Termodinâmica e Dinâmica de Fluidos 2023/2024

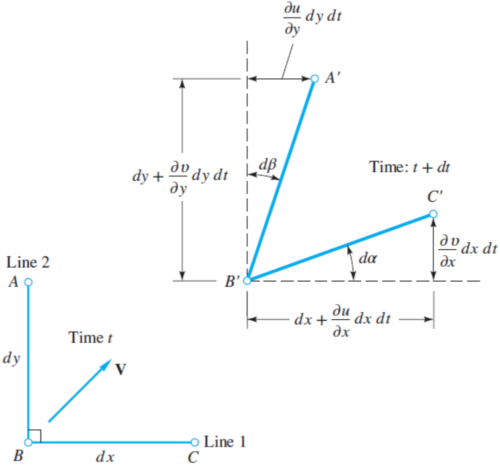
Aula n°13: Vorticidade e escoamentos irrotacionais

José M. Castanheira
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

19 de dezembro de 2023

Vorticidade

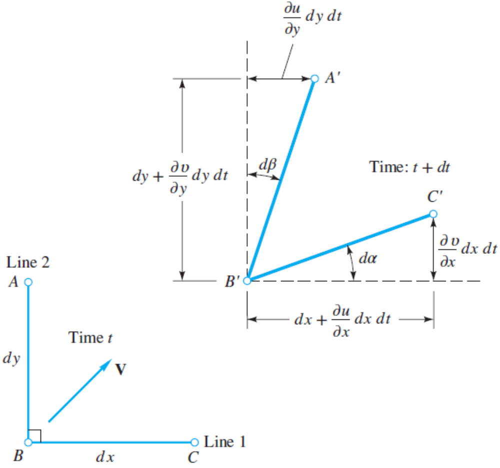
A vorticidade é uma medida da velocidade de rotação (velocidade angular) das partículas de fluido. Isto poderá ser verificado com a ajuda da figura.



Considere duas linhas de fluido AB e BC, que no instante t são perpendiculares. Depois de um pequeno intervalo de tempo,dt, as linhas terão comprimentos ligeiramente diferentes $A'B'$ e $B'C'$ e farão dois ângulos pequenos, dα e dβ, com as direcções originais.

Vorticidade

A vorticidade é uma medida da velocidade de rotação (velocidade angular) das partículas de fluido. Isto poderá ser verificado com a ajuda da figura.



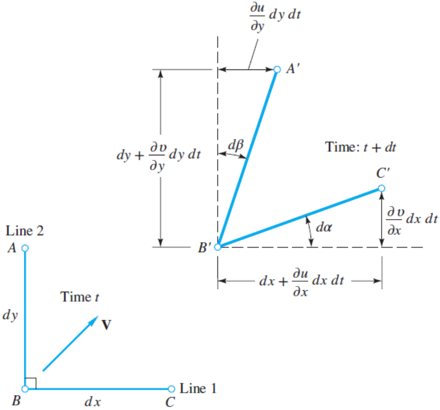
Considere duas linhas de fluido AB e BC, que no instante t são perpendiculares. Depois de um pequeno intervalo de tempo,dt, as linhas terão comprimentos ligeiramente diferentes $A'B'$ e $B'C'$ e farão dois ângulos pequenos, dα e dβ, com as direcções originais.

A velocidade angular ω_z em torno do eixo z é dada pela taxa média de rotação das linhas AB e BC

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right) \qquad (1)$$

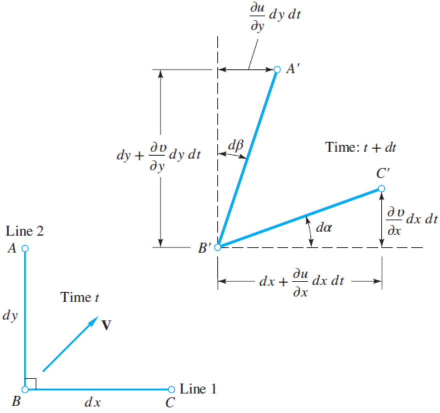
Vorticidade

Os ângulos resultam das diferenças da velocidade entre os pontos A, B e C.



Vorticidade

Os ângulos resultam das diferenças da velocidade entre os pontos A, B e C.



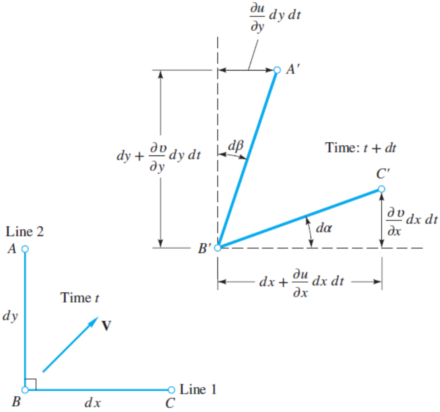
No limite de dt muito pequeno, poderemos obter a relação entre os ângulos dα e dβ e os gradientes de velocidade:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \lim_{dt\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial v/\partial x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x + (\partial u/\partial x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}\right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d\beta &= \lim_{dt\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial u/\partial y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y + (\partial v/\partial y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}\right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3}$$

Vorticidade

Os ângulos resultam das diferenças da velocidade entre os pontos A, B e C.



No limite de dt muito pequeno, poderemos obter a relação entre os ângulos dα e dβ e os gradientes de velocidade:

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \lim_{dt\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial v/\partial x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x + (\partial u/\partial x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}\right] \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}t \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\beta &= \lim_{dt\to 0}\left[\tan^{-1}\frac{(\partial u/\partial y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y + (\partial v/\partial y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}\right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}t \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Combinando as equações (1)-(3), obtém-se

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Combinando as equações (1)-(3), obtém-se

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Procedendo de forma análoga com pares de segmentos nos planos (y, z) e (x, z), obteríamos as componentes da velocidade angular (taxas de rotação) em torno dos outros dois eixos

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{5}$$

Combinando as equações (1)-(3), obtém-se

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{4}$$

Procedendo de forma análoga com pares de segmentos nos planos (y, z) e (x, z), obteríamos as componentes da velocidade angular (taxas de rotação) em torno dos outros dois eixos

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{5}$$

O vector $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ é igual a metade do rotacional do campo da velocidade

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \tag{6}$$

O rotacional é do campo de velocidade é a vorticidade do escoamento e é uma medida da rotação local do fluido

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2\,\vec{\omega}. \tag{7}$$

O rotacional é do campo de velocidade é a vorticidade do escoamento e é uma medida da rotação local do fluido

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2\,\vec{\omega}. \tag{7}$$

No caso de a vorticidade se nula em qualquer ponto, o escoamento diz-se irrotacional.

Já vimos que para escoamentos ideais (não viscosos) a equação do movimento toma a forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \tag{8}$$

Já vimos que para escoamentos ideais (não viscosos) a equação do movimento toma a forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p. \tag{8}$$

O termo advectivo (convectivo)em (8) pode ser substituído pela seguinte identidade

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} \equiv \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V}, \tag{9}$$

obtendo-se

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p - \vec{g} = \vec{0}. \tag{10}$$

Já vimos que para escoamentos ideais (não viscosos) a equação do movimento toma a forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \tag{8}$$

O termo advectivo (convectivo)em (8) pode ser substituído pela seguinte identidade

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V}, \tag{9}$$

obtendo-se

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} = \vec{0}. \tag{10}$$

Seja $\mathrm{d}\vec{r}$ uma variação infinitesimal de posição qualquer. Pela equação (10),

$$\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{11}$$

Já vimos que para escoamentos ideais (não viscosos) a equação do movimento toma a forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \tag{8}$$

O termo advectivo (convectivo)em (8) pode ser substituído pela seguinte identidade

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V}, \tag{9}$$

obtendo-se

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} = \vec{0}. \tag{10}$$

Seja $\mathrm{d}\vec{r}$ uma variação infinitesimal de posição qualquer. Pela equação (10),

$$\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} V^2\right) + \vec{\zeta} \times \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{11}$$

Se $\left(\vec{\zeta} \times \vec{V}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, poderemos voltar a obter o teorema de Bernoulli.

No caso de $\mathrm{d}\vec{r}$ ser ao longo de uma linha de corrente, i.e. no caso de $\mathrm{d}\vec{r}$ ser paralelo $\left(\vec{\zeta} \times \vec{V}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, e a equação (11) toma a seguinte forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + g\,\mathrm{d}z = 0, \tag{12}$$

onde considerámos $\vec{g} = -g\hat{k}$.

No caso de $\mathrm{d}\vec{r}$ ser ao longo de uma linha de corrente, i.e. no caso de $\mathrm{d}\vec{r}$ ser paralelo $\left(\vec{\zeta} \times \vec{V}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, e a equação (11) toma a seguinte forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} V^2\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + g\,\mathrm{d}z = 0, \tag{12}$$

onde considerámos $\vec{g} = -g\hat{k}$.

Integrando entre dois pontos 1 e 2 da linha de corrente, obteremos

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} \mathrm{d}s + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0. \tag{13}$$

Esta é a forma do teorema de Bernoulli para um escoamento não viscosos e não estacionário.

No caso de $\mathrm{d}\vec{r}$ ser ao longo de uma linha de corrente, i.e. no caso de $\mathrm{d}\vec{r}$ ser paralelo $\left(\vec{\zeta} \times \vec{V}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, e a equação (11) toma a seguinte forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + g\,\mathrm{d}z = 0, \tag{12}$$

onde considerámos $\vec{g} = -g\hat{k}$.

Integrando entre dois pontos 1 e 2 da linha de corrente, obteremos

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} \mathrm{d}s + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + g\left(z_2 - z_1\right) = 0. \tag{13}$$

Esta é a forma do teorema de Bernoulli para um escoamento não viscosos e não estacionário.

Se o fluido for incompressível e o escoamento for estacionário, recuperaremos a equação de Bernoulli que já conhecíamos

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{constante}. \tag{14}$$

Na equação (14) o valor da constante depende da linha de corrente. No caso de um escoamento irrotacional, $\left(\vec{\zeta} \times \vec{V}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ qualquer que seja o $\mathrm{d}\vec{r}$, e a constante na equação (14) é a mesma sobre todo o volume do escoamento.