

Análise de Circuitos em DC

Conteúdo

1	Variáveis de Circuito (Revisão).....	2
1.1	Enquadramento	2
1.2	Sistemas Elétricos, Modelos e Teoria de Circuitos	3
1.3	Sistema Internacional de Unidades	3
1.4	Carga, Corrente, Tensão e Potência.....	4
2	Elementos básicos de Circuito	6
2.1	Elemento de circuito básico ideal	6
2.2	Elementos Ativos (Fontes de Tensão e Fontes de Corrente).....	7
2.3	Elementos Passivos (Resistência ou condutância, Capacidade e Indutância)	11
2.4	Circuitos Lineares	15
3	LEIS FUNDAMENTAIS de Análise de Circuitos: KLC* E KLV**	16
3.1	Nomenclatura dos circuitos	16
3.2	Lei de Kirchhoff da corrente	17
3.3	Lei de Kirchhoff de queda de tensão	18
4	Circuitos Resistivos.....	19
4.1	Associação de Resistências e Condutâncias.....	19
4.2	Equipamentos de Medida	21
4.3	Métodos sistemáticos de equacionar circuitos	22
4.3.1	Método das Tensões Nodais	22
4.3.2	Método das Correntes de Malha (este método não faz parte do atual programa da disciplina)	25
4.3.3	Opção entre os dois Métodos (Nodal, Malhas)	27
4.4	Equivalente de Thevenin e Equivalente de Norton	27
4.4.1	Conceito	27
4.4.2	Cálculo do Equivalente de Thevenin, Método Paramétrico	29
4.4.3	Cálculo do Equivalente de Norton, Método Paramétrico.....	30
4.4.4	Teorema da Máxima Transferência de Potência	31
4.5	Princípio da Sobreposição.....	31

Nota introdutória

Este documento resume os conceitos fundamentais abordados nas aulas. Não substitui as aulas, nem segue rigorosamente o plano de aulas!

Cada conceito é acompanhado de um exemplo de aplicação para entender o mecanismo de resolução. Nesta primeira parte é necessário o estudante perceber como os outros fazem, para em seguida ganhar autonomia e competências na resolução de problemas. O treino é parte fundamental do processo de aprendizagem.

Pode começar pelos problemas propostos, que mecanizam os processos. Depois resolva problemas presentes nos livros aconselhados ou noutros, onde existem aplicações tiradas da vida real.

Se em qualquer dos passos tiver dúvidas esclareça com os professores, com os colegas e via “Forum de Dúvidas”, no site da disciplina do E-learning. Este fórum pode funcionar como uma aula on-line onde todos devem participar e o contributo de cada um é valioso para o grupo.

1 VARIÁVEIS DE CIRCUITO (REVISÃO)

1.1 ENQUADRAMENTO

A Engenharia Eletrotécnica (Electrical Engineering), é uma área desafiadora e entusiasmante para qualquer pessoa com gosto pelas ciências aplicadas. Textos egípcios antigos datados de 2750 a.C. descreveu o peixe-gato elétrico como o “Trovão do Nilo”. No século 5 (AC) o filósofo Tales de Mileto (624 a.C.-558 a.C.) observou que alguns objetos atraíam outros, após serem submetidos a algum tipo de fricção. Em 1751, Benjamin Franklin publicou o livro “Experiments and Observations on Electricity” que catapultou o grande desenvolvimento da eletricidade experimental. Ao longo do século 19, vários inventos apareceram: - A primeira verdadeira bateria (Alexandro Volta, 1800), Dínamo elétrico (Michael Faraday, 1831), Lâmpada de incandescência prática e acessível (Thomas Edison, 1879), Automóvel elétrico prático (William Morrison, 1890, foram necessários mais 100 anos para surgir o primeiro Veículo Elétrico de produção em massa). Para além do uso energético da eletricidade, o desenvolvimento dos Computadores e das Telecomunicações, tem por base os fenómenos elétricos e eletromagnéticos. Desde há cerca de 2 séculos que a Engenharia Eletrotécnica tem um papel fundamental no desenvolvimento de sistemas que têm alterado o modo como as pessoas vivem e trabalham. Todo o tipo de comunicações (redes, telefones, televisão, ligações de alto débito), computadores, equipamentos médicos, automóveis, autómatos, são exemplos de sistemas que definem a sociedade tecnológica moderna.

O engenheiro participa nesta revolução tecnológica, melhorando estes sistemas e desenvolvendo ou descobrindo novos sistemas que satisfaçam as necessidades da sociedade em permanente mudança. O engenheiro, dum modo geral, é chamado para resolver problemas cuja solução seja desconhecida.

O estudante, na maioria das vezes, é colocado a discutir/resolver problemas já com uma solução.

Analisando como alguns problemas foram resolvidos e resolvendo outros problemas, o estudante está a ganhar competências para abordar problemas de engenharia reais.

Qual o método a usar para simplificar a resolução de um problema? Alguns procedimentos, descritos em seguida, são úteis, mas não são receita única para todos os problemas.

- Identificação dos dados e do pretendido.
- Esboçar um circuito ou outro modelo visual.
- Refletir sobre os vários métodos de resolução e selecionar um.
- Calcular a solução. Ser crítico e criativo na resolução.
- Testar a solução obtida.

1.2 SISTEMAS ELÉTRICOS, MODELOS E TEORIA DE CIRCUITOS

A Engenharia Eletrotécnica (Electrical Engineering), nos seus variados campos como sejam os sistemas de comunicações, sistemas computacionais, sistemas de controlo, sistemas de potência e sistemas de processamento de sinal, opera com dispositivos elétricos.

Os **Circuitos Elétricos** são **modelos de dispositivos elétricos** que permitem analisar, simular ou prever o comportamento de dispositivos elétricos existentes ou em projeto. A Teoria de Circuitos é uma simplificação da teoria de campo eletromagnético, desde que se possam assumir as três condições:

1. Os efeitos elétricos acontecem de forma instantânea em todo o sistema (sistema de parâmetros concentrados ou Lumped Parameter Assumption). Como os sinais elétricos viajam à velocidade da luz, sendo o sistema de tamanho reduzido pode-se assumir esta condição.
2. A carga de qualquer componente é zero (pode haver cargas separadas, desde que $\Sigma q=0$).
3. Não existe acoplamento magnético entre componentes (só pode existir num mesmo elemento).

1.3 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Grandezas e Unidades Base

Grandeza (símbolo)	Unidade (símbolo)	Dimensão de base
comprimento (l)	metro (m)	L
massa (m)	quilograma (kg)	M
tempo (t)	segundo (s)	T
Intensidade corrente elétrica (I)	ampere (A)	I
temperatura (T)	kelvin (K)	Θ
quantidade de matéria (n)	mole (mol)	N
intensidade luminosa (I_v)	candela (cd)	J

Unidades Derivadas

Grandeza (símbolo)	Unidade (símbolo)	Dimensão de base	Equação de definição
frequência (f, ν)	hertz (Hz ou s^{-1})	T^{-1}	$f=1/T$
força (F)	newton (N)	MLT^{-2}	$F=ma$
trabalho (W)	joule (J)	ML^2T^{-2}	$W=F \cdot \Delta r$
energia ϵ	joule (J)	ML^2T^{-2}	
potência (P)	watt (W)	ML^2T^{-2}	$p=dE/dt$
carga elétrica (Q)	coulomb (C)	TI	$Q=It$
potencial elétrico (U)	volt (V)	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	$U=W/Q$
resistência elétrica (R)	ohm (Ω)	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	$R=V/I$
capacidade elétrica (C)	farad (F)	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	$C=Q/U$
fluxo magnético (Φ)	weber (Wb)	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	$\Phi=B \cdot S$
indutância (L)	henry (H)	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	$L=\Phi/I$

1.4 CARGA, CORRENTE, TENSÃO E POTÊNCIA

Características da carga elétrica:

- é bipolar (+ ou -), existindo em quantidades discretas;
- os efeitos elétricos são atribuídos
 - ao movimento de cargas \rightarrow corrente (fluxo elétrico)
 - à separação de cargas \rightarrow ddp (força elétrica)

Corrente ou Intensidade da corrente $i = \frac{dq}{dt}$ (ampere, A)

é o fluxo de cargas por unidade de tempo

Exemplo

Qual a carga deslocada por uma corrente de 2 A durante uma hora? Sendo a carga dum eletrão $1,6E-19$ C, quantos eletrões foram responsáveis por essa corrente?

Resolução

No intervalo de tempo considerado, a carga deslocada é
 $q = 2 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 7200 \text{ C}$
 o número de eletrões é obtido dividindo a carga (total) pela carga de 1 eletrão,
 $N^\circ \text{ Eletrões} = 7200 \text{ C} / (1,6E-19 \text{ C/eletrão}) = 4,5E22 \text{ (eletrões)}$

Conceitos base

Corrente (i)[A], é o fluxo de carga (q)[C], por tempo (t)[s]
 $i=dq/dt$
 ou $q = \int_0^t i \, dt$

A Diferença de Potencial, Tensão ou Queda de Tensão

$$u = \frac{dw}{dq} \quad (\text{volt, V})$$

é o trabalho (energia) realizado sobre uma carga unitária positiva quando se desloca entre dois pontos.

-----Exemplo-----

Sabendo que numa capacidade, q (C) = c (F) * u (V), calcular a energia armazenada numa capacidade (w_c), em função da carga e da tensão aos seus terminais.

Resolução

Partindo da expressão geral $w = \int_0^q u \, dq$

A energia na capacidade é $w_c = \int_0^q \frac{q}{c} \, dq$

Integrando vem $w_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c}$ ou $w_c = \frac{1}{2} cu^2$

Conceitos base

Capacidade (c)[F], é a razão entre a carga armazenada (q)[C] e a queda de tensão (u)[V] entre as placas,
 $c = q / u$

A queda de tensão é o trabalho por unidade de carga $u = dw / dq$
 ou $w = \int_0^q u \, dq$

Potência elétrica

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = ui \quad (\text{watt, W})$$

Sendo a potência a variação da energia por unidade de tempo, a **potência absorvida** por um elemento elétrico é o produto da tensão u pela corrente i (**estando esta a fluir na direção da queda de tensão, esta situação é conhecida por convenção passiva dos sinais**). Se a corrente fluir na direção oposta à queda de tensão, o produto da tensão u pela corrente i , dará um valor de potência simétrico, que é a potência fornecida pelo elemento.

Convenção de sentidos de corrente e de quedas de tensão (nesta disciplina): se nada for indicado, em contrário, considera-se que os sentidos das correntes e das quedas de tensão são de cima para baixo ou da esquerda para a direita.

-----Exemplo-----

Sabendo que numa resistência u (V) = R (Ω) i (A), (com u , e i , de acordo com a convenção passiva dos sinais), calcular a potência dissipada num radiador elétrico, com uma resistência elétrica de 40 ohm quando ligado a uma fonte de tensão contínua de 200 volt.

Resolução

Pela lei de Ohm, obtém-se a corrente na resistência, (R)[Ω]

$i_R = 200 / 40 = 5$; e em seguida a potência dissipada

$$p_r = 200 \times 5 = 1000; \quad p_r = 1 \text{ kW}$$

Conceitos base

Resistência é a razão entre a (queda) de tensão e a (intensidade da) corrente,

$$R = u / i \text{ (lei de Ohm)}$$

e a potência $p = u \times i$ ($= i^2 r = u^2 / r$)

-----Exemplo-----

O consumo médio de um dado automóvel elétrico é de 0,2 kWh por cada km.

Qual o tempo que uma fonte DC de 100 V e 20 A necessita para carregar a energia gasta em 50 km?

Qual o custo desta carga, considerando o preço de 0,20 euro por kWh?

Resolução

energia consumida em 50 km

$$w = 50 \text{ km} * 0,2 \text{ kWh / km} = 10 \text{ kWh}$$

potência disponibilizada pela fonte

$$p = 100 \text{ V} * 20 \text{ A} = 2 \text{ kW}$$

energia disponibilizada pela fonte numa hora é

$$w = 2 \text{ kWh}$$

tempo para se atingirem os 10 kWh

$$t = (10 \text{ kWh}) / (2 \text{ kWh/h}) = 5 \text{ h}$$

custo desta energia é

$$0,20 \text{ €/kWh} * 10 \text{ kWh} = 2 \text{ €}$$

Conceitos base

Potência (p)[W], é a energia (w)[J] por tempo (t)[s] $p = dw/dt$

A Potência Elétrica (p) num elemento é o produto da queda de tensão (u)[V]

pela corrente (i)[A] $p = u i$

O Wh (e os seus múltiplos, kWh, MWh, GWh)) é uma unidade de energia muito usada na contabilização da energia elétrica (produção ou consumo)

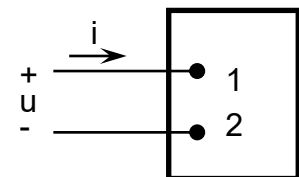
$$1 \text{ kWh} = 1 \text{ (kJ/s)}(3600\text{s}) = 3,6\text{E}06 \text{ J}$$

2 ELEMENTOS BÁSICOS DE CIRCUITO

Para modelar as características elétricas de dispositivos elétricos e eletrónicos reais (p. ex. um forno elétrico, ou um computador), a Teoria dos Circuitos definiu um conjunto de elementos básicos que associados modelam os equipamentos pretendidos.

2.1 ELEMENTO DE CIRCUITO BÁSICO IDEAL

- tem 2 terminais
- é descrito em termos de corrente (i) e/ou tensão (u)
- não se pode subdividir



A escolha dos sentidos definidos para a corrente (i) e para a queda de tensão (u) são arbitrários.

Caso se escolha um sentido oposto o seu valor é simétrico do original. Esta afirmação deriva e pode provar-se das conhecidas Leis de Kirchhoff (a soma das correntes num nó é nula “KLC” e a soma das tensões num percurso fechado é nula “KLV”).

Nesta disciplina usar-se-á preferencialmente a **convenção passiva dos sinais**, em que a **corrente entra no terminal positivo da tensão**, de acordo com a figura acima.

Os **Elementos Básicos Ideais** são divididos **ativos** ou **passivos**.

Os **Ativos** podem fornecer uma potência média positiva num intervalo de tempo infinito: são fontes de energia. Concretamente, um elemento básico ideal ativo é uma **fonte de tensão** ou **fonte de corrente**, independente ou dependente.

Os **Passivos** não têm esta propriedade. Concretamente, um elemento básico ideal passivo pode ser de uma das seguintes categorias: **resistência**, **capacidade** ou **indutância**.

2.2 ELEMENTOS ATIVOS (FONTES DE TENSÃO E FONTES DE CORRENTE)

Elementos Ativos podem fornecer uma potência média positiva num intervalo de tempo infinito. Não esquecer que estamos a tratar de elementos ideais podendo, dentro de determinados limites, modelar dispositivos reais, como uma resistência (dispositivo) e uma bateria.

	Elementos ativos			
	Fonte de tensão independente	Fonte de corrente independente	Fonte de tensão dependente	Fonte de corrente dependente
Símbolos				
Relação u i				
Exemplos				

Exemplos de elementos ativos

- Fontes de Tensão Independente e Dependente ou Controlada**

Uma tomada elétrica doméstica, uma bateria ou pilha elétrica (desde que carregadas) podem ser modeladas por fontes de tensão independentes.

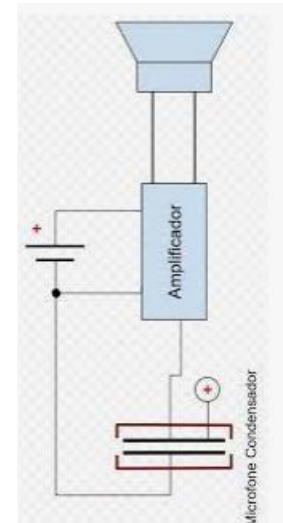
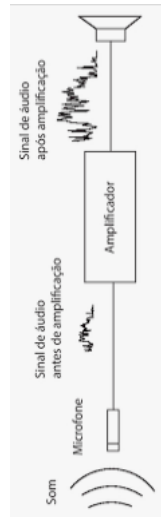
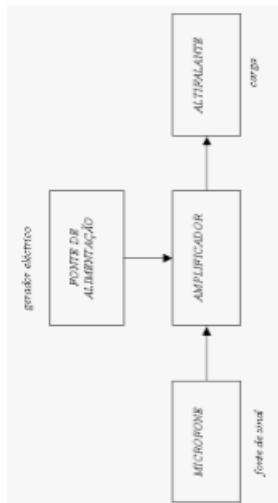
Um amplificador poderá ser representado por uma fonte dependente ou controlada. Como o seu nome indica, a queda de tensão entre os seus terminais é dependente ou controlada por uma corrente ou uma tensão.

Curiosidade:

Uma antena recetora é um sensor de ondas eletromagnéticas que pode ser modelada por uma fonte de tensão. Pesquise de onde deriva a palavra “antena”.

Exemplo

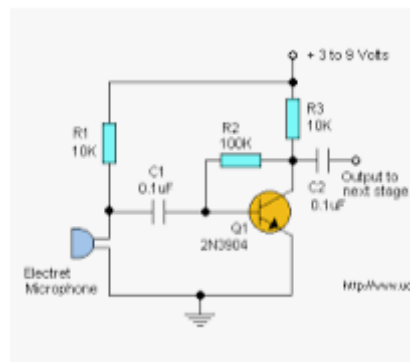
Uma cadeia amplificadora sonora, pode ter várias representações, com diversos graus de abstração. Na última representação é possível obter as quedas de tensão e correntes nos vários elementos.



a) diagrama de blocos (podendo os blocos ser retângulos ou terem a forma dos elementos);



b) foto do dispositivo (um microfone, condensadores, resistências)



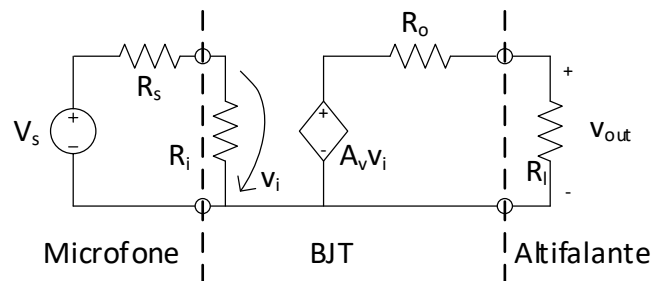
c) representação por símbolos de resistências, condensadores, microfone e transistor (BJT);

Para se obter uma representação que permita usar as leis de Kirchhoff, é necessário que o microfone e o transistor sejam modelados por elementos básicos de circuito.

- o microfone é um conversor mecânico elétrico que pode ser modelado por uma fonte de tensão independente (variável no tempo) associada a uma resistência ou capacidade;

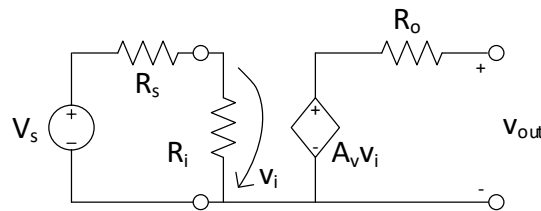
- o amplificador, pode ser modelado por uma fonte dependente, uma vez que a tensão à saída do microfone vai ser amplificada para ter potência suficiente para atuar no altifalante; o conceito de amplificar uma tensão corresponde uma multiplicação ($V_{2out} = k * V_{1in}$), ou seja, a tensão na saída (V_{2out}) é diretamente proporcional à tensão na entrada (V_{1in});
- o altifalante vai converter a energia elétrica em mecânica, pelo que, do ponto de vista elétrico pode ser modelado por um consumidor de energia (R ou G).

Em determinadas condições os condensadores podem ser considerados curto-circuitos (c.c.) ou circuito-aberto (c.a.) simplificando o circuito a analisar.



d) representação do sistema por elementos básicos de circuito.

Exemplo de aplicação



Calcular V_{out} , se $V_s = 1 \text{ mV}$, $R_s = 100 \Omega$, $R_i = 900 \Omega$, $A_v = 500$; $R_o = 100 \Omega$?

Resolução

$$v_i = R_i \frac{V_s}{R_s + R_i} = 900 \frac{1}{100 + 900} = 0,9 \text{ mV}$$

$$v_{out} = A_v v_i = 500(0,9) = 450 \text{ mV}$$

Conceitos base

A corrente em R_o é nula, $\Rightarrow V_{out} = A_v v_i$;

v_i pode obter-se multiplicando R_i pela corrente na malha de entrada

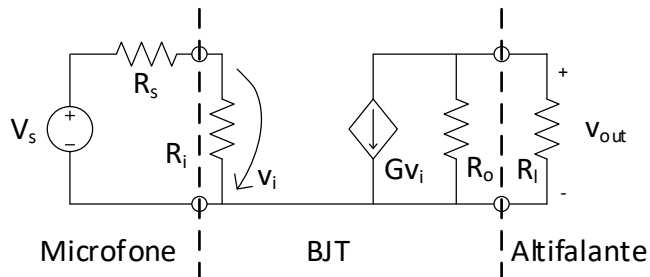
Fontes de Corrente Independente e Dependente ou Controlada

Fontes de corrente independentes são raras no dia a dia.

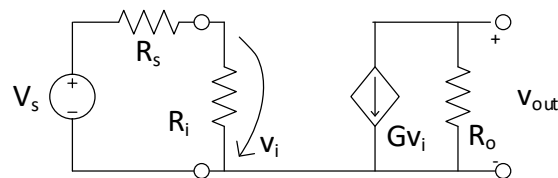
Já fontes de corrente dependentes são muito usadas na modelização de transístores (conhecidos por BJT-Bipolar Junction Transistor).

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior de uma cadeia amplificadora sonora, o mais vulgar é termos dispositivos ativos, transístores (BJT ou FET-Field Effect Transistor) cujos modelos incluem uma fonte de corrente controlada.



Exemplo de aplicação



Calcular V_{out} , se $V_s = 1 \text{ mV}$, $R_s = 100 \Omega$, $R_i = 900 \Omega$, $G = 500$; $R_o = 100 \Omega$?

Resolução

$$v_i = R_i \frac{V_s}{R_s + R_i} = 900 \frac{1}{100 + 900} = 0,9 \text{ mV}$$

$$v_{out} = -R_o G v_i = -(100)(500)(0,9) = -45 \text{ V}$$

Conceitos base

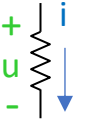
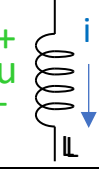
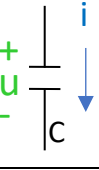
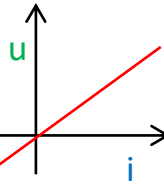
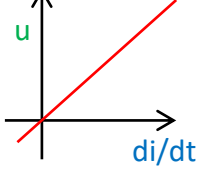
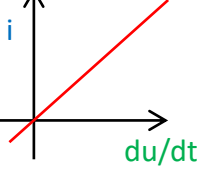

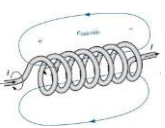
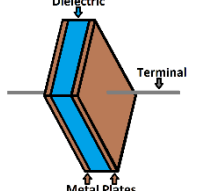
A corrente em R_o é $-G V_i$, $\Rightarrow V_{out} = -R_o G V_i$;

v_i pode obter-se multiplicando R_i pela corrente da malha de entrada

2.3 ELEMENTOS PASSIVOS (RESISTÊNCIA OU CONDUTÂNCIA, CAPACIDADE E INDUTÂNCIA)

Elementos Passivos não podem fornecer uma potência média positiva num intervalo de tempo infinito (R ou G, L, C).

Elemento Passivo, não é capaz de fornecer uma potência média positiva num intervalo de tempo infinito. Uma Resistência modela um dispositivo que converte energia elétrica em energia térmica (ou noutra forma de energia). Uma indutância ou uma capacidade, modelam dispositivos que podem armazenar alguma energia elétrica, e voltar a devolver essa energia ao circuito.

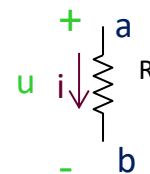
	Elementos passivos		
	Resistência (R) ou Condutância (G)	(auto) Indutância (L)	Capacidade (C)
Símbolos	 $u = Ri$ $i = Gu$ R ou G	 $u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_0$	 $i = C \frac{du}{dt}$ $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_0$
Relação u i			
Exemplos			

-----Exemplos de elementos passivos-----

Uma “lâmpada de filamento” e um “aquecedor” podem ambos ser bem modelados por resistências.



12
PACK



----- Exemplo de aplicação -----

Qual a queda de tensão numa resistência de $1k\Omega$, atravessada por uma corrente de 10 mA.

Resolução

$$u = 1E03 \times 1E-02 = 10 \text{ V}$$

a queda de tensão é de 10 V no sentido da corrente

Conceitos base

$$u = R i ;$$

----- Exemplo de aplicação -----

Qual a queda de tensão numa condutância de 10 mS, atravessada por uma corrente de 10 mA.

Resolução

$$u = 1E-02 / 1E-02 = 1 \text{ V}$$

a queda de tensão é de 10 V no sentido da corrente

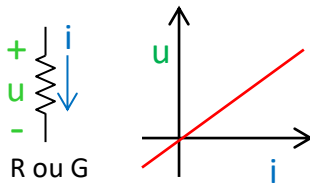
Conceitos base

$$u = i / g ;$$

Conversores de energia (consumidores de energia elétrica)

Convertem a energia elétrica em energia calorífica

Resistência (R) e Condutância (G)



$$u = Ri$$

$$i = Gu$$

$$\frac{du}{di} = R$$

$$\frac{di}{du} = G$$

(ohm, Ω)

(siemens, S)

A resistência e a condutância modelam um dispositivo onde a queda de tensão ou diferença de potencial (ddp), u , é proporcional à corrente, i .

A resistência e a condutância são elementos duais, uma vez que os modelos matemáticos são obtidos por troca de, u por i e de, i por u .

A potência absorvida por este elemento é

$$p_{absorvida} = ui$$

Elementos não ideais que não tenham um comportamento idealmente linear ($u = Ri$), pode definir-se uma resistência em cada ponto da curva $u=f(i)$, como $R=du/di$ ou $G=di/du$

----- Exemplo de aplicação -----

Qual a potência dissipada por uma resistência $0,5 k\Omega$, estando ligada a uma fonte de 5 V? Energia dissipada numa hora?

Resolução

$$i = 5 / 5E02 = 1E-02 \text{ A}; \quad p = 5 \times 1E-02 = 50 \text{ mW}$$

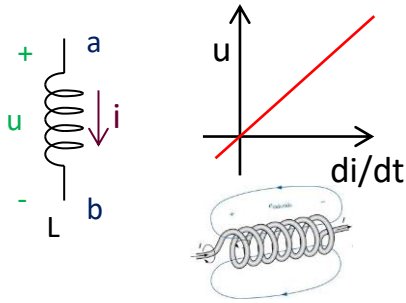
$$w = 5E-02 \times 3,6E02 = 18 \text{ J}$$

Conceitos base

$$u = R i ;$$

$$p = v i$$

$$w = \int p dtw$$

Acumuladores de energia (armazenam e libertam energia elétrica)**Indutância (L)**

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t u \, dt + i_0$$

$$p_{ind} = Li \frac{di}{dt}$$

$$E_{ind} = \frac{1}{2} Li^2$$

$$L = \frac{du}{d(di/dt)}$$

(henry, H)

----- Exemplo de aplicação -----

Qual a corrente numa indutância de 5 mH (sem energia inicial) quando lhe é aplicada uma tensão constante de 5V, o intervalo entre 0 s e 0,1 s? Qual a energia acumulada no instante 0,1 s?

Resolução

$$i(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \int_0^t 5 \, d\tau = 1000t$$

$$i(0,1) = 100 \, \text{A};$$

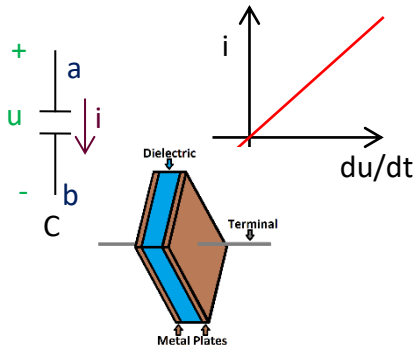
$$E_L = 0,5 \times 5 \times 10^{-3} \times 100^2 = 25 \, \text{J}$$

Conceitos base

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) \, d\tau + i_0$$

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Capacidade (C)



$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + u_0$$

$$p_{ind} = Cu \frac{du}{dt}$$

$$E_{ind} = \frac{1}{2} Cu^2$$

$$C = \frac{di}{d(du/dt)}$$

(faraday, F)

----- Exemplo de aplicação -----

Qual a tensão numa capacidade de 2 μF (sem energia inicial) quando lhe é aplicada uma corrente constante de 5mA, o intervalo entre 0 s e 0,1 s? Qual a energia acumulada no instante 0,1 s? Representar a

Resolução

$$u(t) = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int_0^t 5 \times 10^{-3} \, d\tau = 2500 \, t$$

$$u(0,1) = 250 \, \text{V};$$

$$E_c = 0,5 \times 2 \times 10^{-6} \times 250^2 = 62,5 \times 10^{-3} \, \text{J} =$$

Conceitos base

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) \, d\tau + u_0$$

$$E_c = \frac{1}{2} Cu^2$$

Por L e C serem regidos por equações obtidas por troca de u por i e de i por u , são conhecidos por **duais**.

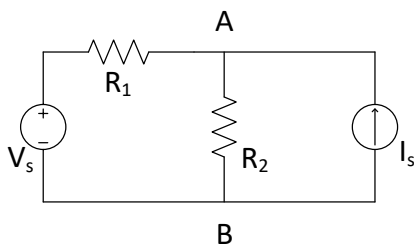
2.4 CIRCUITOS LINEARES

Um circuito constituído pelos elementos básicos descritos é um circuito linear.

As fontes dependentes e os elementos passivos (R, L, C) são descritos por funções que obedecem à definição de função linear.

$$f[k(x_1 + x_2)] = kf(x_1) + kf(x_2)$$

Exemplo de aplicação



Considerar $V_s = 10 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$, $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$. O 10 V .

Mostrar que a tensão U_{AB} , é a soma de 2 parcelas, uma função de V_s e outra função de I_s .

Resolução

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB} - V_s}{R_1} \\ U_{AB}(R_1 + R_2) &= R_1 R_2 I_s + R_2 V_s \\ U_{AB} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s \end{aligned}$$

Conclusão

Pela expressão obtida observamos que V_{AB} varia linearmente com I_s e com V_s .

Na secção 4.5, abordaremos o Princípio da Sobreposição que nos permite estudar os efeitos de cada fonte independente nas grandezas elétricas (u e i) no circuito.

3 LEIS FUNDAMENTAIS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS: KLC* E KLV**

*KLC Kirchhoff Law Current

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

**KLV Kirchhoff Law Voltage

$$\sum_{j=1}^m u_j = 0$$

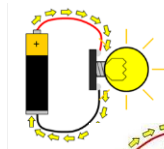
Para resolver (analisar) qualquer circuito recorre-se a pelo menos uma destas duas leis de Kirchhoff.

3.1 NOMENCLATURA DOS CIRCUITOS

Circuito fechado

\Rightarrow

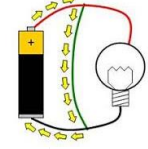
Normal



Curto circuito

\Rightarrow

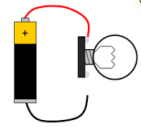
$u=0V$



Circuito aberto

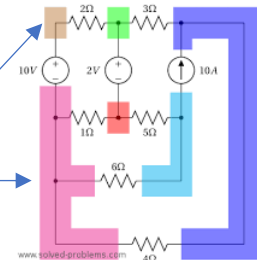
\Rightarrow

$i=0A$



Nó ou Nodo - ponto onde se encontram dois ou mais elementos de circuito

Nó essencial - nó que une pelo menos 3 elementos



Ramo - caminho que liga dois nós

Ramo essencial - ramo que liga dois nós

essenciais sem passar por outro nó essencial

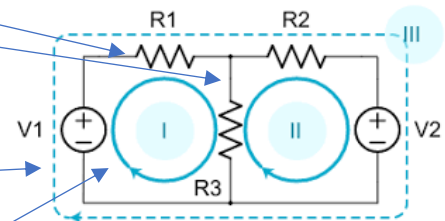
Caminho - percurso com elementos básicos de circuito

incluídos uma única vez

Caminho fechado (loop) - caminho cujo último nó

coincide com o primeiro

Malha - caminho fechado que não inclui outros caminhos fechados



Exemplo de aplicação

Identificar e indicar quantos são os vários parâmetros, no circuito acima.

nós = 4

ramos = 5

caminhos fechados = 3

nós essenciais = 2

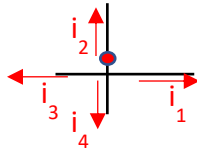
ramos essenciais = 1

malhas = 2

3.2 LEI DE KIRCHHOFF DA CORRENTE

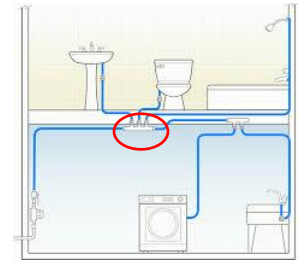
A soma algébrica de todas as correntes que entram ou de todas as correntes que saem de um nó é zero:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$



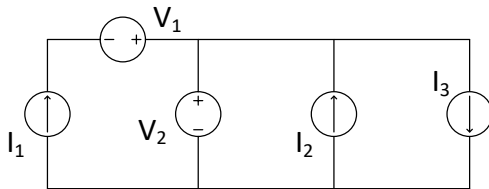
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$-i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0$$



A analogia com um sistema hidráulico pode ajudar a entender esta lei.

----- Exemplo de aplicação -----



Calcular a corrente na fonte de tensão V_2 , em função dos outros elementos do circuito.

Resolução

$$I_{V_2} = I_1 + I_2 - I_3$$

Conceitos base

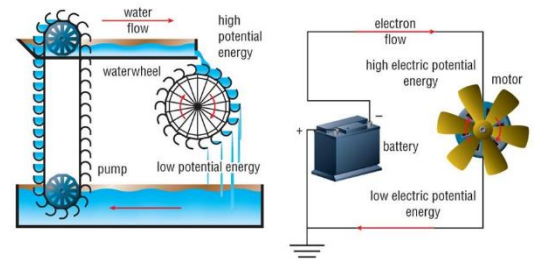
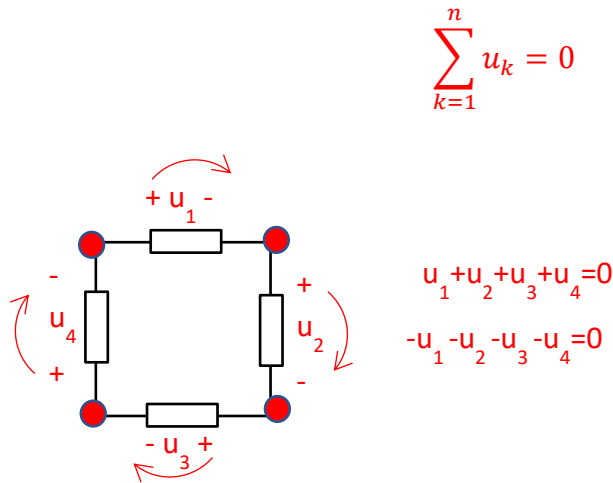
Somatório de correntes num nó é nulo (KLC)

Recorda-se que:

se nada for indicado, em contrário, considera-se que os sentidos das correntes e das quedas de tensão são de cima para baixo ou da esquerda para a direita.

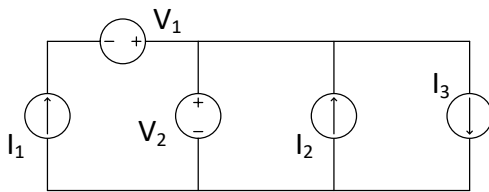
3.3 LEI DE KIRCHHOFF DE QUEDA DE TENSÃO

A soma algébrica de todas as tensões ao longo dum circuito fechado é zero (independentemente do sentido de circulação).



A analogia com um sistema hidráulico pode ajudar a entender esta lei.

----- Exemplo de aplicação -----



Calcular a queda de tensão nas fontes de corrente, em função dos outros elementos do circuito?

Resolução

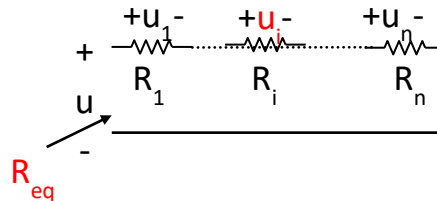
$$\begin{aligned} V_{I1} + (-V_2) + V_1 &= 0 \Rightarrow V_{I1} = V_2 - V_1 \\ V_{I2} + (-V_2) &= 0 \Rightarrow V_{I2} = V_2 \\ V_{I3} + (-V_2) &= 0 \Rightarrow V_{I3} = V_2 \end{aligned}$$

Conceitos base
Somatório de quedas de tensão num circuito fechado é nulo (KLV)

4 CIRCUITOS RESISTIVOS

4.1 ASSOCIAÇÃO DE RESISTÊNCIAS E CONDUTÂNCIAS

Dois ou mais elementos básicos de circuito estão em série, se e só se são percorridos pela mesma corrente



Resistência equivalente

A resistência equivalente de uma resistência em série é igual à soma das resistências:

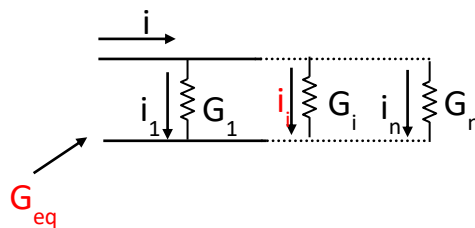
$$R_{eq} = R_1 + \dots + R_i + \dots + R_n$$

Divisor de tensão

A queda de tensão numa resistência “ R_i ” dum conjunto de “ n ” resistências em série, é igual ao produto da tensão global aplicada ao conjunto das resistências pela própria resistência, a dividir pela soma das “ n ” resistências (resistência equivalente série)

$$u_i = u \frac{R_i}{R_1 + \dots + R_i + \dots + R_n}$$

Dois ou mais elementos básicos de circuito estão em paralelo, se e só se têm a mesma queda de tensão nos seus terminais.



Condutância equivalente

A condutância equivalente de uma condutância em série é igual à soma das condutâncias:

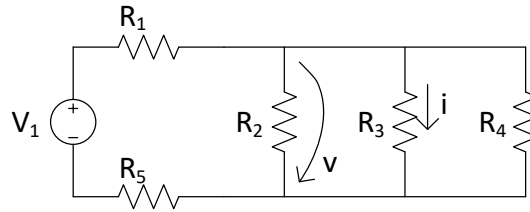
$$G_{eq} = G_1 + \dots + G_i + \dots + G_n$$

Divisor de corrente

A corrente numa condutância “ G_i ” dum de “ n ” condutâncias em paralelo, é igual ao produto da corrente global aplicada ao conjunto das condutâncias pela própria condutância, a dividir pela soma das “ n ” condutâncias (condutância equivalente paralelo)

$$i_i = i \frac{G_i}{G_1 + \dots + G_i + \dots + G_n}$$

Exemplo de aplicação



Considerar $V_1 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 6 \Omega$, $R_5 = 2 \Omega$.

- 1 - Associar as resistências de modo a obter a resistência equivalente vista pela fonte de tensão V_1 ?
- 2 - Calcular a corrente que passa por R_1 .
- 3 – Aplicar o conceito de divisor de tensão para obter a queda de tensão em R_2 , (v).
- 4 - Aplicar o conceito de divisor de corrente para obter a corrente em R_3 , (i).

Resolução

Neste circuito, R_2 , R_3 , R_4 estão em paralelo;
 R_1 , R_5 e $R_{eq(2,3,4)}$ estão em série.

$$\frac{1}{R_{eq(2,3,4)}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{eq(2,3,4)} = 2 \Omega$$

$$R_{eq(1,2,3,4,5)} = R_1 + R_{eq(2,3,4)} + R_5 = 5 \Omega$$

$$i_{R1} = 10 / 5 = 2 \text{ A}$$

$$v_{R2} = V_1 (R_{eq(2,3,4)} / (R_1 + R_5 + R_{eq(2,3,4)})) = 4 \text{ V}$$

$$i_{R3} = i_{R1} (G_3) / (G_2 + G_3 + G_4) = 1,333 \text{ A}$$

Conceitos base

Associar condutâncias em paralelo

$$G_{eq} = G_1 + \dots + G_i + \dots + G_n \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Associar resistências em série

$$R_{eq} = R_1 + \dots + R_i + \dots + R_n \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \dots + \frac{1}{G_i} + \dots + \frac{1}{G_n}$$

Divisor de tensão

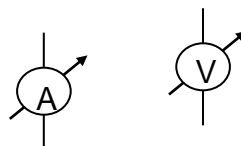
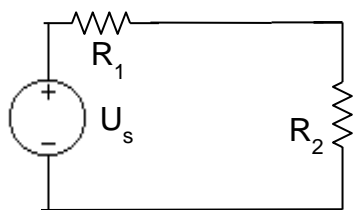
$$u_i = u \frac{R_i}{R_1 + \dots + R_i + \dots + R_n}$$

Divisor de corrente

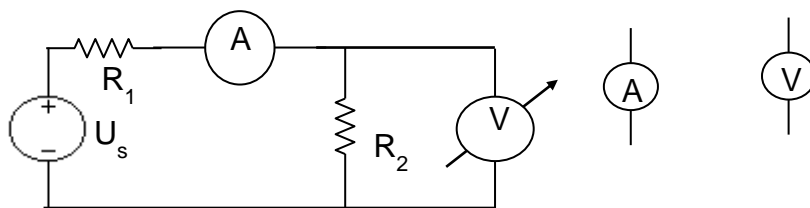
$$i_i = i \frac{G_i}{G_1 + \dots + G_i + \dots + G_n}$$

4.2 EQUIPAMENTOS DE MEDIDA

Multímetro: Voltímetro, Amperímetro e Ohmímetro



Circuito elétrico onde se pretende medir a corrente e a queda de tensão em R_2 .



Esquema equivalente com o Amperímetro colocado em série com R_1 e o Voltímetro colocado em paralelo com R_2 .

Um voltmímetro digital tem por base um conversor analógico-digital (ADC) e um display alfanumérico. Um amperímetro (e o ohmímetro) pode ser construído a partir dum voltmímetro.

Todos os dispositivos elétricos têm uma resistência equivalente: é o caso de um aquecedor, de uma máquina elétrica ou de uma bateria.

No caso de um equipamento de medição, como o multímetro, o conhecimento desta resistência equivalente permite quantificar a alteração das correntes e tensões do circuito original quando o equipamento é ligado.

Idealmente a Resistência Equivalente do Amperímetro deve ser nula (curto-circuito) e ao passo que a Resistência Equivalente do Voltímetro deve ser infinita (circuito aberto).

Exemplo

Considere que no circuito em cima, $U_s = 10\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$.

Aplicando a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff, ou Associando as resistências, ou através da simplificação do Divisor de Tensão concluímos que a corrente em R_1 é 5 mA e a queda de tensão em R_2 é 5 V.

Considere um Multímetro (pouco ideal) que a funcionar Amperímetro tem $R_{Aeq} = 100\ \Omega$, a operar como voltmímetro tem $R_{Veq} = 10\text{ k}\Omega$ e que o equipamento de medida está perfeitamente calibrado.

Colocando o Amperímetro, em série com R_1 , iremos medir $i = 4,76\text{ mA}$

Colocando o Voltímetro, em paralelo com R_2 , iremos medir $v = 4,76\text{ V}$

Se colocarmos 2 Multímetros (um como Amperímetro e outro como Voltímetro) iremos medir $i = 4,98\text{ A}$ e $v = 4,52\text{ V}$.

Obtenha estes valores, com base nos conhecimentos adquiridos anteriormente.

4.3 MÉTODOS SISTEMÁTICOS DE EQUACIONAR CIRCUITOS

Em primeiro lugar é importante frisar que:

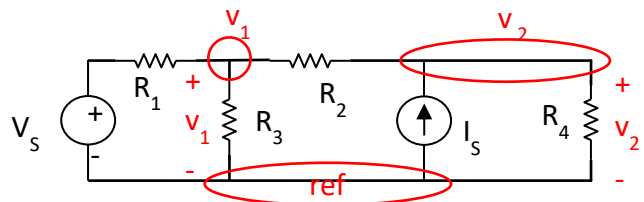
Baseados nas duas leis de Kirchhoff, estes dois métodos são usados para obter um sistema de equações que permita obter as tensões nodais ou as correntes de malha e, conseqüentemente, todas correntes e quedas de tensão no circuito.

Ao contrário das leis de Kirchhoff que são de uso obrigatório, estas técnicas garantem (de forma sistemática) a obtenção de um sistema de equações resolúvel, (i.e., número de equações igual ao número de incógnitas) mas podem obter-se sistemas de outras formas.

4.3.1 Método das Tensões Nodais

Identificar os nós essenciais. Um é escolhido como referência, relativamente ao qual são medidas as quedas de tensões (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) dos restantes nós. Estas tensões (nodais) são as incógnitas do sistema de equações que iremos obter.

1. Para cada um destes nós (excluindo o de referência) escrever uma equação de correntes de Kirchhoff (KCL), tendo como incógnitas as quedas de tensões definidas no ponto 1., obtendo um sistema de $n-1$ equações sendo n é o número de nós essenciais;

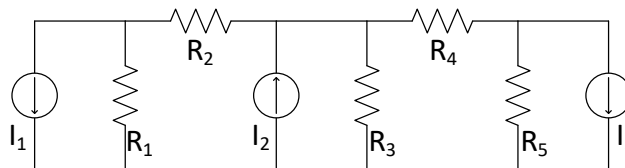


$$\begin{cases} \frac{v_1 - V_S}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_2} - I_S + \frac{v_2}{R_4} = 0 \end{cases}$$

ou substituindo pelas condutâncias $\begin{cases} G_1 = 1/R_1 \\ G_2 = 1/R_2 \\ G_3 = 1/R_3 \end{cases}$ vem $\begin{cases} v_1(G_1 + G_2 + G_3) - v_2 G_2 = V_S G_1 \\ -v_1 G_2 + v_2(G_2 + G_4) = I_S \end{cases}$

Deste modo obtemos um sistema de 2 equações e 2 incógnitas que permite resolver o circuito

Exemplo de aplicação



Aplicar o método das tensões nodais para obter as quedas de tensões nos vários elementos do circuito. Identificamos o nó essencial inferior como de referência e os 3 nós essenciais superiores v_1, v_2 e v_3 (da esquerda para a direita)

Equação inicial

$$\begin{cases} I_1 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_2} - I_2 + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_3}{R_4} = 0 \\ I_3 + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_4} = 0 \end{cases}$$

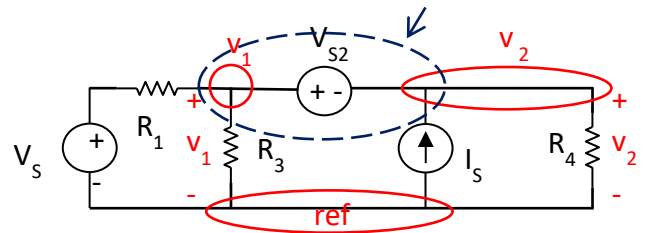
Como podemos observar obtivemos um sistema de 3 equações e 3 incógnitas (v_1 , v_2 , v_3), pelo que conhecendo os elementos do circuito (I_1 , I_2 , I_3 , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 e R_5), permite-nos calcular as 3 diferenças de potencial (ddp) e posteriormente as correntes, se necessário.

Forma canónica

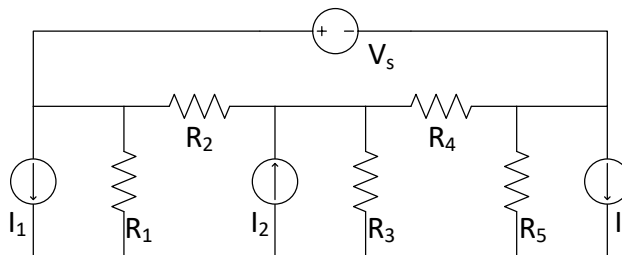
$$\begin{cases} (R_1 + R_2)v_1 - (R_1)v_2 = -(R_1 R_2)I_1 \\ -(R_3 R_4)v_1 + (R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)v_2 - (R_2 R_3)v_3 = -(R_2 R_3 R_4)I_1 \\ -(R_5)v_2 + (R_4 + R_5)v_3 = -(R_4 R_5)I_3 \end{cases}$$

2. Caso exista uma fonte de tensão entre dois nós (que não sejam o de referência) substituir as equações relativas a estes dois nós, pela equação da diferença de tensão entre os nós e por uma equação de correntes de Kirchhoff (KCL) englobando os dois nós (super-nó);

$$\begin{cases} \frac{v_1 - V_s}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} - I_s + \frac{v_2}{R_4} = 0 \\ v_1 - v_2 = V_{s2} \end{cases}$$



Exemplo de aplicação



Aplicar o método das tensões nodais para obter as correntes nos vários elementos do circuito. Identificamos o nó essencial inferior como de referência e os 3 nós essenciais superiores v_1 , v_2 e v_3 (da esquerda para a direita)

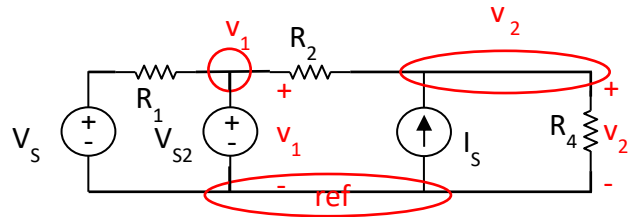
Equação inicial

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = V_s \\ I_1 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + I_3 + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_4} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_2} - I_2 + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2 - v_3}{R_4} = 0 \end{cases}$$

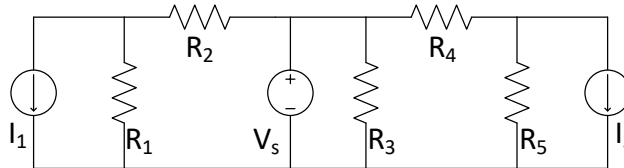
Identificamos o nó essencial inferior como de referência e os 3 nós essenciais superiores v_1 , v_2 e v_3 (da esquerda para a direita)

3. Caso exista uma fonte de tensão entre o nó de referência e outro nó, substituir a equação das correntes neste nó pela equação que define a tensão no nó.

$$\begin{cases} v_1 = V_{S2} \\ \frac{v_2 - v_1}{R_2} - I_S + \frac{v_2}{R_4} = 0 \end{cases}$$



Exemplo de aplicação



Aplicar o método das tensões nodais para obter as correntes nos vários elementos do circuito.

Identificamos o nó essencial inferior como de referência e os 3 nós essenciais superiores v_1 , v_2 e v_3 (da esquerda para a direita)

Equação inicial

$$\begin{cases} I_1 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \\ v_2 = V_S \\ I_3 + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_4} = 0 \end{cases}$$

Para resolver estes sistemas de equações, aconselha-se o uso de uma calculadora / programa computacional com capacidade de resolução de sistemas de equações ou cálculo matricial. A Calculadora tem a vantagem de ser mais portátil e poder vir a ser usada nas avaliações.

Exercícios de consolidação da aprendizagem

Para os 3 exemplos anteriores.

Considere $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 3$ A, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$.

Calcular (v_1, v_2, v_3) e, em seguida, de todas as corrente do circuito.

Teste as soluções obtidas.

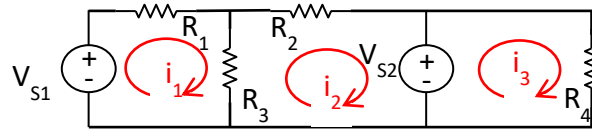
1 – substituir o conjunto das soluções (v_1, v_2, v_3) no sistema de equações testando se efetivamente são solução das 3 equações, garante que o sistema de equações foi bem resolvido.

2 – verificar a KLC (aplicada a cada nó) e a KLV (aplicada a cada malha), garante que as soluções estão de acordo com o exercício.

4.3.2 Método das Correntes de Malha (este método não faz parte do atual programa da disciplina)

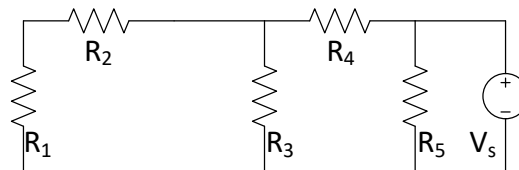
Identificar as malhas, atribuindo a cada uma corrente de malha; estas correntes de malha são as incógnitas do sistema

1. Por cada malha escrever uma equação de Kirchhoff (KVL) das quedas de tensão, em função das correntes de malha, obtendo um sistema de n equações onde n é o número de malhas;



$$\begin{cases} -V_{S1} + i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 = 0 \\ (i_2 - i_1) R_3 + i_2 R_2 + V_{S2} = 0 \\ -V_{S1} + i_3 R_4 = 0 \end{cases}$$

Exemplo de aplicação



Aplicar o método da análise de malhas para obter as correntes nos vários elementos do circuito.

Identificamos 3 malhas, cada um com uma corrente i_1 , i_2 e i_3 (da esquerda para a direita)

Equação inicial

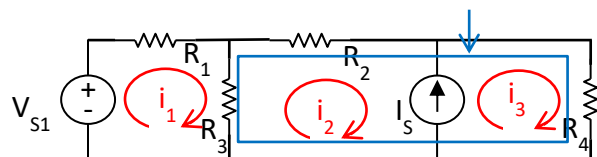
$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \\ R_3(i_2 - i_1) + R_4 i_2 + R_5(i_2 - i_3) = 0 \\ R_5(i_3 - i_2) + V_s = 0 \end{cases}$$

Obtivemos um sistema de 3 equações e 3 incógnitas (i_1 , i_2 , i_3), pelo que conhecendo os elementos do circuito (V_s , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 e R_5), permite-nos calcular as 3 correntes de malha e as correntes, e as quedas de tensão em cada elemento.

Forma canónica

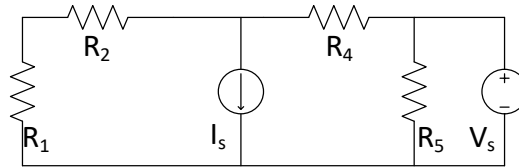
$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = 0 \\ -R_3 i_1 + (R_3 + R_4 + R_5)i_2 - R_5 i_3 = 0 \\ -R_5 i_2 + R_5 i_3 = -V_s \end{cases}$$

2. Caso exista uma fonte de corrente pertencente a duas malhas as equações relativas a estas duas malhas, devem ser substituídas pela equação da diferença das correntes de malha nesse ramo e por uma equação de tensões de Kirchhoff (KVL) englobando as duas malhas (super-malha);



$$\begin{cases} -V_{S1} + i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 = 0 \\ (i_2 - i_1) R_3 + i_2 R_2 + i_3 R_4 = 0 \\ i_3 - i_2 = I_S \end{cases}$$

Exemplo de aplicação

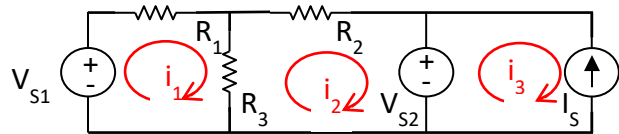


Aplicar o método da análise de malhas para obter as correntes nos vários elementos do circuito. Identificamos 3 malhas, cada um com uma corrente i_1 , i_2 e i_3 (da esquerda para a direita)

Equação inicial

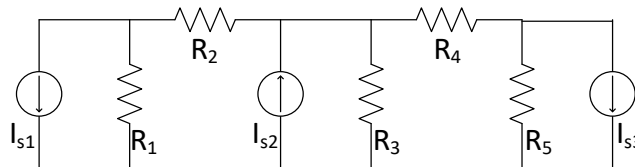
$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \\ R_3(i_2 - i_1) + R_4 i_2 + R_5(i_2 - i_3) = 0 \\ R_5(i_3 - i_2) + V_S = 0 \end{cases}$$

3. Caso exista uma fonte de corrente pertencente a uma única malha deve-se substituir a respectiva equação pela equação que define da corrente de malha nesse ramo.



$$\begin{cases} -V_{S1} + i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 = 0 \\ (i_2 - i_1) R_3 + i_2 R_2 + V_{S2} = 0 \\ i_3 = -I_S \end{cases}$$

Exemplo de aplicação



Aplicar o método da análise de malhas para obter as correntes nos vários elementos do circuito. Identificamos 5 malhas, cada um com uma corrente i_1 , i_2 , i_3 , i_4 e i_5 (da esquerda para a direita)

Equação inicial

$$\begin{cases} i_1 = -I_{s1} \\ i_2 - i_3 = -I_{s2} \\ R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + R_3(i_3 - i_4) = 0 \\ R_3(i_3 - i_4) + R_4 i_4 + R_5(i_4 - i_5) = 0 \\ i_5 = I_{s3} \end{cases}$$

----- Exercícios de consolidação da aprendizagem -----

Para os 3 exemplos anteriores.

Considere $I_s = 1$ A, $I_{s1} = 1$ A, $I_{s2} = 2$ A, $I_{s3} = 3$ A, $V_s = 10$ V, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 2 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$.
Calcular as correntes de malha e, em seguida, de todas as corrente do circuito e tensões nos vários elementos.

Teste as soluções obtidas.

1 – substituir o conjunto das soluções (v_1 , v_2 , v_3) no sistema de equações testando se efetivamente são solução das 3 equações, garante que o sistema de equações foi bem resolvido.

2 – verificar a KLC (aplicada a cada nó) e a KLV (aplicada a cada malha), garante que as soluções estão de acordo com o exercício.

4.3.3 Opção entre os dois Métodos (Nodal, Malhas)

Como regra geral usar a Análise Nodal, uma vez que é universal.

Há situações em que um dos métodos é favorável.

Ponderar as seguintes questões:

Qual o método que conduz ao menor número de equações?

O circuito tem fontes de tensão (super-nós)? Reduz o número de equações na análise Nodal.

O circuito tem fontes de corrente (super-malhas)? Reduz o número de equações na análise de malhas.

A resolução de parte do circuito é suficiente para obter a solução pedida? Qual o método mais eficiente para obter essa solução?

4.4 EQUIVALENTE DE THEVENIN E EQUIVALENTE DE NORTON

4.4.1 Conceito

Facilmente se prova que uma fonte de tensão (V_s) em série com uma resistência (R) é equivalente a uma fonte de corrente ($I_s = V_s/R$) em paralelo com uma resistência de igual valor (R).

O primeiro é conhecido por Equivalente de Thevenin e o segundo por equivalente de Norton.

----- Exemplo de aplicação -----



Colocando uma resistência R_L , entre os terminais A e B, vamos obter uma corrente (em R_L),

Equivalente de Thevenin

$$i_{RL} = \frac{V_s}{R + R_L}$$

Equivalente de Norton

$$i_{RL} = I_s \frac{R}{R + R_L}$$

Divisor de corrente

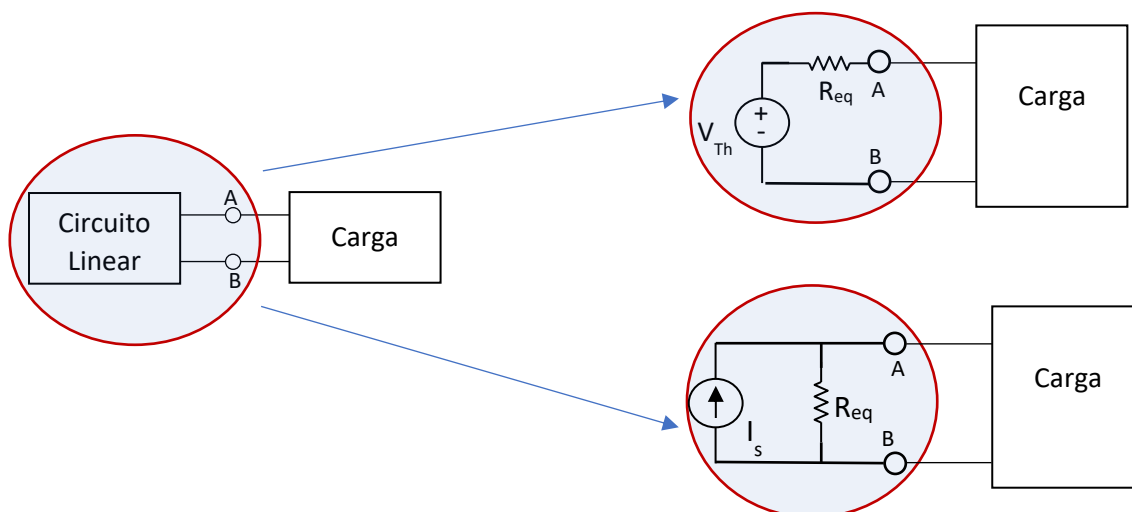
Como se definiu, $I_s = V_s/R$, então substituído na equação anterior obtemos a expressão inicial.

Estes mesmos circuitos são conhecidos por Equivalentes de Thévenin e de Norton, sendo V_s denominada de Fonte de Tensão de Thevenin ($V_{Th} = V_s$), I_s denominada de Fonte de Corrente de Norton ($I_N = I_s$) e R denominada de Resistência Equivalente, Resistência de Thevenin ou condutância de Norton.

Estes 3 parâmetros estão relacionados por $R_{eq} = V_{Th}/I_N$

Um circuito diz-se equivalente a outro se produzir o mesmo efeito sobre uma mesma carga.

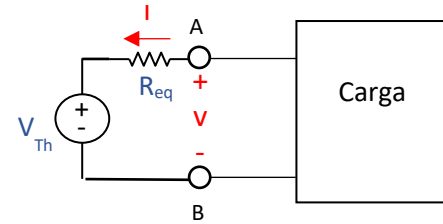
Os Teoremas de Thevenin e de Norton especificam que **qualquer circuito linear (CL)** resistivo observado dum porto (AB), pode ser **substituído pelo seu equivalente de Thevenin ou Norton**.



Para serem considerados equivalentes, os circuitos de Thevenin e de Norton têm de garantir a mesma tensão e corrente na carga.

4.4.2 Cálculo do Equivalente de Thevenin, Método Paramétrico

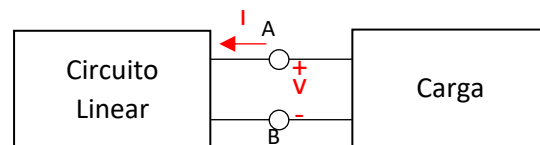
Para obtermos o equivalente de Thèvenin (EqTh) dum circuito linear resistivo (CL) vamos partir da definição de circuito equivalente, que garante que ligando cada um (EqTh e CL) a uma mesma carga (qualquer circuito), originam a mesma tensão v e a mesma corrente i .



No conjunto (EqTh + carga), aplicando a KLV, obtemos a equação (1)

$$v = R_{eq}i + V_{TH} \quad (1)$$

No conjunto (CL+carga) vamos mostrar que, por aplicação das técnicas conhecidas (Análise Nodal ou Análise de Malhas), é sempre possível obter uma equação que relaciona v com i , equação (2).



$$v = C_1 i + C_2 \quad (2)$$

Comparando as duas equações, conclui-se que a R_{eq} é a constante C_1 e V_{TH} é a constante C_2 .

Escrito de outra forma:

A constante C_1 corresponde à resistência equivalente R_{eq} e

a constante C_2 corresponde à tensão de Thevenin V_{TH}

Vejamos a prova deste Método Paramétrico de cálculo das constantes do Circuito Equivalente de Thevenin (V_{TH} e R_{eq}) de um (qualquer) circuito visto de um porto ou par de terminais (A e B).

Admitindo que o circuito linear resistivo tem 'n' nós, por aplicação de análise nodal obtém-se um sistema de (n-1) equações tendo como incógnitas as tensões nodais v_1, v_2, \dots, v_{n-1} e a corrente i , uma vez que se desconhece o circuito de carga, ou seja, **n** incógnitas.

Se o nó **B** for tomado como referência, a queda de tensão entre **A** e **B**, v , é uma das tensões nodais v_j , obtendo-se um sistema de **n-1 equações** e **n incógnitas** ($v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, i$).

Tendo o sistema obtido mais uma incógnita do que equações, é sempre possível obter uma solução paramétrica, ou seja, uma incógnita (varável) em função de outra. Deste modo pode-se obter a equação (2).

Caso o nó B não seja o nó de referência, então v é uma simples combinação linear (somas algébricas) das tensões nodais já definidas (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}), podendo obter-se também a equação pretendida (2).

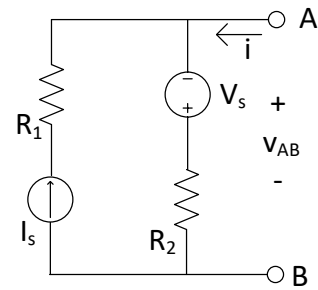
----- Exemplo de aplicação -----

Obter o equivalente de Thevenin do circuito, entre no porto AB.

Para usar o método descrito no cálculo do equivalente, aplicamos a análise nodal. Identificamos 2 nós essenciais no circuito, sendo o inferior tomado para referência,

$$\text{Equação inicial} \quad -I_s + \frac{V_{AB} + V_s}{R_2} - i = 0 \quad V_{AB} = R_2 i + (-V_s + R_2 I_s)$$

$$\text{Da eq. anterior} \quad \begin{cases} V_{Th} = -V_s + R_2 I_s \\ R_{eq} = R_2 \Omega \end{cases}$$



4.4.3 Cálculo do Equivalente de Norton, Método Paramétrico

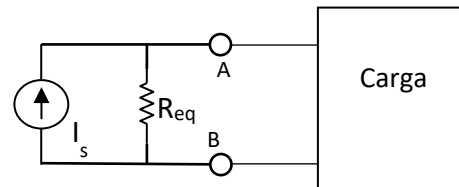
A partir dos valores do equivalente de Thevenin (V_{Th} e R_{eq}) calcula-se a corrente de Norton (I_N), mantendo-se a R_{eq} .

$$I_N = V_{Th} / R_{eq} \quad (3)$$

é equivalente a explicitar-se i como função de v nas equações (1) e (2), matendo-se o raciocínio apresentado para a obtenção do equivalente de Thevenin.

$$i = v / R_{eq} - I_N \quad (3)$$

$$i = C_3 v + C_4 \quad (4)$$



----- Exemplo de aplicação -----

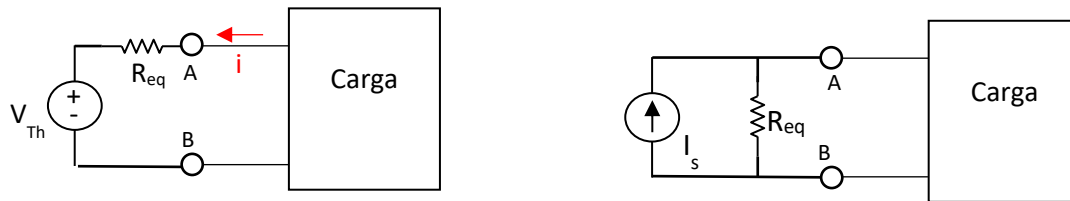
Calcular o equivalente de Norton, do circuito do exemplo anterior.

Para usar o método descrito no cálculo do equivalente, aplicamos a análise nodal. Identificamos 2 nós essenciais no circuito, sendo o inferior tomado para referência,

$$\text{Equação inicial} \quad -I_s + \frac{V_{AB} + V_s}{R_2} - i = 0 \quad i = -I_s + \frac{V_s}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_2} - 0$$

$$\text{Deduzindo} \quad \begin{cases} V_{Th} = -V_s + R_2 I_s \\ R_{eq} = R_2 \Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} I_N = -\frac{V_s}{R_2} + I_s \\ G_{eq} = (R_2)^{-1} S \end{cases}$$

4.4.4 Teorema da Máxima Transferência de Potência



Um circuito resistivo consegue obter a máxima transferência de potência quando a resistência de carga R_L for igual a R_{eq} dos equivalentes de Thevenin ou de Norton.

Demonstração deste Teorema.

Vamos considerar que a carga ligada ao equivalente de Thevenin é R_L .

Aplicando a KLV, e rodando no sentido da corrente, obtém-se

$$R_{eq}i + V_{Th} + R_L i = 0 \Leftrightarrow i = -\frac{V_{Th}}{R_{eq} + R_L}$$

Como $p = v i$, $p_L = R_L \left(-\frac{V_{Th}}{R_{eq} + R_L} \right) \left(-\frac{V_{Th}}{R_{eq} + R_L} \right) = V_{Th}^2 \frac{R_L}{(R_{eq} + R_L)^2}$

Para obter os extremos da função (p_L), derivamos em ordem a R_L .

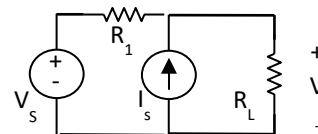
$$\frac{dp_L}{dR_L} = V_{Th}^2 \frac{(R_{eq} + R_L)^2 - 2(R_{eq} + R_L)R_L}{(R_{eq} + R_L)^4} = 0 \Rightarrow (R_{eq} + R_L)^2 - 2(R_{eq} + R_L)R_L = 0$$

$$R_L = R_{eq}$$

4.5 PRINCÍPIO DA SOBREPOSIÇÃO

Num circuito com **várias fontes independentes** é possível considerar **o efeito de cada fonte de forma autónoma** (anulando as restantes) e **somar as tensões e correntes resultantes para determinar as tensões e correntes** que existem quando todas as fontes independentes estão ativas.

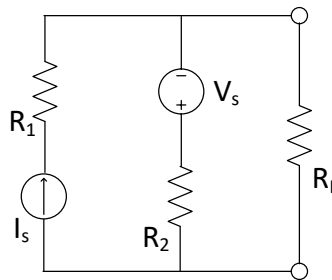
Exemplo: Aplicando o Princípio da Sobreposição calcular a tensão em R_L , V .



1. Considerando a fonte de tensão
Anulando a fonte de corrente ($I_s = 0$, equivale a um circuito aberto) calcula-se, através dum divisor de tensão, $V^* = V_s R_L / (R_1 + R_L)$
2. Considerando a fonte de corrente
Anulando a fonte de tensão ($V_s = 0$, equivale a um curto circuito) calcula-se, $V^{**} = I_s (R_1 R_L) / (R_1 + R_L)$, multiplicando a corrente da fonte pela resistência equivalente
3. Como passo final soma-se V^* com V^{**}

$$V = V_s R_L / (R_1 + R_L) + I_s (R_1 R_L) / (R_1 + R_L),$$

----- Exemplo de aplicação -----



Calcular a corrente em R_L , por aplicação do Princípio da Sobreposição.

Começamos por anular a fonte de corrente ($I_s = 0 \text{ A} \Leftrightarrow$ Circuito aberto);

Assim a corrente (de cima para baixo) em R_L vem $i_{RL1} = -\frac{V_s}{R_2 + R_L}$

Em seguida anulando a fonte de tensão ($V_s = 0 \text{ V} \Leftrightarrow$ Curto-circuito)

Nestas circunstâncias a corrente (de cima para baixo) em R_L vem $i_{RL2} = I_s \frac{R_2}{R_2 + R_L}$

A corrente é a soma das duas parcelas devidas a cada fonte independente.

$$i_{RL2} = -\frac{V_s}{R_2 + R_L} + I_s \frac{R_2}{R_2 + R_L} \text{ A}$$

----- Exercício de aplicação -----

1- Teste se o valor está correto. (com esta corrente) pode determinar todas as correntes e tensões no circuito, aplicando de seguida as KLC e KLV para verificar.

2- Obtenha este valor por aplicação direta da análise de malhas e também por aplicação da análise nodal.