← Metrica ed Ortonormalità

⇒ liste ortonormali: (oppure sistema ortogonale/ortonormale)
↓
garantite indip. lin!

$\{Y_1, Y_2 \cdots Y_k\}$ $Y_1 \cdots Y_k \in \mathbb{R}^n$

$<Y_i, Y_j> \, > 0$ $i, j = 1 \dots k$ $(i = j)$

$<Y_i, Y_j> \, = 0$ $i \neq j$

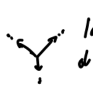
Def.: Sia $\mathcal{B} = \{Y_1 \cdots Y_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}$ è "base ortogonale" se $\{Y_1 \cdots Y_n\}$ è "sistema ortogonale"

" ortonormale (o.n.) " " ortonormale (o.n.)

Esempio: $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ è base o.n. di $\mathbb{R}^n$
⇓
norma = 1
$<\underline{e}_a, \underline{e}_b> \, = 0$ $a \neq b$
⇒ ha 1 in posizione diversa di tutti gli altri.


una base ortogonale di E_o^3


la base ortonormale di E_o^3 stessa norma!

Vantaggi: **Prop.:**

Sia $\mathcal{B} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ base ortogonale

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x = \alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_n Y_n$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [X]_\mathcal{B}$

gli altri hanno zero di Y_1!

$<X, Y> \, = \, <\alpha_1 Y_1 + \dots, Y_1> \, = \alpha_1 <Y_1, Y_1> \, = \alpha_1 \|Y_1\|^2$

$\Rightarrow \alpha_i = \dfrac{<X, Y_i>}{\|Y_i\|^2}$ COEFF. DI FOURIER
trova coordinate di X su $\mathcal{B}$

se fosse anche o.n.:

$\Rightarrow \alpha_i = \, <X, Y_i>$

per passare da base o.g. a o.n. normalizzo i vettori:

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
$\quad\; Y_1 \qquad\; Y_2 \qquad\; Y_3$

$<Y_1, Y_2> \, = 1 - 1 = 0$
$<Y_1, Y_3> \, = 1 + 1 - 2 = 0$
$<Y_1, Y_3> \, = 1 - 1 = 0$
} tutti e 3 ortogonali: sono base o.g. E_o^3

ora sono tutti di lunghezza 1!

se ho $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ → se abbiamo $\mathcal{B}' = \{\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$

$\alpha_1 = \dfrac{<X, Y_1>}{\|Y_1\|^2} = \dfrac{<X, \hat{Y}_1>}{\|Y_1\|}$ $\quad \hat{Y}_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|}$ $\quad = \dfrac{\alpha_1'}{\|Y_1\|}$

$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{pmatrix} = [X]_{\mathcal{B}'} \Rightarrow \alpha_i' = \, <X, \hat{Y}_i>$

$\alpha_1 = \dfrac{<X, Y_1>}{\|Y_1\|^2} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$

$\alpha_2 = \dfrac{<X, Y_2>}{\|Y_2\|^2} = -\dfrac{3}{2}$

$\alpha_3 = \dots = \dfrac{3}{3} = 1$

$[X]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$[X]_{\mathcal{B}'} = \begin{matrix} \alpha_1' = \, <X, \hat{Y}_1> \, = \frac{15}{\sqrt{6}} \\ \alpha_2' = \, <X, \hat{Y}_2> \, = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \alpha_3' = \, <X, \hat{Y}_3> \, = \frac{3}{\sqrt{3}} \end{matrix}$ facile calcolo coord.!

Sia $\mathcal{B} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ base o.n. di $\mathbb{R}^n$

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

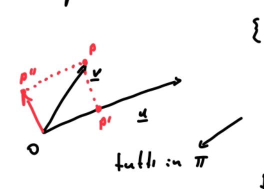
$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [X]_\mathcal{B}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [Y]_\mathcal{B}$ $\quad <X, Y> \, = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \dots$
$<X, X> \, = \|X\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \dots$

(se è o.g. ⇒ trasformo in o.n. facilmente)

Problema: ho base di SSV non-o.n./non-o.g.

• ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT DI ORTOGONALIZZAZIONE

esempio in E_o^3:



tutti in π

$\{\underline{u}, \underline{v}\}$ lin. indip.

$\pi = \text{Span}(\underline{u}, \underline{v})$
⇓
tengo il primo uguale
prendo il secondo ortogonale al primo:

$\vec{OP''} = \underline{v}^\perp = \underline{v} - \underline{v}' = \underline{v} - (\underline{v} \cdot \hat{\underline{u}})\hat{\underline{u}} = \boxed{\underline{v} - \left(\underline{v} \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}\right) \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}} = \underline{v} - \underline{v} \frac{\underline{u}^2}{\|\underline{u}\|^2}$

$\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ lin. indip. $\left(\begin{matrix} U = \text{Span}(\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_k) \\ \{\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_k\} \text{ base di } U \end{matrix} \right)$

$\mathcal{D} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$

per algoritmo: costruisco ogni vettore come C.L. sottratta ai vettori di U?

prendo $\underline{w}_1 = \underline{u}_1$

$\underline{w}_2 = \underline{u}_2 - \dfrac{<\underline{u}_2, \underline{w}_1> \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2}$ perpendic. al primo!

$\underline{w}_3 = \underline{u}_3 - \dfrac{<\underline{u}_3, \underline{w}_1> \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2} - \dfrac{<\underline{u}_3, \underline{w}_2> \underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|^2}$ perpendicolare a 1° e 2°!

$\underline{w}_k = \underline{u}_k - \underbrace{\dfrac{<\underline{u}_k, \underline{w}_1> \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2}}_{1} - \dots - \underbrace{\dfrac{<\underline{u}_k, \underline{w}_{k-1}> \underline{w}_{k-1}}{\|\underline{w}_{k-1}\|^2}}_{k-1}$

$\mathcal{D}$ è base o.g. di U

$<\underline{w}_1, \underline{w}_2> \, = 0$

$<\underline{w}_1, \underbrace{\underline{u}_2 - \frac{<\underline{u}_2, \underline{w}_1> \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2}}_{= \underline{w}_2}> \, = \, <\underline{w}_1, \underline{u}_2> - <\underline{u}_2, \underline{w}_1> \, = 0$ commutativo

...

continuo per $<\underline{w}_1, \underline{w}_3> \, = 0$
$<\underline{w}_2, \underline{w}_3> \, = 0$ } tutti $= 0$

Usando l'algoritmo ottengo base o.g. dello spazio!
ma se non ho vettori legati e voglio solo base o.n. ⇒ prendo canonica!
(almeno che prof non lo imponga!)

Es.: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$
$\underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \underline{u}_3 \quad \underline{u}_4 \quad \underline{u}_5$
eseguire alg. di Gram-Schmidt

Ortog. produce ris. diversi in base al v. di partenza!
entrambe saranno o.g. e generatori del SSV.

Es.: $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$ ✓ $\quad \det \neq 0$

rk = 3 $\quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$

rk = 3 ✓

$\underline{w}_1 = \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_2 = \underline{u}_2 - \dfrac{<\underline{u}_2, \underline{w}_1> \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{\overset{=0}{\cancel{(1 - 1 + 0)}}}{\|\underline{w}_1\|^2} \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_3 = \underline{u}_3 - \dfrac{<\underline{u}_3, \underline{w}_1> \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2} - \dfrac{<\underline{u}_3, \underline{w}_2> \underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{0}{\|\underline{w}_1\|^2} \underline{w}_1 - \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇓
Trovo base o.g.
$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$
o.n. da o.g.

• **Matrice ortogonale:**

Def.: Sia $Q \in M_\mathbb{R}(n)$ invertibile $(Q \in GL(n, \mathbb{R}))$ ← costante reale
Q è detta ORTOGONALE se $Q^{-1} = Q^T$

ossia $QQ^T = Q^TQ = I_n$

Es.: I_3 è ortogonale

$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$Q^T = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$QQ^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^TQ$

$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$Q^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = Q$ perché simmetrica

$QQ^T = Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$

Prop.: Sia $Q \in M_\mathbb{R}(n)$ ortogonale
$\Rightarrow |Q| = \pm 1$ &

dim.: $QQ^T = I_n$
$|QQ^T| = |I_n| = 1$
per Binet:
$|Q||Q^T| = 1$
per Laplace:
$|Q||Q| = 1$
⇓
$|Q|^2 = \pm 1$ condiz. NECESSARIA o.g. (non suff.!)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 1$ o.g.?

$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$

A non o.g.

$\exists$ caso falso ⇒ non suff.

cond. necessaria e suff.to:

Es. Teorico:
mostra che se $Q \in M_\mathbb{R}(n)$ o.g. e ha un AUTOVETTORE
⇒ i possibili autovalori associati sono ± 1

T. Sia $Q \in M_\mathbb{R}(n)$ o.g. (o.n.) ← storicamente sempre chiamate matrice o.g. si chiamano così NON MATRICI O.N.

equivale a dire (cond. nec. suff.)

$\{Q^1, \dots, Q^n\}$ è base o.n. di $\mathbb{R}^n$

una mat. o.g. è formata da vet. colonne o.n. in $\mathbb{R}^n$

vettori possono essere ortonormali se hanno caratt. specifiche delle o.g., MA LE MAT. TUTTE O.N!

Dim.: $QQ^T = Q^TQ = I_n$

$\Rightarrow (Q^TQ)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$ è una mat. diagonale

$(AB)_{ij} = A_i B^j$ righexcolonne

$= (Q^T)_i Q^j = (Q^i)^T Q^j = \, <Q^i, Q^j> \, = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$ $\quad <X, Y> \, = X^TY$

cioè $\{Q^1, \dots, Q^n\}$ base o.n. di $\mathbb{R}^n$

• $\{Q^1 \cdots Q^n\}$ base o.n. $\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow QQ^T = I_n$ (esercizio)