Termodinâmica e Dinâmica de Fluidos 2023/2024

Aula n°9: Dinâmica de Fluidos

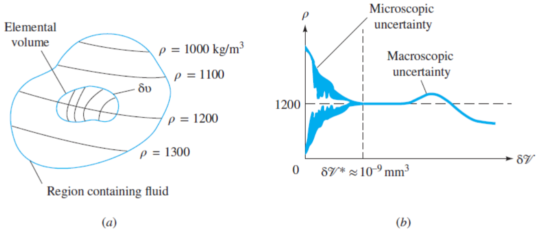
José M. Castanheira
Departamento de Física, Universidade de Aveiro

4 de dezembro de 2023

A definição de partícula material ajuda-nos a perceber a aproximação de meio contínuo. A partícula material é um volume $\delta^*\mathcal{V}$ suficientemente pequeno para que as variações das propriedades macroscópicas não sejam menores do que a precisão com que são observadas. Por outro lado, $\delta^*\mathcal{V}$ deve ser suficientemente grande para que as flutuações estatísticas, devidas às partículas que estão dentro do volume, também sejam menores do que a precisão de observação.

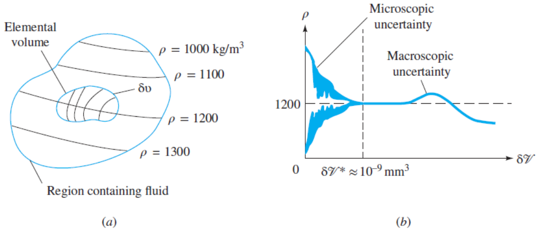
A definição de partícula material ajuda-nos a perceber a aproximação de meio contínuo. A partícula material é um volume $\delta^*\mathcal{V}$ suficientemente pequeno para que as variações das propriedades macroscópicas não sejam menores do que a precisão com que são observadas. Por outro lado, $\delta^*\mathcal{V}$ deve ser suficientemente grande para que as flutuações estatísticas, devidas às partículas que estão dentro do volume, também sejam menores do que a precisão de observação.

A figura abaixo permite perceber o significado da definição acima.



A definição de partícula material ajuda-nos a perceber a aproximação de meio contínuo. A partícula material é um volume $\delta^*\mathcal{V}$ suficientemente pequeno para que as variações das propriedades macroscópicas não sejam menores do que a precisão com que são observadas. Por outro lado, $\delta^*\mathcal{V}$ deve ser suficientemente grande para que as flutuações estatísticas, devidas às partículas que estão dentro do volume, também sejam menores do que a precisão de observação.

A figura abaixo permite perceber o significado da definição acima.



Assim, por exemplo, a massa volúmica é definida por

$$\rho = \lim_{\delta\mathcal{V}\to\delta^*\mathcal{V}} \frac{\delta m}{\delta\mathcal{V}}. \tag{1}$$

Campo de velocidades

A principal variável para caracterizar um escoamento é o campo de velocidades

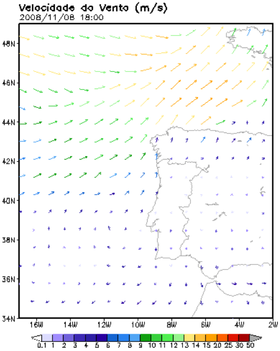
$$\vec{V}(y, y, z, t) = u(x, y, z, t)\,\hat{i} + v(x, y, z, t)\,\hat{j} + w(x, y, z, t)\,\hat{k} \tag{2}$$

Campo de velocidades

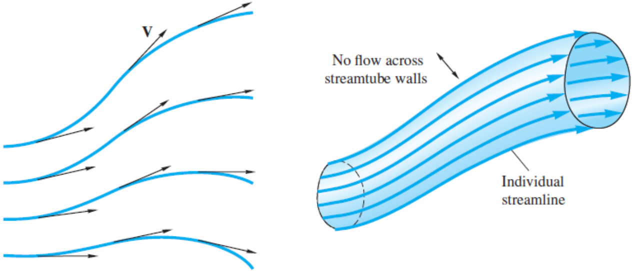
A principal variável para caracterizar um escoamento é o campo de velocidades

$$\vec{V}(y, y, z, t) = u(x, y, z, t)\,\hat{i} + v(x, y, z, t)\,\hat{j} + w(x, y, z, t)\,\hat{k} \qquad (2)$$

Uma 'imagem' instantânea do campo de velocidade poderá ser obtida representando os vectores velocidade numa grelha regular.



Outra forma de visualizar o campo de velocidade é representar as linhas de corrente



(a) (b)

As linhas de corrente são curvas tangentes à velocidade em cada ponto, num dado instante. Seja $\vec{r}(s) = x(s)\,\hat{i} + y(s)\,\hat{j} + z(s)\,\hat{k}$ o vector posição dos pontos de uma linha de corrente, sendo s a distância ao longo da curva relativamente a uma origem fixada na curva. A tangente à curva em qualquer ponto é $\hat{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$. Pela definição de linha de corrente, tem-se a seguinte igualdade

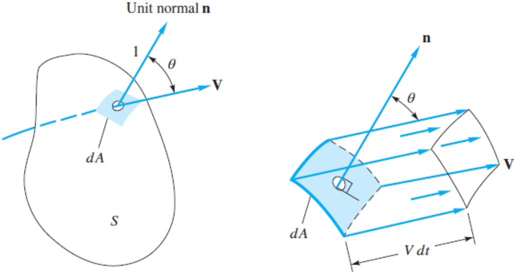
$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}x}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{v} = \frac{\mathrm{d}z}{w} = \frac{\mathrm{d}r}{V}. \tag{3}$$

Experimentalmente é comum visualizar as linhas de rasto (streaklines)

Um linha de rasto (streakline) é formada pelas posições das partículas que passaram por um ponto fixo.

Caudal e fluxo de massa

Qual será o volume 'varrido' pela massa que está sobre o elemento de área dA num intervalo de tempo dT?



(a) (b)

$$\mathrm{d}\,\mathcal{V} = V\cos\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A = \vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A \qquad \mathrm{d}\,m = \rho V\cos\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A = \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A \quad (4)$$

$$\underbrace{Q}_{\textit{Caudal}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}t} = \int_S \vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A \qquad \frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dot{m}}_{\textit{Fluxo de massa}} = \int_S \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A \quad (5)$$

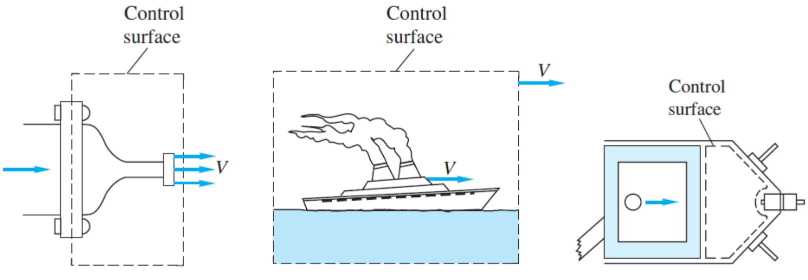
Volume de controlo

Todas as leis da mecânica são escritas para um *sistema*, que é definido como uma quantidade arbitrária de massa com identidade fixa. Até agora, também escrevemos as leis da Termodinâmica apenas para sistemas fechados, i.e. para quantidades de massa fixa.

Volume de controlo

Todas as leis da mecânica são escritas para um *sistema*, que é definido como uma quantidade arbitrária de massa com identidade fixa. Até agora, também escrevemos as leis da Termodinâmica apenas para sistemas fechados, i.e. para quantidades de massa fixa.

Como poderemos calcular as variações das propriedades dentro de um volume de controlo atravessado por um escoamento?



(a) (b) (c)

Volume de controlo

Todas as leis da mecânica são escritas para um *sistema*, que é definido como uma quantidade arbitrária de massa com identidade fixa. Até agora, também escrevemos as leis da Termodinâmica apenas para sistemas fechados, i.e. para quantidades de massa fixas.

Volume de controlo

Todas as leis da mecânica são escritas para um *sistema*, que é definido como uma quantidade arbitrária de massa com identidade fixa. Até agora, também escrevemos as leis da Termodinâmica apenas para sistemas fechados, i.e. para quantidades de massa fixas.

Como poderemos calcular as variações das propriedades dentro de um volume de controlo fixo, atravessado por um escoamento?

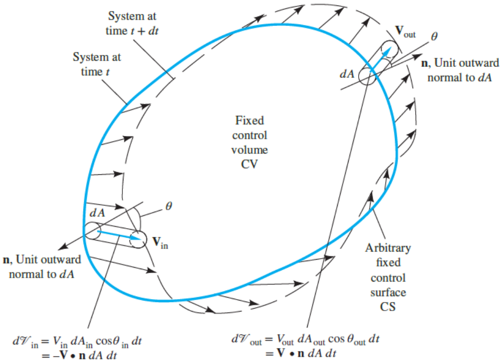
Volume de controlo

Todas as leis da mecânica são escritas para um *sistema*, que é definido como uma quantidade arbitrária de massa com identidade fixa. Até agora, também escrevemos as leis da Termodinâmica apenas para sistemas fechados, i.e. para quantidades de massa fixas.

Como poderemos calcular as variações das propriedades dentro de um volume de controlo fixo, atravessado por um escoamento?

Seja B uma propriedade qualquer do fluido (massa, energia, momento, entalpia, entropia, etc.) e $\beta = \mathrm{d}B/\mathrm{d}m$ o seu valor específico. A quantidade total de B no volume de controle é dada por

$$B_{CV} = \int_{\mathrm{CV}} \beta \mathrm{d}m = \int_{\mathrm{CV}} \beta \rho \mathrm{d}\mathcal{V}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}m} \tag{6}$$



Observando a Figura, vemos que a taxa de variação do valor da propriedade do sistema B_{Sist} é composta por três parcelas

$$\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathrm{CV}} \rho\beta \mathrm{d}\mathcal{V}\right)}_{\text{variação dentro do volume}} + \underbrace{\int_{\mathrm{CS}} \rho\beta V \cos\theta \, \mathrm{d}A_{\mathrm{out}}}_{\text{fluxo de } \beta \text{ para fora do volume}} - \underbrace{\int_{\mathrm{CS}} \rho\beta V \cos\theta \, \mathrm{d}A_{\mathrm{in}}}_{\text{fluxo de } \beta \text{ para dentro do volume}} \qquad (7)$$

Considerando que a normal $\hat{n}$ à superfície, CS, do volume de controlo, CV aponta para fora, em todos os pontos, o *Teorema do Transporte de Reynolds* pode escrever-se na seguinte forma compacta

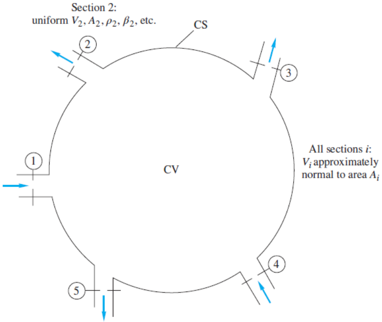
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathrm{CV}} \rho\beta \mathrm{d}\mathcal{V}\right) + \int_{\mathrm{CS}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \qquad (8)}$$

Considerando que a normal $\hat{n}$ à superfície, CS, do volume de controlo, CV aponta para fora, em todos os pontos, o *Teorema do Transporte de Reynolds* pode escrever-se na seguinte forma compacta

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}B_{\text{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\text{CV}} \rho\beta \mathrm{d}\mathcal{V}\right) + \int_{\text{CS}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \qquad (8)}$$

Se o volume não for fixo, i.e. se o volume se deslocar e deformar, o fluxo no segundo integral de (8) deve ser calculado co a velocidade relativa $\vec{V}_r(\vec{r},t) = vecV(\vec{r},t) - \vec{V}_s(\vec{r},t)$, onde $\vec{V}_s(\vec{r},t)$ é a velocidade da superfície do volume de controlo

$$\frac{\mathrm{d}B_{\text{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\text{CV}} \rho\beta \mathrm{d}\mathcal{V}\right) + \int_{\text{CS}} \rho\beta\vec{V}_r\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \qquad (9)$$



Se o volume for tiver um número definido de entradas e saídas unidimensionais, sendo a velocidade uniforme e perpendicular a cada secção, e a massa volúmica e a propriedade β uniformes em cada secção, conforme se representa na Figura, o Teorema do Transporte de Reynolds pode escrever-se na seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial\left(\rho\beta\right)}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + \sum \left(\rho_i \beta_i V_i A_i\right)_{\mathrm{out}} - \sum \left(\rho_i \beta_i V_i A_i\right)_{\mathrm{in}}. \quad (10)$$

Se o volume for fixo, a derivada temporal pode passar para dentro do integral e o *Teorema do Transporte de Reynolds* toma a seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial\left(\rho\beta\right)}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \tag{11}$$

Se o volume for fixo, a derivada temporal pode passar para dentro do integral e o *Teorema do Transporte de Reynolds* toma a seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}B_{\text{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial\left(\rho\beta\right)}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\text{CS}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \tag{11}$$

E se a propriedade B for a massa, teremos a equação da conservação da massa

$$\frac{\mathrm{d}m_{\text{Sist}}}{\mathrm{d}t} = 0 = \int_{\text{CV}} \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\text{CS}} \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \tag{12}$$

Se o volume for fixo, a derivada temporal pode passar para dentro do integral e o *Teorema do Transporte de Reynolds* toma a seguinte forma

$$\frac{\mathrm{d}B_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial\left(\rho\beta\right)}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\beta\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \tag{11}$$

E se a propriedade B for a massa, teremos a equação da conservação da massa

$$\frac{\mathrm{d}m_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = 0 = \int_{\mathrm{CV}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\mathrm{CS}} \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A. \tag{12}$$

No caso de o volume de controlo não ser fixo, a derivada temporal terá de passar para fora do integral.

Exercício: Um tubo de água com diâmetro de 1 polegada ramifica-se em dois tubos com diâmetros de 3/4 polegada e 1/2 polegada. Sabendo que caudal no ramo de maior diâmetro é o dobro do caudal no ramo de menor diâmetro, determine as razão entre as velocidades de escoamento nos três tubos.

No caso do momento linear $\vec{\mathcal{M}} = m\vec{V}$, a propriedade específica é a velocidade $\vec{V}$ do fluido. Do Teorema do Transporte de Reynolds obtém-se a seguinte relação para o momento linear de um volume deformável

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathrm{CV}} \rho\vec{V}\mathrm{d}\mathcal{V}\right) + \int_{\mathrm{CS}} \rho\vec{V}\left(\vec{V}_r \cdot \hat{n}\right)\mathrm{d}A. \tag{13}$$

onde $\sum \vec{F}$ representa o somatório de todas as forças que actuam na superfície do volume e as forças volúmica (gravítica e electromagnética) exercidas no interior do volume.

No caso do momento linear $\vec{\mathcal{M}} = m\vec{V}$, a propriedade específica é a velocidade $\vec{V}$ do fluido. Do Teorema do Transporte de Reynolds obtém-se a seguinte relação para o momento linear de um volume deformável

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}}_{\text{Sist}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\text{CV}} \rho\vec{V}\mathrm{d}\mathcal{V}\right) + \int_{\text{CS}} \rho\vec{V}\left(\vec{V}_r \cdot \hat{n}\right)\mathrm{d}A. \tag{13}$$

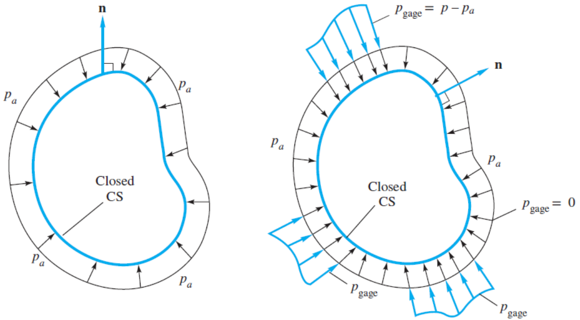
onde $\sum \vec{F}$ representa o somatório de todas as forças que actuam na superfície do volume e as forças volúmica (gravítica e electromagnética) exercidas no interior do volume.

Se o volume for fixo, podemos escrever

$$\boxed{\sum \vec{F} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\text{CS}} \rho\vec{V}\left(\vec{V} \cdot \hat{n}\right)\mathrm{d}A.} \tag{14}$$

Note que as equações (13) e (14) são válidas se $\vec{V}$ for a velocidade observada num referencial inercial.

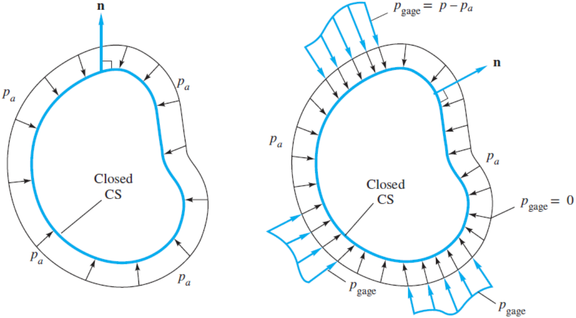
Força total da pressão



A força total da pressão é dada por

$$\vec{F}_{\text{press}} = \sum \vec{F} = -\int_{\text{CS}} (p - p_a)\,\hat{n})\,\mathrm{d}A = -\int_{\text{CS}} p_{\text{gauge}}\hat{n})\,\mathrm{d}A, \qquad (15)$$

Força total da pressão

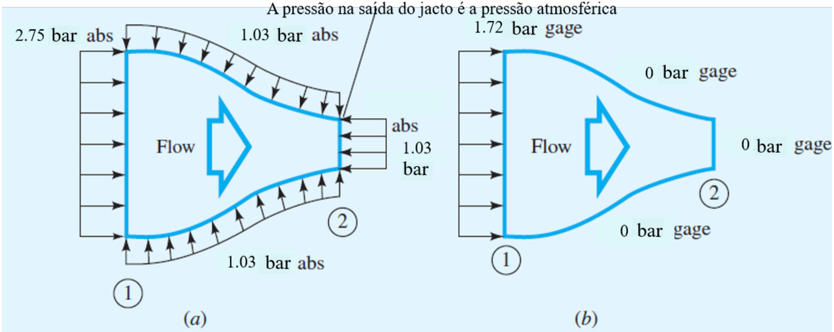


A força total da pressão é dada por

$$\vec{F}_{\text{press}} = \sum \vec{F} = -\int_{\text{CS}} (p - p_a)\,\hat{n})\,\mathrm{d}A = -\int_{\text{CS}} p_{\text{gauge}}\hat{n})\,\mathrm{d}A, \qquad (15)$$

onde p_a é uma componente uniforme da pressão exercida sobre toda a superfície, por exemplo, a pressão atmosférica.

Exercício: Considere uma agulheta cujos diâmetros das secções de entrada e saída são, respectivamente, $D_1 = 7.5\,\text{cm}$ e $D_2 = 2.5\,\text{cm}$. Calcule a força de pressão resultante exercida na agulheta.



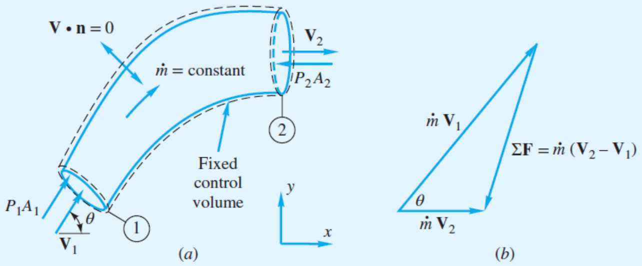
Força de ancoragem para manter um cotovelo ou palheta estacionário

Quando um fluxo de líquido passa através de um cotovelo que muda a direcção do fluxo num sistema de tubagem, ou a água que sai de um bocal é desviada por uma palheta numa direcção diferente, é crucial determinar as forças de ancoragem necessárias para manter o cotovelo ou a palheta estacionários.

Força de ancoragem para manter um cotovelo ou palheta estacionário

Quando um fluxo de líquido passa através de um cotovelo que muda a direcção do fluxo num sistema de tubagem, ou a água que sai de um bocal é desviada por uma palheta numa direcção diferente, é crucial determinar as forças de ancoragem necessárias para manter o cotovelo ou a palheta estacionários.

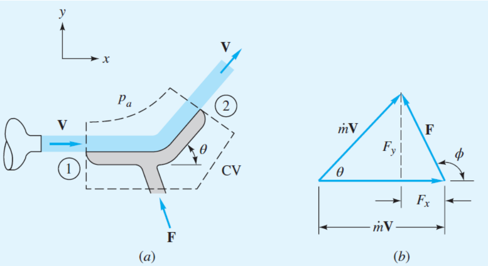
Exercício: A água escoa através de uma secção de um tubo que faz uma curva (cotovelo) conforme se mostra na Figura. Na entrada do cotovelo, a pressão absoluta é de 230 kPa e a área da secção transversal é de 40 cm^2. A direcção do escoamento na entrada faz um ângulo de 45° com a horizontal. Na saída, a pressão absoluta é de 200 kPa, a área da secção transversal é de 100 cm^2 e a velocidade é de 2 m/s. Considere a densidade da água igual 1000 kg/m^3. Determine as componentes x e y das forças necessárias para manter o cotovelo no lugar.

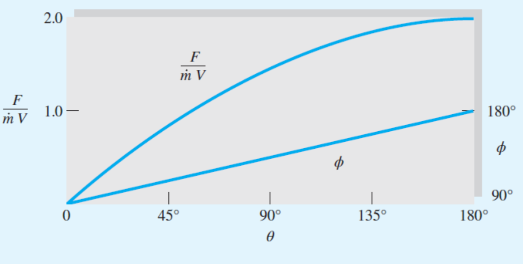


Exercício: Uma palheta fixa desvia um jacto de água de área A t de um ângulo θ sem alterar o módulo de sua velocidade. O escoamentoi é constante, a pressão é igual à pressão atmosférica em todos os pontos e o atrito na palheta é desprezável.

a) Determine as componentes F_x e F_y da força aplicada na palheta.

b) Encontre expressões para o módulo da força F e o ângulo ϕ entre a força e a horizontal em função de *theta*.

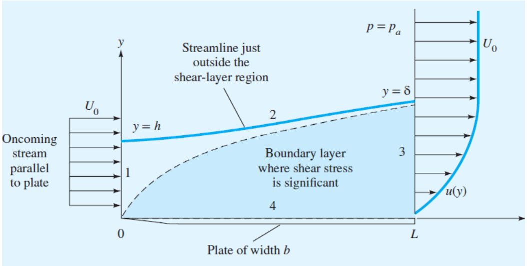



2.0
1.0
$\frac{F}{\dot{m}V}$
$\frac{F}{\dot{m}V}$
ϕ
ϕ
180°
90°
0
45°
90°
135°
180°
θ

Fricção ou força de arrasto exercida por superfície rígida e imóvel

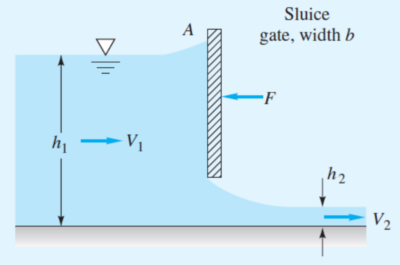
Não analisaremos este exemplo este ano lectivo!

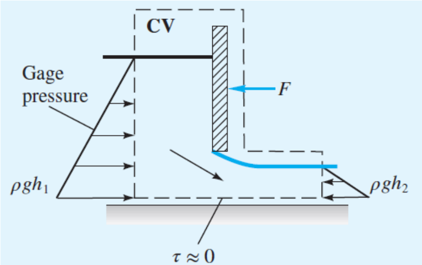
Exercício:



Pressão hidrostática variável

Exercício: Uma comporta controla o escoamento num canal aberto conforme se mostra na Figura. Nas secções 1 e 2, o escoamento é uniforme e a pressão é hidrostática. Desprezando o atrito inferior e a pressão atmosférica, deduza uma fórmula para a força horizontal F necessária para segurar a comporta. Expresse sua fórmula final em termos da velocidade de entrada V_1.




CV
Gage
pressure
F
ρgh1
ρgh2
τ ≈ 0

Volume de controlo desloca-se com velocidade constante e forma fixa

Exercício: Um jacto de água com velocidade V_j colide normalmente com uma placa plana que se move para a direita com velocidade V_c constante, como mostrado na Figura. Sabendo que a densidade da água é 1000 kg/m^3, a área da secção recta do jacto é 3 cm^2, V_j e V_vc são 20 e 15 m/s, respectivamente, calcule a força necessária para manter a placa em movimento com velocidade constante. Despreze o peso do jacto e da placa e assuma um fluxo constante em relação à placa móvel, com o jacto dividindo-se em partes iguais para cima e para baixo.