Analisi 20231020

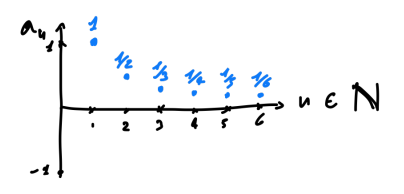
Successione:

funz. da $\mathbb{N}$ o suo sottoinsieme che esclude una quantità di n. finita $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq \bar{n}\}$

verso $\mathbb{R}$

indicata con (a_n) · $\{a_n\}$ dove $a_n = f(n)$

graficamente si rappr. con punti in coord. $(n, a_n = f(n))$



$a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$

a_n elemento

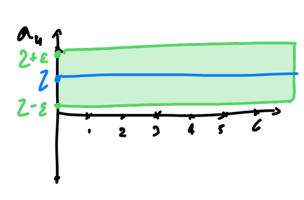
$\{a_n\}$ successione

Succ. convergente

Def.: una succ. (a_n) è convergente se $\exists \ell \in \mathbb{R}$ con proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_n < \ell + \varepsilon \ \wedge \ a_n > \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

graficamente:



fissata str. orizz. arbitrariamente stretta attorno ad $y = \ell$:

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid n \in (a_n)$ $n \geq \bar{n}$ sono nella striscia

$\in$ striscia

Ossv.:
1. $\bar{n}$ dipende da ε
2. ℓ è unico

supponiamo $\exists \ell_1, \ell_2$ entrambi soddisfacenti la propr.

- dato $\varepsilon > 0$ arbitrario: $\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} \mid \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}_1$ → $|a_n - \ell_1| < \varepsilon$

  $\exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N} \mid \ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}_2$ → $|a_n - \ell_2| < \varepsilon$

  come soddisfare entrambe?

  ← SISTEMA

- $\cancel{\begin{cases} |a_n - \ell_1| < \varepsilon \\ |a_n - \ell_2| < \varepsilon \end{cases}}$ $\begin{cases} n \geq \bar{n}_1 \\ n \geq \bar{n}_2 \end{cases}$ → $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$

  operatore max

  scegliendo $\bar{n}$ valido come il max, entrambe sono valide:

$|A+B| \leq |A| + |B|$

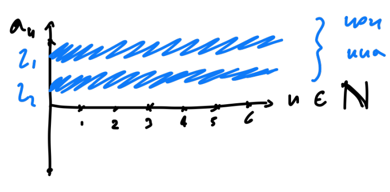
- $|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - a_n) + (-\ell_2 + a_n)| \leq |\ell_1 - a_n| + |-\ell_2 + a_n| = |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\varepsilon$

  ??

abbiamo così provato che dato $\varepsilon > 0$ arb. $\underbrace{|\ell_1 - \ell_2| < \boxed{2\varepsilon}}_{\text{tendono allo st. numero } \ell}$ anch'esso piccolo! arb.

quindi $\ell_1 = \ell_2$

$\Rightarrow$ $|a - b| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = b$



non posso avere ℓ diversi!

non avrebbe punti mancanti!

Def: se (a_n) è convergente, l'unico ℓ si chiama limite di (a_n)

$\rightarrow \ell = \lim_{n \to +\infty} a_n$

Esempio: verifica $\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n$ per $(a_n) = \frac{n+1}{n-1} = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid 1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon$$

- prendo ε molto piccolo? servirebbero ∞ prove

  ε rimane indicato

- risolvo rispetto ad n la doppia disug.za

  $1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon$

  lasciando ε parametro

⚠ SOLO INTERI NATURALI! ~~ANCHE 0~~

$\begin{cases} \frac{n+1}{n-1} > 1 - \varepsilon \\ \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon \end{cases}$ vera $\forall n \geq 2$

con $n \geq 2$

$n + 1 < (1+\varepsilon)(n-1)$

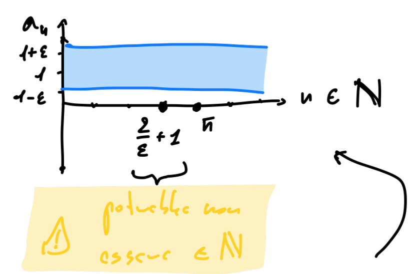
$n + 1 - (1+\varepsilon)n < -(1+\varepsilon)$

$n + 1 - n - \varepsilon n < -1 - \varepsilon$

$\varepsilon n - 1 > 1 + \varepsilon$

$\varepsilon n > 2 + \varepsilon$

$\boxed{n > \frac{2}{\varepsilon} + 1}$



⚠ potrebbe non essere $\in \mathbb{N}$

→ scegliamo $\bar{n}$ = il primo intero positivo $> \frac{2}{\varepsilon} + 1$

$\bar{n} = 1$

Esercizio: verificare $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

quindi perché?

$0 - \varepsilon < \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\begin{cases} \frac{1}{n} < \varepsilon \\ \frac{1}{n} > -\varepsilon \end{cases}$ $\begin{cases} \varepsilon n > 1 \\ -\varepsilon n < 1 \end{cases}$ $n > \frac{1}{\varepsilon}$ → prendiamo il primo $\bar{n} \in \mathbb{N}$

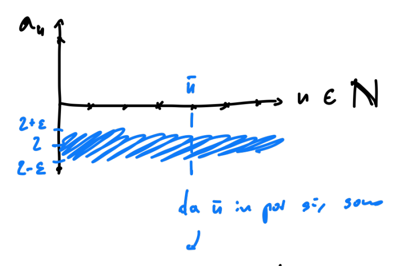
$\forall n \in \mathbb{N}$

Succ. Limitate

Def.: (a_n) è $\underbrace{\text{lim. sup./inf.}}_{\text{entrambe: limitata}}$ se $\exists m \in \mathbb{R} \mid a_n \leq / \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

?: ogni succ. convergente è limitata

→



da $\bar{n}$ in poi sono tutti all'interno

~~[illegible]~~ quantità finita di valori di n

→ controlliamo questi valori e aumentiamo il minimo e massimo fino a quello e a questa selezione!

Scegliendo $\varepsilon = 1$ dalla def. di limite, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N} \mid \ell - 1 < a_n < \ell + 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$

Sia $E = \{a_n \mid n < \bar{n}\}$ → E è finito: contiene num. finito di elementi

→ allora possiamo: ammette min/max

perché potrebbe capitare che siamo già sotto la soglia di ℓ!

$m = \min\{\ell - 1, \min E\}$

$M = \max\{\ell + 1, \max E\}$

$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

cioè (a_n) è limitata

⚠ NON È DETTO CHE PER UNA LIMITATA SIA ANCHE CONVERGENTE! SOLO CONV. → LIM.

Dim.: e.g.: $(-1)^n$

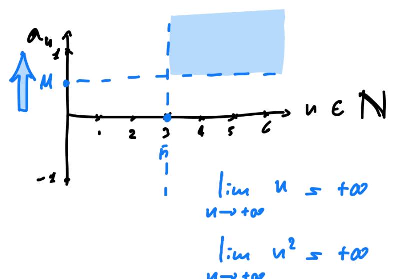
Succ. Divergenti

Def.: succ. (a_n) diverge positivamente se

$$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_n > M \quad \forall_n \geq \bar{n}$$

$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \boxed{+\infty}$

possiamo prendere M sempre più grande: opposto di ε



$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

...

stessa cosa negativamente

$$\forall M > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_n < -M \quad \forall_n \geq \bar{n}$$

$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

Notazione: $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ "ciwe ampliato"

$\overline{\mathbb{R}}$

Succ. Indeterminate: non ammettono alcun limite

Succ. Monotone:

per (a_n), è:

- crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$ tutti, proprio tutti: se è infinita la seq.za: limite?
- str. cr. se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  → stessa cosa decrescente

$(a_n) = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

→ $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$?

sost.

$\frac{n+1}{n-1} \leq \frac{n+2}{n}$ $\cdot n(n-1)$

$\frac{n+1}{n-1} \leq \frac{(n+1)+1}{(n+1)-1}$

$n(n+1) \leq (n+2)(n-1)$

$n^2 + n \leq n^2 - n + 2n - 2$

$0 \leq -2$ F: non crescente

→ usando $\geq$: decrescente

str. decr.

Teorema sulle succ. monotone:

Una succ.ne monotona non è mai indeterminata.

Più precisamente:

i) (a_n) cresc. $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ $\boxed{\text{finito}}$ o $+\infty$ se è lim. sup.

ii) (a_n) decr. $\Rightarrow$ " $= \inf\{a_n\}$ $\boxed{\text{finito}}$ o $-\infty$ se è lim. inf.

Limiti notevoli: $x \in \mathbb{R}$ fissato

"tende a" = "ha limite"

1. $\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & |x| < 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$

2. $\lim_{n \to +\infty} n^x = \begin{cases} +\infty & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$