Termodinâmica e Dinâmica de Fluidos 2023/2024

Aula n°11: Equação de Conservação da Energia

José M. Castanheira
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

4 de dezembro de 2023

Equação da conservação da energia

A primeira lei da termodinâmica, escrita em termos das taxas de variação, toma a forma

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

onde E inclui a energia cinética, KE, a energia potencial, PE, e a energia interna, U.

Equação da conservação da energia

A primeira lei da termodinâmica, escrita em termos das taxas de variação, toma a forma

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

onde E inclui a energia cinética, KE, a energia potencial, PE, e a energia interna, U.

As três formas de energia expressam-se na energia específica, e, da seguinte forma

$$e = \frac{1}{2}V^2 + \hat{u} + gz, \tag{2}$$

onde se assume um campo gravítico uniforme com z orientado para cima. Descartamos a existência de campos electromagnéticos externos.

Note que alteramos a notação de energia interna específica, usando o acento circunflexo para a distinguir da componente u da velocidade.

Iremos, agora, aplicar o teorema do transporte de Reynolds à primeira lei da termodinâmica. A energia E toma o lugar da variável B, e a energia específica toma o lugar de $\beta\,(= \mathrm{d}E/\mathrm{d}m = e)$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{CV}} \rho\, e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\, e \vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{3}$$

Iremos, agora, aplicar o teorema do transporte de Reynolds à primeira lei da termodinâmica. A energia E toma o lugar da variável B, e a energia específica toma o lugar de $\beta\,(= \mathrm{d}E/\mathrm{d}m = e)$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{CV}} \rho\, e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\, e \vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{3}$$

Usando um ponto sobre as variáveis para representar a derivada temporal, o trabalho pode decompor-se em três contribuições

$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{barra}} + \dot{W}_{\text{pressão}} + \dot{W}_{\text{tensão de viscosidade}} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_\nu. \tag{4}$$

Iremos, agora, aplicar o teorema do transporte de Reynolds à primeira lei da termodinâmica. A energia E toma o lugar da variável B, e a energia específica toma o lugar de $\beta\,(= \mathrm{d}E/\mathrm{d}m = e)$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{CV}} \rho\, e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\, e \vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{3}$$

Usando um ponto sobre as variáveis para representar a derivada temporal, o trabalho pode decompor-se em três contribuições

$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{barra}} + \dot{W}_{\text{pressão}} + \dot{W}_{\text{tensão de viscosidade}} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_\nu. \tag{4}$$

O trabalho da barra (*shaft)* é, por exemplo, o trabalho realizado por um veio de transmissão de um motor. A potência do trabalho da pressão sobre um elemento dA superfície de controlo, CV é dada por

$$\mathrm{d}\dot{W}_p = -pV_{n,\,\mathrm{in}}\, dA = p\vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{5}$$

Iremos, agora, aplicar o teorema do transporte de Reynolds à primeira lei da termodinâmica. A energia E toma o lugar da variável B, e a energia específica toma o lugar de $\beta\,(= \mathrm{d}E/\mathrm{d}m = e)$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{CV}} \rho\, e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\, e \vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{3}$$

Usando um ponto sobre as variáveis para representar a derivada temporal, o trabalho pode decompor-se em três contribuições

$$\dot{W} = \dot{W}_{\mathrm{barra}} + \dot{W}_{\mathrm{pressão}} + \dot{W}_{\mathrm{tensão\,de\,viscosidade}} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_\nu. \tag{4}$$

O trabalho da barra (*shaft*) é, por exemplo, o trabalho realizado por um veio de transmissão de um motor. A potência do trabalho da pressão sobre um elemento dA superfície de controlo, CV é dada por

$$\mathrm{d}\dot{W}_p = -pV_{n,\,\mathrm{in}}\, dA = p\vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{5}$$

Integrando sobre a superfície de controlo,

$$\dot{W}_p = \int_{\mathrm{CS}} p\vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A. \tag{6}$$

O trabalho externo da força de viscosidade também só é calculado sobre a superfície de controlo

$$\dot{W}_{\nu} = -\int_{\mathrm{CS}} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, \mathrm{d}A, \tag{7}$$

onde $\vec{\tau}$ é o vector da tensão de viscosidade.

O trabalho externo da força de viscosidade também só é calculado sobre a superfície de controlo

$$\dot{W}_\nu = -\int_{\mathrm{CS}} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, \mathrm{d}A, \tag{7}$$

onde $\vec{\tau}$ é o vector da tensão de viscosidade.

Considerando a condição de não deslizamento *(no slipping condition)* sobre superfícies sólidas, se a superfície de controlo for constituída pela superfície de uma parede sólida, $\vec{V} = \vec{0}$ e $\dot{W}_\nu = 0$.

O trabalho externo da força de viscosidade também só é calculado sobre a superfície de controlo

$$\dot{W}_\nu = -\int_{\mathrm{CS}} \vec{\tau} \cdot \vec{V}\, \mathrm{d}A, \tag{7}$$

onde $\vec{\tau}$ é o vector da tensão de viscosidade.

Considerando a condição de não deslizamento *(no slipping condition)* sobre superfícies sólidas, se a superfície de controlo for constituída pela superfície de uma parede sólida, $\vec{V} = \vec{0}$ e $\dot{W}_\nu = 0$.
Nas entrada e saídas do volume de controlo o escoamento é aproximadamente perpendicular à superfície e

$$\mathrm{d}\dot{W}_\nu = -\tau_{nn} V_n \mathrm{d}A, \tag{8}$$

onde τ_{nn} é a componente normal da tensão, que é normalmente muito pequena.

O trabalho externo da força de viscosidade também só é calculado sobre a superfície de controlo

$$\dot{W}_\nu = -\int_{\mathrm{CS}} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, \mathrm{d}A, \tag{7}$$

onde $\vec{\tau}$ é o vector da tensão de viscosidade.

Considerando a condição de não deslizamento *(no slipping condition)* sobre superfícies sólidas, se a superfície de controlo for constituída pela superfície de uma parede sólida, $\vec{V} = \vec{0}$ e $\dot{W}_\nu = 0$.
Nas entrada e saídas do volume de controlo o escoamento é aproximadamente perpendicular à superfície e

$$\mathrm{d}\dot{W}_\nu = -\tau_{nn} V_n \mathrm{d}A, \tag{8}$$

onde τ_{nn} é a componente normal da tensão, que é normalmente muito pequena.

Se a superfície de controlo for definida pela superfície *ss* de um fluido externo ao sistema, o trabalho da força de viscosidade será diferente de zero. Assim, a potência do trabalho total toma a seguinte forma

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \int_{\mathrm{CS}} p\vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A - \int_{\mathrm{ss}} \vec{\tau} \cdot \vec{V} \, \mathrm{d}A. \tag{9}$$

Substituindo a equação (9) na equação (3), obtém-se

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{CV}} \rho\, e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A. \tag{10}$$

Substituindo a equação (9) na equação (3), obtém-se

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathrm{CV}} \rho\, e \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A. \tag{10}$$

Substituindo nesta equação ao termos da energia específica (2) e atendendo a que a entalpia específica é $\hat{h} = \hat{u} + pv = \hat{u} + p/\rho$, obtém-se finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} \quad = \quad & \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \right] \mathrm{d}\mathcal{V} \\ & + \int_{\mathrm{CS}} \rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \vec{V} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}A. \qquad (11) \end{aligned}}$$

Nota: Assumimos o volume de controlo fixo e, como vimos, o termo do trabalho de $W_\nu = W_{ss}$ raramente é importante.

Se o volume de controlo tiver uma série de entradas e de saídas, o integral de superfície reduz-se à soma dos fluxos de saída menos os fluxos de entrada

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{CS}} \rho \left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right) \vec{V} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A \quad &= \quad \sum \left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{i,\,\mathrm{out}} \dot{m}_{i,\,\mathrm{out}} \\ &\quad + \sum \left(\hat{h} - \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{i,\,\mathrm{in}} \dot{m}_{i,\,\mathrm{in}},\end{aligned} \tag{12}$$

onde $\left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_i$ são valores médios em cada secção de entrada ou de saída.

Equação da energia num escoamento estacionário

Se o escoamento for estacionário e o volume de controlo tiver apenas uma saída e uma entrada, que possam ser consideradas unidimensionais, a equação da energia toma a seguinte forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} = \left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{\text{out}} \dot{m}_{\text{out}} - \left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{\text{in}} \dot{m}_{\text{in}}. \quad (13)$$

Equação da energia num escoamento estacionário

Se o escoamento for estacionário e o volume de controlo tiver apenas uma saída e uma entrada, que possam ser consideradas unidimensionais, a equação da energia toma a seguinte forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{ss} = \left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{\text{out}} \dot{m}_{\text{out}} - \left(\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{\text{in}} \dot{m}_{\text{in}}. \qquad (13)$$

Pela equação da continuidade (equação da conservação da massa) $\dot{m}_{\text{out}} = \dot{m}_{\text{in}} = \dot{m}$. Dividindo todos os termos de (13) por $\dot{m}$, a equação da energia num escoamento estacionário, com entrada e saída unidimensionais, toma a seguinte forma geral

$$\boxed{\hat{h}_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \left(\hat{h}_2 + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) - q + w_s + w_{ss}, \qquad (14)}$$

onde q, w_s, e w_{ss} são o calor recebido e os trabalhos realizados por unidade de massa.

Os termos da equação (14) têm dimensões de energia por unidade de massa. Esta forma da equação da energia é a mais utilizada em engenharia mecânica.

Os termos da equação (14) têm dimensões de energia por unidade de massa. Esta forma da equação da energia é a mais utilizada em engenharia mecânica.

Os engenheiros civis preferem uma forma em que todos os termos têm a dimensão de comprimento. Se dividirmos a equação (14) por g, e relembrarmos que $\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$, a equação da energia toma a forma

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\hat{u}_1}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{\hat{u}_2}{g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) - h_q + h_s + h_{ss}, \quad (15)$$

Escoamentos estacionários com velocidade baixas podem aproximar-se de escoamentos incompressíveis. Nesses casos, as variações da energia interna $\hat{u}$ serão apenas devidas a trocas de calor. Se as trocas de calor com o exterior ao volume de controlo forem nulas, variações de $\hat{u}$ poderão ocorrer devido ao calor associado com a dissipação interna de energia cinética pela viscosidade.

Escoamentos estacionários com velocidade baixas podem aproximar-se de escoamentos incompressíveis. Nesses casos, as variações da energia interna $\hat{u}$ serão apenas devidas a trocas de calor. Se as trocas de calor com o exterior ao volume de controlo forem nulas, variações de $\hat{u}$ poderão ocorrer devido ao calor associado com a dissipação interna de energia cinética pela viscosidade.

Se numa dada secção de um tubo ou conduta estiver a operar uma bomba ou uma turbina, a equação da energia, aplicada entre a entrada e a saída dessa secção da conduta, tomará a forma

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right)_{\text{in}} = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right)_{\text{out}} + h_{\text{atrito}} + h_{\text{turbina}} - h_{\text{bomba}}. \tag{16}$$

Até agora, na análise da equação da energia, assumimos que a velocidade é constante nas secções de saída ou de entrada. Nos casos reais, a velocidade não é constante, sendo nula junto às paredes sólidas. A aplicação da equação da energia, com as velocidades médias em cada secção, requer a utilização de um factor de correcção, α,

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right)_{\text{in}} = \left(\frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right)_{\text{out}} + h_{\text{atrito}} + h_{\text{turbina}} - h_{\text{bomba}}. \tag{17}$$

Até agora, na análise da equação da energia, assumimos que a velocidade é constante nas secções de saída ou de entrada. Nos casos reais, a velocidade não é constante, sendo nula junto às paredes sólidas. A aplicação da equação da energia, com as velocidades médias em cada secção, requer a utilização de um factor de correcção, α,

$$\left(\frac{p_1}{\rho g}+\alpha_1\frac{V_1^2}{2g}+z_1\right)_{\mathrm{in}}=\left(\frac{p_2}{\rho g}+\alpha_2\frac{V_2^2}{2g}+z_2\right)_{\mathrm{out}}+h_{\mathrm{atrito}}+h_{\mathrm{turbina}}-h_{\mathrm{bomba}}. \tag{17}$$

O factor de correcção, α, é igual a 2 num escoamento perfeitamente laminar, e aproximadamente 1, num escoamento turbulento.