几种常用的目标机动模型

——用于目标跟踪中的运动建模

1. 前言

多数情况下，目标跟踪中所跟踪的目标均是非合作目标，因此首要任务是建立目标的运动模型。为了匹配和表征典型常见的运动形式，学者们提出了多种目标机动模型，主要可划分为白噪声模型和时间相关模型。前者将未知输入建模为白噪声，主要包括常速度（CV）模型、常加速度（CA）模型和多项式模型；后者将未知输入建模为马尔科夫过程，主要有零均值一阶时间相关的 Singer 模型、非零均值一阶时间相关的“当前”统计模型等。本文整理和总结了几种常用的目标机动模型，可结合所掌握的目标运动特性进行尽可能合理的选择，希望能对各位同行有所帮助。

2. 几种常见的目标机动模型

2.1 常速度模型（CV 模型）

假设目标作匀速飞行，可采用如下二阶 CV 模型来表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \tag{1}$$

式中，x、$\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 分别表示目标的位置、速度和加速度分量，$w(t)$ 为零均值白噪声，自相关函数为

$$R_w(\tau) = E[w(t)w(t+\tau)] = S_w \delta(\tau) \tag{2}$$

式中，S_w 为白噪声的功率谱密度，$\delta(\cdot)$ 为狄拉克 δ 函数。式(1)的离散化形式为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_k \tag{3}$$

式中，T 为采样时间，$\boldsymbol{w}_k$ 为 2×1 维零均值白噪声向量序列，协方差为

$$E[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}] = S_w \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.2 常加速度模型（CA 模型）

假设目标作均加速飞行，可采用如下三阶 CA 模型来表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \tag{5}$$

式中，$\dddot{x}$ 为目标的加加速度分量，其余变量定义与式(1)中一致。式(5)的离散化形式为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ \ddot{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_k \tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{w}_k$ 为3×1维零均值白噪声向量序列，协方差为

$$E[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}] = S_w \begin{bmatrix} T^5/20 & T^4/8 & T^3/6 \\ T^4/8 & T^3/3 & T^2/2 \\ T^3/6 & T^2/2 & T \end{bmatrix} \tag{7}$$

2.3 Singer 模型

与 CV 和 CA 这两种白噪声模型不同，Singer 模型属于一阶时间相关模型，由 Robert A. Singer 于 1970 年提出，其将目标加速度视作均值为零、具有指数自相关的随机过程。目标加速度的自相关函数为

$$R(\tau) = E[a(t)a(t+\tau)] = \sigma_m^2 e^{-\alpha|\tau|} \tag{8}$$

式中，σ_m^2 为目标加速度的方差，α 为目标机动频率，其值越大表明目标机动越剧烈。一般情况下，α 为 Singer 模型中的关键参数，直接关系着匹配目标真实机动的程度，进而影响目标运动状态的估计精度。对于空天飞行器来说，转弯机动$\alpha=$60s，逃逸机动$\alpha=$10-20s，大气扰动$\alpha=$1s。

在 Singer 模型中，假定目标机动加速度的概率密度服从如图 1 所示的均匀分布，由此可得机动加速度的方差σ_m^2为

$$\sigma_m^2 = \frac{a_{\max}^2}{3}(1 + 4p_{\max} - p_0) \tag{9}$$

式中，$a_{\max} > 0$为目标机动加速度的正上界，$p_{\max}$ 为目标以$a_{\max}$作机动的概率，p_0 为目标机动过程中加速度等于零的概率，而不是目标作匀速运动的概率。Singer 模型假定目标机动加速度的区间为$[-a_{\max}, a_{\max}]$，同时以负下界加速度$-a_{\max}$作机动的概率也为 $p_{\max}$。

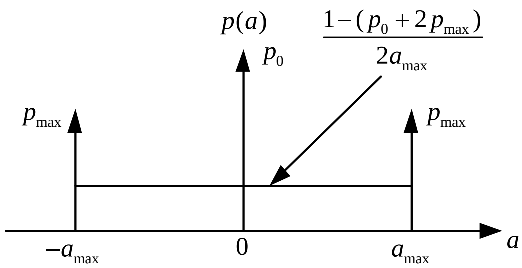

图 1　目标加速度近似均匀分布模型

通过对时间相关函数 $R(\tau)$ 实施 Wiener-Kolmogorov 白化程序后，目标加速度可写成输入为白噪声的一阶时间相关模型，形式为

$$\dot{a}(t) = -\alpha a(t) + w(t) \tag{10}$$

式中，$w(t)$ 为零均值白噪声，自相关函数为

$$R_w(\tau) = E[w(t)w(t+\tau)] = 2\alpha\sigma_m^2\delta(\tau) \tag{11}$$

因此，一维情况下基于 Singer 模型的目标运动方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \tag{12}$$

其离散化形式为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ \ddot{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & (\alpha T - 1 + e^{-\alpha T})/\alpha^2 \\ 0 & 1 & (1-e^{-\alpha T})/\alpha \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_k \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{w}_k$ 为3×1维零均值白噪声向量序列，协方差为

$$E[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}] = 2\alpha\sigma_m^2 \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中，各元素的表达式为

$$\begin{cases} q_{11} = \dfrac{1}{2\alpha^5}[1 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T + \dfrac{2\alpha^3 T^3}{3} - 2\alpha^2 T^2 - 4\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{12} = \dfrac{1}{2\alpha^4}[e^{-2\alpha T} + 1 - 2e^{-\alpha T} + 2\alpha T e^{-\alpha T} - 2\alpha T + \alpha^2 T^2] \\ q_{13} = \dfrac{1}{2\alpha^3}[1 - e^{-2\alpha T} - 2\alpha T e^{-\alpha T}] \\ q_{22} = \dfrac{1}{2\alpha^3}[4e^{-\alpha T} - 3 - e^{-2\alpha T} + 2\alpha T] \\ q_{23} = \dfrac{1}{2\alpha^2}[e^{-2\alpha T} + 1 - 2e^{-\alpha T}] \\ q_{33} = \dfrac{1}{2\alpha}[1 - e^{-2\alpha T}] \end{cases} \tag{15}$$

固定采样时间T，当机动频率α趋于零时，$\alpha T \to 0$，式(13)退变为式(6)，同时式(14)退变为

$$E[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}] = 2\alpha\sigma_m^2 \begin{bmatrix} T^5/20 & T^4/8 & T^3/6 \\ T^4/8 & T^3/3 & T^2/2 \\ T^3/6 & T^2/2 & T \end{bmatrix} \tag{16}$$

与式(7)形式一致。因此，当α很小时，Singer 模型退化为 CA 模型。在式(10)中，令$\alpha = 0$ 有$\dot{a}(t) = w(t)$，可更直观地体现。当机动频率α趋于无穷时，$\alpha T \to \infty$，式(13)退变为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ \ddot{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_k \tag{17}$$

此时，$\boldsymbol{w}_k$的协方差为

$$E[\boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

由式(17)和式(18)可看出，目标加速度$\ddot{x}(k)$和噪声序列$\boldsymbol{w}_k$对目标速度和位置均未任何贡献，此时目标加速度为零，Singer 模型退化为 CV 模型。所以，当$0 < \alpha < \infty$时，Singer 模型对应于 CV 和 CA 之间的运动。由此可知，α为 Singer 模型中的关键参数。当采样时间固定时，改变α即可改变 Singer 模型可表征的机动模式。

2.4 “当前”统计模型

“当前”统计模型由我国学者周宏仁于 1984 年提出，与 Singer 模型不尽相

同，认为目标相邻时刻的加速度不会发生大幅度的跳跃，后时刻加速度值应落在前时刻加速度值的邻域内。于是，在描述目标某时刻加速度的概率密度分布时，未像 Singer 模型一样考虑加速度在整个机动区间内取值的可能性。

该模型中，假定目标当前加速度的概率密度服从修正的瑞利分布。当 $a>0$ 时，概率密度函数为

$$P_r(a)=\begin{cases}\dfrac{(a_{\max}-a)}{\mu^2}\exp\left[-\dfrac{(a_{\max}-a)^2}{2\mu^2}\right] & a<a_{\max}\\ 0 & a\geq a_{\max}\end{cases} \tag{19}$$

式中，$a_{\max}$ 与 Singer 模型中一致，a 为目标当前加速度，μ 为可调参数。于是，a 的均值和方差分别为

$$\begin{cases}E(a)=a_{\max}-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mu\\ \sigma_a^2=\dfrac{4-\pi}{2}\mu^2\end{cases} \tag{20}$$

令 $a_{\max}=2g_0$，则不同 μ 值对应概率分布的函数图像如图 2 所示。

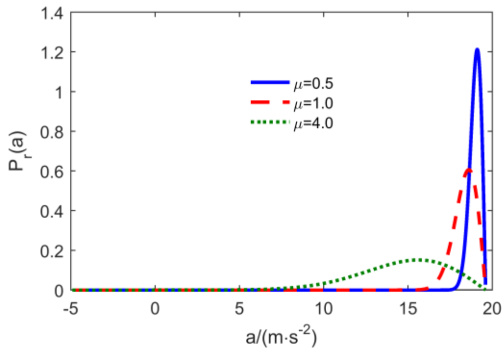

图 2 “当前”统计模型概率密度分布（$a_{\max}=2g_0$）

当 $a<0$ 时，概率密度函数为

$$P_r(a)=\begin{cases}\dfrac{(a-a_{-\max})}{\mu^2}\exp\left[-\dfrac{(a-a_{-\max})^2}{2\mu^2}\right] & a>a_{-\max}\\ 0 & a\leq a_{-\max}\end{cases} \tag{21}$$

式中，$a_{-\max}<0$ 为目标加速度的负下界。类似地，a 的均值和方差分别为

$$\begin{cases}E(a)=a_{-\max}+\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mu\\ \sigma_a^2=\dfrac{4-\pi}{2}\mu^2\end{cases} \tag{22}$$

当 $a=0$ 时，概率密度函数为

$$P_r(a)=\delta(a) \tag{23}$$

式中，$\delta(\cdot)$ 为狄拉克 δ 函数。

在“当前”统计模型的思想框架下，当目标正以非零加速度实施机动时，采用零均值的 Singer 模型表征目标运动显然不是合理选择，因此利用非零均值的时间相关模型来描述目标当前的加速度，形式为

$$\begin{cases} a(t)=\bar{a}+a_0(t) \\ \dot{a}_0(t)=-\alpha a_0(t)+w(t) \end{cases} \tag{24}$$

式中，$\bar{a}$ 为机动加速度均值，在每个采样区间内认为是常数，$a_0(t)$ 为零均值的 Singer 加速度过程，α 为机动频率，$w(t)$ 为零均值白噪声，自相关函数为

$$R_w(\tau)=E[w(t)w(t+\tau)]=2\alpha\sigma_a^2\delta(\tau) \tag{25}$$

由式(24)可得，加加速度为

$$\dot{a}(t)=-\alpha a(t)+\alpha\bar{a}+w(t) \tag{26}$$

因此，一维情况下基于“当前”统计模型的目标运动方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dddot{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}\bar{a}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}w(t) \tag{27}$$

其离散化形式为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \dot{x}(k+1) \\ \ddot{x}(k+1) \end{bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}(k+1,k)\begin{bmatrix} x(k) \\ \dot{x}(k) \\ \ddot{x}(k) \end{bmatrix}+\boldsymbol{U}(k)\bar{a}+\boldsymbol{w}_k \tag{28}$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}(k+1,k)$ 的表达式为

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1,k)=\begin{bmatrix} 1 & T & (\alpha T-1+e^{-\alpha T})/\alpha^2 \\ 0 & 1 & (1-e^{-\alpha T})/\alpha \\ 0 & 0 & e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$\boldsymbol{U}(k)$ 的表达式为

$$\boldsymbol{U}(k)=\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} (\alpha T-1+e^{-\alpha T})/\alpha^2 \\ (1-e^{-\alpha T})/\alpha \\ e^{-\alpha T} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$\boldsymbol{w}_k$ 为零均值白噪声向量序列，协方差与式(14)一致。

通常情况下，目标加速度的均值$\bar{a}$是难以先验已知的。在实际应用中，可用当前对目标加速度的最优估计值$\hat{\ddot{x}}(k\,|\,k)$来近似$\bar{a}$，即

$$\bar{a}=\hat{\ddot{x}}(k\,|\,k) \tag{31}$$

当$\hat{\ddot{x}}(k\,|\,k)>0$时，将式(31)代入式(20)可得

$$\sigma_a^2=\frac{4-\pi}{\pi}[a_{\max}-\hat{\ddot{x}}(k\,|\,k)]^2 \tag{32}$$

同理，可得$\hat{\ddot{x}}(k\,|\,k)<0$时目标加速度方差。由此，实现目标加速度方差的自适应。

3. 结束语

本文给出了几种常用的目标机动模型，用于在目标跟踪中对未知的目标运动进行匹配和表征，进而得到目标跟踪模型中的系统状态方程，最终可利用卡尔曼滤波对目标运动状态实施估计，实现对目标的实时跟踪。

如有任何问题或疑问，可随时邮件联系（hjs_nudt@126.com），欢迎交流，欢迎批评指正。