Propagação e Radiação de Ondas Eletromagnéticas

2023/2024

Condições fronteira, Equações de Maxwell e Propagação em Meio Material

1) Considere uma onda plana a 300 MHz a propagar-se em espaço livre no sentido do vetor $\hat{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z}$ e com um campo elétrico eficaz de $\vec{E} = 10\hat{x}$ (V/m) medido na origem.

   a) Verifique que $\hat{k}$ é um vetor unitário e que o campo elétrico é compatível com a direção de propagação.

   b) Calcule o vetor campo magnético na origem. *Resp:* $\vec{H} = \frac{\hat{y}-\sqrt{3}\hat{z}}{24\pi}\ (A/m)$

   c) Escreva a equação do campo magnético e do campo elétrico em qualquer ponto do espaço. *Resp:* $\hat{E}(x,y,z) = 10\hat{x}e^{-j\pi(\sqrt{3}y+1z)}\left(\frac{V}{m}\right)$; $\vec{H}(x,y,z) = \frac{\hat{y}-\sqrt{3}\hat{z}}{24\pi}e^{-j\pi(\sqrt{3}y+1z)}(A/m)$

   d) Calcule o vetor campo elétrico e campo magnético no ponto P(10,$\sqrt{3}$,-2). *Resp:* $\vec{E}(P) = -10\hat{x}\ \left(\frac{V}{m}\right)$; $\vec{H}(P) = -\frac{\hat{y}-\sqrt{3}\hat{z}}{24\pi}\ (A/m)$

   e) Calcule o vetor de Poynting. *Resp:* $\vec{S}(x,y,z) = \frac{5}{12\pi}\ \left(\sqrt{3}\hat{y} + \hat{z}\right)$ (W/m²).

2) O campo elétrico instantâneo no interior dum cabo coaxial, com um dielétrico tendo $\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1, \sigma = 0$ e com condutor interior de raio a e raio interno do condutor exterior igual a b, é dado por $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{100}{\rho}cos(10^8 t - \beta z)\hat{\rho}$ (V/m) onde β (rad/m) é a constante de fase (componente imaginária da constante de propagação) e ρ (m) é a distância radial medida a partir do eixo do cabo.

   a) Determine usando as equações de Maxwell na forma pontual, o campo magnético instantâneo e a constante de fase. *Resp:* $\beta = \frac{\boldsymbol{\omega}\sqrt{\boldsymbol{\epsilon_r}}}{\mathbf{c}}$ (rad/m), $\vec{\mathbf{H}} = \frac{100\beta}{\mu_0\rho 10^8}\cos(10^8 t - \beta z)\hat{\phi}\ (A/m)$

   b) Verifique que o campo eletromagnético satisfaz as duas primeiras leis de Maxwell (lei de Gauss).

3) Considere uma onda com um campo magnético dado na forma fasorial por $\vec{\boldsymbol{H}}_s = 2e^{j\beta x}\hat{z}$ (A/m) que se propaga no meio livre (sem perdas e $\epsilon_r = 1, u_r = 1$) na direção de -$\hat{x}$ com uma frequência de 10^6 (rad/s). Usando as equações de Maxwell na forma fasorial calcule β e deduza as expressões dos campos elétrico e magnético no tempo. *Resp:* $\beta = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{c}} = 0.0033\left(\frac{rad}{m}\right)$, $\vec{\mathbf{E}} = -\frac{2\beta}{\varepsilon_0\omega}\cos\left(10^6 t + \frac{1}{3}10^{-2}x\right)\hat{y}$ (V/m), $\vec{\mathbf{E}} = -754\cos\left(10^6 t + \frac{1}{3}10^{-2}x\right)\hat{y}$ (V/m); $\vec{\mathbf{H}} = 2\cos\left(10^6 t + \frac{1}{3}10^{-2}x\right)\hat{z}$ (A/m)

4) Considere uma onda com um campo magnético dado em coordenadas cilíndricas na forma fasorial por $\vec{\boldsymbol{H}}_s = \frac{2}{\rho}e^{-\gamma z}\hat{\phi}$ (A/m) que se propaga no polipropileno (sem perdas e $\epsilon_r = 2.25$) na direção de +$\hat{z}$ com uma frequência angular de $\omega = 10^{10}$ (rad/s) e constante de propagação γ. Determine, usando as eqs de Maxwell na forma fasorial, a expressão do campo elétrico no tempo. *Resp:* $\beta = \frac{\mathbf{w}\sqrt{\boldsymbol{\epsilon_r}}}{\mathbf{c}} = 50$ (rad/m), $\vec{\mathbf{E}} = 502.65\cos(10^{10}t - 50z)\hat{\rho}$ (V/m)

Polarização

5) Considere o vetor bidimensional do campo elétrico $\vec{\boldsymbol{E}} = E_x(t)\hat{x} + E_y(t)\hat{y}$ com variação harmónica no tempo, ao qual corresponde uma amplitude complexa (fasorial) da forma $\vec{\mathrm{E}} = E_x\hat{x} + \mathrm{E_y}\hat{y}$. Represente para os casos que se seguem, a evolução de $\vec{E}(t)$ no plano X0Y, durante um período T (ω=2π/T é a frequência angular) e determine o tipo de polarização sabendo que a onda se propaga no sentido zz⁺.

   a) $\vec{\mathrm{E}} = 1\hat{x} + 1\hat{y}$ (V/m). *Resp: Linear a 45º*

   b) $\vec{\mathrm{E}} = 1\hat{x} + \mathrm{j}\hat{y}$ (V/m). *Resp: Circular Esquerda (LHCP)*

   c) $\vec{\mathrm{E}} = 0\hat{x} + 1\hat{y}$ (V/m). *Resp: Linear vertical*

   d) $\vec{\mathrm{E}} = 1\hat{x} + 0.5\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\hat{y}$ (V/m). *Resp: Elíptica Direita (RHEP),*

6) Calcule as perdas de polarização M_L (dB) de uma antena com a polarização da alínea a) ao receber as ondas com polarização das alíneas b), c) e d). *Resp: 3 dB, 3 dB, 6.63 dB.*

Ondas em meios com perdas

7) Uma onda plana uniforme de frequência 10GHz, propaga-se numa amostra de arsenieto de gálio (GaAs, $\varepsilon_r = 12.9, \mu_r = 1, tg\delta = 0.0005$) que é usado como material substrato para circuitos de estado sólido de alta velocidade. Determine, a constante de atenuação em Np/m, a impedância intrínseca do meio e a velocidade de fase. *Resp:* $\alpha = 0.188$ Np/m, *η=105 (Ω), v=8.353x10⁷ (m/s)*

8) A 600MHz e a 2.4GHz, mediu-se uma permitividade relativa de $\epsilon_r = 23.1 - j11.85$ e $\epsilon_r = 12.17 - j4.54$ na massa de pão após uma cozedura durante 10 minutos. Determine a profundidade de penetração para ambas as frequências e compare os resultados. *Resp:* $\delta_{600\mathrm{MHz}} = 6.65$ (cm), $\delta_{2.4\mathrm{GHz}} = 3.11$(cm)

9) Uma terra húmida à frequência de 1 MHz tem os seguintes parâmetros: $\sigma = 10^{-1}$ (S/m); $\varepsilon_r = 4$; $\mu_r = 1$. Considerando que uma onda plana incidente na terra produz à superfície, mas já dentro da terra, um campo elétrico de $E = 3x10^{-2}$ (V/m), determine:

   a) A distância que a onda deve percorrer para que o campo passe ser $E = 1.104\, x10^{-2}$ (V/m). *Resp: Meio bom condutor; d=1.59 (m).*

   b) A atenuação sofrida em dB, na alínea a). *Resp: A=8.68 dB*

   c) O comprimento de onda dentro da terra. *Resp: λ=10 (m)*

   d) A velocidade de fase dentro da terra. *Resp: v=10^7 (m/s)*

   e) A impedância própria da terra. *Resp: η=6.283(1+j) (Ω).*

Condições Fronteira e equações de Maxwell

10) Responda às seguintes questões.

   a) Num determinado plano o campo densidade de fluxo magnético é dado por $\vec{B} = (y + 2x)\hat{x} +$

$(x + ay)\hat{y}$ (Wb/m^2). Calcule o valor de a para o campo poder ser representado pela equação acima. *Resp*: $a = -2$.

b) Considere uma densidade de corrente dada por $\vec{J}(x) = \frac{1}{1+x^2}\hat{x}(A/m^2)$. Calcule a taxa de variação da densidade volúmica de carga. *Resp:* $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ *(C/m^3s^{-1})*

11) Considere o plano XoY como a superfície de separação de dois meios. O meio 2 para $z > 0$ tem uma permitividade relativa de $\epsilon_{r2} = 1$ (ar) e o meio 1 ($z < 0$) uma permitividade relativa $\epsilon_{r1} = 4$.

a) Sabendo que o vetor campo elétrico no meio 1 é dado por $\vec{E}_1 = 2\hat{x} + 1\hat{y} + 2\hat{z}$ (V/m) calcule o campo elétrico no meio 2. *Resp:* $\vec{E}_2 = 2\hat{x} + 1\hat{y} + 8\hat{z}$ *(V/m)*

b) Suponha agora uma distribuição de carga na superfície de separação dos meios com uma densidade superficial de $\rho_s = \frac{10^{-9}}{12\pi}$ (C/m^2). Calcule o campo elétrico no meio 2. *Resp:* $\vec{E}_2 = 2\hat{x} + 1\hat{y} + 11\hat{z}$ *(V/m)*

12) Considere o plano XoY como a superfície de separação de dois meios. O meio 2, para $z > 0$, tem uma permitividade relativa de $\mu_{r2} = 1$ (ar) e o meio 1 ($z < 0$) uma permitividade relativa $\mu_{r1} = 2$.

a) Assumindo o vetor campo magnético no meio dado por $\vec{H}_1 = \hat{x} + 2\hat{z}$ (A/m) calcule o campo magnético no meio 2. *Resp:* $\vec{H}_2 = \hat{x} + 4\hat{z}$ *(A/m)*

b) Calcule o campo densidade de fluxo B no meio 1. *Resp:* $\vec{B}_1 = \frac{(\hat{x}+2\hat{z})}{36\pi}10^{-9}$ *(W/m^2)*

c) Suponha que desliza sobre a superfície de separação dos meios uma densidade linear de corrente dada por $\vec{J} = 1\vec{y}$ (A/m). Calcule o campo magnético no meio 1. *Resp:* $\vec{H}_2 = 2\hat{x} + 4\hat{z}$ *(A/m)*

Reflexão de ondas planas

13) Uma onda plana uniforme com $\boldsymbol{\vec{H}}_i = \cos(\omega t - \beta_1 z)\hat{y}$ (A/m), propaga-se no meio 1, caracterizado por $\epsilon_{r1} = 9$, $\mu_{r1} = 1$, $\sigma_1 = 0$. A onda encontra um outro material, magnético, na região 2, z> 0, caracterizado por $\epsilon_{r2} = 1$, $\mu_{r2} = 9$. Se ω= $3x10^9$ (rad/s), determine o campo elétrico transmitido para o meio 2. *Resp:* $\vec{\mathbf{E}}_t = 72\pi\cos(3x10^9 t - 30z)\hat{x}$ *(V/m)*

14) Quando uma onda plana se propaga no ar e incide perpendicularmente numa superfície plana sem perdas, mede-se um coeficiente de reflexão de $\Gamma = -0.25$ e verifica-se que a velocidade de fase da onda transmitida é reduzida por um fator de 3. Determine a permitividade e a permeabilidade do material. *Resp:* ε_r*=5;* μ_r*=1.8*

15) Uma onda plana propagando-se no ar incide perpendicularmente numa face plana de um dielétrico com $\varepsilon_r = 4$ e $\mu_r = 1$. O campo elétrico incidente tem uma amplitude de $2x10^{-3}$ V/m e a frequência é 3 GHz. Determine:

a) O coeficiente de reflexão. *Resp:* $\Gamma = -1/3$

b) O SWR no ar. *Resp:* $SWR = 2$

c) As posições, no ar, onde ocorrem os máximos e os mínimos do campo elétrico. *Resp:* d_{max}*=0.025n (m) com n=1, 3, 5,..;* d_{min} *=0.025n (m) com n=0, 2, 4,..*

d) Os valores máximos e mínimos do campo elétrico no ar. *Resp:* E_{Max}=*2.67x10*$^{-3}$ *(V/m)* ; E_{Min}=*1.33x10*$^{-3}$ *(V/m)*

16) Uma onda plana propagando-se num meio dielétrico com $\epsilon_r = 4;\ \ \mu_r = 1$, incide perpendicularmente no espaço livre ($\epsilon_r = 1;\ \ \mu_r = 1$). Supondo que o campo elétrico incidente em valor eficaz é dado por: $\vec{\boldsymbol{E}}_i(z) = 2x10^{-3}e^{-j\beta z}\hat{\boldsymbol{y}}$ (V/m), determine:

a) O respetivo campo magnético incidente. *Resp:* $\vec{\mathbf{H}}_\mathrm{i}(\mathrm{z}) = -\frac{1}{30\pi}10^{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta\mathrm{z}}\hat{\mathrm{x}}$ (A/m)

b) Os coeficientes de reflexão e transmissão. *Resp:* $\Gamma = 1/3;\ \mathrm{T} = 4/3$

c) Os campos elétricos e magnéticos da onda refletida e da onda transmitida. *Resp:* $\vec{\mathbf{E}}_\mathrm{r}(z) = \frac{2}{3}x10^{-3}e^{+j\beta z}\hat{\boldsymbol{y}}$ *(V/m)*; $\vec{\mathbf{H}}_\mathrm{r}(\mathrm{z}) = \frac{1}{90\pi}10^{-3}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\beta\mathrm{z}}\hat{\mathrm{x}}$ (A/m); $\vec{\mathbf{E}}_\mathrm{t}(z) = \frac{8}{3}x10^{-3}e^{-j0.5\beta z}\hat{\boldsymbol{y}}$ *(V/m)*; $\vec{\mathbf{H}}_\mathrm{t}(\mathrm{z}) = -\frac{1}{45\pi}10^{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\beta\mathrm{z}}\hat{\mathbf{x}}$ (A/m)

d) As densidades médias das potências incidente, refletida e transmitida. *Resp*: $S_i = 21.22\ (nW/m^2)$; $S_r = 2.36\ (nW/m^2)$; $S_t = 18.86\ (nW/m^2)$. *Nota: Repare que:* $S_i - S_r = S_t$

17) Uma onda plana de polarização circular esquerda (LHCP) incide perpendicularmente num determinado meio. Caracterize a polarização da onda refletida se o meio for um plano condutor perfeito (PEC- Perfect Electrical Conducting).

18) Uma onda plana propagando-se no espaço livre incide segundo um ângulo de incidência θ_i =52º num dielétrico sem perdas com ε_r=*4*.

a) Supondo que, relativamente ao plano de incidência, a onda incide na polarização perpendicular, determine as expressões que dão a fração da energia incidente que é refletida e transmitida.

b) Repita a alínea a) supondo que a onda tem polarização paralela.

c) Calcule a percentagem da energia incidente que é refletida e transmitida em ambos os casos.

19) Uma onda com campo elétrico de amplitude 10 (V/m) (eficaz) e λ de 1 m propagando-se no ar (meio 1) incide num meio (meio 2) de vidro ε_{2r}=5 com um ângulo de incidência de 45º. Assumindo a incidência em polarização perpendicular:

a) Calcule o ângulo de reflexão. *Resp:* $\theta_\mathrm{i} = \theta_\mathrm{r}$=*45º*

b) Calcule o ângulo de transmissão. *Resp:* θ_t=*18.4º*

c) Calcule as amplitudes (valor eficaz) do campo elétrico da onda refletida e da transmitida. *Resp:* $\Gamma_\perp = -0.5, T_\perp = 0.5, E_{r0} = -0.5 * 10\ (V/m);\ E_{t0} = 0.5 * 10\ (V/m)$

d) Calcule o comprimento de onda e a impedância do meio 2. *Resp:* λ*=0.45 m;* η_2*=168.6 Ω*

e) Calcule o módulo do vetor de Poynting de todas as ondas. *Resp:* $\mathrm{S_t} = \mathrm{Real}(\mathrm{E_t x H_t^*})$*=0.148 (W/m²)* $\mathrm{S_i}$*=0.265 (W/m²)*, $\mathrm{S_r}$*=0.066 (W/m²)*

f) Mostre que a potência que atravessou uma área arbitrária *A* no plano refletor para o meio 2 é igual à potência incidente menos a potência refletida que atravessa essa mesma área. *Resp*: $0.141\ (W/m^2)$.

g) Escreva a equação vetorial de todos os campos.

20) Suponha agora a incidência, ainda em polarização perpendicular, do meio mais denso (ε_{1r}=5) no meio menos denso ($\varepsilon_{2r} = 1$) com θ_i=20º.

a) Calcule $\Gamma_\perp$ e $T_\perp$. *Resp:* θ_t=*49.9º*, $\Gamma_\perp$=*0.53*, $T_\perp$=*1.53*
b) Que acontece, nas condições da alínea anterior, para θ_i=60º? *Resp: Reflexão interna total*
c) Qual o valor de $\Gamma_\perp$? *Resp:* $\Gamma_\perp = -0.375 + 0.927i$

21) Calcule os ângulos de Brewster e críticos para uma onda plana com polarização paralela, quando incide nas seguintes condições:

a) Da água (ϵ_r=81) para o ar. *Resp:*$\theta_{ib} = 6.34^0; \theta_{ic} = 6.38^0$
b) Do ar para a água. *Resp:* $\theta_{ib} = 83.66^0 \quad \theta_{ic} = --^0$
c) Do vidro (ϵ_r=9) para o ar. *Resp:* $\theta_{ib} = 18.43^0$; $\theta_{ic} = 19.47^0$
d) Da água para o vidro. *Resp:* $\theta_{ib} = 18.43^0$; $\theta_{ic} = 19.47^o$

22) Uma onda com polarização paralela (sistema de eixos dos diapositivos), E=10V/m (eficaz) e λ=1m incide do ar num meio (meio 2) com ε_{2r}=5.

a) Calcule o ângulo de Brewster. *Resp:* θ_{iB}=*65.9º*
b) Calcule o ângulo de transmissão correspondente a uma incidência segundo o ângulo de Brewster. *Resp:* θ_{tB}=*24.1º*
c) Calcule o ângulo de transmissão e os coeficientes **ΓII** e **TII** para um ângulo de incidência de θ_i=45º. *Resp:* θ_t=*18.4º;* Γ_{II} =*-0.25;* T_{II}=*0.559*
d) Calcule os coeficientes **ΓII** e **TII** para um ângulo de incidência de $\theta_i = \boldsymbol{\theta_{iB}}$**.** *Resp*: $\Gamma_{II} = 0$; $T_{II} = 0.447$.

23) Considere uma onda com polarização linear que faz 45º com o plano de incidência, f=3 GHz e $E = 2\sqrt{2}\ (V/m)$ a incidir do ar ($\varepsilon_{r1} = 1$) em alumina (ε_{r2}=9). Assumindo o sistema de eixos considerado na análise teórica destes problemas:

a) Escreva a equação vetorial do campo elétrico incidente nas polarizações ⊥ e ||.
b) Calcule o ângulo de Brewster e o ângulo de transmissão θ_t correspondente. *Resp:* θ_{iB}=*71.56º*, θ_t=*18.43º*
c) Considerando agora a incidência segundo o ângulo de Brewster.
   - Calcule Γ e T para as polarizações ⊥ e ||. *Resp: ⊥ (-0.8, 0.2); || (0, 0.334)*
   - Escreva as equações para o campo elétrico da:
     - Onda refletida para as polarizações ⊥ e ||;
     - Onda transmitida para polarizações ⊥ e ||.
d) Calcule o vetor de Poynting no meio de alumina ainda para a incidência com o ângulo de Brewster.

24) Suponha agora a incidência da alumina (agora ε_{r1}=9) para o ar (ε_{r2}=1)

a) Calcule o ângulo crítico para incidência da alumina para o ar. *Resp:* θ_{ic}=*19.47º*
b) Assumindo θ_i=45º calcule $sin(\theta_t)$ e $cos(\theta_t)$ (repare que $cos(\theta_t)$ tem duas soluções). *Resp:* $\sin(\theta_t) = 1.5\sqrt{2}$ *e* $\cos(\theta_t) = \pm j\sqrt{3.5}$
c) Escreva a equação genérica do campo elétrico transmitido para polarização ⊥ escolhendo primeiro o valor adequado para $cos(\theta_t)$. *Resp: Deve escolher a solução com a parte imaginária negativa pois é a única que dará um campo transmitido atenuando-se para o interior do meio 2.*

d) Calcule $\mathbf{\Gamma}_\perp$ e $\mathbf{T}_\perp$ para as duas polarizações. *Resp:* $\Gamma_\perp = 0.125+j0.992$; $T_\perp=1.125+j0.992$

e) Termine a escrita da equação do campo elétrico transmitido.

Leis de Maxwell, Constantes e Formulário

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}\ (F/m)$	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ (H/m)$
$\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_T + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\theta_{iB} = sen^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}+\varepsilon_{2r}}} = arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}}}$	$sen(\theta_{ic}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}}}$
$\Gamma_\perp = \frac{cos(\theta_i) - \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}{cos(\theta_i) + \sqrt{\frac{\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}} - sen^2(\theta_i)}}$	$\Gamma_{\|\|} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\left(1-\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}sen^2(\theta_i)\right)} - cos(\theta_i)}{\sqrt{\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}\left(1-\frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}sen^2(\theta_i)\right)} + cos(\theta_i)}$
$T_\perp = 1 + \Gamma_\perp$	$T_{\|\|} = (1+\Gamma_{\|\|})\frac{cos(\theta_i)}{cos(\theta_t)}$