8.0 CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE

Fernando Neto
fneto@ua.pt

O CONCEITO DE RESISTÊNCIA TÉRMICA

RESISTÊNCIA TÉRMICA: ANALOGIA ENTRE A RESISTÊNCIA ELÉTRICA E A RESISTÊNCIA TÉRMICA

- Resistência elétrica

$$\Delta V = R.I \Leftrightarrow I = \frac{\Delta V}{R}$$

- Resistência térmica

$$\Delta T = R_T.q_x \Leftrightarrow q_x = \frac{\Delta T}{R_T}$$

RESISTÊNCIA TÉRMICA: CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL

$$q_x = -k.A.\frac{dT}{dx} = \frac{k.A}{L}\left(T_{s1} - T_{s2}\right)$$

$$\boxed{q_x = \frac{(T_{s1} - T_{s2})}{\frac{L}{kA}}}$$

R_T

$$q_x = \frac{\Delta T}{R_T}$$

Para uma mesma diferença de temperatura:

- o calor transferido diminui com um aumento de L
- o calor transferido aumenta com o aumento de k e A

RESISTÊNCIA TÉRMICA: CONVECÇÃO

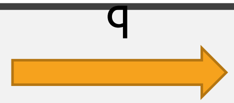
$$q = hA(T_S - T_\infty)$$

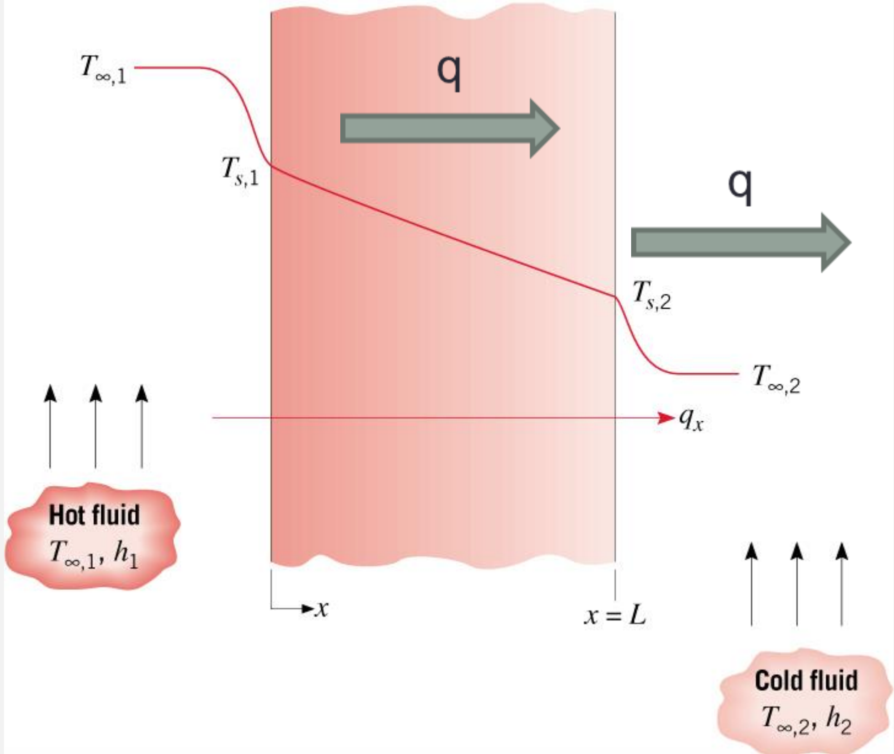
R_T

$$(T_S - T_\infty) = \frac{1}{hA} q$$

$$\boxed{q = \frac{(T_S - T_\infty)}{\dfrac{1}{hA}}}$$

RESISTÊNCIA TÉRMICA: CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE + CONVECÇÃO

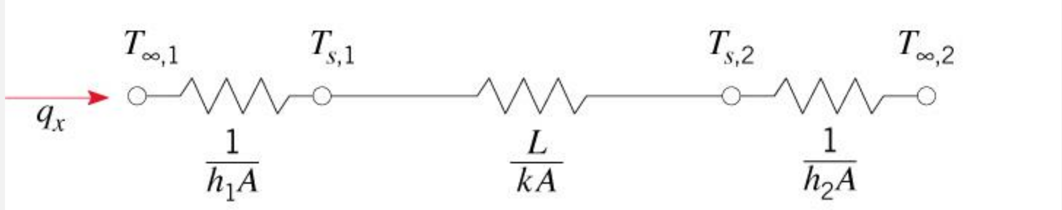




$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s1}}{1/h_1 . A} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{L/k . A} = \frac{T_{s2} - T_{\infty 2}}{1/h_2 . A}$$

$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{tot}}$$

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}$$



NOTA BREVE SOBRE PROPORCIONALIDADES

$$\Omega = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

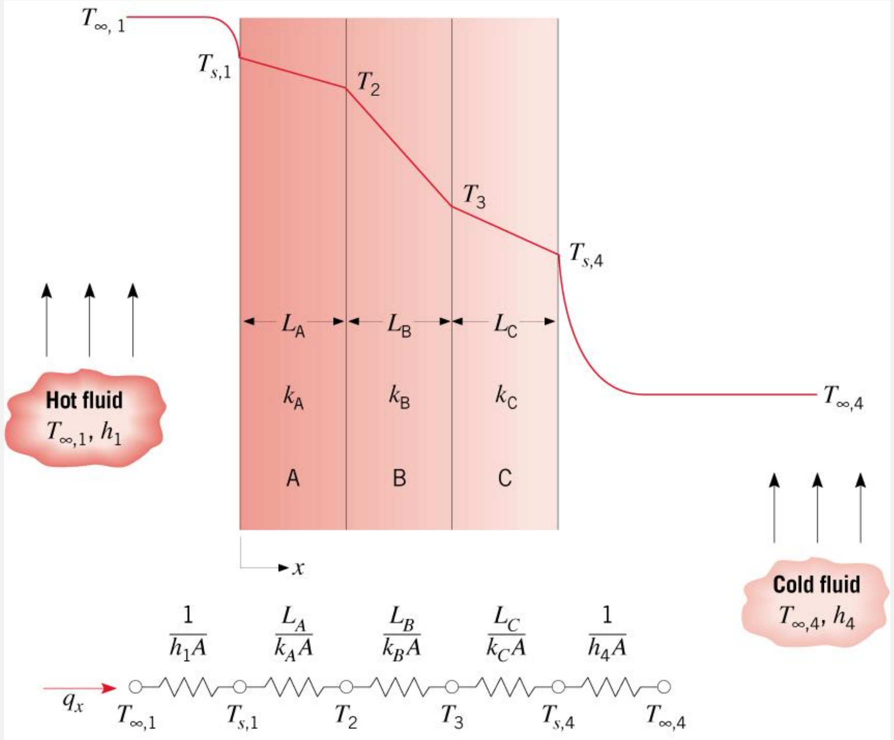
$$\begin{cases} a = x\Omega \\ b = y\Omega \\ c = z\Omega \end{cases}$$

$$a + b + c = \Omega(x + y + z)$$

$$\Omega = \frac{a + b + c}{x + y + z}$$

MEIOS COMPOSTOS.
O COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

PAREDE COMPOSTA: O COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

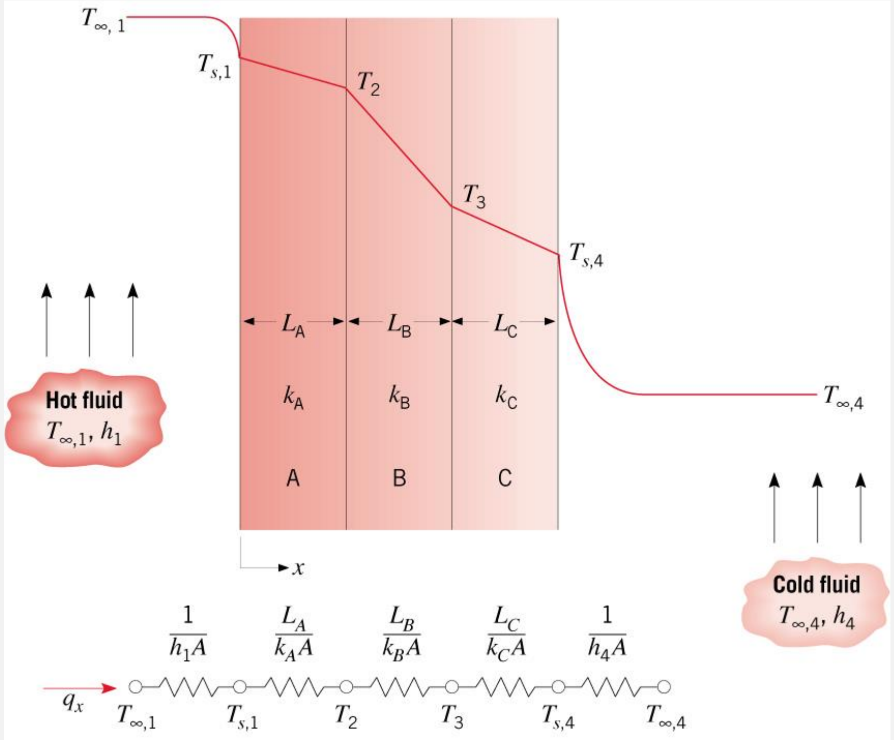


$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}}$$

$$R_{tot} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}\right] = \frac{R''_{tot}}{A}$$

Neste caso R_{tot} tem por unidades $K.W^{-1}$ enquanto R''_{tot} é expresso em $m^2.K^{-1}.W^{-1}$

PAREDE COMPOSTA: O COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR, U



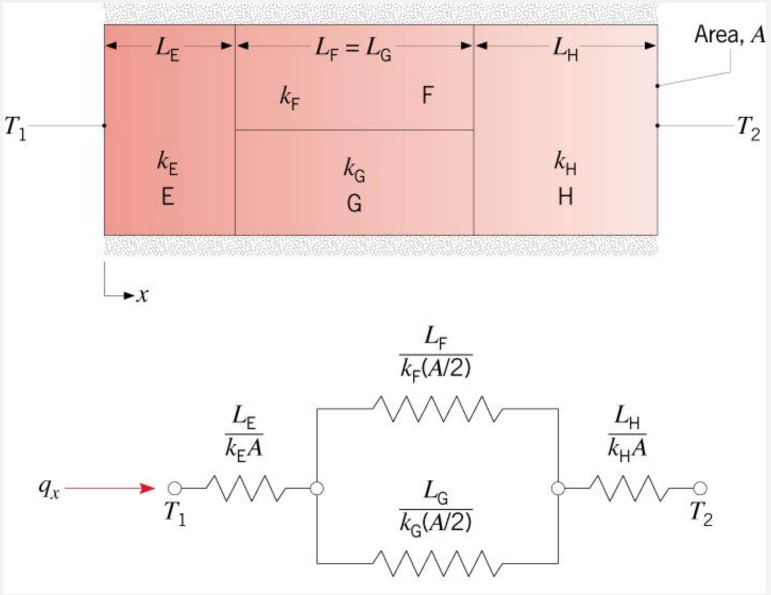
$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}}$$

$$R_{tot} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}\right] = \frac{R''_{tot}}{A}$$

$$q_x = UA\Delta T_{overall}$$

$$R_{tot} = \frac{1}{UA}$$

PAREDE COMPOSTA: RESISTÊNCIAS EM PARALELO

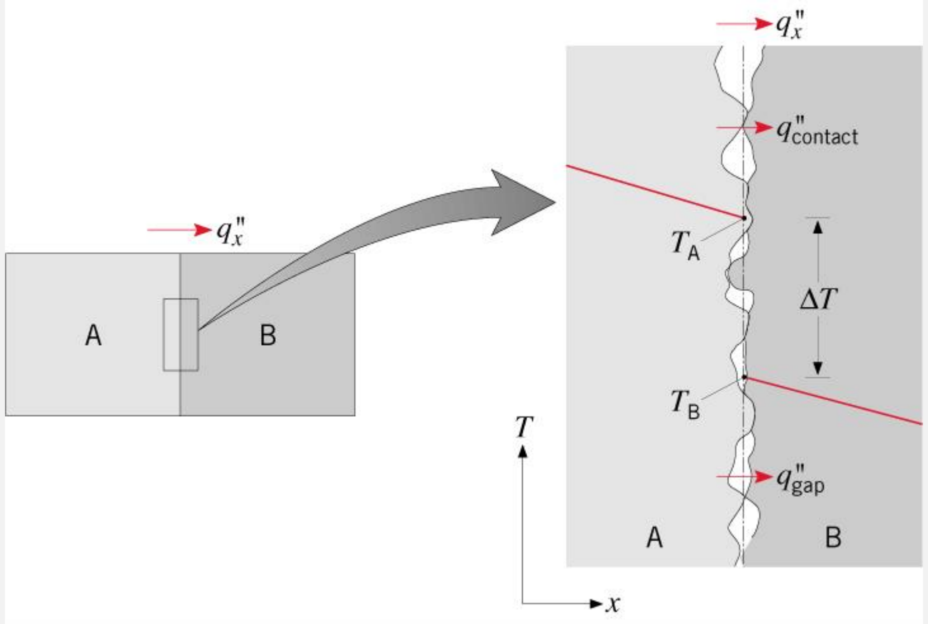


$$\sum R = \frac{L_E}{k_E.A} + \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{L_F}{k_F.\dfrac{A}{2}}} + \dfrac{1}{\dfrac{L_G}{k_G.\dfrac{A}{2}}}} + \frac{L_H}{k_H.A}$$

RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONTACTO

RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONTATO

- Existe uma resistência térmica de contato entre duas superfícies sólidas, independentemente da forma de contato entre elas



RESISTÊNCIA TÉRMICA DE CONTATO

- A resistência térmica de contato entre duas superfícies sólidas é definida como:

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x}$$

- A diminuição da resistência térmica de contato pode ser conseguida:
  - Com melhor acabamento da superfície de contato
  - Com utilização de uma maior pressão de ligação entre as superfícies
  - Utilizando um fluído condutor entre elas

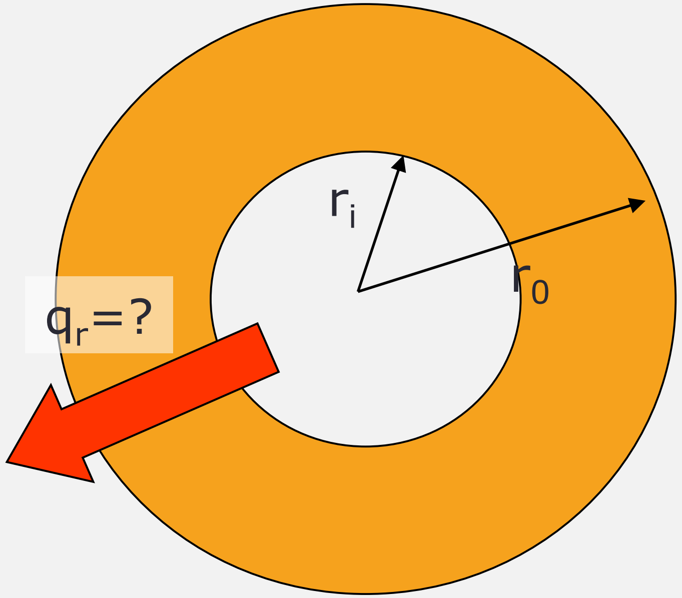
CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM SISTEMAS RADIAIS

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO

- Um dos problemas mais importantes em sistemas radiais é o da condução de calor na direção do raio: caso das tubagens que transportam fluídos

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – QUESTÃO PRELIMINAR

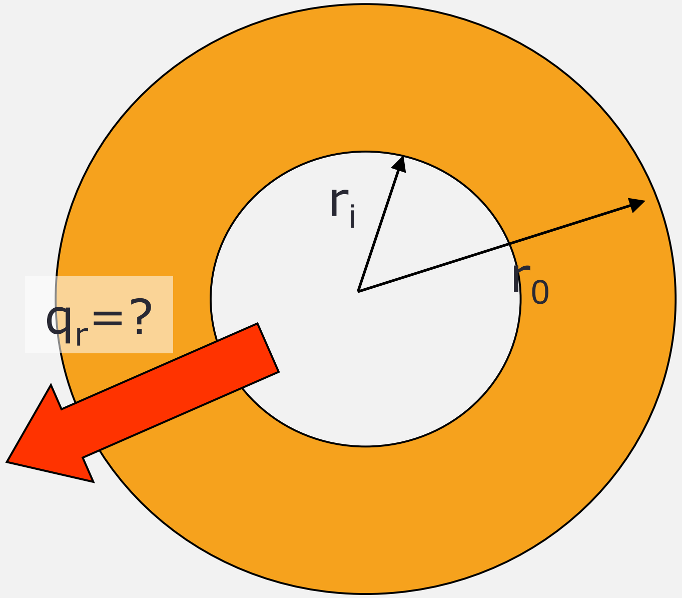
Qual a forma de lei de Fourier para sistemas radiais?



$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – QUESTÃO PRELIMINAR SOBRE O GRADIENTE DE TEMPERATURA

$$q_r = -kA_r \frac{dT}{dr}$$



Consequências…

Como $A_r = 2\pi rL$, isto significa que:
$A_{ri} = 2\pi r_i L \neq A_{r0} = 2\pi r_0 L$

Como q_r é constante, então:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_i} \neq \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0}$$

O gradiente de temperatura é maior na parede interna do tubo

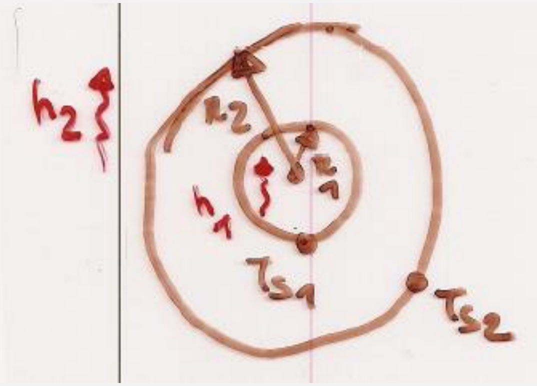
CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)}+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)}+\cancel{\dot{q}}=\cancel{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)=0$$

- Versão simplificada (condução unidimensional na direção radial, regime permanente, ausência de geração de calor)

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA PAREDE DE UM CILINDRO



Integrando a equação $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)=0$$

Considerando as condições de fronteira

$r=r_1$, $T(r)=T_{S1}$

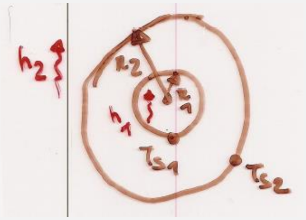
e

$r=r_2$, $T(r)=T_{S2}$

Vem

$$T(r)=\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)+T_{s,2}$$

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – FLUXO DE CALOR ATRAVÉS DA PAREDE DE UM CILINDRO



$$T_r = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} . \ln \frac{r}{r_2} + T_{S2} \qquad (1)$$

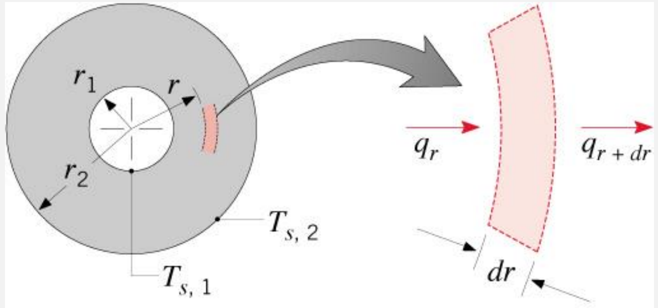
A lei de Fourier relativa à condução de calor através de uma parede cilíndrica é dada por:

$$q_r = -k.A_r \frac{dT}{dr} = -k.2\pi r L \frac{dT}{dr} \qquad (2)$$

Derivando a equação (1) em ordem a r e substituindo dT/dr em (2), teremos

$$\boxed{q_r = \frac{2\pi L k (T_{S1} - T_{S2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM SISTEMAS RADIAIS – A ESFERA



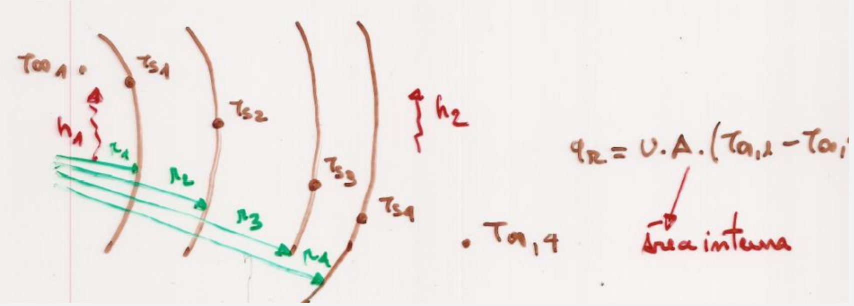
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$$

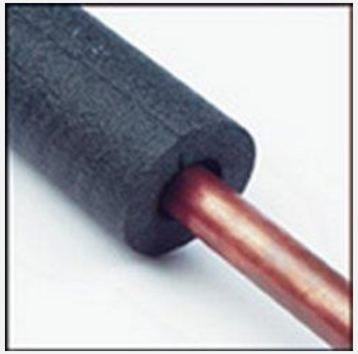
$$T(r)=T_{s,1}-\left(T_{s,1}-T_{s,2}\right)\frac{1-\left(r_{1}/r\right)}{1-\left(r_1/r_2\right)}$$

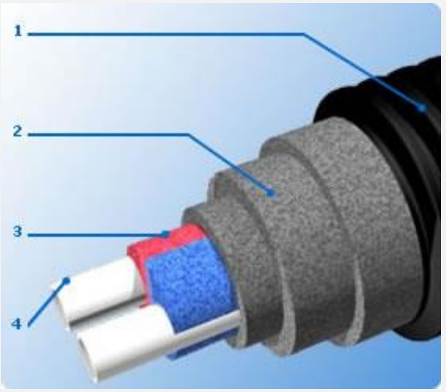
$$q_r''=-k\frac{dT}{dr}=\frac{k}{r^2\left[\left(1/r_1\right)-\left(1/r_2\right)\right]}\left(T_{s,1}-T_{s,2}\right)$$

O COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS RADIAIS

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO

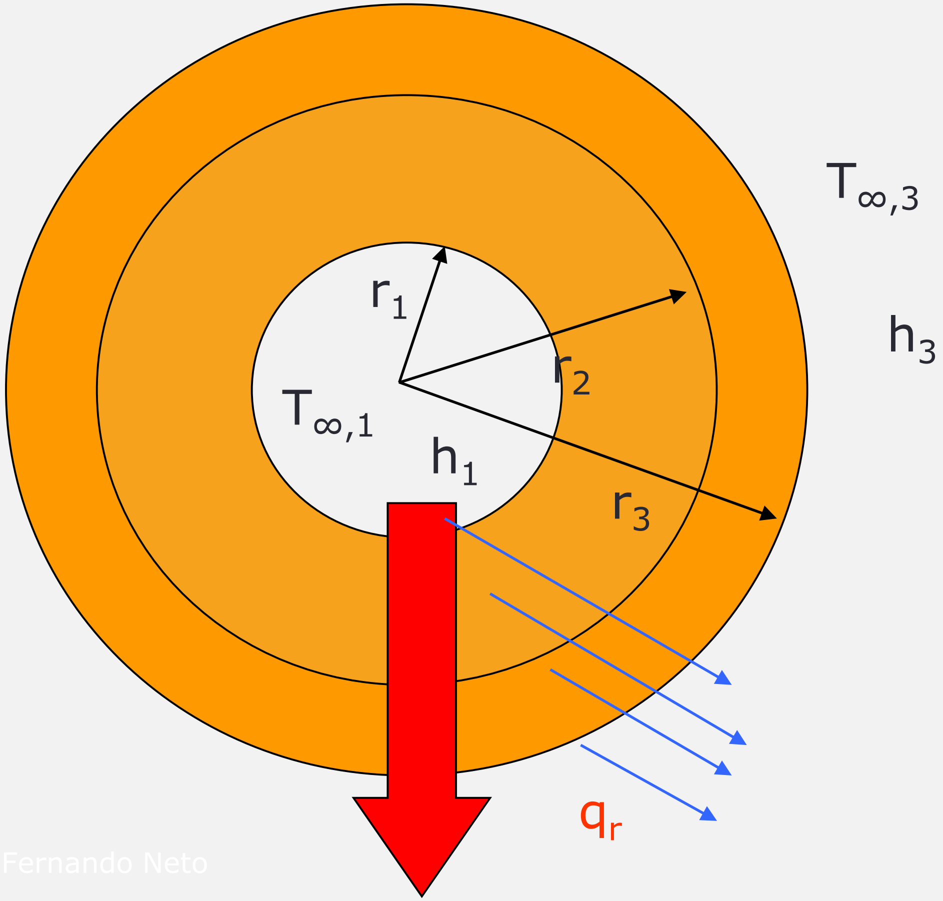






Qual o valor de U?

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO

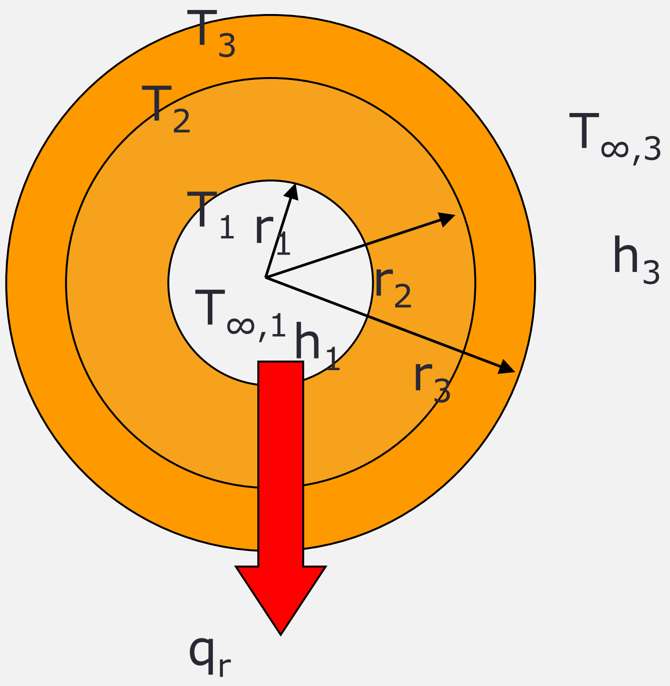


$$q_r = U.A_1(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})$$

?

Mecanismos de transferência de calor:
-Convecção na parede interior do tubo
-Condução radial através da camada azul
-Condução radial através da camada laranja
-Convecção na parede exterior do tubo

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO



Mecanismos de transferência de calor:

-Convecção na parede interior do tubo

$$q_r = h_1 A_1 (T_{\infty,1} - T_1) = h_1 2\pi r_1 L (T_{\infty,1} - T_1) = \frac{(T_{\infty,1} - T_1)}{\dfrac{1}{h_1 2\pi r_1 L}}$$

-Condução radial através da camada azul

$$q_r = \frac{2\pi k_2 L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_2 L}}$$

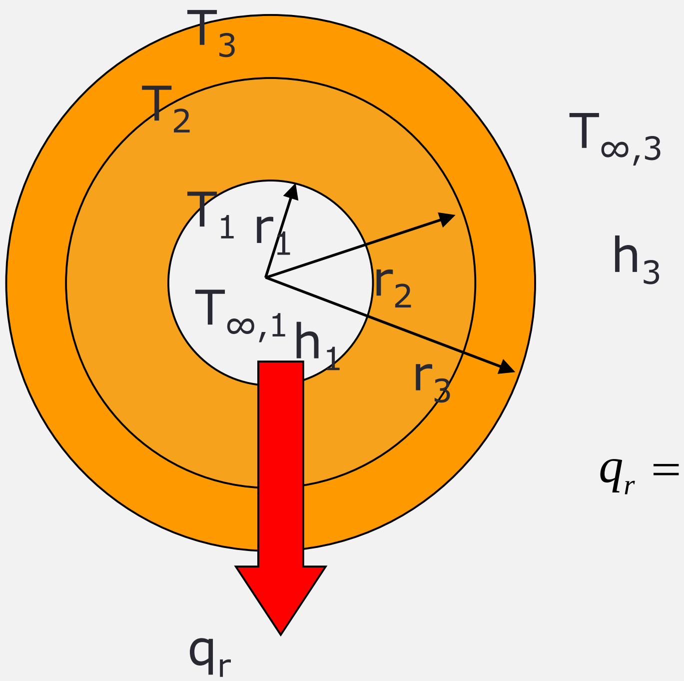
-Condução radial através da camada laranja

$$q_r = \frac{2\pi k_3 L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)} = \frac{(T_2 - T_3)}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_3 L}}$$

-Convecção na parede exterior do tubo

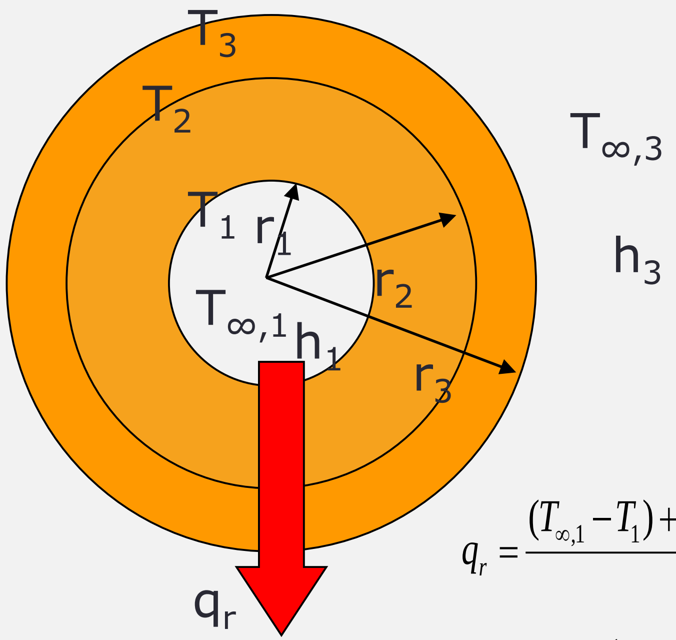
$$q_r = \frac{(T_3 - T_{\infty,3})}{\dfrac{1}{h_3 2\pi r_3 L}}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO



$$q_r = \frac{(T_{\infty,1} - T_1)}{\dfrac{1}{h_1 2\pi r_1 L}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_2 L}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_3 L}} = \frac{(T_3 - T_{\infty,3})}{\dfrac{1}{h_3 2\pi r_3 L}}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO



Recordando que:

$$\Omega = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \Leftrightarrow \Omega = \frac{a+b+c}{x+y+z}$$

$$q_r = \frac{(T_{\infty,1} - T_1) + (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_{\infty,3})}{\dfrac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_2 L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_3 L} + \dfrac{1}{h_3 2\pi r_3 L}} = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})}{\dfrac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_2 L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_3 L} + \dfrac{1}{h_3 2\pi r_3 L}}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO

$$q_r = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})}{\dfrac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_2 L} + \dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_3 L} + \dfrac{1}{h_3 2\pi r_3 L}}$$

Multiplicando e dividindo por $A_1 = 2\pi r_1 L$, virá

$$q_r = \frac{A_1(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})}{\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{r_1 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{k_2} + \dfrac{r_1 \ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{k_3} + \dfrac{r_1}{h_3 r_3}}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO

Comparando...

$$q_r = \frac{A_1(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_2} + \frac{r_1 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_3} + \frac{r_1}{h_3 r_3}}$$

$$q_r = U.A_1(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})$$

$$\boxed{U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_2} + \frac{r_1 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_3} + \frac{r_1}{h_3 r_3}}}$$

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE EM SISTEMAS RADIAIS – O CILINDRO COMPOSTO

Se tivéssemos utilizado a área externa, A_3, o significado de U seria o mesmo?

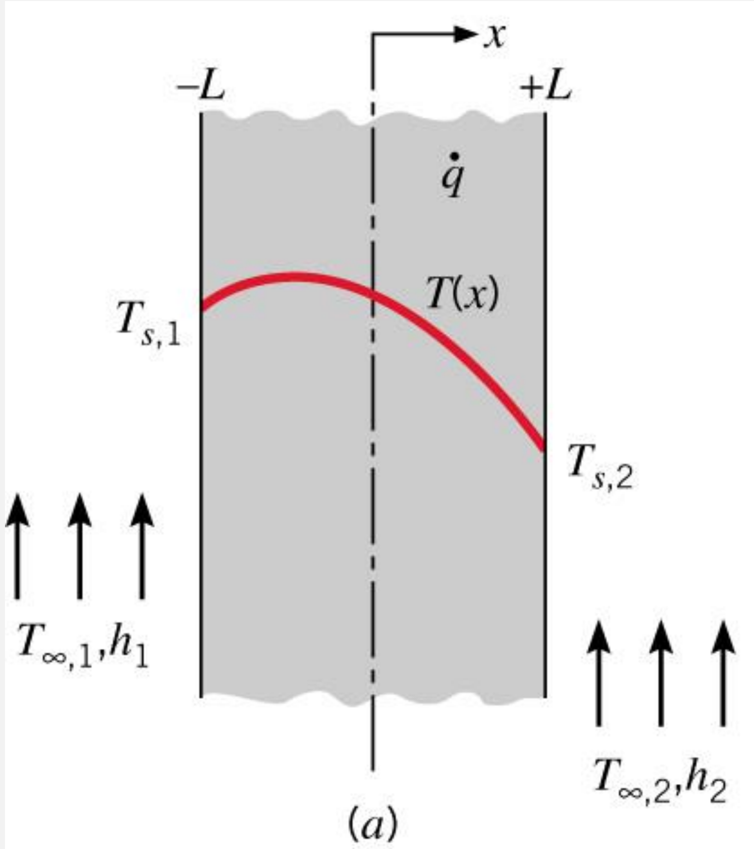
$$q_r = U.A_3(T_{\infty,1} - T_{\infty,3})$$

CONDUÇÃO COM GERAÇÃO DE CALOR

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE COM GERAÇÃO DE CALOR

- Conversão de energia elétrica em calor (lei de Joule, $E_g=I^2.R_e$)
- Absorção de neutrões num reator nuclear
- Reações químicas exotérmicas no interior de um material
- Absorção de radiação eletromagnética numa parede
- etc.

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE COM GERAÇÃO DE CALOR – A PLACA PLANA



$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+\dot{q}=0 \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

(se a condutibilidade térmica for constante)

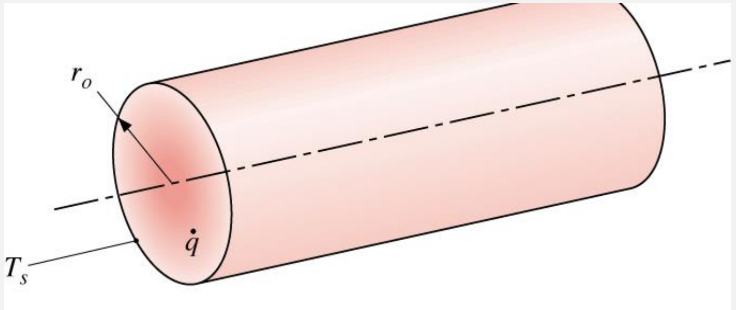
Integrando…

$$T(x)=-\left(\dot{q}/2k\right)x^2+C_1x+C_2$$

Os valores das constantes de integração dependem das condições fronteira selecionadas

CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE COM GERAÇÃO DE CALOR – O CILINDRO

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)+\dot{q}=0$$



Exemplo de condições fronteira:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0}=0$$

$$T(r_0)=T_s$$

Distribuição de temperaturas:

$$T_r=\frac{q.r_0^2}{4k}\left(1-\frac{r^2}{r_o^2}\right)+T_s$$

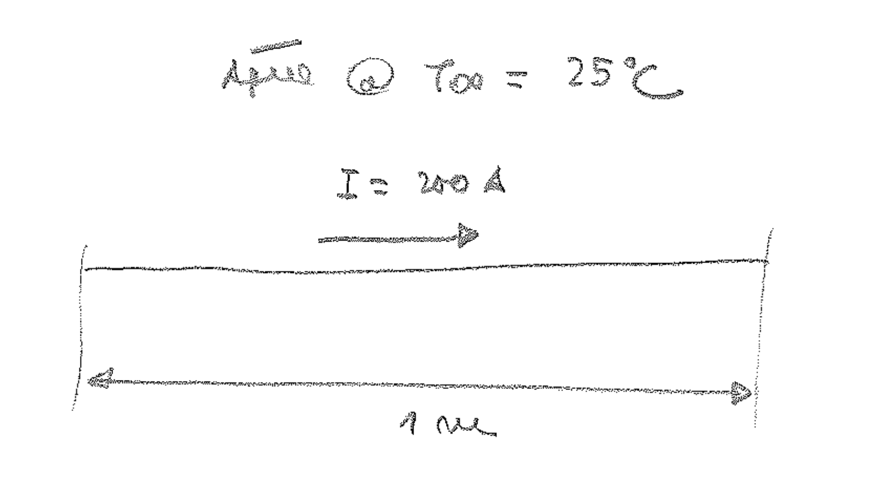
CASO PRÁTICO

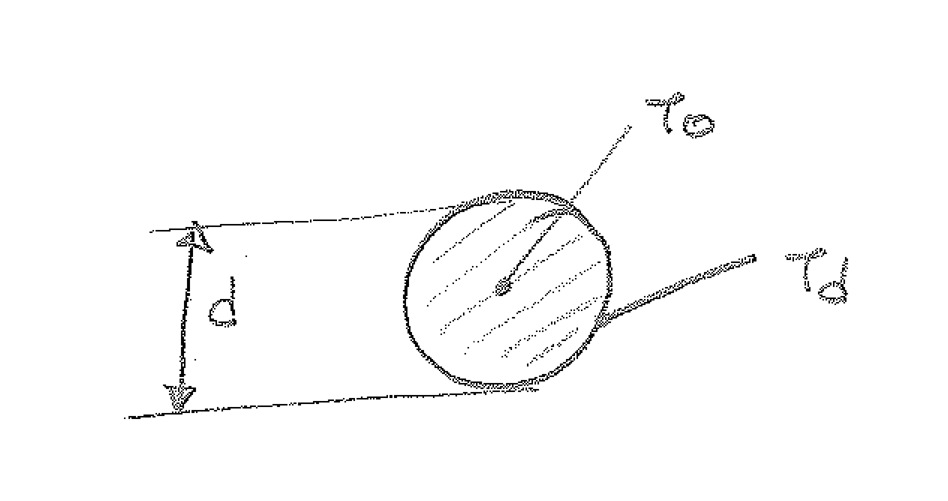
Um fio de aço inoxidável com uma condutibilidade **k** de 19 $W.m^{-1}.K^{-1}$, uma resistividade **ρ** de 70μΩ.cm, um diâmetro **d** de 3 mm e um comprimento, **L**, de 1 m é atravessado por uma corrente elétrica com uma intensidade **I** de 200 A.

O fio encontra-se exposto a um escoamento de água a uma temperatura $\mathbf{T}_\infty$ de 25ºC, sendo o coeficiente de transferência de calor por convecção, **h**, de 3000 $W.m^{-2}.K^{-1}$.

Calcule qual a temperatura $\mathbf{T_S}$ à superfície do mesmo, bem como a temperatura $\mathbf{T_C}$ no centro do fio.

SOLUÇÃO: ESQUEMA GRÁFICO





SOLUÇÃO: DETERMINAÇÃO DE T_S

Consegue-se determinar o calor dissipado através do fio?

Se isso for possível, então:

$\boxed{\text{O calor dissipado através da superfície externa do fio} = \text{calor removido por convecção à superfície do fio}}$

$\underline{\text{Calor dissipado através da superfície externa}} = h \cdot A \, (T_s - T_\infty)$

↓

Se for conhecido, podemos determinar T_s

SOLUÇÃO: DETERMINAÇÃO DE T_0

Se conhecemos T_s, então a temperatura no centro do fio será dado por

$$T(r) = \frac{\dot{q}\, r_0^2}{4k}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s$$

Quando $r = 0$ (centro do fio), vem

$$\boxed{T(0) = \frac{\dot{q}\, r_0^2}{4k} + T_s}$$

RESOLUÇÃO

① Cálculo do calor dissipado através da superfície externa do fio.

O calor dissipado através da superfície externa do fio será igual ao calor produzido pela passagem da corrente eléctrica através do fio.

$$q = I^2 . R$$

$$R = \rho . \frac{L}{A_{\text{transversal}}} = \underbrace{70 \times 10^{-6} \times 0{,}01}_{\text{resistividade}} \times \frac{1}{\pi \times 0{,}0015^2}$$

$$= 0{,}099 \ \Omega$$

$$q = 200^2 \times 0{,}099 = 3961 \ W$$

RESOLUÇÃO

② Cálculo da temperatura à superfície da parede

$$q = h\,A_{lateral}\,(T_S - T_\infty)$$

$$T_S = \frac{q}{h \cdot A_{lateral}} + T_\infty = \frac{3961}{3000 \times \pi \times 0{,}003 \times 1} + 25$$

$$= 165\,^\circ C$$

RESOLUÇÃO

③ Cálculo da temperatura no centro do fio:

$$T(0) = \frac{\dot{q}\, r_o^2}{4k} + T_s$$

$$\dot{q} = \frac{q}{V} = \frac{3961}{\pi R^2 L} = \frac{3961}{\pi \times 0{,}0015^2 \times 1} = 560{,}4 \times 10^6 \ W/m^3$$

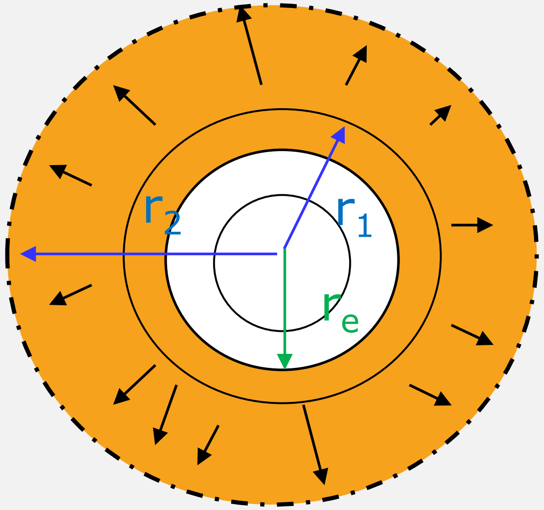
$$T(0) = \frac{560{,}4 \times 10^6 \times 0{,}0015^2}{4 \times 19} + 165 = 181{,}6\ ^\circ C$$

A ESPESSURA CRÍTICA DE ISOLAMENTO

ISOLAMENTO TÉRMICO: EFEITOS CONTRADITÓRIOS DA SUA ADIÇÃO A UMA TUBAGEM

- Aumentando a espessura do isolamento (passando de r_1 para r_2), aumenta a resistência à transmissão de calor por condução mas...
- ...aumenta também a área disponível para a transferência de calor por convecção

$$q_r = \frac{(T_e - T_2)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_e}\right)}{2\pi k_2 L}}$$

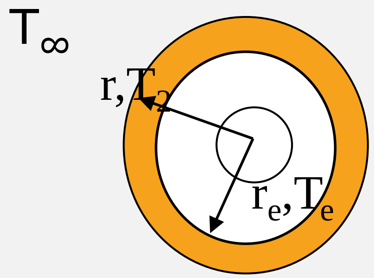


$$q_r = \frac{(T_2 - T_\infty)}{\frac{1}{h 2\pi r_2 L}}$$

ESPESSURA CRÍTICA DE ISOLAMENTO

- Quantificando numa única equação o calor transferido por condução e convecção:

$$q(r) = \frac{2\pi L(T_e - T_\infty)}{\dfrac{\ln(r/r_e)}{k} + \dfrac{1}{r.h}}$$



- q varia contraditoriamente com **r**
- haverá um valor ótimo de r?
- derivando q(r) em ordem a r e igualando a zero, verifica-se que existe um **máximo** da função q(r)
- este máximo ocorre para **r=k/h** que é o valor que maximiza q(r)!!!
- este valor é designado por **espessura crítica de isolamento**

…E O VALOR ÓPTIMO DE ISOLAMENTO?

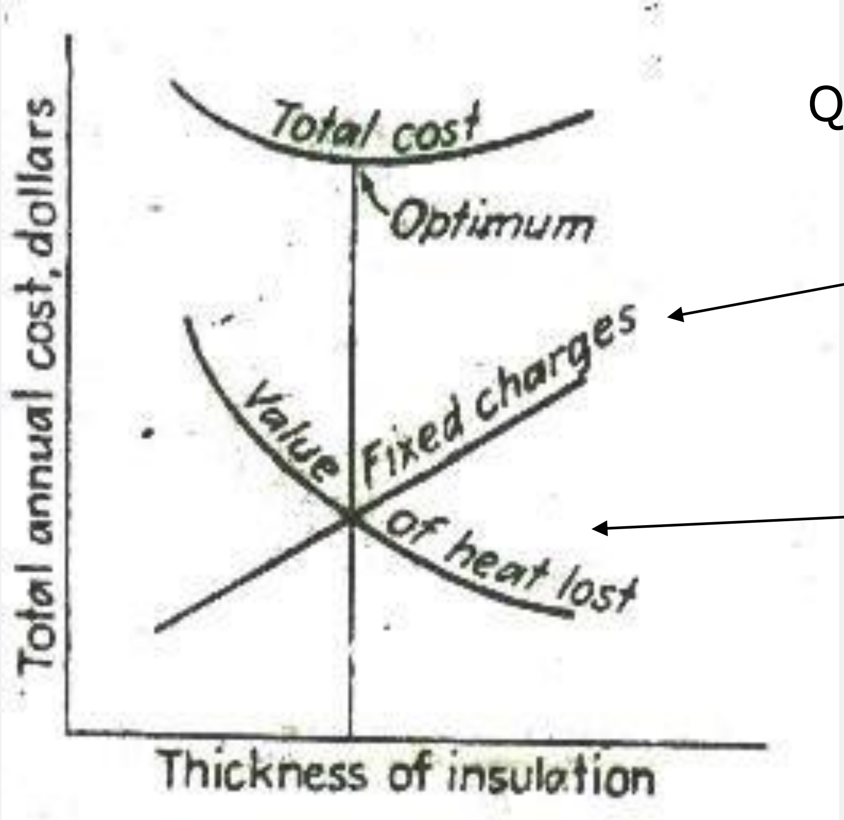


FIG. 2.11. Optimum thickness of insulation.

Quanto maior a espessura do isolamento…

1. …maior o custo inicial do investimento associado ao isolamento de uma conduta ou equipamento;
2. …maiores as economias resultantes de um menor consumo energético

ALHETAS

MAXIMIZAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO I

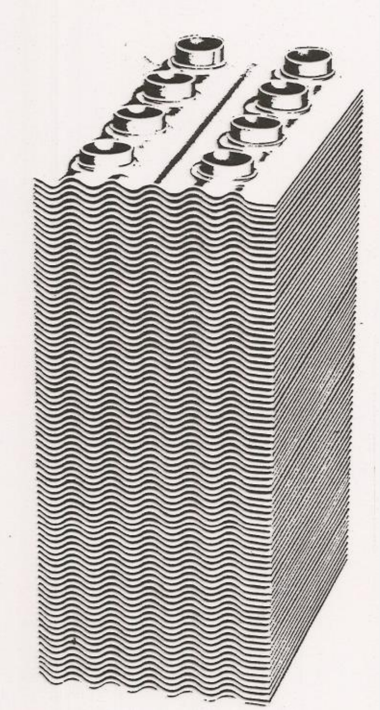
- Interessa amiúde aumentar a transferência de calor por convecção:
  - refrigeração da cabeça de um motor...
  - promover o aquecimento de um fluído que circula numa tubulação...
  - promover o aquecimento ambiente...
  - etc...
- Como?

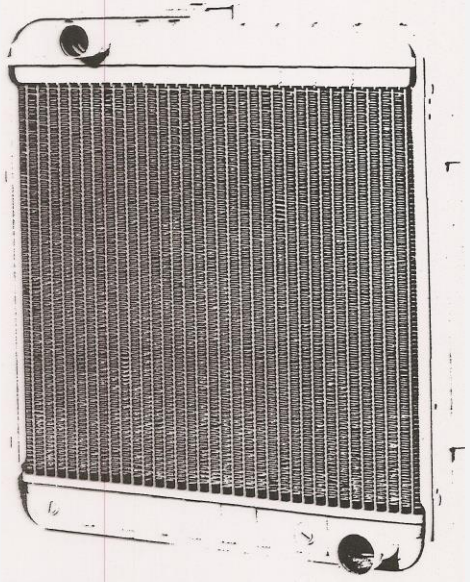
MAXIMIZAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO II

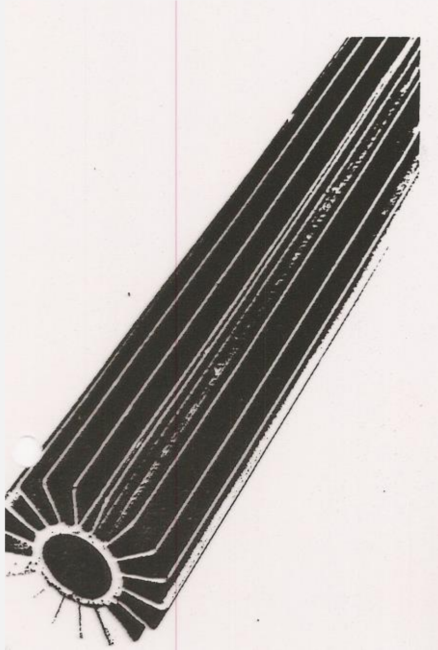
$$q = h.A.(T_s - T_\infty)$$

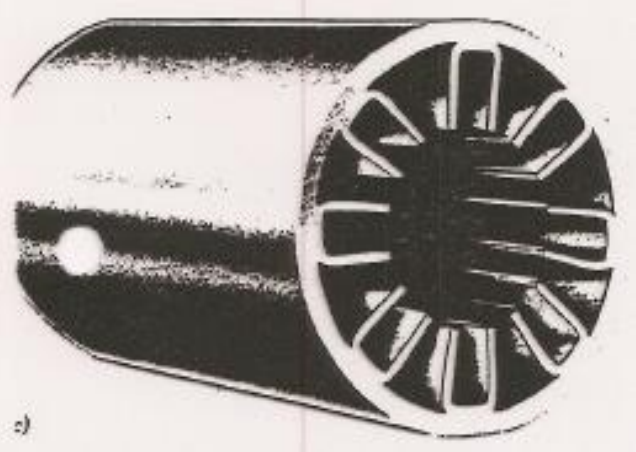
- A maximização da potência calorífica transferida pode ser feita:
  - ... aumentando h
    - (nem sempre é possível)
  - ... diminuindo T_∞
    - (nem sempre é possível)
  - ...aumentando T_s
    - (nem sempre é possível)
  - Aumentando A
    - SEMPRE POSSÍVEL

AUMENTO DA ÁREA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR



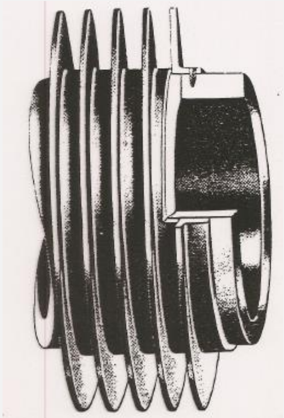


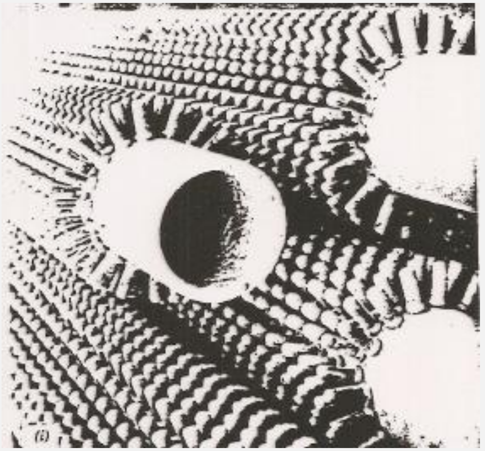




ALHETAS

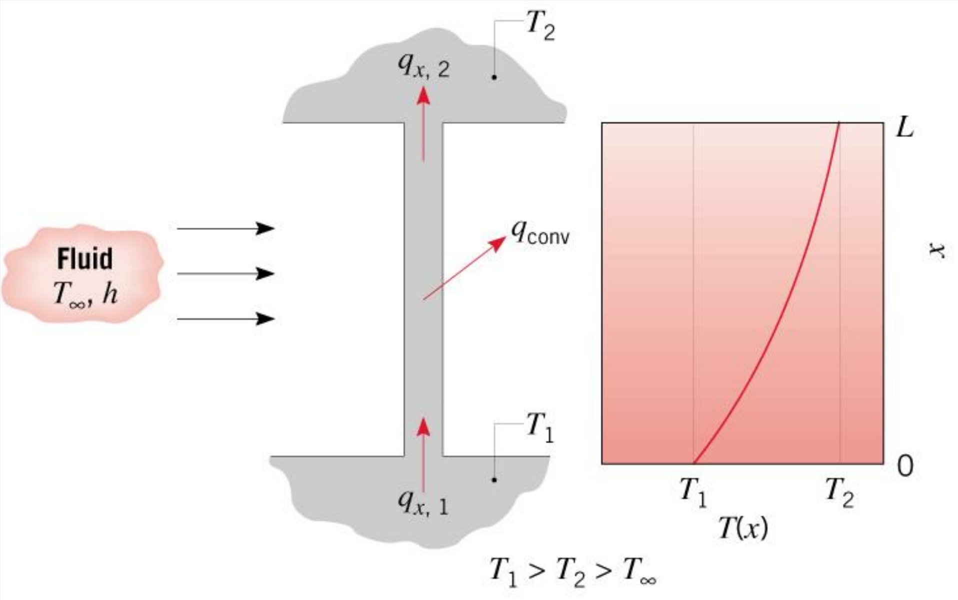
- Alheta (ou aleta): superfície (normalmente de elevada condutibilidade térmica) adicionada a um sólido para aumentar a área disponível para a transferência de calor





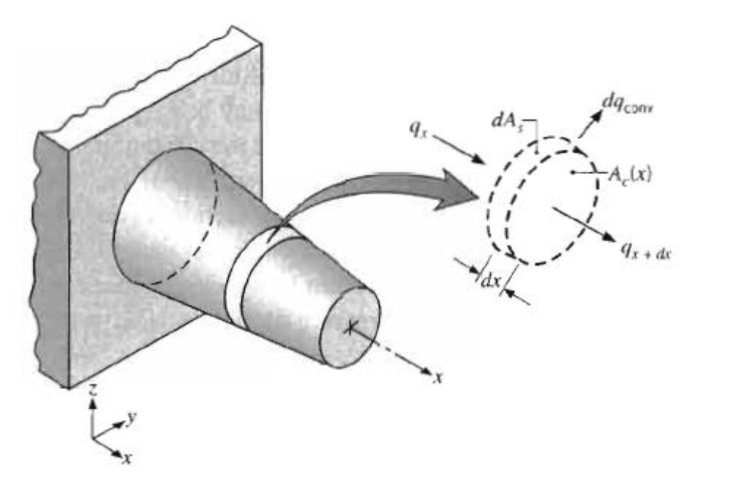
CARATERÍSTICAS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ALHETAS

- A transferência de calor por convecção numa alheta é feita perpendicularmente à direção da transferência de calor por condução
- a transferência de calor por condução é unidimensional



TRANSFERÊNCIA DE CALOR A PARTIR DE ALHETAS

TRANSMISSÃO DE CALOR A PARTIR DE SUPERFÍCIES ALHETADAS – IDENTIFICAÇÃO DOS FLUXOS DE CALOR (BALANÇO ENERGÉTICO)



Balanço energético

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

Qual o valor de cada um dos termos que compõe o balanço energético?

$$q_x = -k.A_c \frac{dT}{dx}$$

$$q_{x+dx} = -k.A_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx}\left(A_c \frac{dT}{dx} \right) dx$$

$$dq_{conv} = h.dA_s (T - T_\infty)$$

TRANSMISSÃO DE CALOR A PARTIR DE SUPERFÍCIES ALHETADAS – BALANÇO ENERGÉTICO

- Somando as equações dos fluxos e após algumas combinações, vem:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\left(\frac{1}{A_c}.\frac{dA_c}{dx}\right)\frac{dT}{dx}-\left(\frac{1}{A_c}.\frac{h}{k}.\frac{dA_s}{dx}\right)(T-T_\infty)=0$$

- Equação geral para a transferência de calor unidimensional numa alheta qualquer (em regime permanente)

ALHETAS: SE A SECÇÃO TRANSVERSAL DA ALHETA TIVER UMA ÁREA CONSTANTE, A_C=CTE,…

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \left(\frac{P}{A_c} \cdot \frac{h}{k} \right) (T - T_\infty) = 0$$

T – temperatura numa dada secção transversal da alheta
x – distância medida ao longo do comprimento da alheta
T_∞ - temperatura ambiente
P – perímetro da secção transversal da alheta
h – coeficiente de transferência de calor por convecção
k – condutibilidade térmica do material que compõe a alheta
A_c – área da secção transversal da alheta (área que se opõe ao fluxo de calor por condução)

ALHETAS: RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA O CASO PARTICULAR DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE

Definindo a variável $\theta(x)=T(x)-T_\infty$, a equação da condução de calor na alheta transforma-se em

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

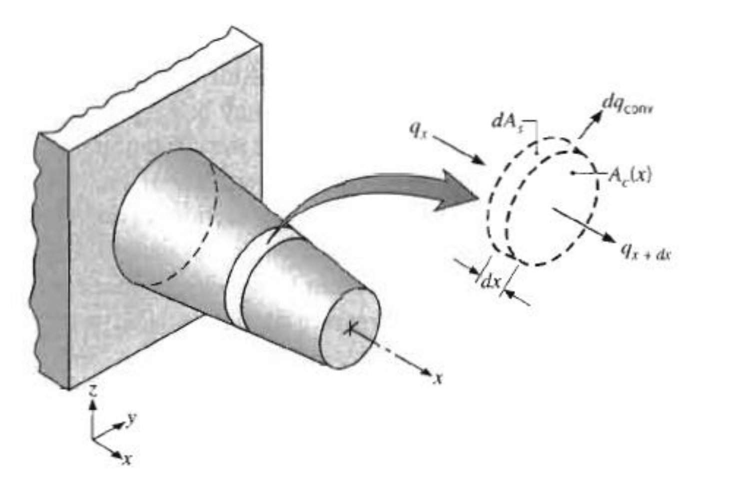
equação diferencial de 2ª ordem homogénea, com coeficientes constantes, em que **$m=[h.P.(k.A_c)^{-1}]^{1/2}$** e cuja solução geral é do tipo

$$\theta(x) = C_1.e^{mx} + C_2.e^{-mx}$$

As constantes de integração C_1 e C_2 dependem das condições de fronteira

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 1ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

$$\theta(x) = C_1 . e^{mx} + C_2 . e^{-mx}$$



As condições de fronteira são determinadas definindo qual a temperatura para x=0 (base da alheta) e quais as condições que ocorrem para x=L (extremidade da alheta)

A 1ª condição de fronteira é fácil de definir. Na base da alheta, a sua temperatura é igual à temperatura da parede, T_b.

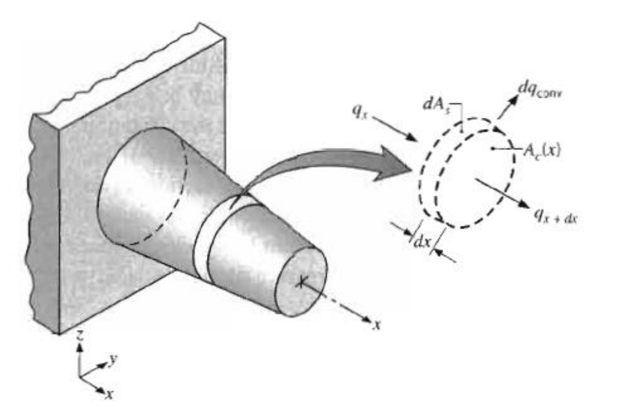
Donde, para x=0, vem $T_{(x=0)}=T_b$

Logo,
$\theta(0)=T_b-T_\infty=C_1.e^{mx}+C_2e^{-mx}$
<=>
$T_b-T_\infty=C_1+C_2$

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 2ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

Para x=L (extremidade da alheta), quatro possibilidades ocorrem para a definição das condições de fronteira:

1. Ocorre convecção na extremidade da alheta
2. A convecção a partir da extremidade da alheta é negligenciável
3. A temperatura na extremidade da alheta encontra-se definida
4. A alheta é muito longa



ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 2ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

A que condição de fronteira corresponde cada uma destas situações físicas?

1. Ocorre convecção na extremidade da alheta $$h.A_c\theta(L) = -k.A_c \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}$$

2. A convecção a partir da extremidade da alheta é negligenciável $$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

3. A temperatura na extremidade da alheta encontra-se definida $$\theta(L) = \theta_L$$

4. A alheta é muito longa $$L \to \infty, \theta = 0$$

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 2ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

1. Ocorre convecção na extremidade da alheta

$$h.\theta(L) = -k.\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}$$

A inclusão das condições fronteira leva a que a solução particular da equação da difusão de calor seja dada por

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{h}{m.k}\,senh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{h}{m.k}\,senh(mL)}}$$

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 2ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

2. A convecção a partir da extremidade da alheta é negligenciável

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

A inclusão das condições fronteira leva a que a solução particular da equação da difusão de calor seja dada por

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL)}}$$

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 2ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

3. A temperatura na extremidade da alheta encontra-se definida

$$\theta(L) = \theta_L$$

A inclusão das condições fronteira leva a que a solução particular da equação da difusão de calor seja dada por

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\frac{\theta_L}{\theta_b} senh(mx) + senh\left[m(L-x)\right]}{senh(mL)}}$$

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO C_1 E C_2 NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR PARA UMA ALHETA DE SECÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE A_C=CTE. A 2ª CONDIÇÃO DE FRONTEIRA.

4. A alheta é muito longa

$$L \to \infty, \theta = 0$$

A inclusão das condições fronteira leva a que a solução particular da equação da difusão de calor seja dada por

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}}$$

NOTA SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

ALHETAS: DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR TRANSFERIDO ATRAVÉS DA ALHETA

Sabendo qual a equação que nos dá T=T(x), a potência calorífica transmitida através da alheta obtêm-se através de (lei de Fourier):

$$q_x = -k.A_c.\frac{dT}{dx}$$

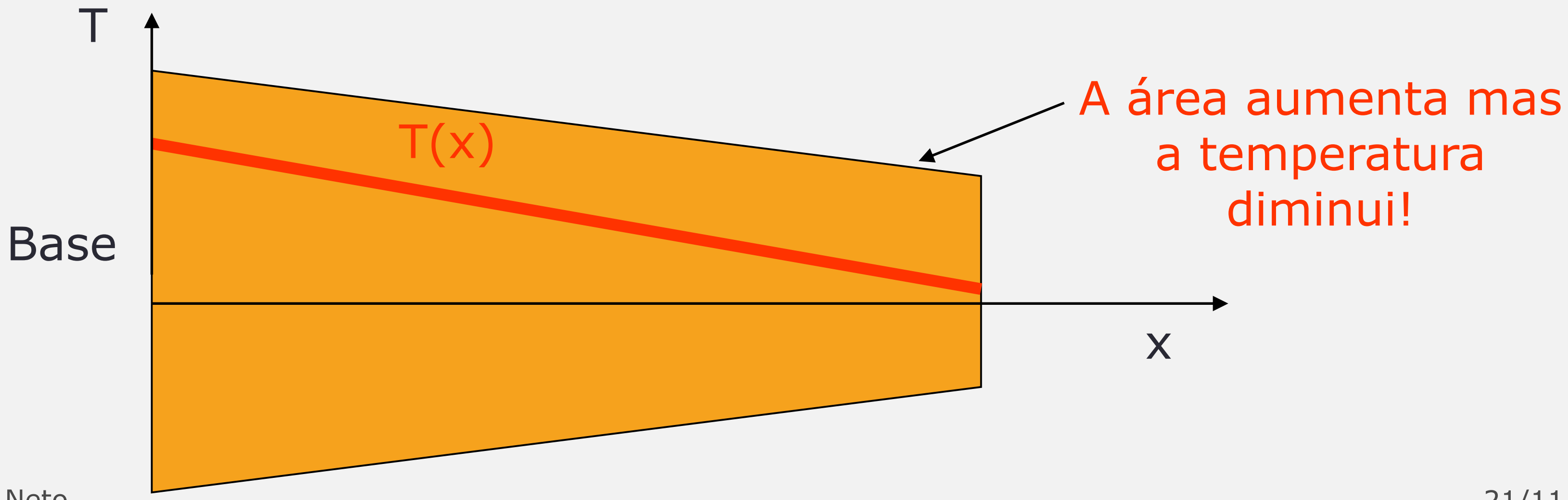
ALHETAS: DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE CALOR TRANSFERIDO ATRAVÉS DA ALHETA II

Situação	Equação da potência calorífica dissipada na base da alheta
Ocorre convecção na extremidade da alheta	$q_x = \sqrt{h.P.k.A_c}.\theta_b \dfrac{\sinh(m.L) + \dfrac{h}{m.k}\cosh(m.L)}{\cosh(m.L) + \dfrac{h}{m.k}\sinh(m.L)}$
A convecção a partir da extremidade da alheta é negligenciável	$q_x = \sqrt{h.P.k.A_c}.\theta_b \tanh(m.L)$
A temperatura na extremidade da alheta encontra-se definida	$q_x = \sqrt{h.P.k.A_c}.\theta_b \dfrac{\cosh(m.L) - \dfrac{\theta_L}{\theta_b}}{\sinh(m.L)}$
A alheta é muito longa	$q_x = \sqrt{h.P.k.A_c}.\theta_b$

EFICÁCIA (OU DESEMPENHO) DE UMA ALHETA

EFICÁCIA DE UMA ALHETA

- A presença de uma alheta aumenta a área disponível para transferência de calor mas aumenta também a resistência à dita transferência uma vez que o fenómeno de condução através da alheta impõe mais obstáculos à transferência de calor
- Adicionalmente embora a **área disponível** para a transferência de calor **aumente**, a **temperatura da superfície** a partir da qual ocorre transferência de calor por convecção, **diminui**.



EFICÁCIA DE UMA ALHETA: QUANDO SE JUSTIFICA A UTILIZAÇÃO DE ALHETAS?

- **Como saber se a utilização de uma alheta em particular aumenta ou diminui a transferência de calor?**
- **Definição**: a eficácia **de uma alheta, ε_f**, é a razão entre a transferência de calor que se obtêm na presença de uma alheta, **q_f**, e a que seria obtida se a alheta não estivesse presente, isto é:

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{h.A_c.\theta_b}$$

- Recorde-se que q_f varia de acordo com a 2ª condição fronteira
- Em termos práticos a utilização de uma alheta justifica-se apenas quando **$\varepsilon_f > 2$**

DESEMPENHO DE UMA ALHETA: EXEMPLO

- Para uma alheta de comprimento infinito, por exemplo, o seu valor é

$$\varepsilon_f = \sqrt{\frac{k.P}{h.A_c}}$$

- O desempenho de uma alheta de comprimento infinito...
  - ... aumenta com a condutibilidade térmica do material que a compõe (alumínio, cobre)
  - ... aumenta com a relação P/A_c: alhetas finas
  - ... justifica a utilização de alhetas particularmente para pequenos valores de h: num permutador gás-líquido as alhetas devem ser posicionadas preferencialmente do lado do gás

RENDIMENTO DE UMA ALHETA

RENDIMENTO DE UMA ALHETA

- Definição: **o rendimento de uma alheta** é a razão entre o calor dissipado efectivamente pela alheta e o calor que seria dissipado se toda a alheta se encontrasse à temperatura da base:

$$\eta_a = \frac{q_f}{h.A_f.\theta_b}$$

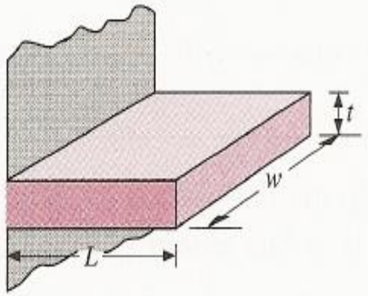
onde A_f é a área total da alheta

- A expressão anterior é normalmente utilizada na forma seguinte:

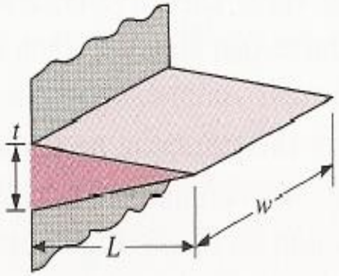
$$q_f = \eta_a.h.A_f.\theta_b$$

- Esta expressão dá-nos o calor dissipado pela alheta em função do seu rendimento, área e temperatura da base

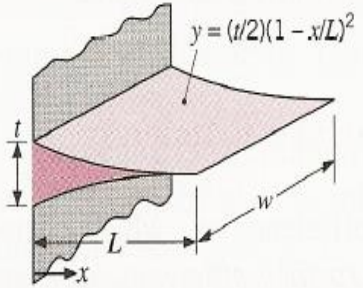
RENDIMENTO DE ALGUNS TIPOS DE ALHETA (INCROPERA & DEWITT)



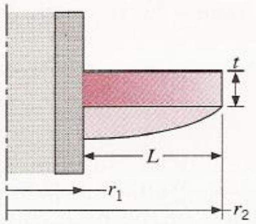
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

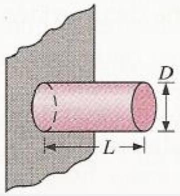


$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

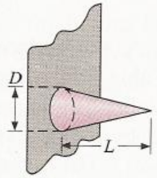


$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

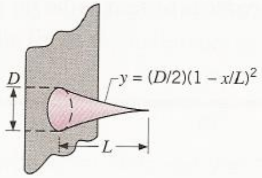
$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$



$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

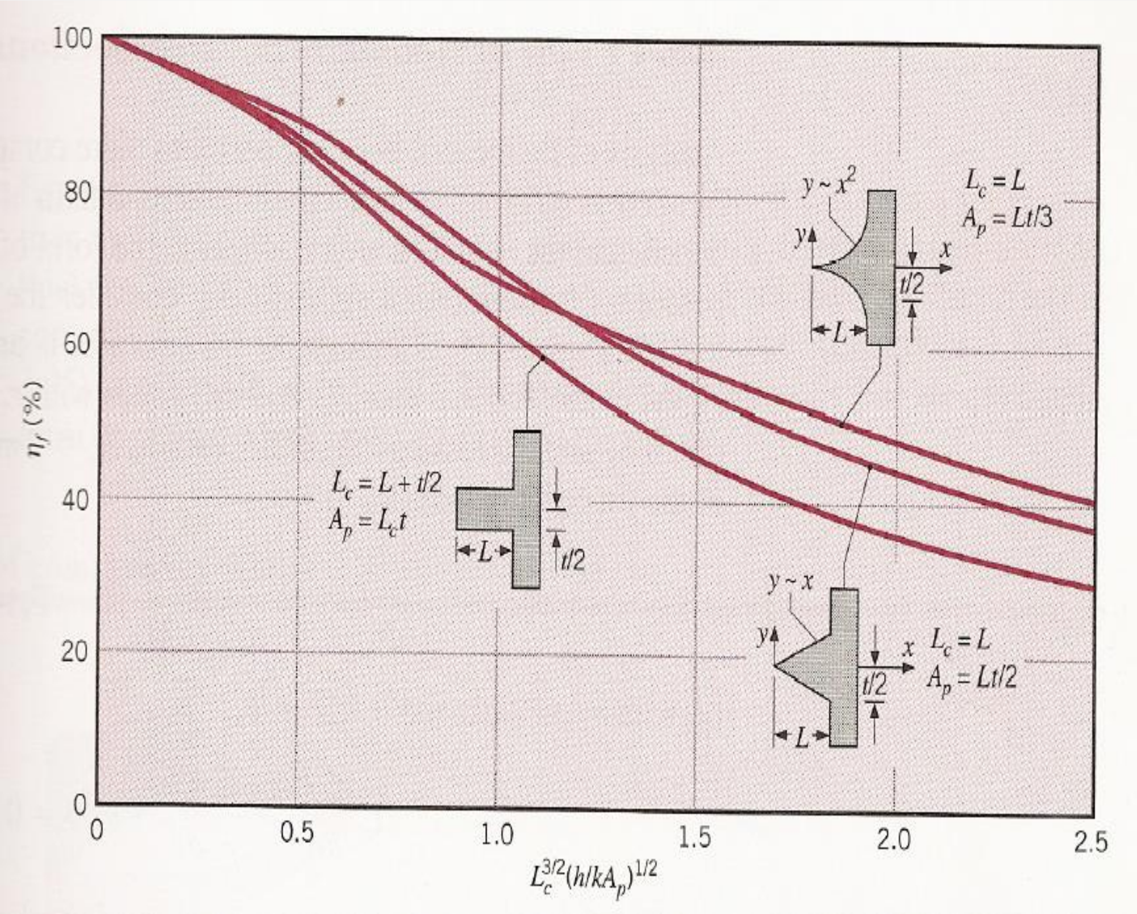


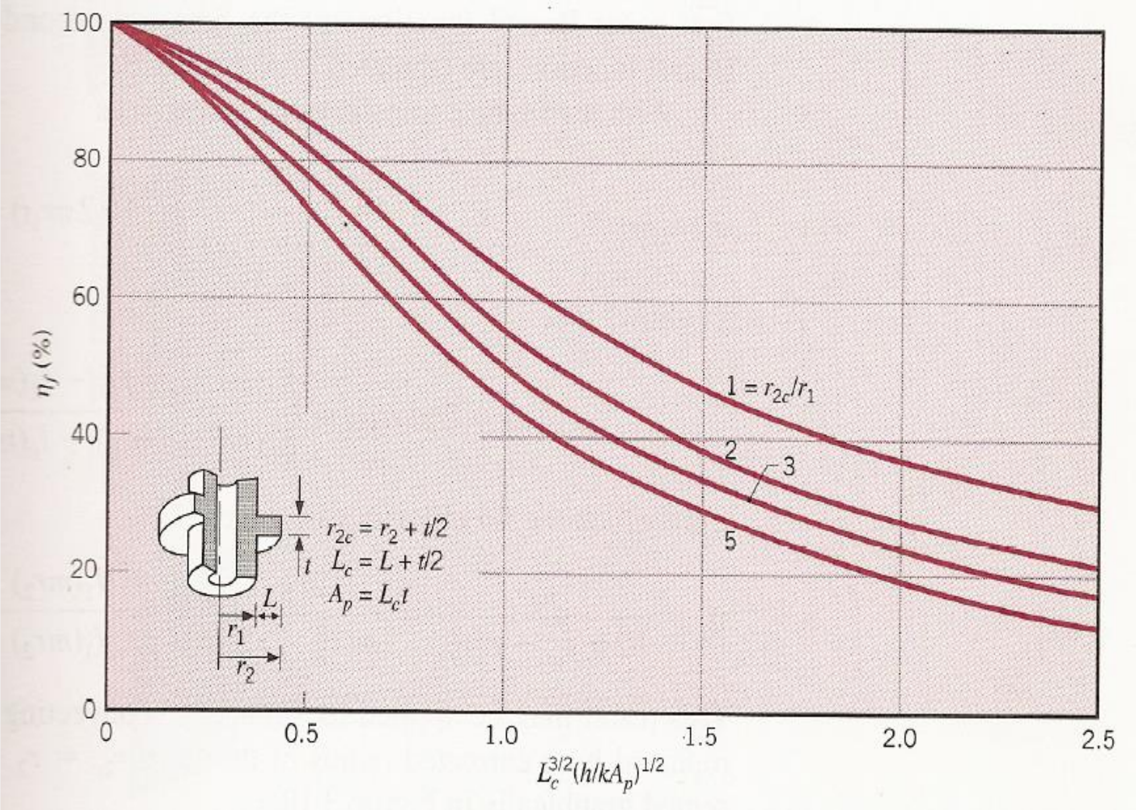
$$\eta_f = \frac{2}{mL}\frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$



$$\eta_f = \frac{2}{[4/9(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO RENDIMENTO DE ALGUNS TIPOS DE ALHETA EM FUNÇÃO DE PARÂMETROS GEOMÉTRICOS, MATERIAIS E DO ESCOAMENTO (INCROPERA & DEWITT)





RENDIMENTO DE UMA SUPERFÍCIE ALHETADA

RENDIMENTO GLOBAL DE UMA SUPERFÍCIE ALHETADA

- O **rendimento global de uma superfície alhetada** é a razão entre o calor transferido por uma superfície parcialmente coberta por uma matriz alhetada (incluindo portanto, quer a área coberta, quer a área não coberta) e o calor transferido por essa mesma área se toda ela estivesse à temperatura da base

$$\eta_G = \frac{q_t}{q_{MAX}} = \frac{q_t}{h.A_t.\theta_b}$$

A taxa máxima de transferência de calor ocorre quando todas as superfícies (alhetas e base não revestida) se encontram à temperatura da base

DETERMINAÇÃO DO RENDIMENTO GLOBAL DE UMA SUPERFÍCIE ALHETADA

- Sendo A_f a área exterior de uma única alheta e A_b a área da base não coberta por alhetas, então, caso hajam N alhetas, a área total é

$$A_t = N.A_f + A_b$$

- A potência calorífica transferida através quer da área alhetada, quer da área não alhetada será dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} q_t &= N.\eta_a.h.A_f.\theta_b + h.A_b.\theta_b = \\ &= h.\theta_b\left[N.\eta_a.A_f + (A_t - N.A_f)\right] = \\ &= \underbrace{h.\theta_b.A_t}_{q_{tMAX}}\left[1 - N.\frac{A_f}{A_t}(1-\eta_a)\right] \end{aligned}}$$

EXPRESSÃO PARA O RENDIMENTO GLOBAL DE UMA SUPERFÍCIE ALHETADA

- Rendimento global de uma superfície alhetada

$$\eta_G = \frac{q_t}{q_{t_{MAX}}} = 1 - N\frac{A_f}{A_t}(1-\eta_a)$$

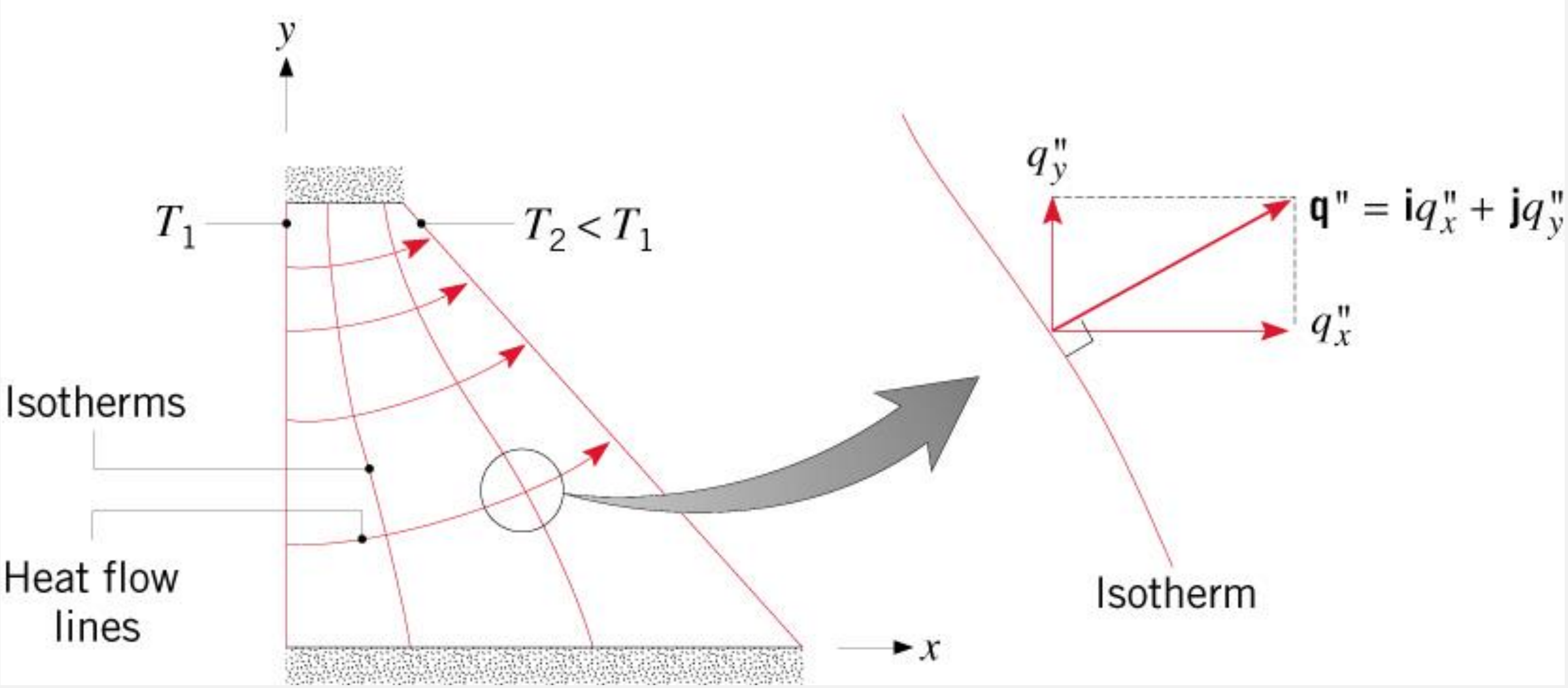
- Utilidade: basta saber o rendimento de uma alheta para calcular o rendimento de uma superfície alhetada
- Taxa de transferência de calor a partir dessa superfície

$$q_t = \eta_G . h . A_t . \theta_b$$

- Utilidade: permite saber o calor transferido a partir de uma superfície alhetada conhecendo a área total, A_t, a temperatura da base, θ_b e o rendimento da superfície alhetada, η_G

CONDUÇÃO DE CALOR MULTIDIMENSIONAL

CONDUÇÃO DE CALOR MULTIDIMENSIONAL



RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO MULTIDIMENSIONAL DE CALOR: TRANSFERÊNCIA DE CALOR BIDIMENSIONAL

Objetivos:
-Determinação da distribuição de temperatura $T=T(x,y)$;
- determinação dos fluxos de calor q''_x e q''_y;

Para o caso da condução bidimensional de calor em regime permanente, sem geração de energia, com condutividade térmica constante, a equação da difusão de calor toma a forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO MULTIDIMENSIONAL DE CALOR

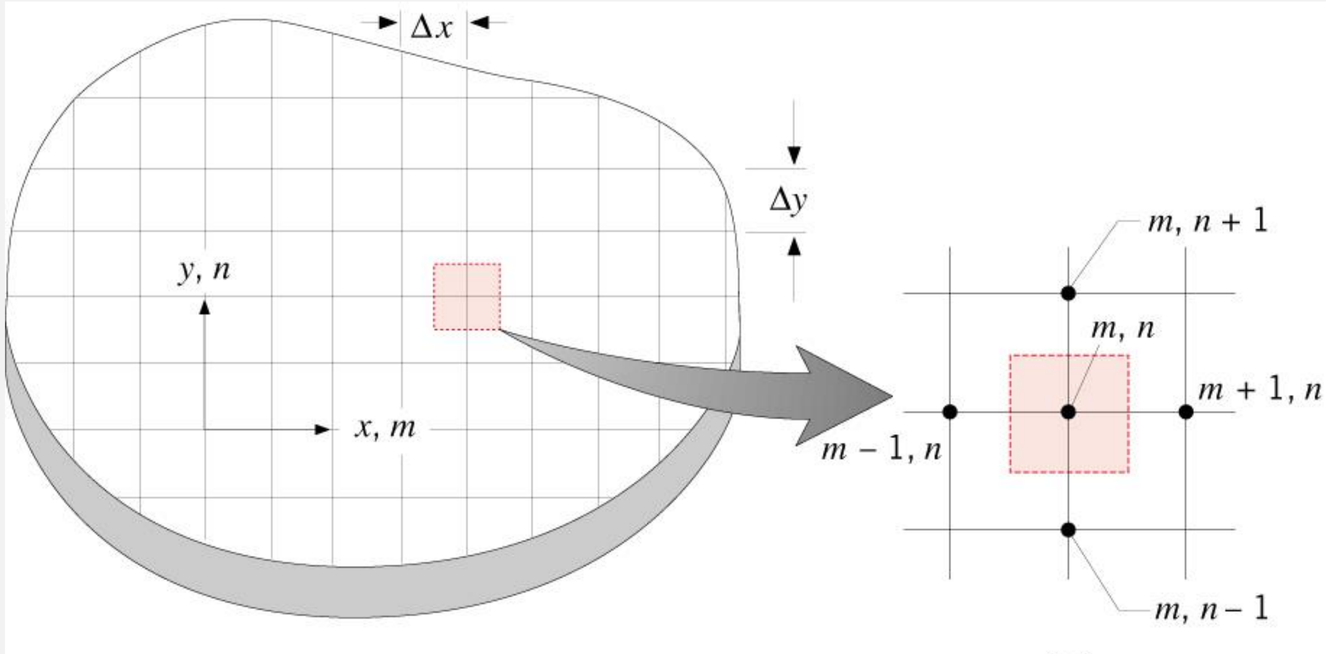
- Métodos analíticos:
  - Uma solução analítica só pode ser encontrada para um pequeno número de geometrias e de condições de fronteira
  - Obtém-se uma distribuição contínua de temperaturas do tipo T=T(x,y)
- Métodos discretos: conduzem a uma solução aproximada apenas em alguns pontos do domínio
  - Métodos gráficos
  - Métodos numéricos
    - Elementos finitos
    - Diferenças finitas

MÉTODOS NUMÉRICOS: O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

- Utilizado em:
  - geometrias complexas para as quais não de dispõe de uma solução analítica
  - casos em que as condições de fronteira e/ou as propriedades térmicas variam ao longo do tempo (regime transiente)
- Consiste:
  - na substituição das equações diferenciais parciais por um conjunto de equações algébricas relativas à temperatura num certo número de pontos, os pontos nodais

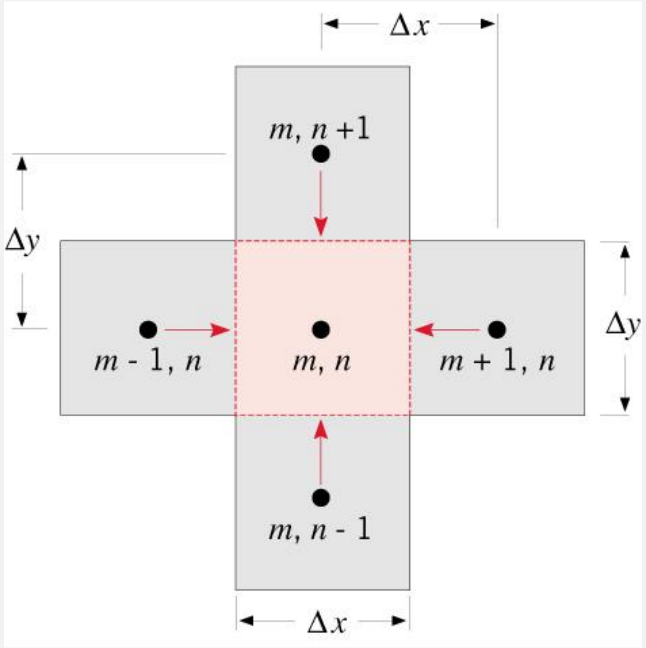
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: DIVISÃO DO DOMÍNIO

1º passo: divisão do domínio em análise num número de pequenas regiões no centro das quais se encontram os pontos nodais (ou nodos)
2º passo: nomear os diferentes nodos



(a)

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: DIVISÃO DO DOMÍNIO - CONSEQUÊNCIAS



- Cada um dos nodos • representa a região que o envolve
- A temperatura do nodo representa a temperatura média da região de que ele é o centro
- Quanto maior o número de nodos:
  - Melhor a precisão do cálculo
  - Maior tempo de cálculo é necessário

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS (DE 1ª E 2ª ORDEM) POR DIFERENÇAS FINITAS

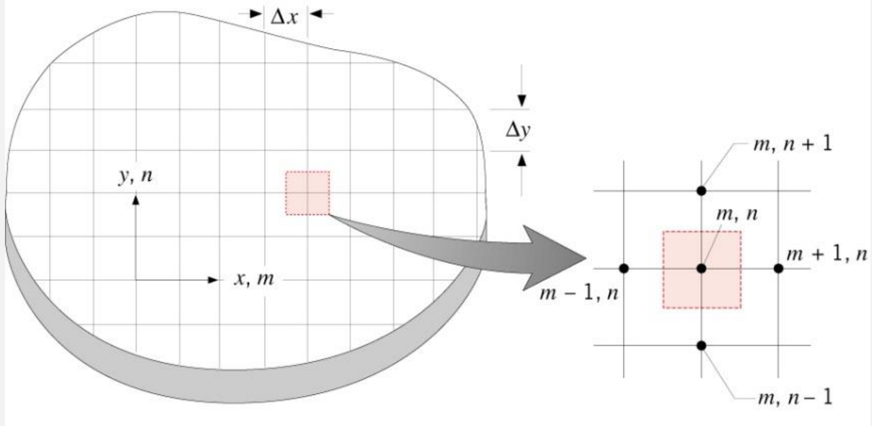
Processo que requer uma aproximação por diferenças finitas à equação da difusão de calor.

Exemplo: equação da condução bidimensional, em regime estacionário, sem geração de calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad ?$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS POR DIFERENÇAS FINITAS (EXEMPLO PARA UM NODO INTERIOR)

Direcção horizontal



(a)

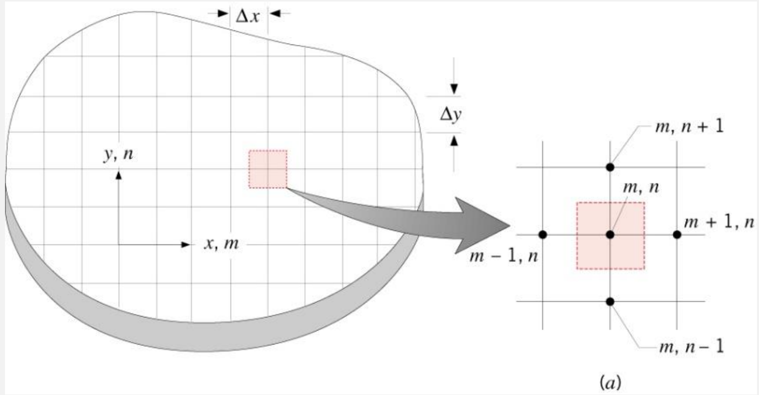
$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2,n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2,n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2}$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS POR DIFERENÇAS FINITAS (EXEMPLO)

Direcção vertical



$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,n-1/2} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{m,n+1/2} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2}$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: RESULTADO DA APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS DE 1ª E 2ª ORDEM POR DIFERENÇAS FINITAS

De acordo com as expressões anteriores, a equação algébrica equivalente à equação diferencial $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ será

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{\Delta y^2} = 0$$

para um nodo localizado no interior, e para o caso especial em que Δx=Δy, será

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4.T_{m,n} = 0$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: RESULTADO DA APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS DE 1ª E 2ª ORDEM POR DIFERENÇAS FINITAS

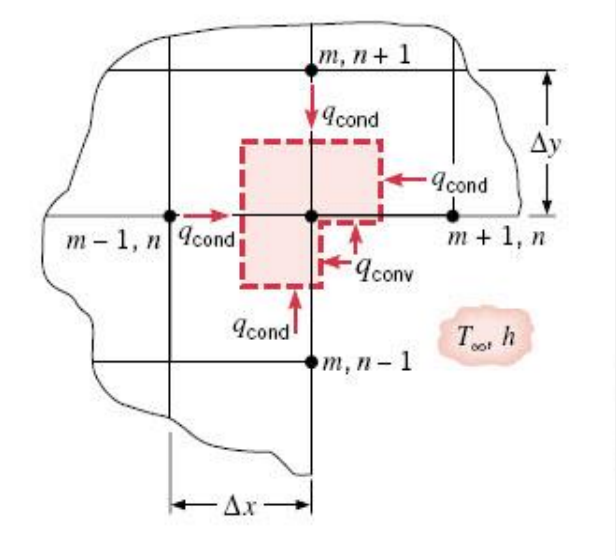
No final…

…para **cada nodo** (para o qual foi realizada a aproximação da equação da difusão de calor por diferenças finitas) teremos **uma equação**.

Para os **m** x **n** pontos (totalidade dos pontos que integram o domínio) teremos **m** x **n** equações

O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS – FORMULAÇÃO DE UM BALANÇO ENERGÉTICO

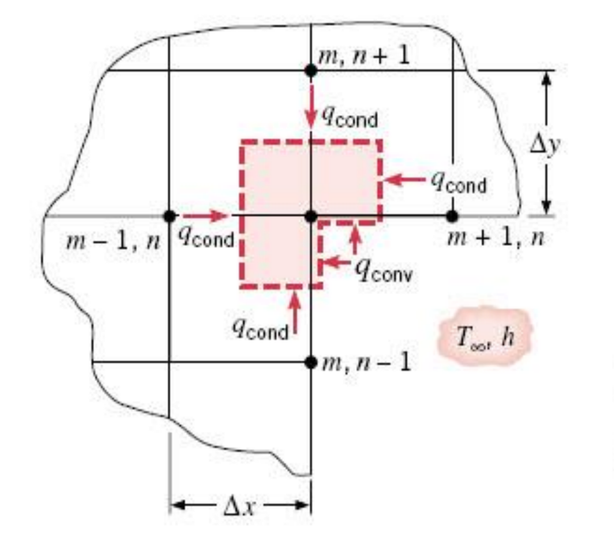
UM MÉTODO MAIS INTUITIVO: FORMULAÇÃO DE UM BALANÇO ENERGÉTICO
EXEMPLO PARA UM NODO DE CANTO, SUJEITO A CONVECÇÃO
IDENTIFICAÇÃO DAS TROCAS DE CALOR



Para cada nodo é executado um balanço energético:

1. O calor que é transportado para o nodo **m,n** provêm:
   1. dos nodos vizinhos **m,n+1**; **m+1,n**; **m,n-1** e **m-1,n**;
   2. Do ambiente o qual se encontra à temperatura T_{∞}

UM MÉTODO MAIS INTUITIVO: FORMULAÇÃO DE UM BALANÇO ENERGÉTICO. EXEMPLO PARA UM NODO DE CANTO, SUJEITO A CONVECÇÃO. QUANTIFICAÇÃO DO CALOR TROCADO ENTRE NODOS.



Como quantificar o calor trocado entre nodos?

Exemplo: calor trocado por condução entre **m-1,n** e **m,n**:

o calor trocado por unidade de tempo por condução é dado pela lei de Fourier:

$$q = -kA\frac{dT}{dx}$$

Qual o valor da área A que se opõe à troca de calor? A=Δy.1

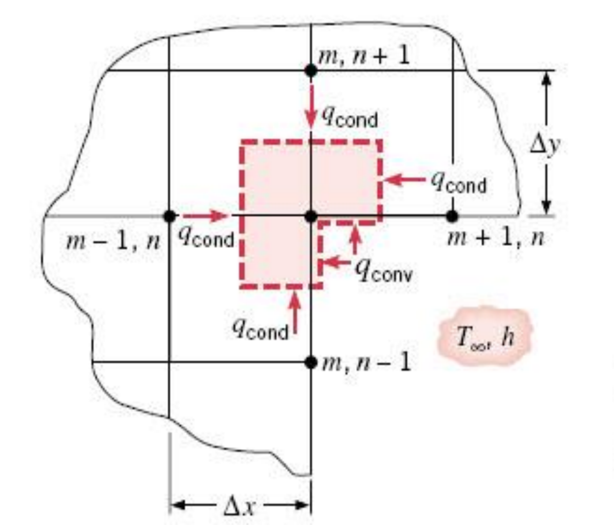
Qual a aproximação ao valor de dT? $dT \approx T_{m,n} - T_{m-1,n}$

Qual a aproximação ao valor de dx? $dx \approx \Delta x$

Assim, a aproximação por diferenças finitas à lei de Fourier traduz-se em

$$q = -kA\frac{dT}{dx} \approx -k.(\Delta y.1)\frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

UM MÉTODO MAIS INTUITIVO: FORMULAÇÃO DE UM BALANÇO ENERGÉTICO. EXEMPLO PARA UM NODO DE CANTO, SUJEITO A CONVECÇÃO. QUANTIFICAÇÃO DO CALOR TROCADO ENTRE NODOS.



Exemplo: calor trocado por <u>condução</u> entre **m,n-1** e **m,n**:

Lei de Fourier:

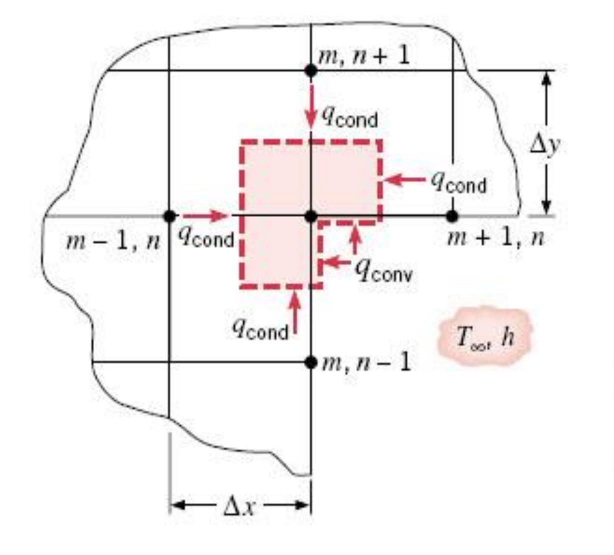
$$q = -kA\frac{dT}{dy}$$

O valor da área A que se opõe à troca de calor é (Δx/2) x 1 (considerando o valor unitário na direção perpendicular ao plano da figura). A aproximação ao valor de dT é $T_{m,n}$-$T_{m,n-1}$. A aproximação ao valor de dy é Δy

A aproximação por diferenças finitas à lei de Fourier entre **m,n-1** e **m,n** é:

$$q = -kA\frac{dT}{dy} \approx -k.\left(\frac{\Delta x}{2}.1\right)\frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

UM MÉTODO MAIS INTUITIVO: FORMULAÇÃO DE UM BALANÇO ENERGÉTICO. EXEMPLO PARA UM NODO DE CANTO, SUJEITO A CONVECÇÃO. QUANTIFICAÇÃO DO CALOR TROCADO ENTRE NODOS.



Exemplo: calor trocado por convecção entre o ambiente e **m,n**:
Lei de Newton:

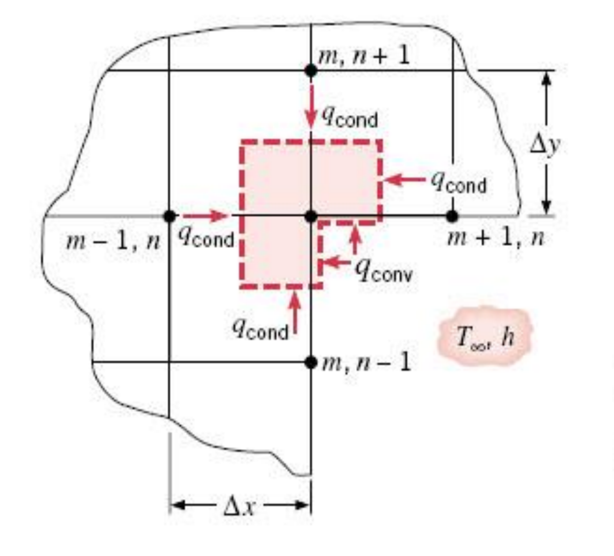
$$q = hA(T_{m,n} - T_{\infty})$$

O valor da área A que se opõe à troca de calor é (Δx/2) x 1+ (Δy/2) x 1

A aproximação por diferenças finitas à lei de Newton entre **m,n** e o ambiente é:

$$q = hA(T_{\infty} - T_{m,n}) \approx h\left(\frac{\Delta x}{2}.1 + \frac{\Delta y}{2}.1\right)(T_{\infty} - T_{m,n})$$

UM MÉTODO MAIS INTUITIVO: FORMULAÇÃO DE UM BALANÇO ENERGÉTICO. EXEMPLO PARA UM NODO DE CANTO, SUJEITO A CONVECÇÃO. QUANTIFICAÇÃO DO CALOR TROCADO ENTRE NODOS.



Quantificando a totalidade do calor trocado entre **m,n** e os nodos vizinhos por condução e entre **m,n** e o ambiente e atendendo a que **em regime permanente, esse somatório é igual a zero,** virá, se Δx=Δy:

$$\sum q = 0 \Leftrightarrow T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + \frac{1}{2}(T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + \left(\frac{h.\Delta x}{k}\right)T_\infty - \left(3 + \frac{h.\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. 3° PASSO: OBTENÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS RESULTANTE

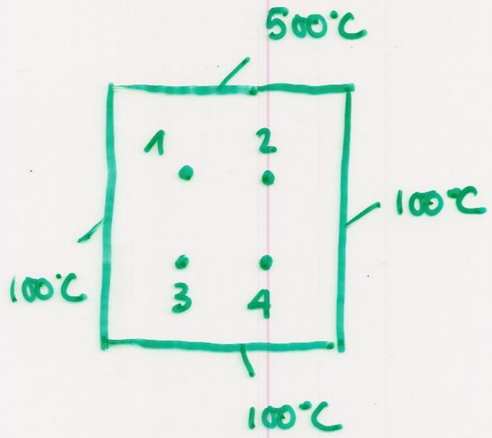
Uma vez obtidas as equações na forma de diferenças finitas para todos os nodos que compõem a malha que reveste o domínio, obtêm-se um número N de equações (N = m x n) a N incógnitas

A solução para um sistema deste tipo pode ser obtida:

1. Por um método de inversão matricial
2. Por um método iterativo

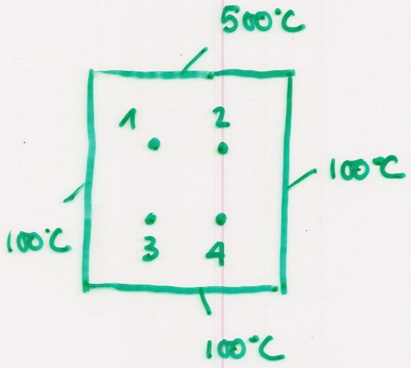
O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS –EXEMPLO DE APLICAÇÃO

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. EXEMPLO.

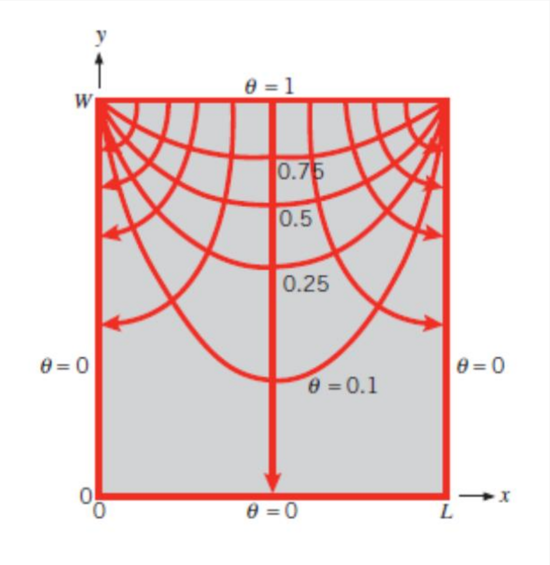


Determine as temperaturas dos nodos 1, 2, 3 e 4 recorrendo ao método iterativo de Gauss-Seidel e sabendo que $\Delta x = \Delta y$ e que k é constante.

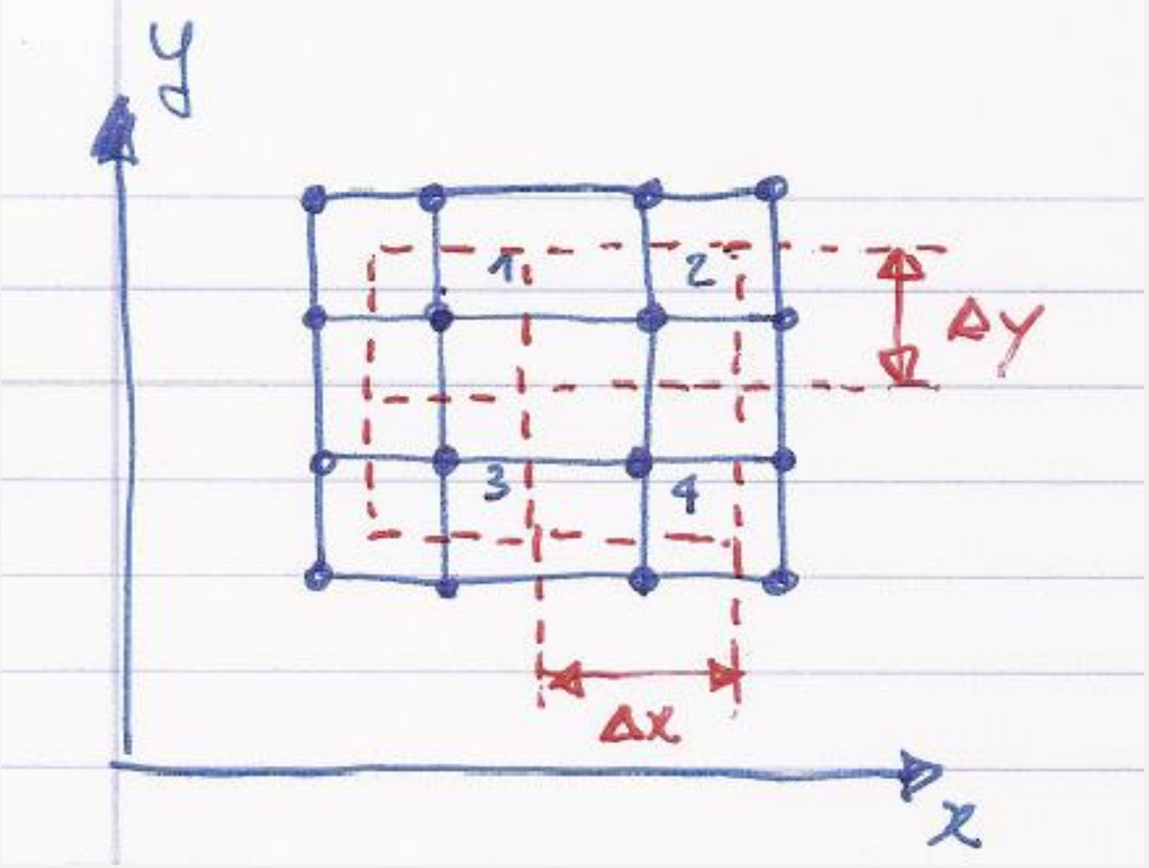
MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: DIFERENÇA FACE A UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA



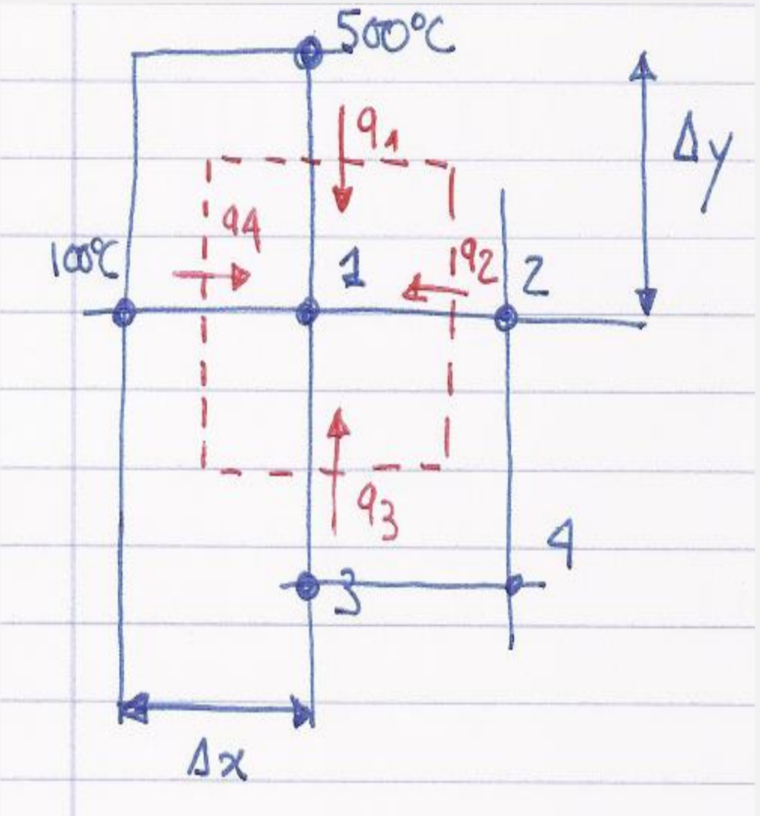
Determine as temperaturas dos nodos 1, 2, 3 e 4 recorrendo ao método iterativo de Gauss-Seidel e sabendo que $\Delta x = \Delta y$ e que k é constante.



MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. DIVISÃO DO DOMÍNIO.



MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. FORMULAÇÃO DO BALANÇO ENERGÉTICO



Em regime permanente

$$\Sigma q = 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$$

$$q_1 = -\frac{k}{\Delta y} \cdot \Delta x \cdot 1 \, (500 - T_1)$$

Se $\Delta x = \Delta y$, então

$$q_1 = k(T_1 - 500)$$

$$q_2 = \ldots = k(T_1 - T_2)$$

$$q_3 = \ldots = k(T_1 - T_3)$$

$$q_4 = k(T_1 - 100)$$

$$k(T_1 - 500) + k(T_1 - T_2) + k(T_3 - T_1) + k(T_1 - 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T_1 - 500 + T_1 - T_2 + T_1 - T_3 + T_1 - 100 = 0$$

Nodo 1: $4T_1 - T_2 - T_3 = 600$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Procedimento idêntico para os nodos 2, 3 e 4

Nodo 1 : $4T_1 - T_2 - T_3 = 600$

Nodo 2 : $4T_2 - T_1 - T_4 = 600$

Nodo 3 : $4T_3 - T_1 - T_4 = 200$

Nodo 4 : $4T_4 - T_2 - T_3 = 200$

$\boxed{\text{4 equações a 4 incógnitas}}$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES (INVERSÃO MATRICIAL)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 600 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$[A] \cdot [T] = [C]$$

$$[T] = [A]^{-1} \cdot [C]$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Reordenação das equações obtidas

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 600$$
$$4T_2 - T_1 - T_4 = 600$$
$$4T_3 - T_1 - T_4 = 200$$
$$4T_4 - T_2 - T_3 = 200$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Parte 1: Reescrever **explicitamente** as equações que nos dão a temperatura em cada nodo, ou seja, em cada equação a temperatura do nodo será dada em função das restantes variáveis:

Reescrita das equações

$$T_1 = T_2/4 + T_3/4 + 150$$
$$T_2 = T_1/4 + T_4/4 + 150$$
$$T_3 = T_1/4 + T_4/4 + 50$$
$$T_4 = T_2/4 + T_3/4 + 50$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Passo 2: assumir um valor inicial para cada temperatura, $\mathbf{T^0_i}$. Quanto melhor for a estimativa inicial, mais rapidamente se convergirá para o resultado final.

Estimativa para as temperaturas iniciais

$T_1 = T_2 = 300\,°C$

$T_3 = T_4 = 200\,°C$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Passo 3: os novos valores de **Ti** são obtidos a partir da estimativa inicial de temperaturas $\mathbf{T^0_i}$

Estimativa para as temperaturas iniciais

$T_1 = T_2 = 300\,°C$

$T_3 = T_4 = 200\,°C$

Para a 1ª iteração

$$T_1 = T_2/4 + T_3/4 + 150 = \frac{300}{4} + \frac{200}{4} + 150 = 275\,°C$$

$$T_2 = T_1/4 + T_4/4 + 150 = \frac{275}{4} + \frac{200}{4} + 150 = 268{,}75\,°C$$

$$T_3 = T_1/4 + T_4/4 + 50 = \frac{275}{4} + \frac{200}{4} + 50 = 168{,}75\,°C$$

$$T_4 = T_2/4 + T_3/4 + 50 = \frac{268{,}75}{4} + \frac{168{,}75}{4} + 50 = 159{,}38\,°C$$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Passo 4: A equação explícita das temperaturas é reutilizada durante o processo iterativo calculando-se os *"novos"* valores das temperaturas $\mathbf{T_i}$, a partir dos valores de $\mathbf{T_i}$ obtidos na iteração *anterior*

2.ª iteração

$T_1 = \ldots = 259{,}38\,°C$

$T_2 = \ldots = 254{,}69\,°C$

$T_3 = \ldots = 154{,}69\,°C$

$T_4 = \ldots = 152{,}35\,°C$

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Nº de iterações	T_1	T_2	T_3	T_4
0	300	300	200	200
1	275	268,75	168,75	159,38
2	259,38	254,69	154,69	152,35
3	251,76	251,03	151,03	150,52
4	250,52	250,26	150,26	150,13
5	250,13	250,07	150,07	150,03

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES RESULTANTES. O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Passo 5: o processo iterativo é dado como terminado quando todos os valores das temperaturas obtidas numa dada iteração diferirem menos do que uma dada quantidade relativamente aos valores da iteração anterior.

Nº de iterações	T_1	T_2	T_3	T_4
0	300	300	200	200
1	275	268,75	168,75	159,38
2	259,38	254,69	154,69	152,35
3	251,76	251,03	151,03	150,52
4	250,52	250,26	150,26	150,13
5	250,13	250,07	150,07	150,03

Solução final

Satisfação de um critério de convergência

Critério de convergência $\left| T_i^k - T_i^{k-1} \right| < 1$

Da iteração 4 para a iteração 5

$T_1 : \left| T_i^k - T_i^{k-1} \right| = \left| 250,13 - 250,52 \right| = 0,39 < 1$

$T_2 : \left| 250,07 - 250,26 \right| = 0,19 < 1$

$T_3 : \left| 150,07 - 150,26 \right| = 0,19 < 1$

$T_4 : \left| 150,03 - 150,13 \right| = 0,1 < 1$

O critério de convergência é satisfeito para todos os nodos