Analisi 20231121

ricevimento è favorito!

← $Df \leftrightarrow Df^{-1}$

Derivata della fn inversa

per x tra $\pm\frac{\pi}{2}$? → stre. crescente

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ cont & invertibile. $[\pm\infty]$

Sia $x_0 \in (a,b)$ supponiamo f derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

allora f^{-1} derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$$\to (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

applicazione

$f(x) = \tan x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x \quad$ "

Teorema preced. $\Rightarrow f^{-1}$ derivabile in $f(x)$ $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

↳ se f derivabile in x_0, f^{-1} derivabile in $y_0 = f(x_0)$)

Più esplicitam. f^{-1} è derivabile in y $\forall y \in \mathbb{R} \wedge y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \to \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

se $y = f(x) = \tan x$

↳ $= (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$

$f(x) = \sin x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

f è continua e invertibile

f derivabile $\forall$ punto dom

$f'(x) \neq 0$ perché si annulla?

↳ $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Allora arcsin y derivabile in $y = \sin x$, $y \in (-1,1)$

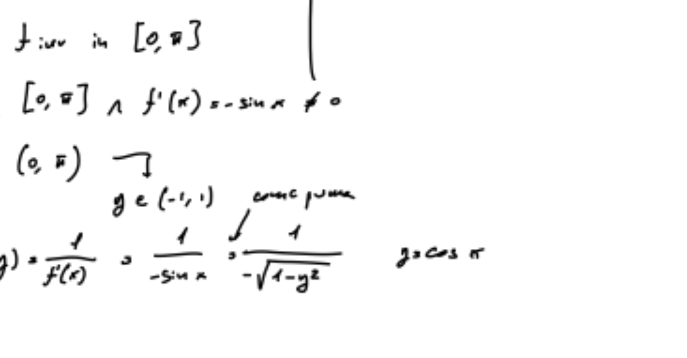
e $(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}$ trovare soluzione in y!

$\to \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to$ sol $+$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1,1)$$

sin vs. arcsin



stesso motivo

$f(x) = \cos x \quad x \in [0, \pi]$

f cont f inv in $[0,\pi]$

f derivab. $[0,\pi] \wedge f'(x) = -\sin x \neq 0$

$\to x \in (0, \pi)$

$y \in (-1,1)$ come prima

$$\to (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}} \quad y = \cos x$$

Es.:

f^{-1} → pensare all'immagine → è il dom delle f^{-1}!

Sia $f(x) = x + e^x$

Sia g l'inversa di f

calcolare $g'(1)$

$g = f^{-1}$ $\exists$

- f è invertibile → str. cr. perché somma di due str. cr.
- f definita in $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\to g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f derivab. in $\mathbb{R} \wedge f'(x) = 1 + e^x$

① si riesce a ricavare l'inversa:

$f(x) = y \to x = g(y)$?

non riusciamo (e^x)

trovare $g(x)$ esplicito, ma:

② troviamo solo $g(1)$, non tutta $g(x)$

$$g(1) = (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad y_0 = f(x_0) \quad y_0 = 1,\ x_0 = ?$$

$\to 1 = x_0 + e^{x_0}$

non c'è regola generale

→ non inv. in qualche punto.

$x_0 = 0$

per l'invertibilità di f, esiste un unico x_0 che risolve la precedente

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

$$g'(1) = (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

Ci saranno esercizi sulle inverse! Probabile

→ cercare nelle pr. esami passate!

Es.:

Scrivere eq. retta tan. al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0:

a) $f(x) = a^x$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = e^{-|x|}$; $x_0 = -1$

c) $f(x) = \cos(\ln x)$; $x_0 = e^{\pi/2}$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a) $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = f(x)$

$f'(x) = e^{x\ln a} \ln a = a^x \ln a$

$y = a^{x_0} + a^{x_0} \ln a\,(x - x_0)$

$= a^2 + a^2 \ln a\,(x-2)$ ✓

b) $e^{-|x|}$ → ha punto di non continuità $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

e^{-x} è derivab. in 0?

lim. not. $\sim \mp x$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{e^{\mp x} - 1}{x} = \mp 1$$

rapp. incr.

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$

$f'(-1) = e^{-1}$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$e^{-1} + e^{-1}(x+1)$

c) $\cos \ln x \quad x_0 = e^{\frac{\pi}{2}}$

$$f'(x) = (-\sin \ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin \ln x}{x}$$

$$f'\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\sin \ln e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$y = \cos \ln e^{\frac{\pi}{2}} + \left(-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\left(x + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= 0 - e^{-\frac{\pi}{2}}x - \left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^2$$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}}\left(x - e^{\frac{\pi}{2}}\right) \quad ✓$$

Es.: calcola $f'(0)$ per def.

quindi con rapp. incr.

calcola poi $f'(x)$ per $x \neq 0$ e stabilisci continuità in 0 della derivata I

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- $f(0)$ prolungabile continuo? $\exists$?

↳ per poi usarlo nel rapp. incr.

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \begin{cases} + : = 0 \\ - : = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0$$

$f'(0)$ per def.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} + : \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = 0 \\ - : \lim_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = 0$$

f derivabile in 0

prod. di fun. $f \to '$

$$↳ f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

f continua in 0 $\iff \lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$

lim dx/sx

$\iff$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = \nexists$$

$$\lim_{x \to 0^+} \cos\frac{1}{x} = \lim_{t \to +\infty} \cos t \quad \nexists \qquad t = \frac{1}{x}$$

per il T. ponte nelle succ. $\nexists$ lim sin/cos $x \to +\infty$

→ f' non è continua in 0

Es.:

Come prima: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$

derivabile $\forall p \in I$

allora f' $\exists$ a sua volta come $f': I \to \mathbb{R}$

Def.:

Diciamo che $f \in$ classe $C^1(I)$ se ha derivata continua

se f è derivabile in I e f' è continua in I

e.g.:

$x^2 \in C^1(\mathbb{R})$

e^x

$\sin x$

...

Es.: derivata di Sh x, Ch x

$$f(x) = \text{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-} = \text{Ch}\,x$$

$$f(x) = \text{Ch}\,x = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \text{Sh}\,x$$

Es.:

Studio derivabilità di

$f(x) = \ln^2(1 + \sqrt[3]{x})$ nel suo dominio

- dom f: $1 + \sqrt[3]{x} > 0 \iff x > -1$

$= (-1, +\infty)$

- vediamo se f si prolunga con cont. dx in -1:

$$\lim_{x \to -1^+} \ln^2(\underbrace{1 + \sqrt[3]{x}}_{0}) = (-\infty)^2 = +\infty \quad \nexists \text{ pr. dx.}$$

- in $(-1, +\infty)$ un punto è da controllare, $x = 0$

per $x \to 0$ $f(x) \sim x^{2/3}$

$f(x) = \ln^2(1 + \sqrt[3]{x})$

siccome $x^{2/3}$ non è derivabile in 0, probabilm. neanche f in 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt[3]{x})}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{-1/3} \begin{cases} f'_+(0) = +\infty \\ f'_-(0) = -\infty \end{cases}$$

→ 0 è una cuspide

continua ma non derivabile!

Se $x_0 \neq 0$ e $x_0 > -1$ allora f è derivabile in x_0

→ composizione di funzioni derivabili

Es:

Come prima $f(x) = |x^2 + 3x - 4| = |x| \circ (x^2 + 3x - 4)$

→ non d. in $x_0^2 + 3x_0 - 4 = 0$

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{f(x)}{x - 1}$$

punti angolosi verificare con il limite del rapp. incr.!!