Algebra 20231011

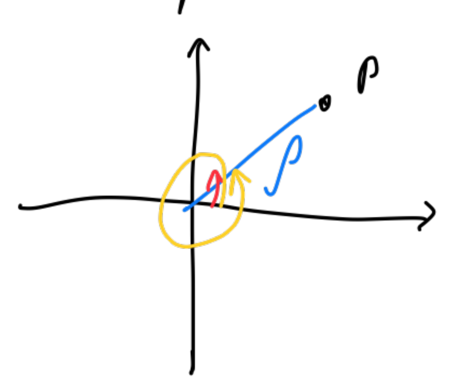
Forma Trigonometrica (num. complessi)

- per un qualsiasi punto P, si usano coord. cartesiane
- oppure con coordinate polari

ρ = "ro", raggio polare
= distanza $\overline{OP}$

θ = "theta", angolo polare antiorario
= angolo tra semiretta di $\overline{OP}$ e l'ascissa positiva

a ogni coppia (ρ, θ) corrisp. un solo punto nel piano, mentre ad un punto cartesiano corrisponde un solo ρ ma infiniti θ



ρ sempre ≥ 0 essendo la distanza

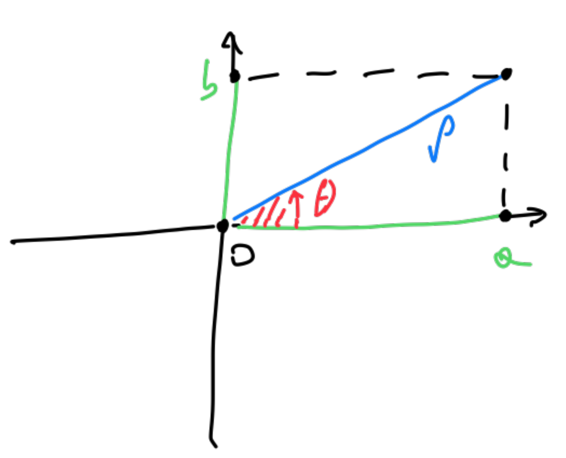
θ e θ sono entrambi validi: si può continuare a girare attorno!

↳ $+2k\pi$

la diff. di due angoli ← num. di giri
θ validi equivale ad un multiplo di 2π

$$\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

Usiamo quindi questa nuova rapp. per i num. $\mathbb{C}$:
se $z = a + jb$ è un num. complesso sul p. Gauss,
→ $\rho = |z|$
→ θ = "argomento di z"
se si sceglie θ in $(-\pi, \pi]$ oppure $[0, 2\pi)$
→ "argomento principale"



si possono applicare i teoremi del tr. rett.!

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$$
↓
$z = a + jb = \rho \cos\theta + j\rho \sin\theta$
$= \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$
= forma trig.ca di z

Se conosciamo ρ, θ si può ricavare a, b
e vale anche il contrario!

→ $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = a/\rho \\ \sin\theta = b/\rho \end{cases}$$

* ricordarsi i valori noti in:
- multipli di $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{3}$ • $\frac{\pi}{4}$ • $\frac{\pi}{6}$

e l'addiz. tra sin e cos

Esempio

calc. modulo e arg. di:
- $1+j$
- $\frac{1+j}{1-j}$

$z = 1 + j$
$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$$\begin{cases} \cos\theta = a/\rho = 1/\sqrt{2} \\ \sin\theta = b/\rho = 1/\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

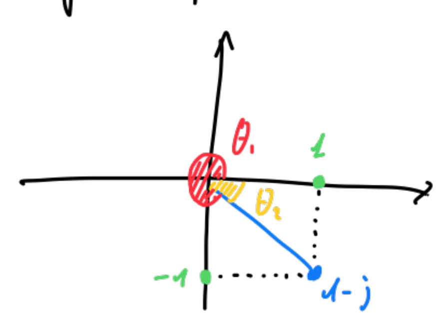
$z = \frac{1+j}{1-j}$ = applico raz. per coniugato del denom.
$= \frac{1+j}{1-j}\,\frac{1+j}{1+j} = \frac{(1+j)^2}{2}$

$\boxed{* \; z \cdot \bar{z} = |z|^2}$

$= \frac{\cancel{-1}+\cancel{1}+2j}{2} = j \rightarrow z = j$

$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$
graficamente, essendo solo j, è sull'asse Im:
$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

per il primo esempio, graficam:



sia θ_1 che θ_2 sono possibili:
$\theta_1 = \frac{7}{8}\pi$
$\theta_2 = -\frac{1}{8}\pi$

Forma Esponenziale

ulteriore rappresentazione:

$$z = \rho(\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho e^{j\theta}$$

$= e^{j\theta}$ per definiz.??

Esempio: f. alg. di $2e^{j\frac{\pi}{3}}$

$2e^{j\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$= 2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 1 + j\sqrt{3}$

e.g.:
ALGEBRICA: $3-j$
TRIGONOMETRICA: $5\left(\cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi\right)$
ESPONENZIALE: $5e^{j\frac{2}{3}\pi}$

* non è una coppia, è un fattore

Esempio: trova f. trig. e f. espon. di:

$z = \frac{\sqrt{3}-j}{\sqrt{3}+j}$

$= \frac{\sqrt{3}-j}{\sqrt{3}+j}\,\frac{\sqrt{3}-j}{\sqrt{3}-j} = \frac{(\sqrt{3}-j)^2}{3+1} = \frac{3-1-2\sqrt{3}j}{4}$

$= \frac{1-j\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

→ f. trig: ρ e θ

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}/1 = 1/2 \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}/1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ è valido}$$

$z = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1e^{j\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Esempio: mod, arg di:
- $\frac{(1-j)^4}{(1+j)^3}$
- $(\sqrt{2}+j)^{10}$
- $(1-j)^5(\sqrt{3}-j)$

per quozienti, prodotti o potenze: formule di De Moivre