Geometria 20231107

← $\underline{T}.$: $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \in V$ svn
→ $\text{span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k)$ ssv V

Prop.: siano $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \in V$ svn
→ $\text{span}(\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k) = \text{span}(\underline{v}_1) + \text{span}(\underline{v}_2)$

operaz. somma tra ssv
unisce tutte le C.L.

somma di ciascun ssv generato dai vettori

$S = \text{Span}(\underline{v}) = \{\underline{u} \in V \mid \underline{u} = \alpha\underline{v},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$
sappiamo che ogni ssv ha $\underline{0}_V$ all'interno → $\alpha = 0$, $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}_V$ → ss0 ✓

- somma vettoriale
- prod. scalare-vettore

} dimostriamo ss1, ss2 ✓
non si esce mai da S

Dim: $\underline{u} \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k)$ $\exists \alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{R} \mid \underline{u} = \underbrace{\alpha_1\underline{v}_1}_{\in \text{Span}(\underline{v}_1)} + \alpha_2\underline{v}_2 \dots + \underbrace{\alpha_k\underline{v}_k}_{\in \text{Span}(\underline{v}_k)}$

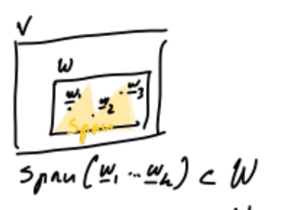
Forme le C.L. descrivibili dalle Span$(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k)$!

Span di lista di vettori quindi è sempre un SSV
↓
arbitrariamente, possiamo usare SSV come fossero SVR principali su cui lavorare, dato che non ci fanno mai uscire da essi

Prop. fond. span di lista di v.

Oss.: Sia $W \subset V$ svr, W ssv di V
(sottospazio = "contenuto")
W può essere consid. SVR a sua volta

Lemma: sia W un ssv di V svr
siano $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in W$
allora $\text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k) \subset W$, cioè ssv di V ma anche di W
dimostriamo per un vettore estrovabile nel superspazio



$\text{Span}(\underline{w}_1 \dots \underline{w}_k) \subset W$
$\subset V$

Dim:
chiusura lineare = ssv generato dalla lista di vettori $\underline{w}_n$
$\underline{u} \in \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$, allora $\exists\ \alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$
tale che $\underline{u} = \alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 + \dots + \alpha_k\underline{w}_k$

$\underline{w}_1 \in W \Rightarrow \alpha_1\underline{w}_1 \in W$
$\underline{w}_2 \in W \Rightarrow \alpha_2\underline{w}_2 \in W$
...
$\underline{w}_k \in W \Rightarrow \alpha_k\underline{w}_k \in W$

} $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\underline{w}_i \in W$ dimostra il lemma

↳ ogni elemento della C.L. $\in W$
↑ la loro somma non esce, essendo SSV

Prop.: Siano $\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k \in V$
$S = \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k) \subset V$

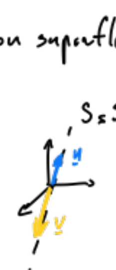
1. se $\underline{v} \in S$, $\text{Span}(\underline{v}) \subset \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$
quindi deve essere SSV lo span di un vettore esistente in SVR princ.
2. sia $\underline{v} \in V$ qualunque
$\text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k) \subset \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_k \dots \underline{v})$
~~o la stessa,~~ o più grande dello Span iniziale
3. sia $\underline{v} \in S = \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k)$
allora $\text{Span}(\underline{u}_1, \dots \underline{u}_k, \underline{v}) = \text{Span}(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k)$
$\underline{v}$ GENERATORE SUPERFLUO

↳ valide con o senza base (queste 3 = tutto?)

in base a 2 $\text{Span}(\underline{u}_1, \dots \underline{u}_k) \subset \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k, \underline{v})$
ma se $\underline{v}$ gen. superfluo, $\underline{v} \in \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k)$ $\exists \alpha_1 \dots \alpha_k \mid \underline{v} = \alpha_1\underline{u}_1 \dots + \alpha_k\underline{u}_k$
sia $\underline{w} \in \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k, \underline{v}) \Rightarrow \exists\ \beta_1 \dots \beta_k, \gamma \in \mathbb{R} \mid \underline{w} = \beta_1\underline{u}_1 \dots + \beta_k\underline{u}_k + \gamma\underline{v}$
$= (\beta_1 + \gamma\alpha_1)\underline{u}_1 + (\beta_2 + \gamma\alpha_2)\underline{u}_2 \dots + (\beta_k + \gamma\alpha_k)\underline{u}_k$

$(\beta_1 + \gamma\alpha_1)\underline{u}_1 + (\beta_2 + \gamma\alpha_2)\underline{u}_2 \dots + (\beta_k + \gamma\alpha_k)\underline{u}_k \in \text{Span}(\underline{u}_1, \dots \underline{u}_k)$ perché abbiamo trovato scalari!
quindi $\underline{v}$ è superfluo perché lo span coincide in sua presenza/assenza!

non superfluo → cambia il ssv



$\text{Span}(\underline{u}) = \text{Span}(\underline{v}) = \text{Span}(\underline{u}, \underline{v})$
perché allineati!
otteniamo l'altro per C.L.

← in $\mathbb{R}^n$ abbiamo inoltre basi canoniche
... passiamo alle basi?

Def.: Sia V uno SVR (ma anche SVQ, SVC...)
V è "finitamente generato" se $\exists$ lista vett. $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \in V$ $(k \in \mathbb{N})$
tale che $\text{Span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k) = V$
→ con 3 vett. E_O^3 lin. indip. messi in span otteniamo E_O^3
anche $\mathbb{R}^n$ con stesso procedim. in n vettori
→ sono fin. generati $(n \in \mathbb{N}^*)$

→ e $\mathbb{R}[x]$? qualsiasi grado...
→ inf. generato, per variabilità del numero di termini del polinomio!
NON È FIN. GENERATO
grado 5 ≠ grado 3 etc...

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2x^5 + x^3$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x^3 + x^2 + 1$

$\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ polinomi grado $\leq n$
e.g.: $\mathbb{R}_2[x] = \{p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\underline{v}_1 = 1$
$\underline{v}_2 = x$
$\underline{v}_3 = x^2$
ma sì! essendo ss0, ss1, ss2 validi (elem. nullo, dimensione $\neq c \cdot$)
→ $a = \alpha_1\underline{v}_1$ $b = \alpha_2\underline{v}_2$ $c = \alpha_3\underline{v}_3$

somma tra polinomi con grado max conosciuto hanno grado $\leq$ a quelli iniziali quindi ss1
↳ $\{1, x, x^2\}$ è lista di generatori di $\mathbb{R}_2[x]$

$\underline{T}.$ se (V svr) fin. generato, il SVR sicuramente ha una base

algoritmo di estrazione (alg ⟺ teorema)

→ lista di k generatori di V e trovo una base di V
→ si può fare con spazi e sottospazi, basta trattarli da principali

$\mathcal{L} = \left\{ \underset{\underline{u}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_5}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}$ $\quad U = \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_5)$ $\quad U \subset \mathbb{R}^4$
base di U?
conosciamo base canonica, ma altrimenti...

"in avanti":
- riconosco U fin. gen., abbiamo $\mathcal{L}$ sua lista di generatori
- prendo il primo vett.: è = v. nullo? se sì lo scarto
  1. $\underline{u}_1 = \underline{0}_K$? $\langle$ tengo F, scarto V
- controllo se $\underline{u}_2 \in \text{Span}(\underline{u}_1)$, se sì lo scarto
  2. $\underline{u}_2 \in \text{Span}(\underline{u}_1)$ $\langle$ tengo F, scarto V
- controllo se $\underline{u}_3 \in \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$
  3. $\underline{u}_3 \in \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ $\langle$ tengo F, scarto V
- ... $\underline{u}_k$
  4. $\underline{u}_k \in \text{Span}(\underline{u}_1 \dots \underline{u}_k)$ $\langle$ tF, sV

o si termina per lista finita
quelli scartati sono generatori superflui

Svolgiamo:
$\mathcal{L} = \left\{ \underset{\underline{u}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_5}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}$

$\underline{u}_1 \neq \underline{0}_4$ ✓
$\underline{u}_2 \notin \text{Span}(\underline{u}_1)$ ✓
$\underline{u}_3 \in \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ ✗
$\underline{u}_4 \in \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ ✓ → perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\underline{u}_5 \in \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_4)$ ✗

$\begin{cases} \alpha + 0 = 0 \\ \alpha + 0 = 1 \end{cases}$ $\nexists$

metto sempre i coeff. C.L. di fronte, è lo stesso per ogni elem. di un singolo vettore! → altrimenti non è più allungamento, ma una modifica! quindi deve essere su tutti in un solo v.

$B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_4\}$
lin. indip.te

- lista di gen.
- lin. indip.te

} = base

Base di tutto lo spazio, $\mathbb{R}^4$ → ha 4 componenti

$\underline{w} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} = \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2 + \underline{u}_4$

$[\underline{w}]_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ base del sottospazio $\text{Span}(\mathcal{L})$ → base B ha 3 componenti e da questi genera quelli in $\mathbb{R}^4$ (ma non tutti in $\mathbb{R}^4$)

⚠ alcuni elem. quindi non si possono ottenere in $\mathbb{R}^4$ usando $\text{Span}(\mathcal{L})$

alg. di completamento
$B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin. indip.
cerco base di $\mathbb{R}^4$ che contenga B

$\mathcal{L}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \overbrace{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4}^{\text{una base di } \mathbb{R}^4}\}$ generatore di $\mathbb{R}^4$

iniziamo alg. estraz. da qui

quindi:
$\underline{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\underline{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{e}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
è la base canonica di $\mathbb{R}^4$?

ora proviamo con l'alg. di estrazione

$\underline{e}_1 \in \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ ✗
$\underline{e}_2 \in \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ ✗
$\underline{e}_3 \notin \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ ✓ → non c'è C.L. per $\underline{e}_3$
$\underline{e}_4 \in \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{e}_3)$ ✗