Analisi 20231024

Dimostrazione del Teorema: succ. monotone

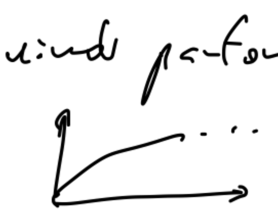
proprietà in lez. prec.

proviamo che se (a_n) è succ. cr. e lim. sup., allora essa converge a $\ell := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

HP

- crescente $\to a_n \le a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$
- lim. sup. $\to$ è finito, $s \in \mathbb{R}$

} quindi perfetto!



TH

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

- caratt. estr. sup.: il minimo dei maggioranti

$\ell = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} \iff a_n \le \ell \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
① non supera mai ℓ

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\bar{n}} > \ell - \varepsilon$
② si avvicina sempre di più

- succ. convergente:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \;\; \forall n \ge \bar{n}$

importante!
limite finito (def)!

prop. essenziale

Verifichiamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. Sia $\varepsilon > 0$. La disug. $a_n < \ell + \varepsilon$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

in quanto $a_n \le \ell < \ell + \varepsilon \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

se la prop. vista sopra è $a_n \le \ell$, allora $\ell + \varepsilon$ è vera!

inoltre esiste $\bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\bar{n}} > \ell - \varepsilon$ dalla seconda proprietà

quindi ① e ② indicano $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ come vera!

siccome (a_n) è crescente: $a_n \ge a_{\bar{n}} \;\; \forall n \ge \bar{n}$

↳ usando questa insieme a ② (sostituiamo $a_{\bar{n}}$ con a_n) riconosciamo $a_n > \ell - \varepsilon \;\; \forall n \ge \bar{n}$

proviamo che se (a_n) è cr. e ILLIMITATA SUP.

allora:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$\to$ provare che $\forall M > 0 \;\; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_n > M \;\; \forall n \ge \bar{n}$ — uguale a

succ. div. pos.

- sia $M > 0$, succ. (a_n) non ha lim. sup., M non è maggiorante per $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
pertanto ~~esiste~~ $\exists \; \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_{\bar{n}} > M$
- essendo (a_n) cresce $\to a_n \ge a_{\bar{n}} \;\; \forall n \ge \bar{n}$

per transitiva

} TH: $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_n > M \;\; \forall n \ge \bar{n}$

Es.:
1) (a_n) decr. e lim. inf. $\Rightarrow (a_n)$ conv. a $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2) (a_n) decr. e ill. inf $\Rightarrow (a_n)$ div. a $-\infty$

Def.: succ. (a_n) ha proprietà P definitivamente se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid a_n$ verifica $P \;\; \forall n \ge \bar{n}$

esempio: $a_n = n^2 - 5n$

a_n è definitivamente positiva $\to$ ha solo $\mathbb{R}$ positivi

$a_n > 0 \iff n^2 - 5n > 0$
$\to n > -\frac{-5}{1}$
$\to n > 5$
$\to \boxed{n \ge 6}$ POSITIVA DEFINITIVAMENTE $\to$ significa che a un certo punto lo diventa

Alla luce di questa def.:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \underbrace{\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon}_{\text{è } P}$ definitivamente

↳ equivale a $\forall \bar{n} \ge n$ quindi come "a un certo punto"

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \mid a_n > M$ definit.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \mid a_n < -M$ definit.

Teorema della permanenza del segno

sia (a_n) succ. conv. ad ℓ: $\to$ se è conv. ad ℓ, come $a_n = \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2} < 1$

i) se $\ell > 0$ allora $a_n > 0$ definit.
ii) se $a_n \ge 0$ definit. allora $\ell \ge 0$

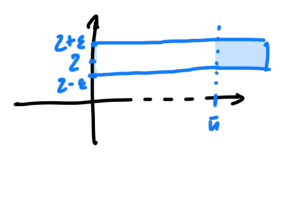
} si passano il segno

non è detto se è $>$ $\to$ in quel caso ancora $\ell \ge 0$

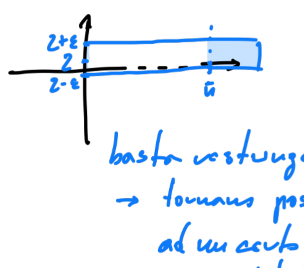
Dim.: i)

sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \;\wedge\; \ell > 0$

dalla def. di limite: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente



ma anche



basta restringere ε
$\to$ tornano positivi!
ad un certo punto $\bar{n}$, non subito

Dim. ii) "$a_n \ge 0$ definit. $\Rightarrow \ell \ge 0$"
se $\ell < 0$ allora $a_n < 0$ definit.
ma se abbiamo detto $a_n \ge 0$, allora
è impossibile $\to \ell \ge 0$ (opposto di $\ell < 0$) □