Analisi 20231122

Appl. del calc. diff.le

• ESTREMI DI FUNZ.

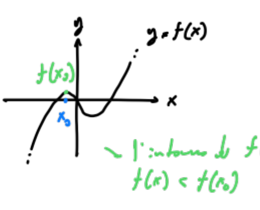
Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in I int.
Abbiamo definito (WEIERSTRASSE)

$\max_I f = \max \operatorname{Im} f = \max \{ f(x) \mid x \in I \}$

A volte si vuole vedere solo LOCALMENTE!

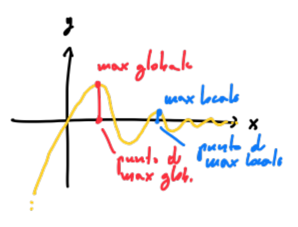
Estremi locali

Def.: $x_0 \in I$ è punto di max locale/relativo
se $\exists \delta > 0 \mid f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$f(x_0) \to$ max locale per f



→ l'intorno di $f(x_0)$ ha tutte $f(x) < f(x_0)$

$\max_I f$: max globale/assoluto



① max gl. è anche locale!
② n^2 infiniti locali, un solo globale → ma ∞ punti di massimo

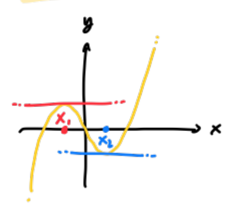
→ sin x
asse x

T. Weierstrasse stabilisce sotto opportune Hp. l'esistenza di min/max gl.
tuttavia no info su come trovarli
↳ how?

→ derivata:
Teorema di Fermat:

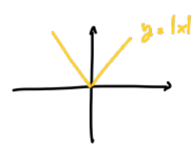
no $(x_0,$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ fu def. in I int
Supp. che f abbia punto di max/min locale x_0 interno ad I
Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$



$f'(x_1) = 0$
$f'(x_2) = 0$

Ossv.: ① il T. vale solo in punti interni all'int.
② non si esclude $\exists$ di min/max locali in cui f non è derivabile
→ $y = |x|$



$x = 0$ non è derivabile, ma è punto di minimo!

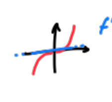
③ dove si annulla f', il punto si dice critico/stazionario

T. fermat si riformula con:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ deriv. in x_0 int. I
Se x_0 è p. min/max locale per f, x_0 è punto stazionario

p. min/max loc $\Rightarrow$ x_0 è punto stazionario
$\Updownarrow$
$f'(x_0) = 0$

↓ perché ad esempio $y = x^3$



$f'(0) = 0 \to$ p. stazionario
MA NON HA MIN/MAX LOCALI!

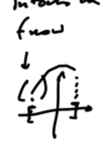
$\subset$ contenuto

$\subseteq$?

T. fermat. dim:

Supp. x_0 punto di max loc.
Allora $\exists \delta > 0 \mid f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
Possiamo δ abb. piccolo per:
$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$
perché x_0 interno, quindi garantito →

intorno in fuori



Sicc. f è deriv. in x_0 $\Rightarrow$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

→ $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ → $\frac{-}{+}$ per T. perm. segno. ≤ 0
con sviluppo studio solo il segno!

$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x_0 + \delta$

l'altra ≥ 0 → $= 0$ → $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

Def.: si chiama estremo di f un max/min di f gl/loc
punto di estremo x_0

Es.:

Sia $f(x) = xe^{-x^2}, \quad x \in [0, 2]$

Per il T. weierstrass f ammette min/max globali in $[0, 2]$
→ $\exists x_1, x_2 \in [0, 2] \mid \forall x \in [0, 2] \; \underbrace{f(x_1)}_{min} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{max}$

x_1? x_2? continua

Può succedere che x_1, x_2 siano agli estremi → $x_1, x_2 \in \{0, 2$
oppure possono essere interni
→ T. fermat: se f derivabile, x_1/x_2 oppure a entrambi punti stazionari
↳ $f'(x_{1/2}) = 0$

Determino p. stazionari in $(0, 2)$

$f'(x) = (xe^{-x^2}) = 1e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

l'unico interno è $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 2)$

→ possibili: $x_1, x_2 \in \{ \underbrace{0, 2}_{estremi}, \frac{1}{\sqrt{2}} \}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ↓ $f'(x) = 0$

→ sostituiamo in f

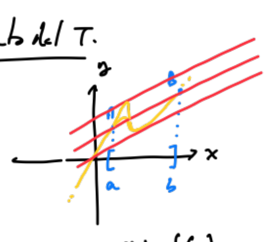
$f(0) = 0$ → minimo: $\min_{[0,2]} f$
$f(2) = 2e^{-4} = \frac{2}{e^4}$
$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ → massimo: $\max_{[0,2]} f$

T. di Lagrange: valor medio

almeno da dx o sx

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ cont in $[a, b]$
e derivabile in (a, b)
Allora $\exists c \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

significato del T.



$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

↳ coeff. ang. della retta pass. AB
$= f'(c)$

per T. è garantito $\exists c$ tra a, b

$\exists c \in (a, b) \mid$ retta tan. f in $x = c$ è // retta passante in A, B
nel g. sopra, ne abbiamo trovato due! c multipli OK!

Corollario Test di mon.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ fu deriv. in I int.
allora valgono le seguenti equiv.ze:

a) f cresc. in I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
b) decresc. $\Leftrightarrow$ ≤ 0
c) str. cr. $\Rightarrow$ > 0
d) str. decr. $\Rightarrow$ < 0

in alcuni casi il contrario non vale!

$\not\Leftarrow$

Oss.: Se f è str. cr. in I (e derivabile) non è detto che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

e.g.: $f(x) = x^3$ è str. cr. in $\mathbb{R}$
ma in $x = 0$ $f'(x) = 0$!

dim a)

dimostro le due implicazioni $\Rightarrow, \Leftarrow$

$\Rightarrow$: sia $x_0 \in I$
$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$x > x_0 \to x - x_0 > 0$
$f(x) \geq f(x_0)$ perché str. cr. $\Big|$ $\Rightarrow$ rapp incr. ≥ 0

$x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$
$f(x) \leq f(x_0)$ $\Big|$ $\Rightarrow$ r.i ≥ 0

T. perm. segno
$f'(x_0) \geq 0$

$\Leftarrow$: per T. Lagr. $\exists c \in (x_1, x_2)$
$\mid \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$

↓

$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0 \text{ per ip.}} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \to \geq 0$

ossia: $f(x_2) \geq f(x_1)$

Es.: $f(x) = xe^{-x^2}$

f ammette estremi locali/globali in $\mathbb{R}$?

No T. weierstrass → no intorno limitato!

Si: T. fermat + coroll. monotonia

→ f è derivabile in $\mathbb{R}$ per composizione e prodotto di elem.
e che $\forall$ punto in $\mathbb{R}$ è interno

Se x_0 è punto di max/min locale per f
allora $f'(x_0) = 0$ → T. fermat
allora $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ex di prima

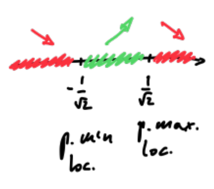
→ però non ci dice che sono punti di min/max

se x_0 p. min/max $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$
non è doppia

→ studiamo monotonia di f con test di monotonia!

$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(1 - 2x^2) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$



→ da studiare limiti, per verificare $\exists$ globale

$\lim_{x \to \pm\infty} xe^{-x^2} < {0 \atop 0}$ per gerarchia degli infiniti