Cinemática inversa de um manipulador por métodos numéricos

Vítor Santos

Universidade de Aveiro, Mar 2025

Introdução

Para além da importância para o planeamento de trajetória no espaço operacional, o recurso ao jacobiano inverso permite fazer o cálculo da cinemática inversa através do cálculo de deslocamentos virtuais incrementais das juntas de forma iterativa.

O problema em causa é: dado $\boldsymbol{r}$ da posição da ponta do robô no espaço operacional, determinar o valor das suas juntas $\boldsymbol{q}$ que corresponde a essa posição. Assim, os passos do procedimento são:

1. Definir um valor inicial $\boldsymbol{q}_0$ – estimativa inicial das juntas. Na verdade, não tem de ser muito rigorosa e muitas vezes até poderá ser um vetor nulo, embora possa ter outras implicações, como se verá adiante.
2. $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{F}_\text{D}(\boldsymbol{q}_0)$, onde $\boldsymbol{F}_\text{D}$ é a cinemática direta do robô.
   - 2.1. $\Delta\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n$
   - 2.2. `if` $||\Delta\boldsymbol{r}_n|| < \epsilon_\text{tol} \Rightarrow$ `GoTo` passo 3
   - 2.3. $\Delta\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{J}_\text{I}\Delta\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}}$
   - 2.4. $\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + \Delta\boldsymbol{q}_n$
   - 2.5. `GoTo` passo 2.1.
3. Termina o cálculo e $\boldsymbol{q}_n$ é a solução

A tolerância ϵ_tol é um valor ajustável e depende da exatidão pretendida para o resultado, por exemplo 10^{-6}.
Nesta metodologia dois pontos se revelam importantes:

- Definir $||\Delta\boldsymbol{r}||$
- Calcular $\boldsymbol{J}_\text{I}$

Erro de posição e orientação

O vetor $\Delta\boldsymbol{r}$ tem duas componentes principais: $\Delta\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{r}_\text{pos}\\ \Delta\boldsymbol{r}_\text{ori}\end{bmatrix}$ e a norma a usar para $||\Delta\boldsymbol{r}||$ será a euclidiana.

- $\Delta\boldsymbol{r}_\text{pos} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix}x - x_n\\ y - y_n\\ z - z_n\end{bmatrix}$, sendo:
  - $\boldsymbol{r}$ a posição desejada
  - $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}}$ a posição corrente
- $\Delta\boldsymbol{r}_\text{ori} = \text{vee}\left(\boldsymbol{R}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}_{3\times3}\right)$ sendo
  - $\boldsymbol{R}_n$ a matriz de rotação atual
  - $\boldsymbol{R}$ a matriz de rotação desejada
  - $\boldsymbol{R}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{R}$ é por vezes designada matriz de rotação relativa entre as duas posições.

O operador vee(.) extrai um vetor de uma matriz anti-simétrica ($\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = -\boldsymbol{A}$).
A matriz $\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{R}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}_{3\times3}\right)$ é aproximadamente anti-simétrica, logo,
Se $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix}0 & -E_{21} & E_{13}\\ E_{21} & 0 & -E_{32}\\ -E_{13} & E_{32} & 0\end{bmatrix}$ então $\text{vee}(\boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix}E_{32}\\ E_{13}\\ E_{21}\end{bmatrix} = \Delta\boldsymbol{r}_\text{ori}$.
Este vetor representa os desvios angulares na orientação.
Há outras formas de calcular $\Delta\boldsymbol{r}_\text{ori}$ usando produtos externos de vetores, mas esta solução é mais compacta.

Cálculo do jacobiano inverso

Para obter $\boldsymbol{J}_\mathrm{I}$ pode-se usar $\boldsymbol{J}^{-1}$ se possível ($\boldsymbol{J}$ deve ser quadrado e não singular). Porém, numericamente a solução não é robusta próximo de singularidades e por isso recomenda-se usar a pseudo-inversa: $\boldsymbol{J}^+$.

O uso da pseudo-inversa $\boldsymbol{J}^+$ para $\boldsymbol{J}_\mathrm{I}$ é necessário para $\boldsymbol{J}$ não quadrado, e é igualmente apropriado, e totalmente funcional, para $\boldsymbol{J}$ quadrado.

Se $\boldsymbol{J}$ (com dimensões $m \times n$) for de característica máxima, pode-se usar a seguinte definição:

$$\boldsymbol{J}^+ = \begin{cases} \boldsymbol{J}^\intercal \left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^\intercal\right)^{-1} & \Leftarrow m \leqslant n \\ \boldsymbol{J}^{-1} & \Leftarrow m = n \\ \left(\boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J}\right)^{-1}\boldsymbol{J}^\intercal & \Leftarrow m \geqslant n \end{cases}$$

Porém, se essas condições não se verificarem e para se manter robustez numérica mesmo nessas situações (casos de sub- e sobreactuação ou redundância cinemática), recorre-se à decomposição em valores singulares (*singular value decomposition* – SVD).

Essa formulação está implementada em muitas aplicações de *software* como Matlab, e outros. Em matlab pode ser invocada com a função `pinv()`. Apenas para efeitos ilustrativos refere-se que:

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{V}\end{bmatrix} = \mathrm{svd}(\boldsymbol{J})$, sabendo-se que $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\intercal$ e que virá como solução para $\boldsymbol{J}^+$:

$\boldsymbol{J}^+ = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^+\boldsymbol{U}^\intercal$. Em Matlab basta invocar `pinv(J)` para obter $\boldsymbol{J}^+$.

Extensão e limitações da abordagem

Em alguns casos, mormente com grande redundância do manipulador ou com pontos de destino próximos de singularidades, faz-se o cálculo do jacobiano inverso pelo método dos mínimos quadrados amortecidos (*Damped Least Squares* – DLS).

$\boldsymbol{J}_\mathrm{IDLS} = \left(\boldsymbol{J}^\intercal\boldsymbol{J} + \lambda^2\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{J}^\intercal$

onde $\lambda > 0$ e com valores "pequenos", por exemplo $\lambda \in [0.01, 0.1]$

O termo matricial introduzido por λ assegura estabilidade numérica próximo de singularidades, ou seja, permite que o cálculo se faça mesmo que a solução real não possa ser atingida, mas será sempre atingida uma solução próxima.

Por outro lado, existe uma questão que não pode ser descurada. As redundâncias do manipulador (que surgem de forma automática na via analítica da cinemática inversa) não surgem da mesma forma na abordagem numérica porque o sistema converge para uma solução que depende da solução aproximada com que o algoritmo se inicia.

Assim, para permitir que o processo convirja para uma outra redundância da cinemática inversa, será preciso indicar uma solução inicial em que pelo menos o valor de uma das juntas esteja mais próximo dos valores de junta dessa redundância.