $T_{CP} = 1$ → Toda a potência incidente é entregue à carga ($|\rho| = 0$)
- $T_{CP} = 0.5$ → Metade da potência incidente é entregue à carga ($|\rho| = 0.707$)

$$T_{CP} = \frac{P_{inc} - P_r}{P_{inc}} = 1 - |\rho|^2$$



Return loss e Mismatch loss representação gráfica em função de $|\rho|$



Potência em RF: dBm e dBW

➤ Potência:

$$P_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P_{mW}}{1mW} \quad P_{dBW} = 10 \log_{10} \frac{P_W}{1W}$$
$$P_{dBm} \xrightarrow{-30} P_{dBW} \quad P_{dBW} \xrightarrow{+30} P_{dBm}$$

Exemplos de nível de potência em alguns ST:
Telemóvel GSM → -80dBm
WiFi → -71dBm (~50Mbps) **-92dBm (1Mbps)**
TV TDT → -70 dBm

- Ex: 6 mW → 7.78 dBm = -30 + 7.78 = -22.22 dBW

➤ Conversão da potência logarítmica para tensão eficaz (sistema $Z_0 \Omega$)

$$\frac{V_{ef}^2}{Z_0} = P_{Watts} \quad V_{ef} = \sqrt{Z_0 * 10^{-3} * 10^{\frac{P_{dBm}}{10}}} \quad V_{ef} = \sqrt{Z_0 * 10^{\frac{P_{dBW}}{10}}}$$

- Ex: 0 dBm → V=223 mV em 50 Ω ou 373 mV em 75 Ω .

➤ Tensão em dB μ V

- 22.3 μ V → -80 dBm em 50 Ω

$$V_{dB\mu V} = 20 \log_{10} \frac{V_{\mu V}}{1\mu V}$$



Bibliografia:

- Pedro Pinho, Armando Rocha e José Pereira, “*Propagação Guiada de Ondas Eletromagnéticas*”. GEN/LTC, Julho de 2014;



Carta de Smith

- Ferramenta gráfica para efetuar cálculos relacionados com LT, oferecendo soluções muito intuitivas para problemas de adaptação ou síntese de impedâncias;
- Como poderemos então representar os coeficientes de reflexão associados à impedância de entrada de uma LT terminada numa carga Z_L ?

$$\rho_L = |\rho_L| e^{j\phi_L} = u + jv = \frac{\frac{Z_L}{Z_0} - 1}{\frac{Z_L}{Z_0} + 1} = \frac{(r + jx) - 1}{(r + jx) + 1}$$

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}$$

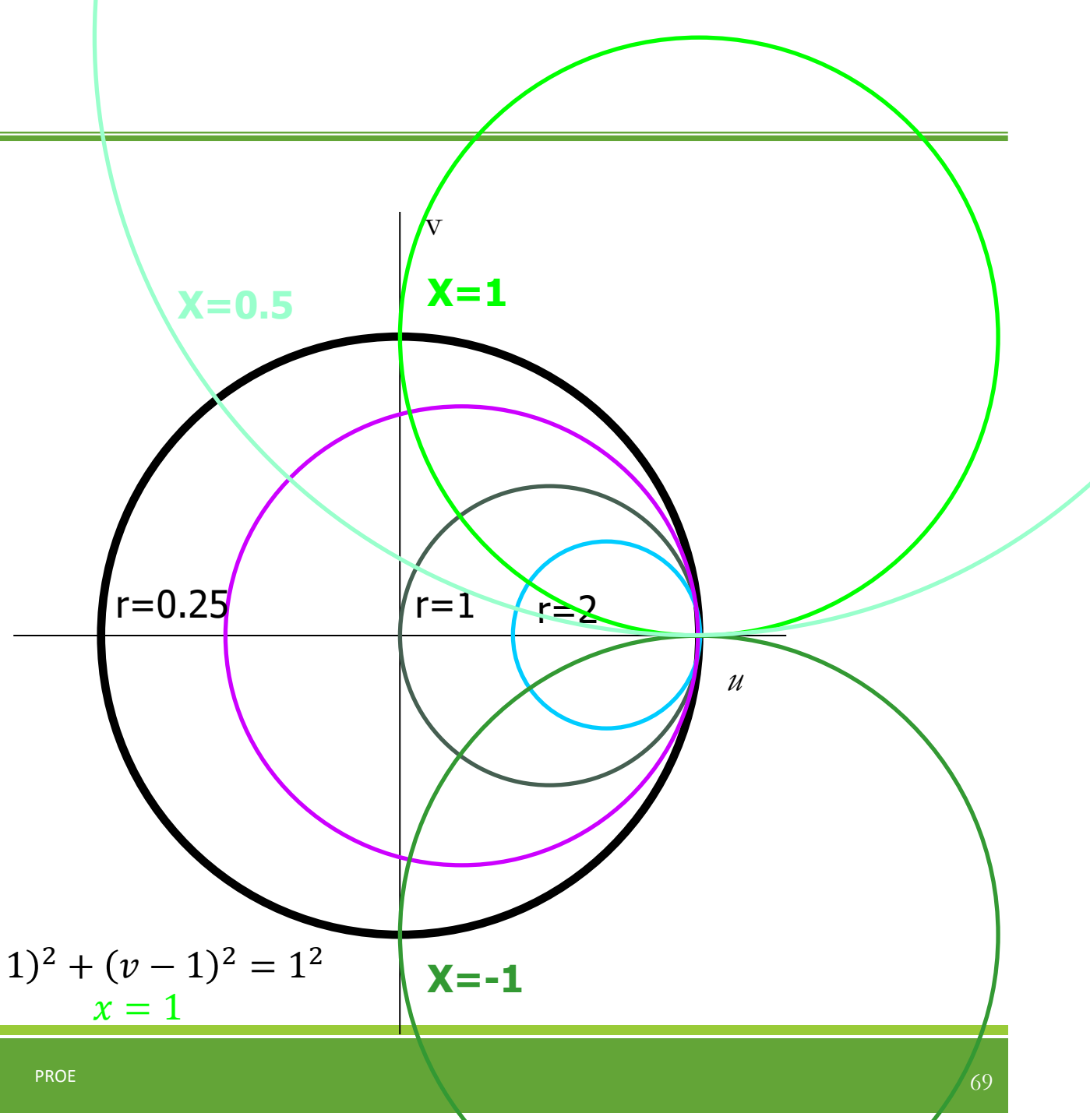
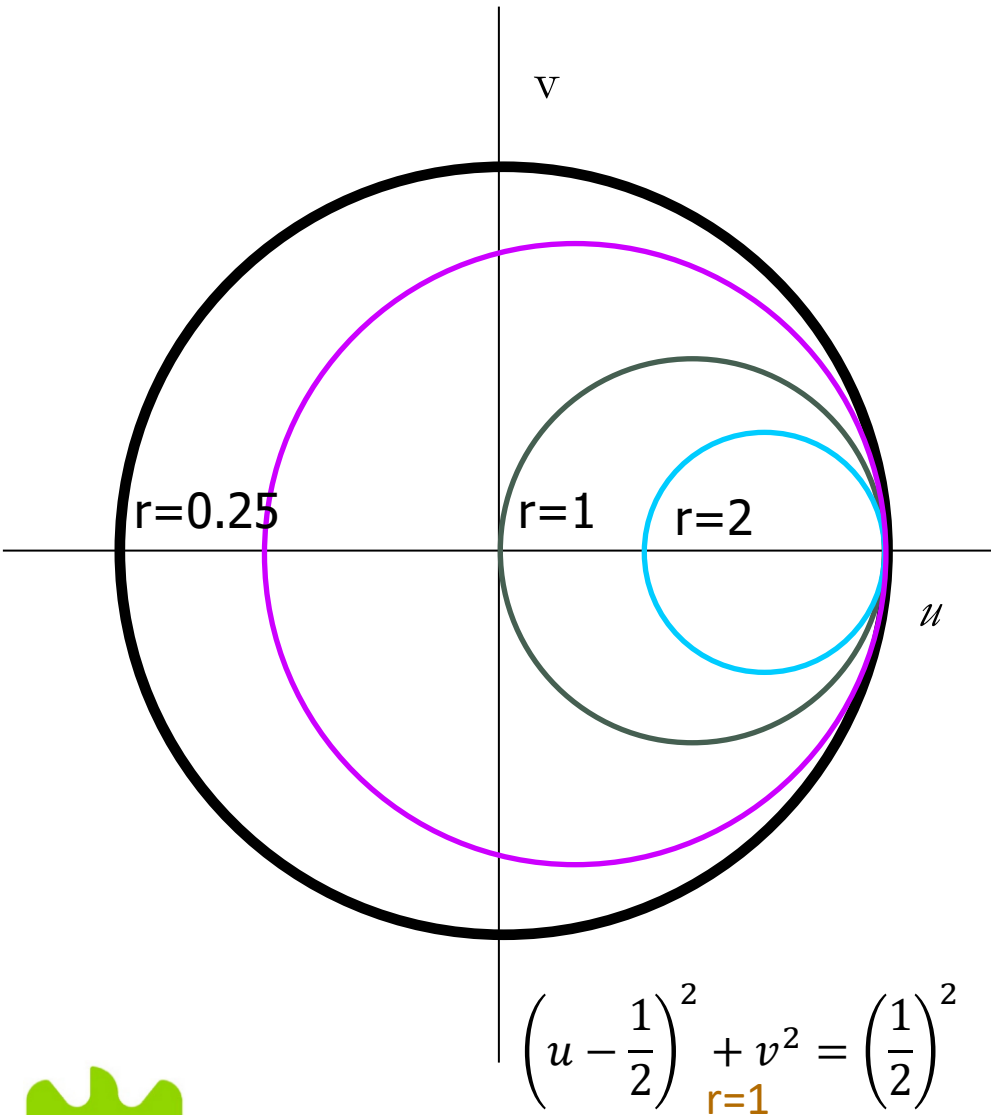
$$x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$\left(u - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1 + r)^2}$$

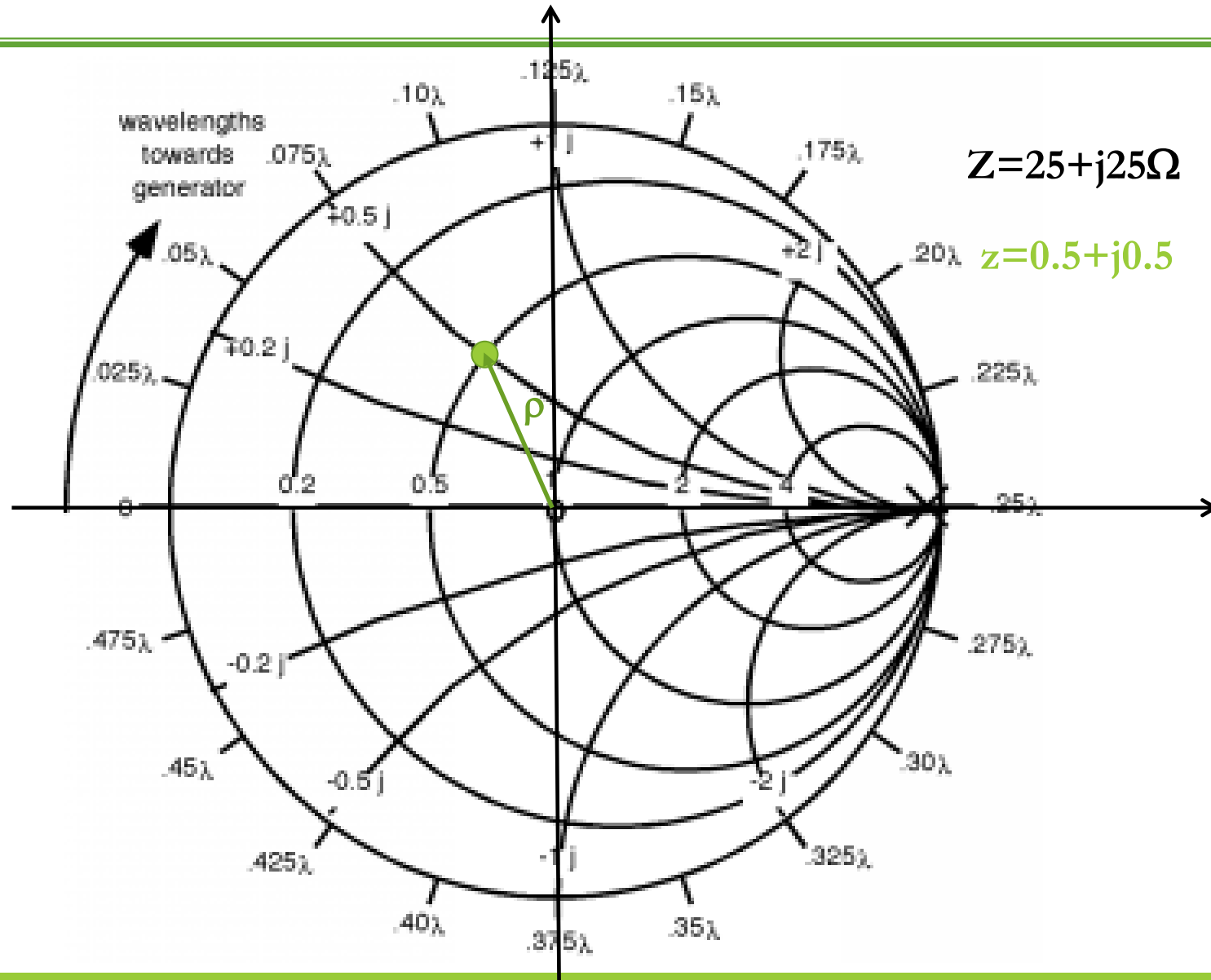
$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$



Carta de Smith



Carta de Smith

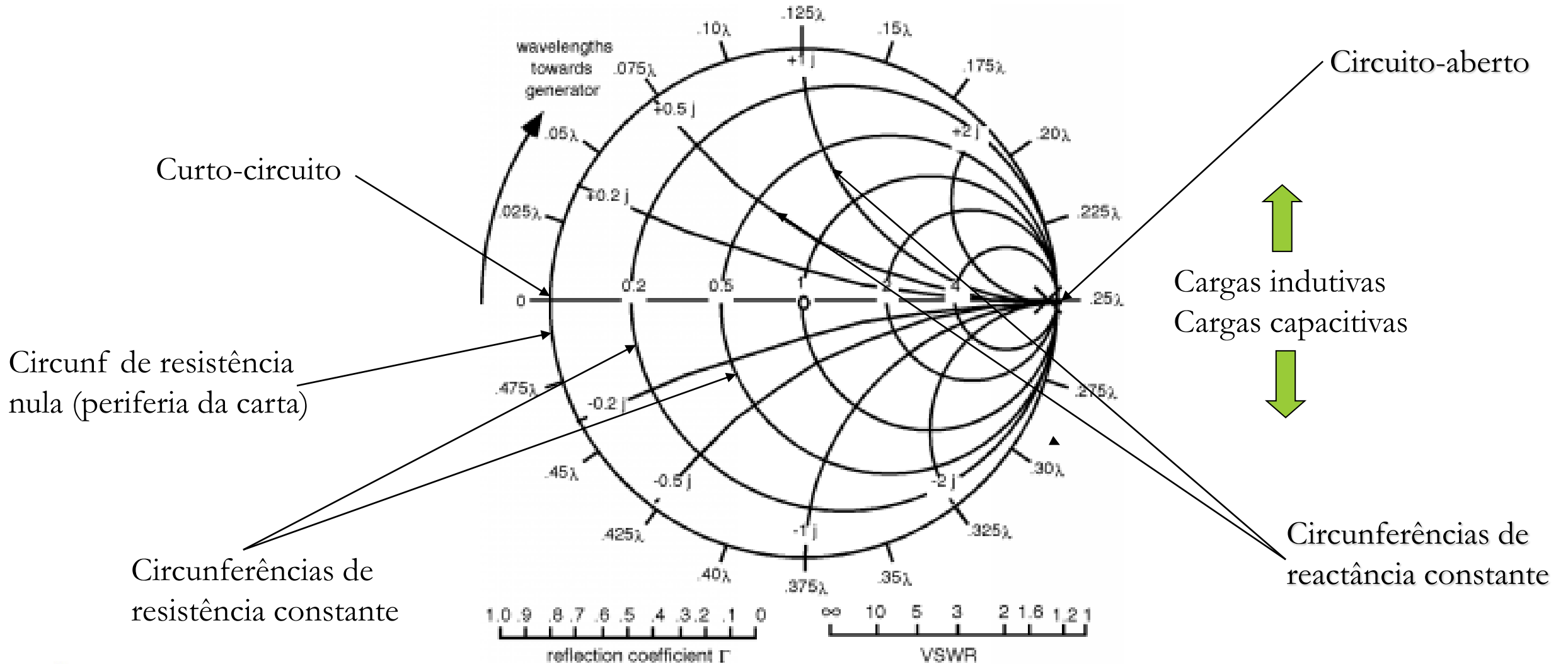


Características da carta de Smith

- É um círculo de raio unitário;
- Cada ponto desse círculo é o afixo de um vetor cuja origem se situa no centro do círculo. O vetor representa o coeficiente de reflexão ρ_L ;
 - O módulo do coeficiente de reflexão é o comprimento do vetor;
 - A fase do coeficiente de reflexão é o ângulo do vetor com o eixo x-positivo;
- Estão desenhadas circunferências de r constante e x constante cuja intersecção define uma carga Z_L . A intersecção dessas linhas é assim o afixo do coeficiente de reflexão provocado pela carga.
- A carga Z_L está normalizada à impedância característica da linha e portanto é adimensional.



Generalidades da Carta de Smith (CS)



Definições

➤ Impedância Z :

- $Z = R + jX$
 - Z é a impedância em Ω ;
 - R é a resistência em Ω ;
 - X é a reatância em Ω ;

➤ Admitância Y

- $Y = 1/Z$
- $Y = G + jB$
 - Y é a admitância, em S;
 - G é a condutância, em S;
 - B é a susceptância, em S;



Escalas periféricas

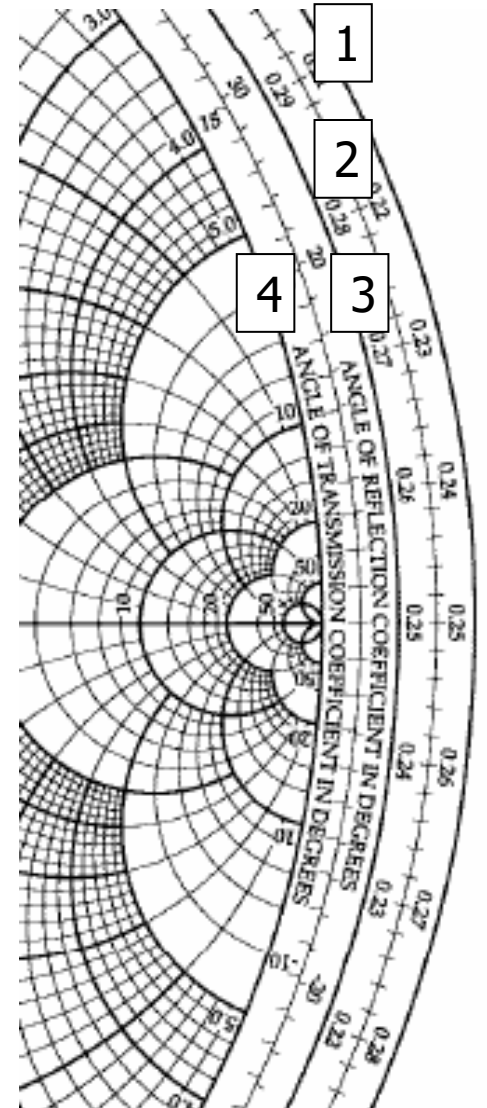
➤ Destinam-se a facilitar a:



- Marcação da fase de ρ e ρ_t
- Obter o ρ na linha a uma distância d/λ a partir do mesmo, noutra ponto qualquer;

➤ Escalas (da direita para a esquerda)

- 1 - Distância em λ 's crescente *clockwise* (CW);
- 2 - Distância em λ 's crescente *counter clockwise* (CCW);
- 3 – Ângulo do coeficiente de reflexão;
- 4 – Ângulo do coeficiente de transmissão.

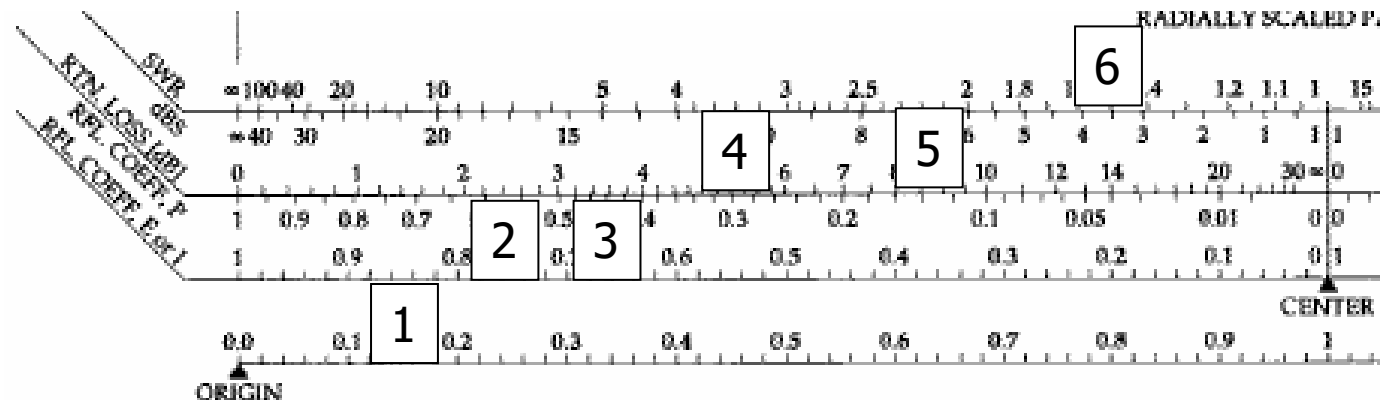


Escalas lineares externas

➤ Facilitam a marcação de circunferências de $|\rho|$ (ou seja todos os coeficientes de reflexão possíveis ao longo de $\lambda/2$): lado esquerdo (de baixo para cima)

➤ Escalas:

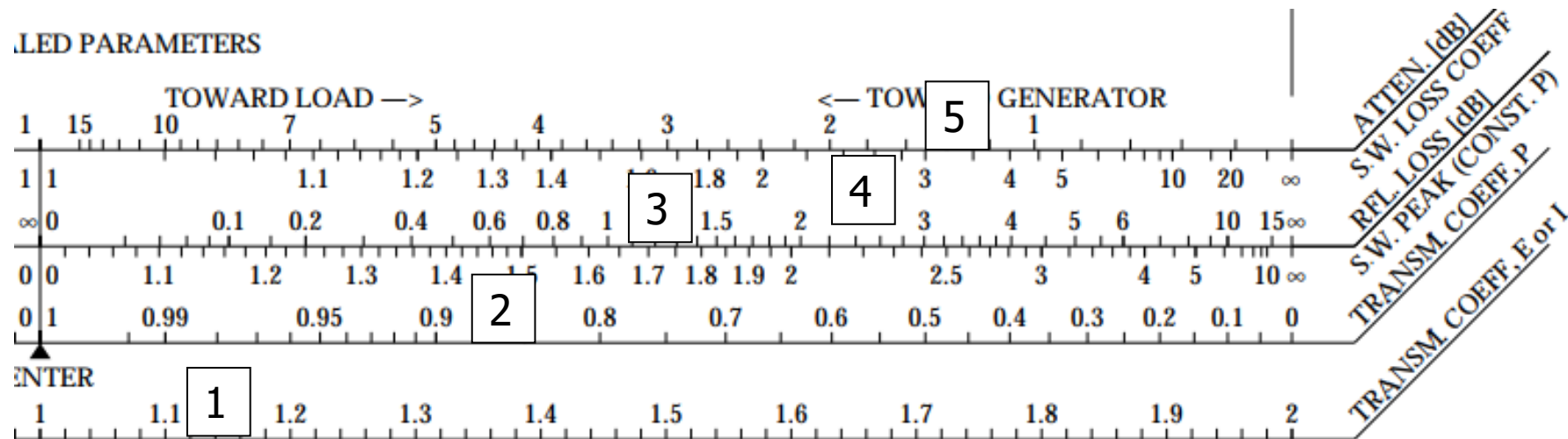
- 1 - Coeficiente de transmissão (esquerda para a direita: máximo=2)
- 2 - $|\rho|$ (crescente da direita para a esquerda)
- 3 - $|\rho|^2$ – Coeficiente de reflexão de potência Ex: $|\rho| = 0.1 \rightarrow |\rho|^2 = 0.01$
- 4 - *Return Loss* (com sinal -) $-20\log_{10} |\rho|$. Ex: $|\rho| = 0.1 \rightarrow 20dB$
- 5 - $20\log_{10}(V_{Max}/V_{min})$ Ex: $6dB \rightarrow V_{max}/V_{min} = 2 \rightarrow VSWR=2$
- 6 - VSWR. Ex: $|\rho| = 0.5 \rightarrow VSWR = 3, RL = 6dB$



Escalas lineares externas

➤ Escalas:

- 1 - $|1 + \rho|$ Coeficiente de transmissão (esquerda para a direita: max=2)
- 2 - $(1 - |\rho|^2)$ (de crescente da direita para a esquerda)
- 3 - $-10 \log_{10}(1 - |\rho|^2)$ *Reflection Loss*. Ex: $|\rho| = 0.0 \rightarrow 0dB$ (potência refletida é nula)
- 4 e 5 - Escalas para lidar com problemas em linhas de transmissão com perdas;



Marcações e leituras na CS

➤ Marcação de z_L ;

- Normaliza-se a carga Z_L à impedância característica da linha para obter r e x . Marca-se ponto de intersecção da circunferência de r constante com o arco x constante. O ponto é o afixo do ρ_L ;

➤ Marcação de y_L ;

- Determina-se o ponto diametralmente oposto a z_L o que é equivalente a determinar a impedância de entrada da linha a uma distância de $\lambda/4$ como determina o transformador de $\lambda/4$;

➤ Marcação de ρ_L dado em representação polar;

- Usando uma régua traça-se uma radial do centro da CS à fase do coeficiente de reflexão na escala azimutal correspondente. Usando um compasso, com uma abertura obtida da escala radial de $|\rho|$, traça-se um arco de circunferência centrado no centro da CS que intersecte a radial anterior;



Marcações e leituras na CS

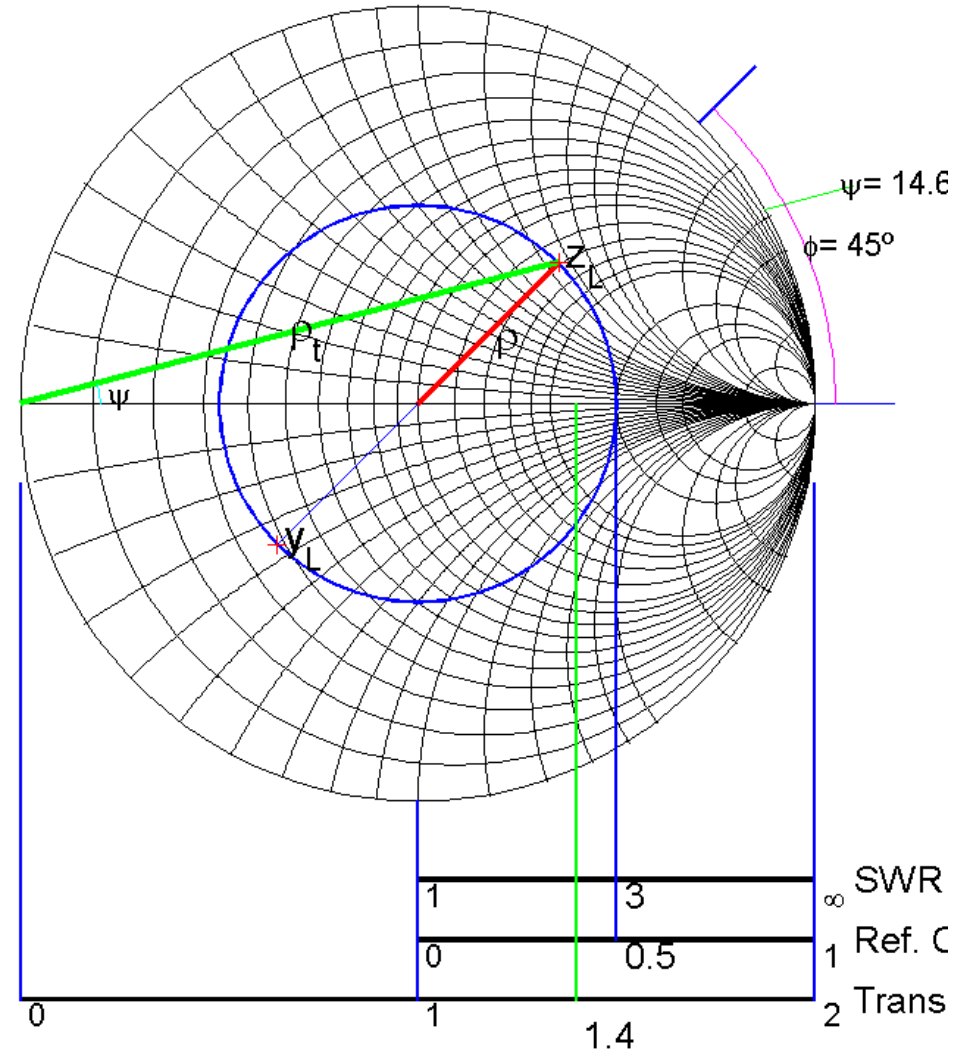
Smith Chart

$$\rho = 0.5 \angle 45^\circ$$

$$\rho_t = 1.4 \angle 14.6^\circ$$

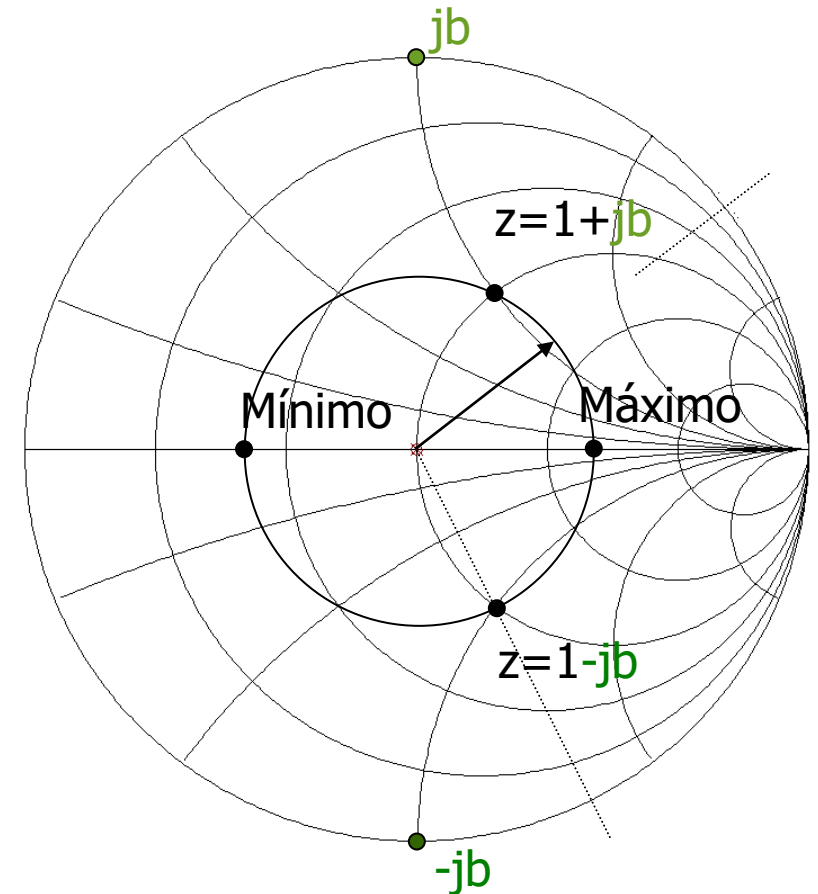
$$z_L = 1.9 \angle 43.3^\circ$$

$$y_L = 0.527 \angle -43.3^\circ$$



Localização de extremos e d 's para possível adaptação com C (ou L) série

- Representar ρ_L ;
- Localização de máximos
 - Rodar ρ_L no sentido do gerador (CW) até encontrar o eixo real positivo -fase de $\rho(d_{max}) = 0^\circ$;
 - Obter d_{max} pela diferença na escala periférica exterior;
- Localização de mínimos
 - Rodar ρ_L no sentido do gerador (CW) até encontrar o eixo real negativo -fase de $\rho(d_{min}) = 180^\circ$;
 - Obter d_{min} pela diferença na escala periférica exterior;
- Localização de locais d_a em que $r = 1 + j *$
 - Intersecção com a circunferência $r = 1$
 - Dois pontos por cada $\lambda/2$: um com reactância indutiva e outra capacitiva;



Exercício

➤ Resolva, com a Carta de Smith sempre que possível. Considere $Z_0 = 50\Omega$.

- a) Marque o coeficiente de reflexão $\rho = 0.5e^{j40^\circ}$ e transmissão $\rho_t = 1.42e^{j13^\circ}$;
- b) Estime a carga que causa este coeficiente de reflexão; **Resposta:** $Z_L = (1.55 + j1.3) * 50 = 77.5 + j65\Omega$
- c) Calcule $Z(d = 0.1\lambda)$; **Resposta:** $Z(0.1\lambda) = (1.85 - j1.3) * 50\Omega$
- d) Calcule a distância à carga a que encontra o 1º máximo e 1º mínimo de tensão; **Resposta:** $d_{max} = (0.25 - 0.194)\lambda$; $d_{min} = (0.5 - 0.194)\lambda$
- e) Calcule o valor das impedâncias nestes pontos; **Resposta:** $Z(d_{max}) = 150\Omega$ e $Z(d_{min}) = 16.67\Omega$
- f) Dimensione um transformador de $\lambda/4$, a colocar num máximo de tensão, que promova a adaptação; **Resposta:** $Z_1 = 86.6\Omega$
- g) Repita a alínea anterior se optar por colocar o transformador de $\lambda/4$ num mínimo de tensão; **Resposta:** $Z_1 = 28.9\Omega$
- h) A distância d da carga a que poderá conseguir $Z_{in} = 50 + j0\Omega$ colocando em série na linha um condensador de capacidade C_s ; **Resposta:** $d = (0.5 - (0.194 - 0.166))\lambda = 0.472\lambda$
- i) Calcule C supondo $f = 300MHz$; **Resposta:** $C_s = 9.22pF$ (ressonância série com reactância de entrada da linha $X_{in} = 1.15 * 50 = 57.5\Omega$)
- j) Repita as duas alíneas anteriores mas agora usando uma bobina em série de indutância L_s .



O que é um *stub*?

- *Stub* designa uma linha de transmissão sem perdas (normalmente de comprimento inferior a λ) terminada em CA ou CC;
- A admitância de entrada (ou impedância) de um *stub* é uma susceptância (reactância), que na CS se situa sobre a circunferência de raio unitário correspondente a $r = 0$.
 - O valor da susceptância (ou reactância) do *stub* é determinada pelo respetivo comprimento l_s .
- O projeto do *stub* é um problema trivial: trata-se de encontrar o comprimento de uma linha que terminada numa carga conhecida (CC ou CA) apresenta uma susceptância (impedância) de entrada pretendida.
- Em malhas de adaptação/síntese de impedâncias é habitualmente usado em paralelo com a linha
 - O dimensionamento deve ser feito, por conveniência, em admitâncias;



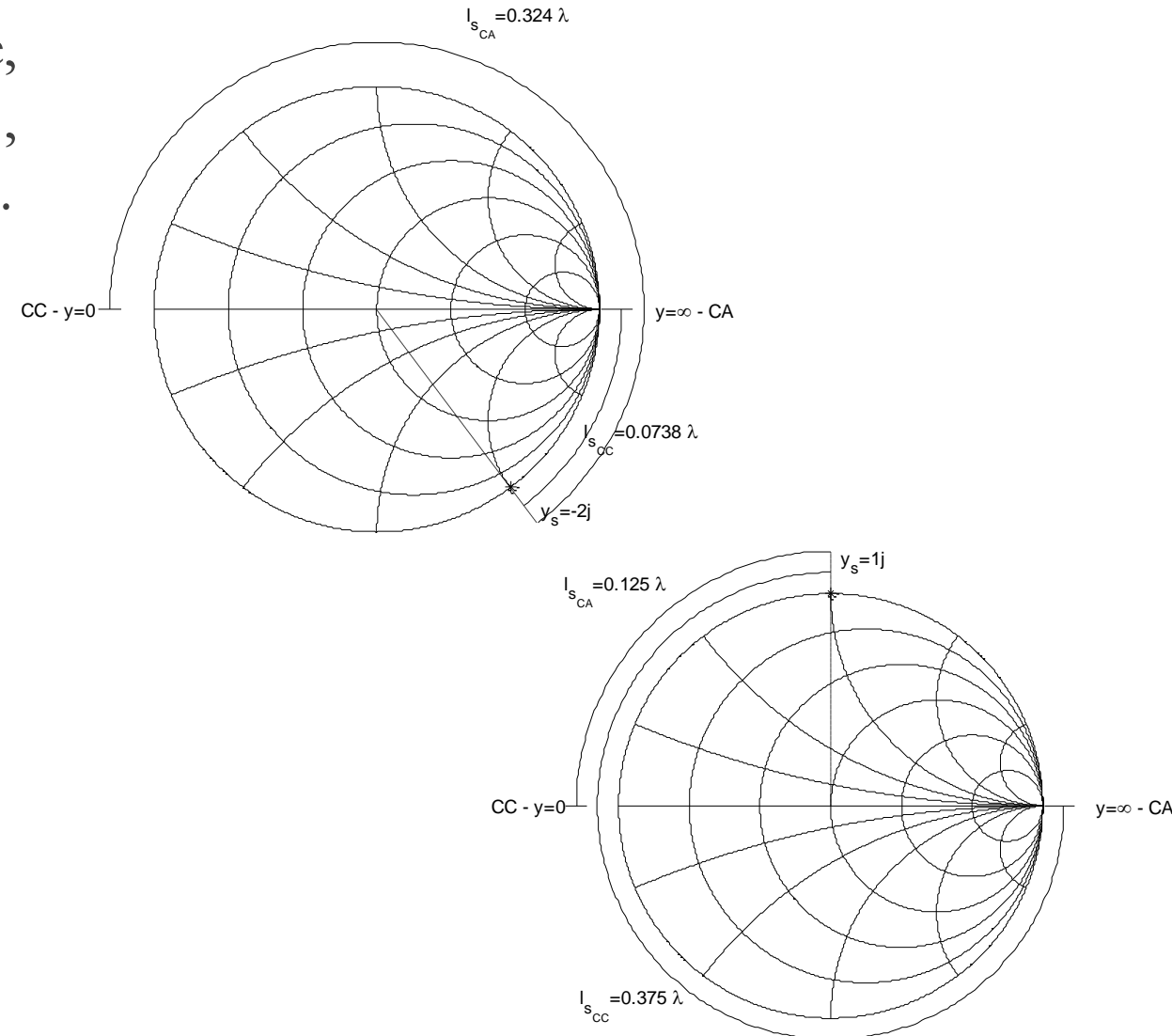
Dimensionamento de um *stub*

➤ Calcular o comprimento da linha l_s que, terminada em $z_L = 0$ (CC) ou $z_L = \infty$ (CA), apresenta uma susceptância y_s (ou reactância z_s).

- **a)** Ex: *Stub* em CC com $y_s = -j2 \rightarrow l_s = 0.0738\lambda$
- **b)** Ex: *Stub* em CA com $y_s = j1 \rightarrow l_s = 0.125\lambda$
- **c)** Ex: *Stub* em CA e com $y_s = -j2 \rightarrow l_s = 0.324\lambda$
- **d)** Ex: *Stub* em CC com $y_s = j1 \rightarrow l_s = 0.375\lambda$

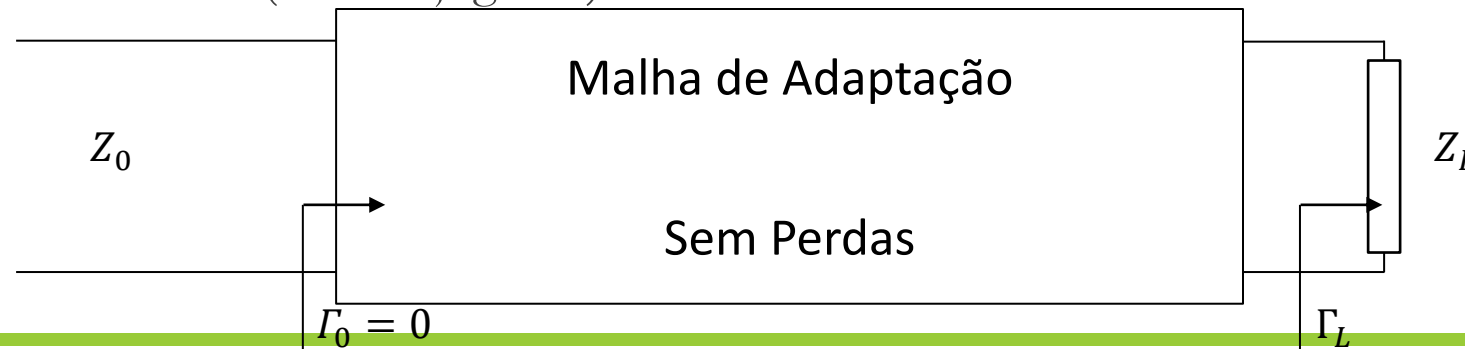
➤ Os *stubs* mais curtos do tipo

- Indutivo são realizados em curto (CC): **a)**
- Capacitivo são realizados em aberto (CA): **b)**
- Caso contrário deverão ter:
 - Comprimento acrescido de $\lambda/4$: **c)** e **d)**



O que é um sistema de adaptação?

- Sistema que transforma uma impedância Z_L numa impedância Z_0 com base numa malha de adaptação sem perdas;
 - Dizemos que a carga está adaptada à linha: não existe tensão refletida na linha;
 - Se a linha for atacada por um gerador de impedância $Z_g = Z_0$ há máxima transferência de potência do gerador à carga;
- Adaptação e máxima transferência de potência
 - Máxima transferência de potência de uma fonte para a carga ocorre quando a carga tem uma impedância complexa conjugada da fonte.
 - Uma carga adaptada à linha só proporciona máxima transferência de potência se a impedância do gerador for igual à impedância característica (são conjugadas)



Métodos de adaptação:

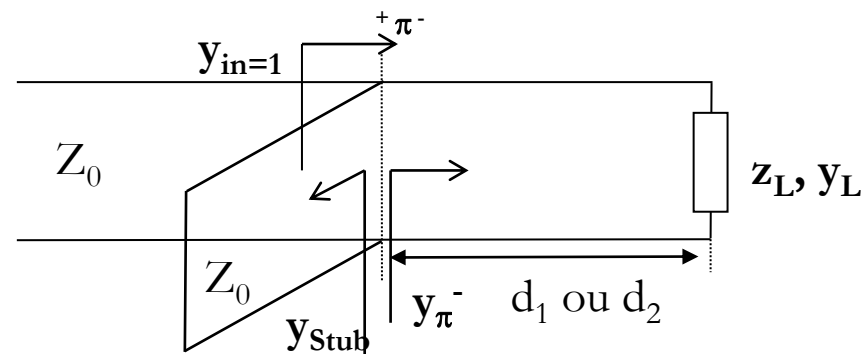
- Uso do transformador de $\lambda/4$ aplicado num ponto de máximo ou mínimo de tensão (onde a impedância de entrada da linha é real)
 - Necessário calcular impedância característica Z'_0 da linha do transformador;
- Linha com impedância característica distinta de Z_0 e comprimento apropriado;
 - Certas impedâncias de carga poderão não ser adaptáveis☹
- Utilização de *stubs*;
 - *Stub* em paralelo com a linha colocado a uma distância d da carga onde a condutância de entrada normalizada é $g = 1$ ($0.02mS$ numa linha de $Z_0=50\Omega$);
 - Cria um circuito ressonante paralelo (impedância infinita) com a susceptância de entrada da linha;
 - *Stub* série (menos usado por dificuldade de implementação)
 - Promoveria adaptação por uma ressonância série a uma distância d da carga onde a parte resistiva da impedância de entrada normalizada é $r = 1$ (50Ω numa linha de $Z_0=50\Omega$)



Adaptação com um *stub* paralelo

➤ Determinação da localização do *stub* e o seu comprimento:

- Representar Z_L e obter y_L
- Deslocar y_L numa circunferência de VSWR (ou $|\rho|$) constante no sentido do gerador até encontrar a circunferência de condutância $g = 1$; (plano π^-)
- Temos duas soluções para a distância d (d_1 e d_2) por cada $\lambda/2$;
- A susceptância de y_{π^-} deverá formar um circuito ressonante com o *stub* de admitância $y_{stub} = jb_s$
- Temos duas soluções do tipo $y_{\pi^-} = 1 + jbs$
- A admitância vista de π^+ será $y_{\pi^+} = 1 + j0$
- Dimensionar o comprimento do *stub* l_s



Bibliografia:

- Pedro Pinho, Armando Rocha e José Pereira, “*Propagação Guiada de Ondas Eletromagnéticas*”. GEN/LTC, Julho de 2014;
- José R. Pereira e Pedro Pinho “*Using the Smith Chart in a E-learning Approach*”, capítulo de E-Learning-Organizational Infrastructure and Tools for Specific Areas, InTech, ISBN 979-953-307-686-6, Dezembro de 2011;
<http://www.intechopen.com/download/get/type/pdfs/id/28701>
- José R. Pereira e Pedro Pinho “*Using modern tools to explain the use of the Smith chart*”, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Volume 52, nº 2, página 145 a 150, Abril 2010;
- J. Rocha Pereira e Pedro Pinho “*Bandwidth Analysis of a Single-Stub Matching System Using the Smith Chart*”, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Volume 54, nº 6, página 203 a 206, Dezembro 2012;
- Demonstradores: <http://bit.ly/2m8oBoe>



