Analisi 20231019

⇦ f. elem. → maltonerai

FUNZIONI IPERBOLICHE

Definiamo $Sh(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ seno iperbolico di x

$Ch(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ coseno " "

$Th(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ tangente " "

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

e^x, e^{-x} definite in $\mathbb{R}$
→ combinazioni in $\mathbb{R}$
a parte $\tanh(x)$?
→ $e^x + e^{-x} = 0$ ma:
>0 >0
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

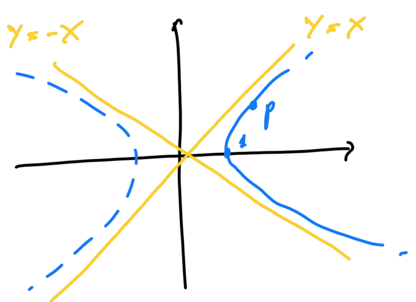
e^x f. esponenziale
base n. nepero
esp x

$\left(\frac{1}{e}\right)^x$ f. esp.le $= e^{-x}$

Proprietà:
relazione fondamentale
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\neq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sinh(-x) = -\sinh x$ dispari
- $\cosh(-x) = \cosh x$ pari

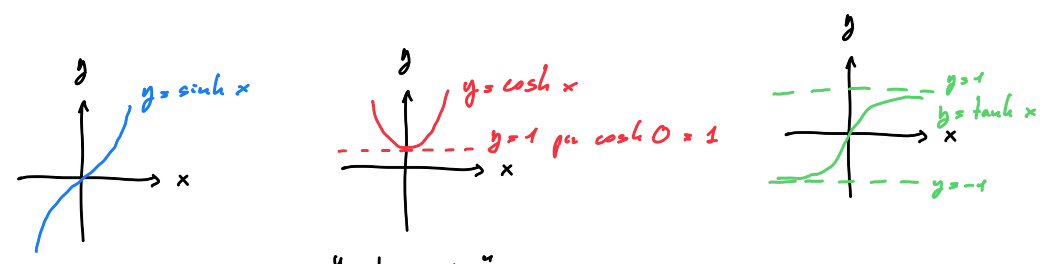
→ tanh è dispari: $\frac{\text{dispari}}{\text{pari}}$ = dispari

$P = (\cosh x, \sinh x) \in$ curva di eq. $X^2 - Y^2 = 1$
→ iperbolici cos e sin!



$x^2 - y^2 = 1$

→ $e^x + e^{-x} \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$
($\cosh x \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$



"catenaria"
= profilo del filo pesante tirato dalla $\vec{F_p}$

sinh è invertibile → str. monotona (str. cr.) su tutto $\mathbb{R}$

$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\sinh^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

determiniamo $\sinh^{-1}$: risolvere per x (tentare)

$y = \sinh x$
$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$2ye^x = e^{2x} - 1$
$t = e^x$
$t^2 - 2yt - 1 = 0$
$t_{1,2} = \frac{2y \mp \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{\cancel{2}y \mp \cancel{2}\sqrt{y^2+1}}{\cancel{2}}$ < $y - \sqrt{y^2+1}$; $y + \sqrt{y^2+1}$ <0
$e^x = y - \sqrt{y^2+1}$
$x = \ln\left(y - \sqrt{y^2+1}\right)$
↳ $\sinh^{-1}$ = "SettSh(y)"
$= \ln\left(y - \sqrt{y^2+1}\right)$

cosh è invertibile da $[0, +\infty)$ a $[1, +\infty)$
$\cosh: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$

"settore coseno iperbolico"
↳ $\cosh^{-1}: [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

$\cosh^{-1} y$ = "SettCh(y)"
$= \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$

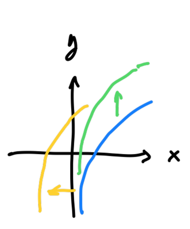
Operazioni

- sui grafici:

$y = f(x)$ ⟶ 3 casi:

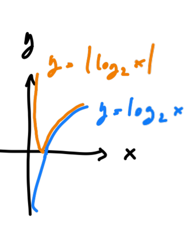
$$\begin{cases} y = f(x) + k & k \in \mathbb{R} \quad \text{trasl. verticale} \\ y = f(x+k) & k \in \mathbb{R} \quad \text{trasl. orizzontale} \\ y = |f(x)| & \text{riflessione su x delle } f(x)<0 \end{cases}$$

esempi: $y = \log_2 x$
$y = \log_2 x + 2$
$y = \log_2(x+2)$
anche $\mathbb{D}$ cambia: $x > -2$



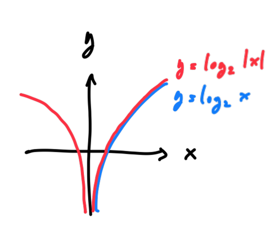
$y = |\log_2 x|$

$$= \begin{cases} \log_2 x & \text{se } \log_2 x \geq 0 \\ -\log_2 x & \text{se } \log_2 x < 0 \end{cases}$$



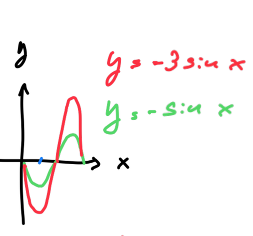
altre proprietà: rifl. y

→ $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$



scala verticale

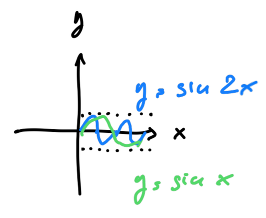
→ $y = kf(x)$
$k > 0$ scala ↑
$0 < k < 1$ scala ↓
$k < 0$ anche segno opposto
↳ rifl. x



scala orizzontale

→ $y = f(kx)$

$\sin(2x + 2T)$
$= \sin 2x$
⇓
$2T = 2\pi$
⇓
$T = \pi$



stesse proprietà k ma rifl. y

FUNZIONI COMPOSTE

Siano:
$f: A \to \mathbb{R}$
$g: B \to \mathbb{R}$

due funz. con $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

si def. funz. composta tra g e f la funz. $g \circ f$
definita da in $\mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

$x \in A \land f(x) \in B$ → $\{x \in A \mid f(x) \in B\}$
quindi
due funz. f, g | $\forall x \in A$ $f(x) \in B$
ossia $f(A) \subseteq B$
"è contenuto in"

quindi $\mathbb{D} = A$

composizione: non sempre possibile
- se $g \circ f$ è ben definita $(f(A) \subseteq B)$
non è detto che $f \circ g$ lo sia $(g(B) \subseteq A)$
- se entrambe $g \circ f$, $f \circ g$ sono ben definite,
non è detto che siano uguali.

$f \circ g \neq g \circ f$ ✗
no pr. comm.

- proprietà associativa ✓
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Esempio: determinare insieme di definizione delle seguenti funzioni

a) $\sqrt{e^{2x} - e^x}$ b) $\ln(1-x^3)$ c) $\operatorname{acos}(x^2-2)$

"per quali x si possono calcolare le funzioni?"

→ Dominio:

a) $e^{2x} - e^x \geq 0$
$e^x(e^x - 1) \geq 0$
$e^x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
$e^x - 1 \geq 0$ $e^x \geq 1$
$e^x \geq e^0$
$x \geq 0$
$D = [0, +\infty)$

b) $1 - x^3 > 0$
$x < -1$
$\mathbb{D} = (-\infty, 1)$

c) $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$ → acos: $y \in [-1, 1]$ contrario del cos
$x^2 - 2 \geq -1$
$x^2 - 2 \leq 1$

$x^2 \geq 1$
$x^2 \leq 3$

$|x| \geq 1$
$|x| \leq \sqrt{3}$ } per x^2 segno si ottengono → 2 sottoint. del D:

$D = x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

Successioni (limite)

↳ sequenza di ∞ numeri reali

Def.: suc. di n. reali è una funz. f definita da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \overset{f}{\longmapsto} f(n)$
$f(n) = f(n)$

Notazione: una succ. è assegnata da $f(n) = a_n$

Esempi:
- $a_n = n^2$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \longmapsto n^2$
- $a_n = (-1)^n$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $n \longmapsto (-1)^n$

non è detto che sia definita per tutti gli n:

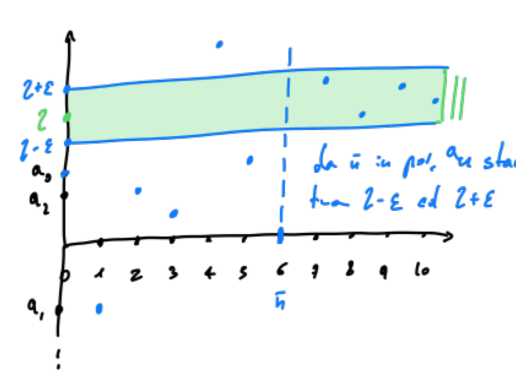
- $a_n = \sqrt{n^2 - 5n}$ $f: \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\} \to \mathbb{R}$, $n \longmapsto \sqrt{n^2 - 5n}$
$f(n)$
$n^2 - 5n \geq 0$
$-\frac{b}{a}$ spunta $n \geq 5$

→ seq. di n. reali: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Studio del comportamento della coda.

!! è intervallo variabile → riduciamolo sempre di più!

Def.: succ. $\{a_n\}$ $((a_n))$ è convergente se esiste un $l \in \mathbb{R}$ | $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ | $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ $\forall n \geq \bar{n}$



nel caso di una succ. il p. c. è sol in $\mathbb{N}$:
$\{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$
⇓
$\{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
punti distaccati