Analisi 20231130

← Ult. sv. di Maclaurin

[3] $f(x) = \cos x \qquad x_0 = 0$

derivabile ∞ volte in $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ "f ammette derivate di $\forall$ ordine in 0"

$\Leftrightarrow$ Maclaurin ord. n $\forall n$ $\exists$

$f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\sin x$
$f''(x) = -\cos x$
$f^{(3)}(x) = \sin x$
$f^{(4)}(x) = \cos x$

$\Rightarrow$ $f(0) = 1$, 0, -1, 0, 1

ord. dispari ↓ compariranno solo potenze pari nel pol.

$$\Rightarrow f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}x^{2k}\right] + o(x^{2n}) \qquad x \to 0$$

$0! = 1$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \qquad x \to 0$$

Ulteriori sv. notevoli:

[4] $f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ n arbitrario

$$\ln(1+x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{(k+1)}}{k+1}\right] + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad x \to 0$$

[5] $f(x) = (1+x)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k\right] + o(x^n) \qquad x \to 0$$

↳ coeff. binom. $\Rightarrow \binom{\alpha}{k} := \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!} \qquad k \geq 1$

$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1!} \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \quad \dots$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

↑
e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ sviluppi

Lascio qualcosa in esame

⇓

$e^x - 1 \sim x$
$\sin x \sim x$
...

il confronto tra stime asint. e sviluppi è:

le st. asint. sono gli sviluppi di Maclaurin arrestati al 1° ordine a meno del coseno (2° ordine)

$f(x) = o(g(x))$ $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ g più veloce di f!

$e^x - 1 \sim x \quad x \to 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$ qui si vede come $(e^x - 1 - x)$ cresce meno velocemente di x, quindi:

$\Leftrightarrow e^x - 1 - x = o(x) \quad x \to 0$ $\qquad$ (e^x-1-x) è un $o(x)$ perché x accelera più rapidam.

$\Leftrightarrow e^x = 1 + x + o(x) \quad x \to 0$

stima asint. del 1° ordine!

Calc. lim. usando sv. notevoli:

① $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x + 1 - e^{x^2}}{x^2 \sin^2 x}$

Procedura: usare gli sv. notevoli per approssimare numeratore e denominatore. gli sv. devono essere arrestati all'ordine che produce il primo termine non nullo

$f(x) = x^2 \cos x + 1 - e^{x^2}$

conosciamo i loro sviluppi

↳ $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \dots \quad x \to 0$

e^{x^2} perché con $x \to 0$, anche $x^2 \to 0$

$\Rightarrow$ posso usare sv. not. con x^2 al posto di x

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots \quad x^2 \to 0$

fin dove arrivare? fin quando non tutti i termini si cancellano!

$f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) \cancel{+1} \cancel{-1} - x^2 + \dots =$

$= \cancel{x^2} - x^4 - \cancel{x^2}$

no, dobbiamo farlo per $x^2 \cos x$, non $\cos x$ da solo!

$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots$

⇓ ⚠ alcuni ordini non sono visibili perché = 0

$x^2 \cos x = \boxed{x^2} - \boxed{\frac{1}{2}x^4} + \dots$

$e^{x^2} = \underbrace{\boxed{1 + x^2}}_{2° \text{ ord.}} + \underbrace{\boxed{\frac{x^4}{2}}}_{4° \text{ ord}} + \dots$

dobbiamo arrestarci allo stesso ordine! 2°, 4°, 6° ...

⇓

$\boxed{x^2 \cos x + 1 - e^{x^2} = \cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{x^2} \dots}$

continuano ad azzerarsi

⇓ provo al 4° ord.

non sommare gli o-piccoli
↓

$x^2 \cos x + 1 - e^{x^2} = \cancel{x^2} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \cancel{+1} \cancel{-1} \cancel{-x^2} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = -x^4 + o(x^4)$

Denom: $x^2 \sin^2 x \sim x^4 \quad x \to 0$

⇓

$\lim_{x \to 0} -\frac{x^4}{x^4} = -1$

Osserv.: propr. di o()

$o(x)$, $o(x^2)$, $o(x^{2n})$

↳ non sono funzioni ben precise, ma una proprietà di una funzione: $\frac{o(x)}{x} \to 0$, $\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$

quindi $o(x)$ può indicare una qualsiasi fn. che $\to 0$ PIÙ velocemente di x!

$x^2 = o(x)$
$x^3 = o(x)$ $\Rightarrow \underbrace{o(x)}\, - \underbrace{o(x)} \neq 0$ non sono la stessa cosa necessariamente!

$o(\alpha x) = o(x)$

$o(x) + o(x^2) = o(x)$

perché per $x \to 0$

il $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} =$ $\Rightarrow$

rimane quello più grossolano

cresce diminuisce al crescere dell'exp.

quindi teniamo exp. minimo.

$x\,o(x^n) = o(x^{n+1})$

$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + \ln(1-x^2)}{x^2(2x+x^2)^2}$

$x^2(2x+x^2)^2 \sim x^2 \underbrace{(2x)^2}_{\text{per } x \to 0 \text{ il minore}} = 4x^4$

$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x + \ln(1-x^2)}{4x^4}$

$x \sin x \sim x^2$
$\ln(1-x^2) \sim -x^2$ } si cancellerebbero all'ordine 2!

⇓

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$

$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + o(x^6)$

$\ln(1-x^2) =$ controllo se, come $x \to 0$, anche $-x^2 \to 0$ VERO

$\Rightarrow = -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{1}{3}(-x^2)^3 + o(x^6)$ ↳ non tiene conto il segno GT

raggiungo lo stesso grado dell'altro!

$\Rightarrow = -x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$

non si annullano, quindi non servono i termini 6°, li escludo:

$x \sin x + \ln(1-x^2) = \cancel{x^2} - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + o(x^6) \cancel{-x^2} - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$

$= -\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5) + o(x^6)$ anche $o(x^4)$ da! $\quad x \to 0$

$= -\frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{3}\cancel{x^4}}{4\cancel{x^4}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}$ stesso ris. di de L'Hopital

Aggiunta di 2 sviluppi:

$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} =$ per $x \to 0 \wedge (-x) \to 0$, $\frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + o(x^n)\right)\right]$

$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\qquad = \frac{1}{2}\left[2x + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \dots + o(x^n)\right]$

Maclaurin? $\qquad = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + o(x^n)$

$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

è fn. dispari! ha solo pot. dispari.

$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\arctan x =$ (fino al 3°)

$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $\Leftrightarrow$ $o(x^4)$ per dispari! — questo va sul sicuro / vanno bene entrambi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x e^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3}{(x+2x^2)^2 \ln^3\left(1+\frac{x}{2}\right)} = ?$$

usiamo Maclaurin:

$e^{-x^2} =$ per $-x^2 \to 0$ quando $x \to 0$ ✓

⇓

$= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(-x^2)^2 + o(x^4)$

$x e^{-x^2} = x - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$

ord. = 5 ⇒ anche nel $\sin x$:

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

⇓

$x e^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 = \cancel{x} \cancel{-x^3} + \frac{1}{2}x^5 \cancel{-x} + \overbrace{\cancel{\frac{x^3}{6}} - \frac{x^5}{5!} + \cancel{\frac{5}{6}x^3}}^{=\cancel{x^3}} + o(x^5)$

$= \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$

$= \frac{59}{120}x^5 + o(x^5)$

Denom:
$(x+2x^2)^2 \ln^3\left(1+\frac{x}{2}\right) \sim x^2\left(\frac{x}{2}\right)^3$
$= \frac{1}{8}x^5$

⇓

$\lim_{x \to 0} \frac{59}{\cancel{120}_{15}} \cdot \cancel{8}^{1} = \frac{59}{15} = 4 - \frac{1}{15}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x\left[\operatorname{Sh} x^3 - x^3\right]}{\ln(1+x^9)}$$

$\ln(1+x^9) \sim x^9 \quad x \to 0$

$\operatorname{Sh} x^3 =$ per $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$ ✓

⇓

basta 3° per l'altro argomento

$= x^3 + \frac{1}{6}x^9 + o(x^9)$

$\operatorname{Sh} x^3 - x^3 = \frac{1}{6}x^9 + o(x^9)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\cancel{e^x}}^{e^x \to 1}\left[\frac{1}{6}\cancel{x^9}\right]}{\cancel{x^9}} = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos\left(2\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+2\frac{1}{x^2}\right) - 1}{\tan\left(3\frac{1}{x^4}\right)}$$

⇓ $t = \frac{1}{x}$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\cos 2t + \ln(1+2t^2) - 1}{\tan(3t^4)}$$

$\tan(3t^4) \sim 3t^4 \quad t \to 0$

$\cos 2t =$ $2t \to 0$ per $t \to 0$ ✓

⇓

$= 1 - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^4}{4!} + o(t^4)$

$\ln(1+2t^2) =$ $2t^2 \to 0$ per $t \to 0$ ✓

⇓

$= 2t^2 - \frac{1}{2}(2t^2)^2 + o(t^4)$

$\cos 2t + \ln(1+2t^2) - 1 = \cancel{1} - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^4}{4!} + 2t^2 - \frac{1}{2}(2t^2)^2 \cancel{-1} + o(t^4)$

$= -\frac{4}{3}t^4 + o(t^4)$

$\lim_{t \to 0^+} \left(-\frac{4}{3}\cancel{t^4}\right)\left(\frac{1}{3\cancel{t^4}}\right) = -\frac{4}{9}$ da controllare