Termodinâmica e Dinâmica de Fluidos 2023/2024

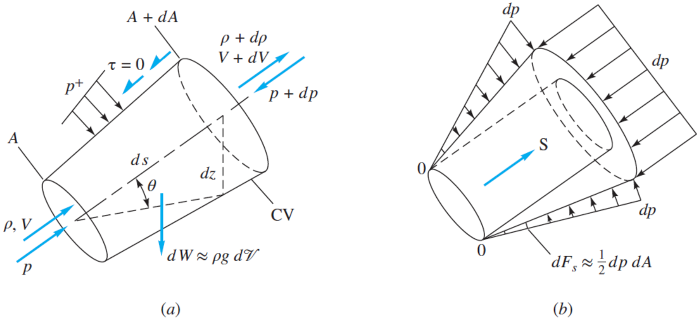
Aula n°10: Equação de Bernoulli

José M. Castanheira
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

4 de dezembro de 2023

Equação de Bernoulli

Considere um volume de controlo fixo num escoamento sem atrito. O volume é definido por um elemento ds de um tubo de corrente com secção $A(s)$, onde s é a coordenada ao longo de uma linha de corrente. As propriedades (ρ, p, V) são constantes em cada secção mas podem variar com s.



Pela conservação da massa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathrm{CV}} \rho \mathrm{d}\mathcal{V}\right) + \dot{m}_{\mathrm{out}} - \dot{m}_{\mathrm{in}} = 0, \qquad \text{com } \dot{m} = \rho V A. \tag{1}$$

Se o volume for muito pequeno teremos

$$0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + \mathrm{d}\dot{m}, \tag{2}$$

onde $\mathrm{d}\dot{m} = \mathrm{d}(\rho A V)$ e $\mathrm{d}\mathcal{V} = A \mathrm{d}s$.

Se o volume for muito pequeno teremos

$$0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + \mathrm{d}\dot{m}, \tag{2}$$

onde $\mathrm{d}\dot{m} = \mathrm{d}(\rho A V)$ e $\mathrm{d}\mathcal{V} = A\mathrm{d}s$. Então a equação da conservação da massa pode ainda escrever-se na seguinte forma

$$\mathrm{d}\dot{m} = \mathrm{d}(\rho A V) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} A\mathrm{d}s. \tag{3}$$

A componente das forças que actuam na direcção s é dada por

$$\sum F_s = \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + (\dot{m}V)_{\mathrm{out}} - (\dot{m}V)_{\mathrm{in}}\,, \tag{4}$$

onde $V_s = V$.

Se o volume for muito pequeno teremos

$$0 \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + \mathrm{d}\dot{m}, \tag{2}$$

onde $\mathrm{d}\dot{m} = \mathrm{d}(\rho A V)$ e $\mathrm{d}\mathcal{V} = A \mathrm{d}s$. Então a equação da conservação da massa pode ainda escrever-se na seguinte forma

$$\mathrm{d}\dot{m} = \mathrm{d}(\rho A V) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} A \mathrm{d}s. \tag{3}$$

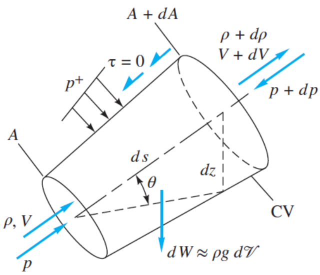
A componente das forças que actuam na direcção s é dada por

$$\sum F_s = \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + (\dot{m} V)_{\mathrm{out}} - (\dot{m} V)_{\mathrm{in}}\,, \tag{4}$$

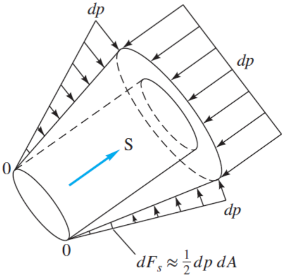
onde $V_s = V$.

Sendo o volume muito pequeno,

$$\sum \mathrm{d}F_s \approx \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} A\, \mathrm{d}s + \mathrm{d}\left(\dot{m} V\right). \tag{5}$$



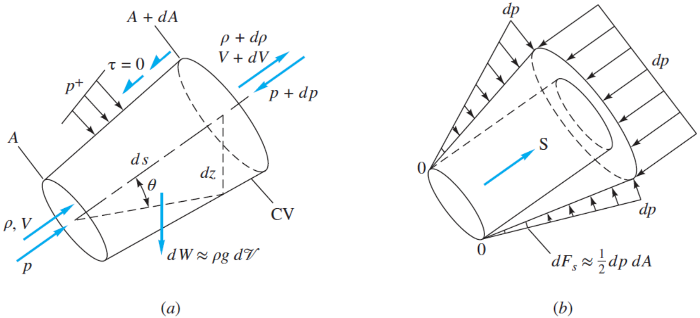
(a)



(b)

Se o escoamento for não viscoso (não houver atrito), as forças a actuar no fluido serão devidas à gravidade e à pressão. A componente do peso ao longo da linha de corrente é

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{s,g}} = -\rho g \sin\theta A \mathrm{d}s = -\rho g A \mathrm{d}z. \tag{6}$$



Se o escoamento for não viscoso (não houver atrito), as forças a actuar no fluido serão devidas à gravidade e à pressão. A componente do peso ao longo da linha de corrente é

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{s,g}} = -\rho g \sin\theta A \mathrm{d}s = -\rho g A \mathrm{d}z. \tag{6}$$

Em primeira aproximação, considerando a variação da pressão linear ao longo da linha de corrente

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{s,press}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}p\mathrm{d}A - p(A + \mathrm{d}A) \approx -A\mathrm{d}p. \tag{7}$$

Substituindo as equações (6) e (7) na equação (5) obtém-se

$$\begin{aligned} \sum \mathrm{d}F_s &= -\rho g A \mathrm{d}z - A \mathrm{d}p = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} A \, \mathrm{d}s + \mathrm{d}\left(\dot{m} V\right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} V A \, \mathrm{d}s + \frac{\partial V}{\partial t} \rho A \, \mathrm{d}s + \dot{m} \, \mathrm{d}V + V \, \mathrm{d}\dot{m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo as equações (6) e (7) na equação (5) obtém-se

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{d}F_s &= -\rho g A \mathrm{d}z - A \mathrm{d}p = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} A\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}\left(\dot{m} V\right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} V A\,\mathrm{d}s + \frac{\partial V}{\partial t} \rho A\,\mathrm{d}s + \dot{m}\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}\dot{m}. \qquad (8)\end{aligned}$$

Os termos a vermelho cancelam-se devido à conservação da massa. Dividindo os termos restantes por ρA e rearranjando os termos restantes obtém-se a equação

$$\frac{\partial V}{\partial t} \mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + V\,\mathrm{d}V + g\,\mathrm{d}z = 0. \qquad (9)$$

Esta é a forma diferencial da equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente num escoamento sem atrito.

Substituindo as equações (6) e (7) na equação (5) obtém-se

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{d}F_s &= -\rho g A \mathrm{d}z - A\mathrm{d}p = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} A\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}\left(\dot{m}V\right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} V A\,\mathrm{d}s + \frac{\partial V}{\partial t}\rho A\,\mathrm{d}s + \dot{m}\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}\dot{m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Os termos a vermelho cancelam-se devido à conservação da massa. Dividindo os termos restantes por ρA e rearranjando os termos restantes obtém-se a equação

$$\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + V\,\mathrm{d}V + g\,\mathrm{d}z = 0. \tag{9}$$

Esta é a forma diferencial da equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente num escoamento sem atrito. A forma integral da equação é

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}s + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + g(z_2 - z_1) = 0. \tag{10}$$

Num escoamento estacionário, incompressível em sem atrito a equação de Bernoulli toma a seguinte forma, válida ao longo de uma linha de corrente

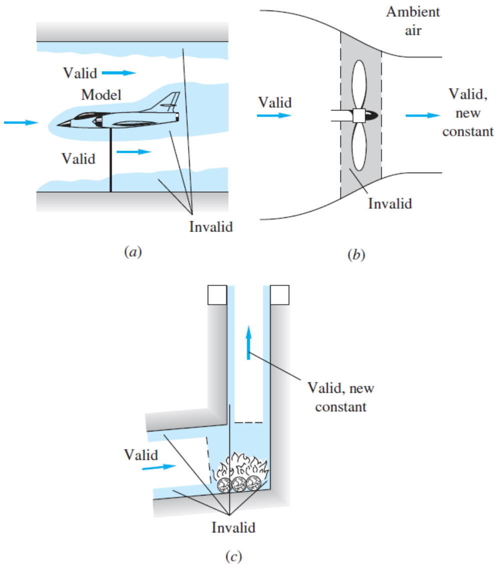
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \text{constante}. \tag{11}$$

Num escoamento estacionário, incompressível em sem atrito a equação de Bernoulli toma a seguinte forma, válida ao longo de uma linha de corrente

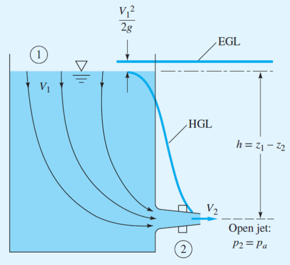
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \text{constante}. \tag{11}$$

Restrições à Equação de Bernoulli: a figura seguinte mostra alguma zonas de diferentes escoamento onde a aplicação da equação de Bernoulli não é válida.

A figura abaixo ilustra regiões sombreadas onde é inválida a equação de Bernoulli: (a) modelo de túnel de vento, (b) hélice, (c) chaminé.



Exercício: Obtenha uma expressão para a velocidade V_2 em função das áreas da superfície livre do tanque, da secção do tubo de saída e da altura h. Suponha um escoamento constante e sem atrito.



Nota: Na resolução do problema anterior energia assumimos que a velocidade é constante na secção do tubo de saída. Nos casos reais, a velocidade não é constante e temos de aplicar um factor correcção, o factor de descarga c_d,

$$(V_2)_{\mathrm{av}} = \frac{Q}{A_2} = c_d \sqrt{2gh}. \tag{12}$$

Exercício: Considere o *tubo de Venturi* mostrado na figura. Obtenha uma expressão para a caudal na conduta.