

# Termodinâmica e Dinâmica de Fluidos

## 2023/2024

Aula nº12: Análise diferencial do escoamento de fluidos

José M. Castanheira  
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

28 de dezembro de 2023

## Derivada material e derivada local

Como referimos o teorema do transporte de Reynolds permite-nos aplicar as leis da mecânica e da termodinâmica, desenvolvidas para sistemas com massa com identidade própria, a volumes de controlo finitos. Neste capítulo vamos aplicar as leis da mecânica e da termodinâmica a partículas materiais do meio contínuo, i.e. quantidades de massa muito pequenas de forma que as propriedades do meio se possam considerar funções contínuas do espaço e do tempo, mas suficientemente grande para que as flutuações estatísticas devidas à estrutura microscópica da matéria não seja observável.

## Derivada material e derivada local

Como referimos o teorema do transporte de Reynolds permite-nos aplicar as leis da mecânica e da termodinâmica, desenvolvidas para sistemas com massa com identidade própria, a volumes de controlo finitos. Neste capítulo vamos aplicar as leis da mecânica e da termodinâmica a partículas materiais do meio contínuo, i.e. quantidades de massa muito pequenas de forma que as propriedades do meio se possam considerar funções contínuas do espaço e do tempo, mas suficientemente grande para que as flutuações estatísticas devidas à estrutura microscópica da matéria não seja observável.

Para a aplicação das leis da mecânica e da termodinâmica a partículas materiais teremos de relacionar as taxas de variação local das propriedades com a taxas de variação seguindo o movimento das partículas.

Consideremos o caso da temperatura,  $T$ , de um fluido. De uma forma geral, a temperatura será uma função da posição  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  e do tempo

$$T = T(x, y, z, t) \quad (1)$$

## Derivada material e derivada local

Como referimos o teorema do transporte de Reynolds permite-nos aplicar as leis da mecânica e da termodinâmica, desenvolvidas para sistemas com massa com identidade própria, a volumes de controlo finitos. Neste capítulo vamos aplicar as leis da mecânica e da termodinâmica a partículas materiais do meio contínuo, i.e. quantidades de massa muito pequenas de forma que as propriedades do meio se possam considerar funções contínuas do espaço e do tempo, mas suficientemente grande para que as flutuações estatísticas devidas à estrutura microscópica da matéria não seja observável.

Para a aplicação das leis da mecânica e da termodinâmica a partículas materiais teremos de relacionar as taxas de variação local das propriedades com a taxas de variação seguindo o movimento das partículas.

Consideremos o caso da temperatura,  $T$ , de um fluido. De uma forma geral, a temperatura será uma função da posição  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  e do tempo

$$T = T(x, y, z, t) \quad (1)$$

Como poderemos calcular a taxa de variação da temperatura de uma dada partícula?

Num intervalo pequeno  $\delta t$ , a partícula desloca-se da posição  $\vec{r}$  para a posição  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ , com  $\delta\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}) \delta t$ .

Num intervalo pequeno  $\delta t$ , a partícula desloca-se da posição  $\vec{r}$  para a posição  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ , com  $\delta\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}) \delta t$ .

A variação da temperatura da partícula é dada aproximadamente por

$$\begin{aligned}\delta T &\approx \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t \\ \delta T &\approx \frac{\partial T}{\partial x} v_x \delta t + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \delta t + \frac{\partial T}{\partial z} v_z \delta t + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t\end{aligned}$$

Num intervalo pequeno  $\delta t$ , a partícula desloca-se da posição  $\vec{r}$  para a posição  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ , com  $\delta\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}) \delta t$ .

A variação da temperatura da partícula é dada aproximadamente por

$$\begin{aligned}\delta T &\approx \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t \\ \delta T &\approx \frac{\partial T}{\partial x} v_x \delta t + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \delta t + \frac{\partial T}{\partial z} v_z \delta t + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t\end{aligned}$$

Dividindo por  $\delta t$  e considerando o limite de  $\delta t \rightarrow 0$ , obtém-se

$$\frac{DT}{Dt} = v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T$$

Utilizamos a notação  $D/Dt \equiv d/dT$  para enfatizar que se trata da derivada seguindo o movimento da partícula.

A derivada material pode calcular-se através do operador diferencial

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{termo local}} + \underbrace{\left( \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right)}_{\text{termo convectivo ou advectivo}} \quad (2)$$



KRV Photography 2005 © Keith Ramos-Viera



A derivada material pode calcular-se através do operador diferencial

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{termo local}} + \underbrace{\left( \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right)}_{\text{termo convectivo ou advectivo}} \quad (2)$$

A aceleração das partículas materiais será dada por

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}.$$



KRV Photography 2005 © Keith Ramos-Viera

A derivada material pode calcular-se através do operador diferencial

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{termo local}} + \underbrace{\left( \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right)}_{\text{termo convectivo ou advectivo}} \quad (2)$$



A aceleração das partículas materiais será dada por

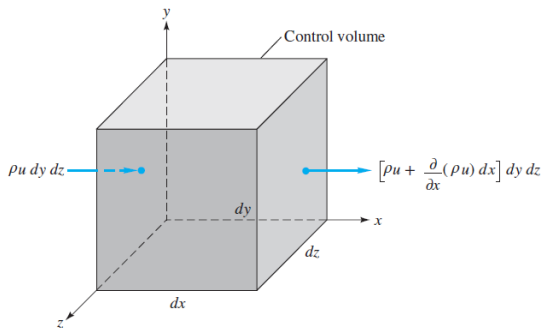
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}.$$

A corrente do rio permanece constante ( $\partial \vec{v} / \partial t = \vec{0}$ ), mas as partículas aceleram ao descer

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x \hat{e}_x + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_y \hat{e}_y \\ &\quad + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z \hat{e}_z \end{aligned}$$

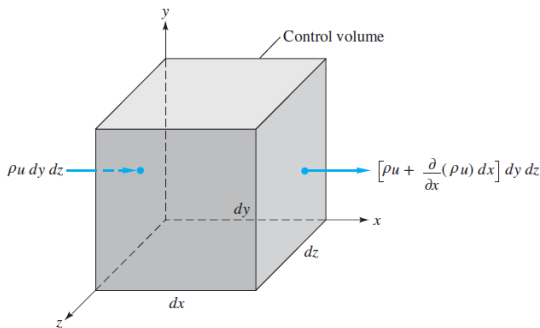
Para obter a equação diferencial da conservação da massa, a equação da continuidade, apliquemos o teorema de Reynolds a um volume de controlo elementar, fixo, como mostrado na Figura.

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum (\rho_i A_i V_i)_{\text{out}} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{\text{in}} = 0 \quad (3)$$



Para obter a equação diferencial da conservação da massa, a equação da continuidade, apliquemos o teorema do transporte de Reynolds a um volume de controlo elementar, fixo, como mostrado na Figura.

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum (\rho_i A_i V_i)_{\text{out}} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{\text{in}} = 0 \quad (3)$$

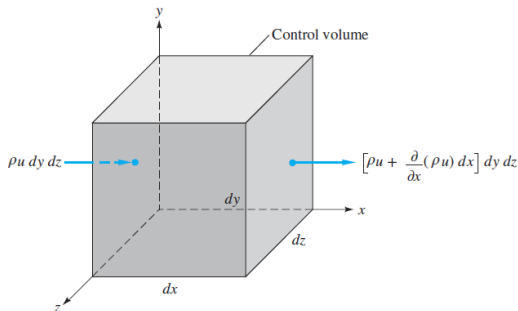


Sendo o volume muito pequeno, o integral pode ser aproximado por

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz. \quad (4)$$

Conforme se pode concluir da Figura, os fluxos de entrada e de saída são os mostrados na seguinte tabela

Faces	entrada de fluido	saída de fluido
$x$	$\rho u \, dy \, dz$	$\left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \, dx \right] dy \, dz$
$y$	$\rho v \, dx \, dz$	$\left[ \rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \, dy \right] dx \, dz$
$z$	$\rho w \, dx \, dy$	$\left[ \rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \, dz \right] dx \, dy$



Substituindo a equação (4) e os termos da Tabela na equação (3), obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz = 0$$

Substituindo a equação (4) e os termos da Tabela na equação (3), obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz = 0$$

ou, dividindo pelo elemento de volume,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (5)$$

Substituindo a equação (4) e os termos da Tabela na equação (3), obtém-se

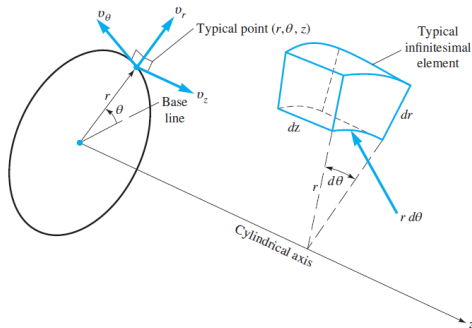
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz = 0$$

ou, dividindo pelo elemento de volume,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (5)$$

Esta é a [equação da continuidade](#) e traduz a conservação da massa.





Em **coordenadas polares cilíndricas**, a equação da continuidade toma a seguinte forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (6)$$

A equação do momento linear pode ser derivada de forma análoga à equação da continuidade, partindo da equação integral do momento linear para um volume elementar fixo,

$$\sum \vec{F} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum \left( \dot{m}_i \vec{V}_i \right)_{\text{out}} - \sum \left( \dot{m}_i \vec{V}_i \right)_{\text{in}} . \quad (7)$$

A equação do momento linear pode ser derivada de forma análoga à equação da continuidade, partindo da equação integral do momento linear para um volume elementar fixo,

$$\sum \vec{F} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum \left( \dot{m}_i \vec{V}_i \right)_{\text{out}} - \sum \left( \dot{m}_i \vec{V}_i \right)_{\text{in}}. \quad (7)$$

Novamente, o integral pode ser aproximado na seguinte forma

$$\int_{\text{CV}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} \approx \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} dx dy dz. \quad (8)$$

A equação do momento linear pode ser derivada de forma análoga à equação da continuidade, partindo da equação integral do momento linear para um volume elementar fixo,

$$\sum \vec{F} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum \left( \dot{m}_i \vec{V}_i \right)_{\text{out}} - \sum \left( \dot{m}_i \vec{V}_i \right)_{\text{in}}. \quad (7)$$

Novamente, o integral pode ser aproximado na seguinte forma

$$\int_{\text{CV}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\mathcal{V} \approx \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} dx dy dz. \quad (8)$$

A tabela seguinte mostra os fluxos de momento linear através das seis faces

Faces	entrada de momento	saída de momento
$x$	$\rho u \vec{V} dy dz$	$\left[ \rho u \vec{V} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u \vec{V} \right) dx \right] dy dz$
$y$	$\rho v \vec{V} dx dz$	$\left[ \rho v \vec{V} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v \vec{V} \right) dy \right] dx dz$
$z$	$\rho w \vec{V} dx dy$	$\left[ \rho w \vec{V} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho w \vec{V} \right) dz \right] dx dy$

Substituindo a equação (8) e os termos da Tabela na equação (7), obtém-se

$$\sum \vec{F} = \left[ \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{V}) \right] dx dy dz. \quad (9)$$

Substituindo a equação (8) e os termos da Tabela na equação (7), obtém-se

$$\sum \vec{F} = \left[ \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{V}) \right] dx dy dz. \quad (9)$$

Esta equação pode simplificar-se, aplicando a regra da derivada do produto e usando a equação da continuidade

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{V}) \right] \\ &= \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{= 0} \vec{V} + \rho \underbrace{\left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)}_{= \frac{D\vec{V}}{Dt}} \end{aligned} \quad (10)$$

Substituindo a equação (8) e os termos da Tabela na equação (7), obtém-se

$$\sum \vec{F} = \left[ \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{V}) \right] dx dy dz. \quad (9)$$

Esta equação pode simplificar-se, aplicando a regra da derivada do produto e usando a equação da continuidade

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \vec{V}) \right] \\ &= \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right]}_{=0} \vec{V} + \rho \underbrace{\left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)}_{= \frac{D\vec{V}}{Dt}} \end{aligned} \quad (10)$$

A equação (9) reduz-se então à equação

$$\sum \vec{F} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dx dy dz. \quad (11)$$

Se considerarmos que  $\vec{V}$  representa a velocidade do centro de massa da partícula, a equação (11) é uma equação conhecida da mecânica para sistemas materiais, e poderíamos ter começado a nossa análise a partir dela.



Se considerarmos que  $\vec{V}$  representa a velocidade do centro de massa da partícula, a equação (11) é uma equação conhecida da mecânica para sistemas materiais, e poderíamos ter começado a nossa análise a partir dela.

As forças que actuam na partícula são as forças volúmicas (forças gravíticas e electromagnéticas), que actuam em toda a massa, e as forças de contacto, que actuam na superfície do volume de controlo. No tratamento que se segue consideraremos apenas a gravidade como força volúmica,

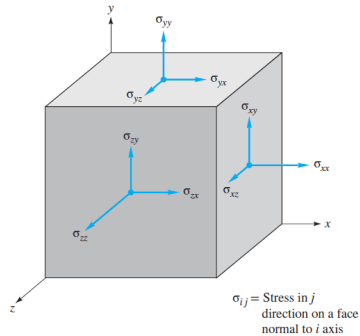
$$d\vec{F}_{\text{grav}} = \rho \vec{g} dx dy dz. \quad (12)$$

Se considerarmos que  $\vec{V}$  representa a velocidade do centro de massa da partícula, a equação (11) é uma equação conhecida da mecânica para sistemas materiais, e poderíamos ter começado a nossa análise a partir dela.

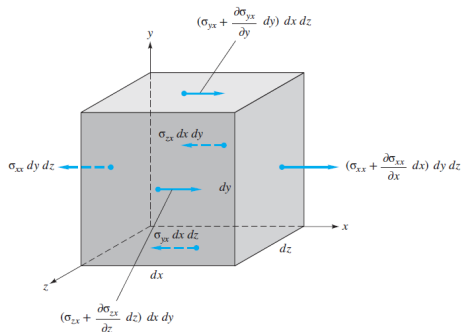
As forças que actuam na partícula são as forças volúmicas (forças gravíticas e electromagnéticas), que actuam em toda a massa, e as forças de contacto, que actuam na superfície do volume de controlo. No tratamento que se segue consideraremos apenas a gravidade como força volúmica,

$$d\vec{F}_{\text{grav}} = \rho \vec{g} dx dy dz. \quad (12)$$

As forças de contacto são devidas às tensões na superfície do volume de controlo, como se representa na figura seguinte. Essas tensões são a soma da pressão hidrostática,  $p$ , com as tensões viscosas  $\tau_{ij}$  que resultam do movimento relativo das camadas de fluido (gradientes da velocidade):



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (13)$$



A força resultante das tensões na superfície do volume infinitesimal é devida aos gradientes (diferenças) entre as faces. Observando a figura, poderemos concluir que a componente  $x$  da resultante das forças a actuarem nas faces perpendiculares ao eixo  $x$  é  $(\partial\sigma_{xx}/\partial x) dx dy dz$ . O resultado análogo se poderia obter para as faces perpendiculares aos eixos  $y$  e  $z$ . Assim, a componente  $x$  da resultante das forças as actuarem em todas as faces será dada por

$$dF_{x,\text{surf}} = \left[ \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (14)$$

Repetindo a análise para as componentes  $y$  e  $z$  das resultantes da forças de contacto e separando a pressão e as tensões de viscosidade, a componentes da força por unidade de volume são dadas por

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_x}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
 \frac{dF_y}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
 \frac{dF_z}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{15}$$

Repetindo a análise para as componentes  $y$  e  $z$  das resultantes da forças de contacto e separando a pressão e as tensões de viscosidade, a componentes da força por unidade de volume são dadas por

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_x}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
 \frac{dF_y}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
 \frac{dF_z}{dV} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{15}$$

ou, na forma vectorial, por

$$\left( \frac{d\vec{F}}{dV} \right)_{\text{surf}} = -\vec{\nabla} p + \left( \frac{d\vec{F}}{dV} \right)_{\text{viscosa}} \tag{16}$$

A força resultante da viscosidade tem nove termos

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}} \right)_{\text{viscosa}} &= \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} \\
 &+ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} \\
 &+ \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

A força resultante da viscosidade tem nove termos

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}} \right)_{\text{viscosa}} &= \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} \\
 &+ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} \\
 &+ \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

A equação (17) é muitas vezes apresentada de forma compacta, definindo-se a divergência de uma tensor,

$$\left( \frac{d\vec{F}}{d\mathcal{V}} \right)_{\text{viscosa}} = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}, \tag{18}$$

onde



$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Substituindo (19), (16) e (12) na equação (11), obtém-se a [equação do momento linear](#) numa forma compacta

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}, \quad (20)$$

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Substituindo (19), (16) e (12) na equação (11), obtém-se a [equação do momento linear](#) numa forma compacta

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}, \quad (20)$$

onde

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}. \quad (21)$$

A equação (20) está escrita de uma forma tão compacta que esconde a complexidade que lhe é inerente. É uma equação vectorial, cujas equações componentes contêm nove termos cada uma. Vamos, portanto, escrever as equações componentes por extenso para ilustrar as dificuldades matemáticas inerentes à equação do momento linear :

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
 \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
 \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (22)$$

A equação (20) está escrita de uma forma tão compacta que esconde a complexidade que lhe é inerente. É uma equação vectorial, cujas equações componentes contêm nove termos cada uma. Vamos, portanto, escrever as equações componentes por extenso para ilustrar as dificuldades matemáticas inerentes à equação do momento linear :

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\end{aligned} \quad (22)$$

Trata-se de um sistema de equações diferenciais não lineares, válidas para o movimento geral de qualquer fluido, sendo as especificidades de cada fluido particular incluídas nos termos das tensões de viscosidade.

**Fluidos não viscosos:** *Equação de Euler*

No caso de a viscosidade ser desprezável (fluidos ideais), assumimos  $\tau_{ij} = 0$  e a equação (21) reduz-se a

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p. \quad (23)$$

## Fluidos não viscosos: *Equação de Euler*

No caso de a viscosidade ser desprezável (fluidos ideais), assumimos  $\tau_{ij} = 0$  e a equação (21) reduz-se a

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p. \quad (23)$$

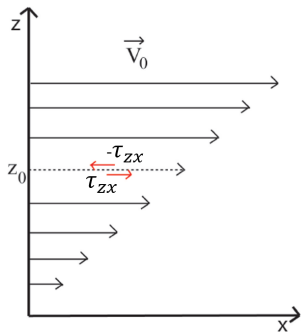
Esta é a **equação de Euler** para fluidos ideais (não viscosos). Iremos mostrar, mais à frente, que a integração da equação de Euler ao longo de uma linha de corrente permite obter novamente o teorema de Bernoulli.

\* \* \* \* \*

## Escoamento viscosos

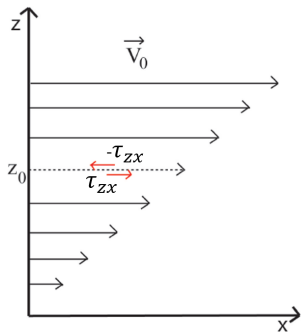
As tensões viscosas são devidas ao movimento relativo de camadas de fluido, sendo funções dos gradientes de velocidades (taxas de deformação). Existe um classe de fluidos, entre os quais se inclui a água, óleo e o ar, em que as tensões viscosas são funções lineares dos gradientes da velocidade. Essa classe designa-se por fluidos newtonianos.

Considere um escoamento estacionário ao longo da direcção  $x$ , com a velocidade  $u(z)$  dependendo apenas de  $z$ . Um escoamento deste tipo pode ser criado, por exemplo, confinando o fluido entre duas placas perpendiculares a  $z$ , movendo-se com velocidades diferentes. Trata-se de um exemplo elementar de um escoamento laminar.



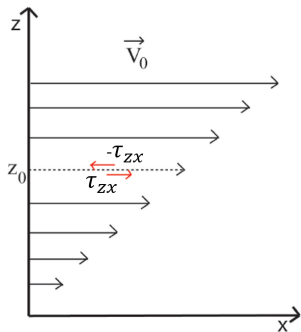


Considere um escoamento estacionário ao longo da direção  $x$ , com a velocidade  $u(z)$  dependendo apenas de  $z$ . Um escoamento deste tipo pode ser criado, por exemplo, confinando o fluido entre duas placas perpendiculares a  $z$ , movendo-se com velocidades diferentes. Trata-se de um exemplo elementar de um escoamento laminar.



Se o campo da velocidade for constante, não haverá qualquer atrito entre as camadas de fluido. Se o gradiente de velocidade for positivo  $du(z)/dz > 0$ , a camada de fluido imediatamente acima do nível  $z_0$  arrastará o fluido imediatamente abaixo, exercendo uma tensão  $\tau_{zx}$ .

Considere um escoamento estacionário ao longo da direcção  $x$ , com a velocidade  $u(z)$  dependendo apenas de  $z$ . Um escoamento deste tipo pode ser criado, por exemplo, confinando o fluido entre duas placas perpendiculares a  $z$ , movendo-se com velocidades diferentes. Trata-se de um exemplo elementar de um escoamento laminar.



Se o campo da velocidade for constante, não haverá qualquer atrito entre as camadas de fluido. Se o gradiente de velocidade for positivo  $du(z)/dz > 0$ , a camada de fluido imediatamente acima do nível  $z_0$  arrastará o fluido imediatamente abaixo, exercendo uma tensão  $\tau_{zx}$ .

É intuitivo que quanto maior for o gradiente da velocidade maior será a tensão entre as camadas de fluido.

De facto, a lei da viscosidade de Newton diz que

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du(z)}{dz}. \quad (24)$$

De facto, a lei da viscosidade de Newton diz que

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du(z)}{dz}. \quad (24)$$

A constante de proporcionalidade  $\mu$  designa-se por viscosidade de corte ou coeficiente de viscosidade dinâmica, e é uma medida da interligação entre as camadas de fluido devido à viscosidade.

De facto, a lei da viscosidade de Newton diz que

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du(z)}{dz}. \quad (24)$$

A constante de proporcionalidade  $\mu$  designa-se por viscosidade de corte ou coeficiente de viscosidade dinâmica, e é uma medida da interligação entre as camadas de fluido devido à viscosidade.

Uma outra medida da viscosidade é o coeficiente de viscosidade cinética

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

De facto, a lei da viscosidade de Newton diz que

$$\tau_{zx} = \mu \frac{du(z)}{dz}. \quad (24)$$

A constante de proporcionalidade  $\mu$  designa-se por viscosidade de corte ou coeficiente de viscosidade dinâmica, e é uma medida da interligação entre as camadas de fluido devido à viscosidade.

Uma outra medida da viscosidade é o coeficiente de viscosidade cinética

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

A unidade da viscosidade dinâmica é  $\text{Pa} \cdot \text{s}$  ( $= 1 \text{ Poiseuille} = 10 \text{ poise}$ ).  
A unidade da viscosidade cinética é  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

**Fluidos Newtonianos:** *Equações de Navier-Stokes*

A generalização da equação (24) para escoamentos 3 dimensões de fluidos incompressíveis viscosos é

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (25)$$

**Fluidos Newtonianos:** *Equações de Navier-Stokes*

A generalização da equação (24) para escoamentos 3 dimensões de fluidos incompressíveis viscosos é

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (25)$$

Substituindo nas equações (22) obtêm-se as *equações de Navier-Stokes*

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\quad (26)$$



**Exercício:** Considere o seguinte campo de velocidades do escoamento de um fluido incompressível e viscoso

$$u = a(x^2 - y^2) \quad v = -2axy \quad w = 0.$$

Verifique se o campo de velocidades satisfaz as equações de Navier-Stokes, e, em caso afirmativo, determine o campo de pressão  $p(x, y, z)$ .

## ✓ *Condições de fronteira*

- ▶ Para determinar as soluções de equações parciais são necessárias *condições de fronteira*. A terceira lei de Newton requer que, na ausência de tensões superficiais, *a pressão seja contínua através de qualquer superfície material*.

## ✓ *Condições de fronteira*

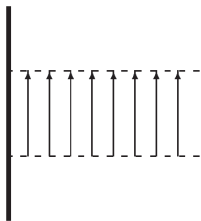
- ▶ Para determinar as soluções de equações parciais são necessárias *condições de fronteira*. A terceira lei de Newton requer que, na ausência de tensões superficiais, *a pressão seja contínua através de qualquer superfície material*.
- ▶ Os fluidos estão normalmente confinados por superfícies impenetráveis, por ex. o escoamento em tubos ou o movimento do ar junto à superfície. As superfícies impenetráveis impõem uma outra *condição de fronteira*:  
*a componente normal da velocidade do fluido em contacto com a superfície é igual à componente normal da velocidade da superfície.*

## ✓ *Condições de fronteira*

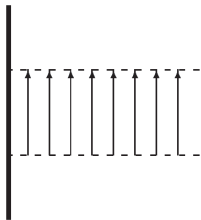
- ▶ Para determinar as soluções de equações parciais são necessárias *condições de fronteira*. A terceira lei de Newton requer que, na ausência de tensões superficiais, *a pressão seja contínua através de qualquer superfície material*.
- ▶ Os fluidos estão normalmente confinados por superfícies impenetráveis, por ex. o escoamento em tubos ou o movimento do ar junto à superfície. As superfícies impenetráveis impõem uma *condição de fronteira*:  
*a componente normal da velocidade do fluido em contacto com a superfície é igual à componente normal da velocidade da superfície.*
- ▶ Em termos da velocidade do fluido relativamente à parede:

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = 0,$$

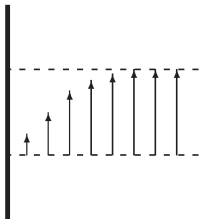
onde  $\hat{n}$  é a normal à superfície.



- No caso de fluidos ideais, a componente tangencial da velocidade pode ter qualquer valor (*free slipping*).

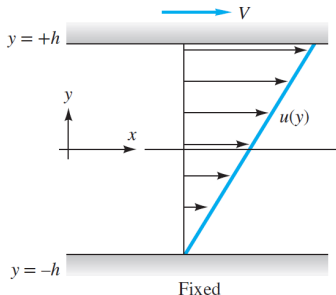


- No caso de fluidos ideais, a componente tangencial da velocidade pode ter qualquer valor (*free slipping*).

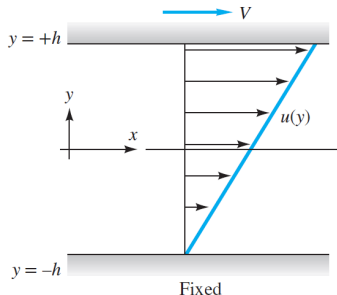


- No caso de fluidos viscosos, a componente tangencial da velocidade relativa à parede deve ser nula (*non-slipping*)

Considere um escoamento estacionário ao longo da direção  $x$ , forçado por uma placa em  $y = h$  que se desloca com velocidade  $V$ . A placa tem dimensões muito maiores do que  $h$ , i.e.  $\sqrt{A} \gg h$ , sendo  $A$  a área da placa. Nestas condições, poderemos aproximar o escoamento na região central da placa, pelo escoamento forçado por uma placa de área infinita. Assim,  $u = u(y)$ .



Considere um escoamento estacionário ao longo da direção  $x$ , forçado por uma placa em  $y = h$  que se desloca com velocidade  $V$ . A placa tem dimensões muito maiores do que  $h$ , i.e.  $\sqrt{A} \gg h$ , sendo  $A$  a área da placa. Nestas condições, poderemos aproximar o escoamento na região central da placa, pelo escoamento forçado por uma placa de área infinita. Assim,  $u = u(y)$ .



Substituindo  $u(y)$  na equação de Navier-Stokes para a componente  $x$  do momento linear

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (27)$$

obtém-se



$$\rho (0 + 0 + 0 + 0) = -0 + 0 + \mu \left( 0 + \frac{d^2 u}{dy^2} + 0 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (28)$$

$$\rho (0 + 0 + 0 + 0) = -0 + 0 + \mu \left( 0 + \frac{d^2 u}{dy^2} + 0 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (28)$$

A solução geral desta equação é  $u(y) = C_1 y + C_2$ , sendo as constantes  $C_1$  e  $C_2$  determinadas pelas condições de fronteira

$$u(-h) = 0 \quad = \quad -C_1 h + C_2$$

$$u(h) = V \quad = \quad C_1 h + C_2$$

$$\rho (0 + 0 + 0 + 0) = -0 + 0 + \mu \left( 0 + \frac{d^2 u}{dy^2} + 0 \right) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (28)$$

A solução geral desta equação é  $u(y) = C_1 y + C_2$ , sendo as constantes  $C_1$  e  $C_2$  determinadas pelas condições de fronteira

$$u(-h) = 0 \quad = \quad -C_1 h + C_2$$

$$u(h) = V \quad = \quad C_1 h + C_2$$

Assim, a solução para o escoamento entre uma placa em repouso e uma placa em movimento com velocidade  $V$  é dada por

$$u(y) = \frac{V}{2h} y + \frac{V}{2}. \quad (29)$$

$$\rho (0 + 0 + 0 + 0) = -0 + 0 + \mu \left( 0 + \frac{d^2 u}{dy^2} + 0 \right) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0. \quad (28)$$

A solução geral desta equação é  $u(y) = C_1 y + C_2$ , sendo as constantes  $C_1$  e  $C_2$  determinadas pelas condições de fronteira

$$u(-h) = 0 = -C_1 h + C_2$$

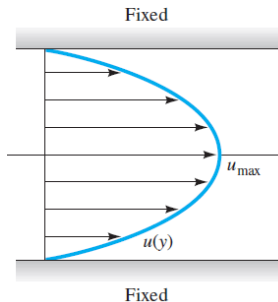
$$u(h) = V = C_1 h + C_2$$

Assim, a solução para o escoamento entre uma placa em repouso e uma placa em movimento com velocidade  $V$  é dada por

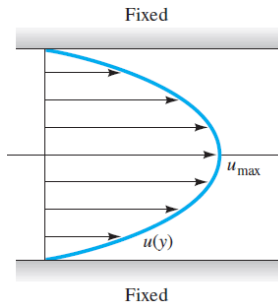
$$u(y) = \frac{V}{2h} y + \frac{V}{2}. \quad (29)$$

Esta solução é conhecida como o [escoamento de Couette](#).

No exemplo anterior, o escoamento era forçado pelo movimento da placa superior. Consideremos, agora, um escoamento estacionário ao longo da direcção  $x$ , entre duas placas em repouso, forçado por um gradiente de pressão  $-\partial p/\partial x$ . Novamente, com  $\sqrt{A} \gg h$ , o escoamento na região afastada dos bordos das placas, pode ser aproximado pelo escoamento entre placas de área infinita. Assim,  $u = u(y)$ .



No exemplo anterior, o escoamento era forçado pelo movimento da placa superior. Consideremos, agora, um escoamento estacionário ao longo da direcção  $x$ , entre duas placas em repouso, forçado por um gradiente de pressão  $-\partial p/\partial x$ . Novamente, com  $\sqrt{A} \gg h$ , o escoamento na região afastada dos bordos das placas, pode ser aproximado pelo escoamento entre placas de área infinita. Assim,  $u = u(y)$ .



Neste caso, a equação de Navier-Stokes para a componente  $x$  do momento linear reduz-se a

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (30)$$

E a equação de Navier-Stokes para a componente  $y$  do momento linear reduz-se a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \Leftrightarrow p(x, y) = p'(x) - \rho g y + p_0. \quad (31)$$

E a equação de Navier-Stokes para a componente  $y$  do momento linear reduz-se a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \Leftrightarrow p(x, y) = p'(x) - \rho g y + p_0. \quad (31)$$

Substituindo na equação (30), obtém-se

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp'}{dx}. \quad (32)$$



E a equação de Navier-Stokes para a componente  $y$  do momento linear reduz-se a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \Leftrightarrow p(x, y) = p'(x) - \rho g y + p_0. \quad (31)$$

Substituindo na equação (30), obtém-se

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp'}{dx}. \quad (32)$$

Como o membro esquerdo depende apenas de  $y$  e o membro direito depende apenas de  $x$ , eles terão de ser iguais a uma constante

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp'}{dx} = -G < 0. \quad (33)$$

E a equação de Navier-Stokes para a componente  $y$  do momento linear reduz-se a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \Leftrightarrow p(x, y) = p'(x) - \rho g y + p_0. \quad (31)$$

Substituindo na equação (30), obtém-se

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp'}{dx}. \quad (32)$$

Como o membro esquerdo depende apenas de  $y$  e o membro direito depende apenas de  $x$ , eles terão de ser iguais a uma constante

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp'}{dx} = -G < 0. \quad (33)$$

A solução geral desta equação é

$$u(y) = -\frac{G}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (34)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinadas a partir das condições de fronteira, são dadas por

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{G}{2\mu} h^2. \quad (35)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinadas a partir das condições de fronteira, são dadas por

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{G}{2\mu} h^2. \quad (35)$$

Substituindo na equação (34), obtém-se, finalmente,

$$u(y) = -\frac{G h^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (36)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinadas a partir das condições de fronteira, são dadas por

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{G}{2\mu} h^2. \quad (35)$$

Substituindo na equação (34), obtém-se, finalmente,

$$u(y) = -\frac{G h^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (36)$$

O perfil do escoamento tem a forma de uma **parábola de Poiseuille** com curvatura negativa.

As constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinadas a partir das condições de fronteira, são dadas por

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{G}{2\mu} h^2. \quad (35)$$

Substituindo na equação (34), obtém-se, finalmente,

$$u(y) = -\frac{G h^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (36)$$

O perfil do escoamento tem a forma de uma **parábola de Poiseuille** com curvatura negativa.

Nos dois exemplos anteriores, as soluções são válidas em regiões afastadas dos bordos das placas. Um caso, em que a solução é válida em todos os pontos, é o escoamento forçado por um gradiente de pressão  $-G$  ao longo de um tubo cilíndrico de raio  $R$

$$u(r) = -\frac{G R^2}{4\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (37)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinadas a partir das condições de fronteira, são dadas por

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{G}{2\mu} h^2. \quad (35)$$

Substituindo na equação (34), obtém-se, finalmente,

$$u(y) = -\frac{G h^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (36)$$

O perfil do escoamento tem a forma de uma **parábola de Poiseuille** com curvatura negativa.

Nos dois exemplos anteriores, as soluções são válidas em regiões afastadas dos bordos das placas. Um caso, em que a solução é válida em todos os pontos, é o escoamento forçado por um gradiente de pressão  $-G$  ao longo de um tubo cilíndrico de raio  $R$

$$u(r) = -\frac{G R^2}{4\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (37)$$

Este é o **escoamento de Hagen-Poiseuille**.