Geometria 20231114

← SVR ... finalizziamo

Ex.: $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$; → lista di gen $U = B_U$
$\quad\quad\quad\ \ \underline{u}_1 \quad\quad \underline{u}_2 \quad\quad \underline{u}_3$

$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ → lista di gen $W = B_W$
$\quad\quad\quad\ \ \underline{w}_1 \quad\quad \underline{w}_2 \quad\quad \underline{w}_3$

- dim U?
- dim W?

} alg. estraz. per determinare lin. indip → superflui non contano

- $U + W$
- $U \cap W$

- dim U:

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \neq \underline{0}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \notin \text{Span}(\underline{u}_1)$

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} \to \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -1 = \alpha + \beta \\ 0 = \beta \\ -1 = \alpha + \beta \end{cases}$ $1 \neq -1$ quindi non è C.L.

B_U è base di U → dim $U = 3$

- dim W

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \neq \underline{0}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \notin \text{Span}(\underline{w}_1)$

$\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix} \to \begin{cases} 2 = \beta \\ 2 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha + \beta \\ 1 = 0 \end{cases}$ → falso

B_W è lista gen. lin. indip. = base di W
→ dim $W = 3$

- $U + W$

$U + W = \text{Span}(B_U \cup B_W)$

$\underbrace{a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + a_3\underline{u}_3}_{\in U} + \underbrace{b_1\underline{w}_1 + b_2\underline{w}_2 + b_3\underline{w}_3}_{\in W}$ $\quad a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

↓

$U + W = \text{Span}(\dots)$
↓
alg estrazione sui 6 vettori finali

primi 3 li avevamo sicuramente

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = \beta \\ 0 = \alpha + \beta - \gamma \end{cases}$ $\nexists$ no, è lin. indip.

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \to \begin{cases} 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta - \gamma + \delta \\ 1 = \beta + \delta \\ 0 = \alpha + \beta - \gamma \end{cases}$ ... non serve, ma abbiamo già presi 4 in uno spazio $\mathbb{R}^4$! devono poter generare gli altri!

$\begin{cases} \alpha = \gamma = 1/2 \\ \beta = 0 \\ \delta = 1 \end{cases}$

una volta dimostrati 4 vett. lin. indip. abbiamo una base
↓
no base $\mathbb{R}^4$
dim > 4!

dim $U + W = 4$
$U + W = \mathbb{R}^4$

Ricorda :l
Cardluso 1108

$-\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = \frac{1}{2}\underline{u}_1 + \frac{1}{2}\underline{u}_3$

$\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} = \underset{\in U}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \to \in W \cap U$

$\underline{w}_3 = \alpha\underline{u}_1 + \beta\underline{u}_2 + \gamma\underline{u}_3 + \delta\underline{w}_1$

$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ 2 = \alpha + \beta + \delta - \gamma \\ 2 = \beta + \delta \\ 1 = \alpha + \beta - \gamma \end{cases}$ $2 - 1 = \delta = 1$

$\beta = 1$

$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \delta - \gamma$

$\alpha + \gamma + 1 = \alpha - \gamma + 2$

$\gamma = -\gamma + 1$

$2\gamma = 1$

$\gamma = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$-\underline{w}_1 + \underline{w}_3 = \frac{1}{2}\underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \frac{1}{2}\underline{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in U \cap W$

lin. indip.ti → dim $U \cap W \geq 2$
↓
questi due vettori sono base di $U \cap W$
$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
vettori di C.L. che compongono intersez.
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$

→ formula di Grassmann

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$$

Siano U, W ssv V svr | dim $V = n$

Se dim U + dim W = dim $(U + W)$
ossia
Se $B_U \cup B_W = B_{U+W}$
ossia
Se dim $(U \cap W) = 0$ per Grassmann

nessuno scarto durante estrazione, ∩ contiene solo $\underline{0}_V$

Diciamo che U e W sono in **SOMMA DIRETTA**
$U \oplus W$ non possiede intersezione
↓
due rette distinte passanti per O
piano e retta non ∈ piano passanti per O
qualsiasi ssv con solo l'origine

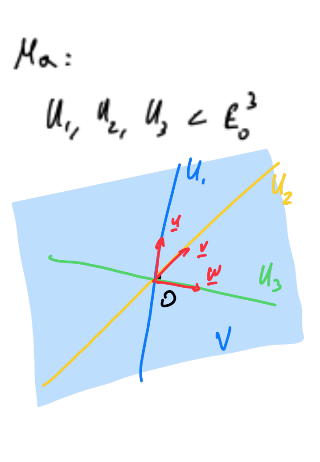
generalizzando:

Def.: Siano $U_1, \dots U_k$ ssv V (dim $V = n$)
sono in somma diretta $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots U_k$
se dim U_1 + dim U_2 + ⋯ dim U_k = dim $(U_1 + U_2 + \cdots U_k)$
ossia
se $B_{U_1} \cup B_{U_2} \cup \cdots B_{U_k} = B_{U_1 + U_2 + \cdots U_k}$

in pratica quando non si scarta nulla
→ somma diretta, no intersezione ($= \{\underline{0}\}$)
SOLO IN QUESTO CASO?

Ma:

$U_1, U_2, U_3 < E_O^3$



$U_1, U_2, U_3 \in V$

$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{\underline{0}\}$

ma dim U_1 + dim U_2 + dim U_3 = dim $(U_1 + U_2 + U_3)$?

Se il piano $U_1 + U_2$ contiene U_3 allora dim $(U_1 + U_2 + U_3) = 2$!

→ $\text{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = U_1 + U_2 + U_3 = \text{Span}(\underline{u}, \underline{v}) = U_1 + U_2$
$\underline{w}$ └ superfluo

$3 \neq 2$

Quindi spazio dopo spazio bisogna controllare la loro intersezione!

$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots U_k$

? ? ? ? → controllo in cascata

Prop.:
Siano $U_1 \cdots U_k$ ssv V | dim $V = n$
$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$

se
1. $U_1 \oplus U_2 \iff U_1 \cap U_2 = \{\underline{0}\}$
2. $U_3 \oplus (U_1 \oplus U_2) \iff U_3 \cap (U_1 \cap U_2) = \{\underline{0}_V\}$

...

k-1. $U_k \oplus (U_{k-1} \oplus (U_{k-2} \oplus (\cdots)))$

allora una serie di ssv è in somma diretta

Def.:
Siano U, W ssv V (dim $V = n$) in $\oplus$
Se $U \oplus W = V$, allora U è un complementare di W in V e viceversa
Cioè, diciamo U, W sono complementari in V

tanti possibili, come fascio di rette con il piano $\oplus \to E_O^3$

→ no due rette in E_O^3 (non abbastanza)
→ no due piani in E_O^3 (non in somma diretta)
→ retta e piano ∉ ✓
→ E_O^3 e $\{\underline{0}_V\}$ ✓

Ex.:
$U = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}\right\}$

- dim U?
- base U?

$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix}a\\-a\\0\\b\end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$

VETT. GENERICO ∈ U

$\to a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

dim $U = 2$

e il complementare di U?
base canonica $e_1 \cdots e_4$
↓
$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ generatori di $U + W$ ma con superflui
↓
una volta trovati 4 in $\mathbb{R}^4$ ✓
↓
$\text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_3) = W$
un possibile complementare!