Geometria 20231011

SVR di $\mathbb{R}[x]$ → $\mathbb{R}[x]$ non con campo per mancanza proprietà inverso della moltipl.

grazie alla corrisp. in E_0^3, possiamo avere rappr. grafiche, ma gli SVR sono possibili in molti casi! (come noi: vet. col.)

Proprietà degli SVR

solo S.V.

$\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ $\quad \underbrace{\underline{u}+\underline{v} = \underline{u}+\underline{w}}_{se} \Rightarrow \underbrace{\underline{v} = \underline{w}}_{allora}$ legge di cancellazione

$\forall \underline{v} \in V \quad 0\underline{v} = \underline{0}$ scalare nullo porta a vettore nullo

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\underline{0} = \underline{0}$ vettore nullo porta a scalare nullo

dim. v. nullo?

sappiamo che $(V, +)$ è un gr. abeliano

$\underline{v} + 0\underline{v} = 1\underline{v} + 0\underline{v}$ "propr. dimenticata"

possiamo chiamarlo campo ? solo se $1\underline{v}$ rimane $= \underline{v}$

$= (1+0)\underline{v} = \underbrace{1\underline{v} = \underline{v}}$

per gr. ab. esiste elem. neutro di +

↳ $\cancel{\underline{v}} + 0\underline{v} = \cancel{\underline{v}} + 0$

$0\underline{v} = 0 \quad \rightarrow$ è il vet. nullo

$\forall \underline{v} \in V \quad \underline{v} + \alpha\underline{0}$ se $\alpha \neq 0$ — quello di prima era con $\alpha = 0$

$\rightarrow \alpha \neq 0$

$\exists \alpha^{-1}$ OK ($\mathbb{R}$ è un campo) : $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = 1$

per "pr. dimenticata"

$\underline{v} + \alpha\underline{0} = 1\underline{v} + \alpha\underline{0} = \alpha\alpha^{-1}\underline{v} + \alpha\underline{0} = \alpha(\alpha^{-1}\underline{v} + \underline{0})$ distrib.

$= \alpha(\alpha^{-1}\underline{v}) = (\alpha\alpha^{-1})\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}$ omogeneità

otteniamo $\underline{v}$ → prova del v. nullo

$\cancel{\underline{v}} + \alpha\underline{0} = \cancel{\underline{v}} + \underline{0}$

$\alpha\underline{0} = \underline{0}$

Esercizio: dimostra

- $\forall \underline{v} \in V \quad (-1)\underline{v} = -\underline{v}$ sempre usando solo le proprietà
- $\alpha\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \underline{v} = \underline{0}$

Def.: sia V S.V.R., $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \in V$

si chiama Combinazione Lineare (C.L.) dei vettori $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k$ secondo / mediante: coeff $\alpha_1 \dots \alpha_k$ il vettore finale:

$\rightarrow \underline{u} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 + \dots + \alpha_k\underline{v}_k$

Esempio

$V = \mathbb{R}^2$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = -1$

$\underline{u} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

C.L. prodotta da), ma non è l'unica opzione per ottenerlo, ci sono altri vettori sommabili per ottenerlo

→ stessi $\underline{v}$ ma diversi scalari — fuori dal nostro problema

$\beta_1 = -1 \quad \beta_2 = 4 \quad \beta_3 = 0$

$\underline{u} = \beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \beta_3\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

si può continuare ad aumentare il grado di $\mathbb{R}^n$

per risolverlo, si cerca una C.L. generica:

$\left.\begin{array}{l}\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\\ \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = -1\end{array}\right\} = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$

altre combo?

comb. lin. generica:

$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\alpha_3\\-\alpha_3\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$

→ sist. lineare in incognite α_x

$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_3 = -1\\ \alpha_2 - \alpha_3 = 4\\ \alpha_3 = -1\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_3 = -1\\ \alpha_1 + 2(-1) = -1\\ \alpha_2 - (-1) = 4\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_3 = 1\\ \alpha_1 = 1\\ \alpha_2 = 3\end{cases}$

isolato utilizzabile per sostituz.

trovata un'altra combo!

Ma a volte non è possibile!

↳ $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\exists$ C.L. $\dots = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$?

no! il 3° è sempre zero!

$S = \mathbb{R}[x]$

$\underline{u} = p(x) = x^2 - 3x + 5$

$\left.\begin{array}{ll}v_1 = q_1(x) = x^2 & \alpha_1 = 1\\ v_2 = q_2(x) = x & \alpha_2 = -3\\ v_3 = q_3(x) = 1 & \alpha_3 = 5\end{array}\right\}$ $1x^2 - 3x + 5$ C.L. valida, possiamo trovare il vett. $\underline{u}$ con questi coefficienti

"banale" → in qualunque spazio vettoriale, non particolare

Def.:

sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ lista di vettori di V SVR

→ chiamo "span" l'insieme di tutte le C.L. di $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k$

ossia:

$\text{span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k) = \{\underline{u} \in V \mid \underline{u} = \alpha_1\underline{v}_1 + \dots + \alpha_k\underline{v}_k,\ \alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{R}\}$

in particolare:

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\text{span}(\underline{v}) = \{\underline{u} = \alpha\underline{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\text{span}(\underline{u}, \underline{v}) = \{\underline{w} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\text{span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \{\underline{t} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w} \in V,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

ad infiniti numeri corrisp. inf. vettori per numeri del campo $\mathbb{R}$

Ossv.: $\text{Span}(\underline{0}) = \{\underline{u} = \alpha\underline{0},\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\underline{0}\}$

In E_0^3

- $\underline{0} \in O$ (origine)

  → $\text{Span}(\underline{0}) = \{\underline{0}\} = \{O\}$

  corr. biunivoca tra:

  $E_0^3 \Leftrightarrow \mathcal{E}$

  ↳ punti in piano euclideo

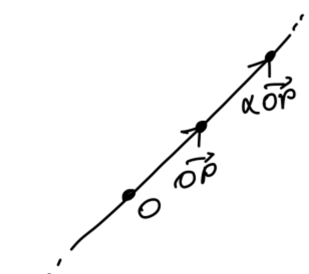
  → vettori in p. euclideo

- $\underline{v} = \vec{OP} \in E_0^3 \quad \underline{v} \neq \underline{0}$

  $\text{Span}(\underline{v})$? $\quad \text{Span}(\underline{v}) = \{\underline{u} = \alpha\underline{v} = \alpha\vec{OP},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

  vettori che cadono attraverso il punto della retta

  $\text{Span}(\vec{OP})$ è sottoins. "⊂" della retta → $\alpha\vec{OP} = \vec{OQ}$ → punto $Q \in$ retta



viceversa:

con $Q \in$ retta

$\vec{OQ} \in \text{Span}(\underline{v})$?

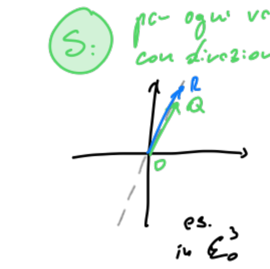
→ esiste α tale che $\alpha\vec{OP} = \alpha\underline{v} = \vec{OQ}$?

$\vec{OQ}$: altro modo di risolvere il sistema come avevamo visto prima forse?

Se $Q \equiv O$ (origine) $\rightarrow \alpha = 0$

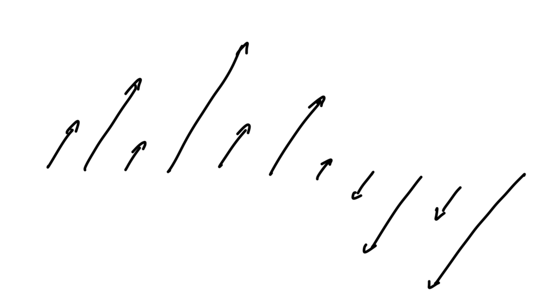
Se $Q \neq O \rightarrow \Delta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$, $\alpha = \Delta$ se Q, P sulla stessa semiretta, $\alpha = -\Delta$ altrimenti

S: per ogni vettore $\neq \underline{0}$, il suo span è la retta con direzione il suo vettore



$\vec{OQ}$ è uno dei vettori possibili nella C.L., ma ce ne sono altri! $\vec{OR}$ è un'altra opzione, quindi sempre sulla retta dello span (insieme delle soluz. dell'insieme)

Span di un solo vettore:



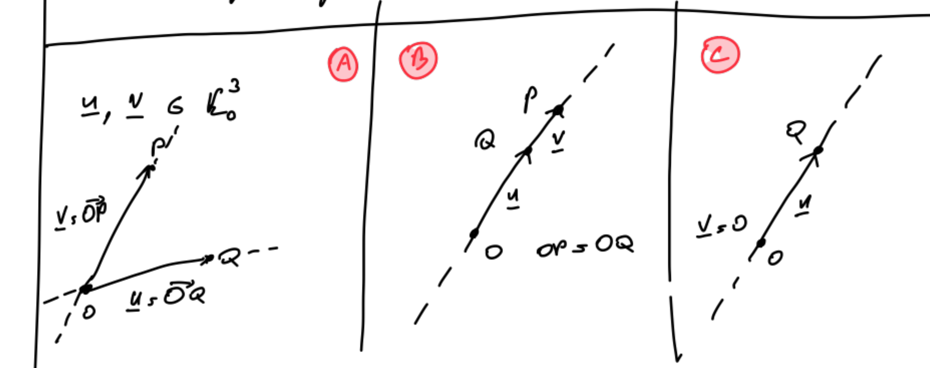
tutti i vettori paralleli sulla retta (qui disegnati esplosi)

Ossv.: Qualunque sia V SVR, qualunque siano $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \in V$

$\underline{0}_V \in \text{Span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k)$

mostra che in E_0^3, se $\vec{OP} = \underline{v} \neq \underline{0}$

$\text{Span}(\underline{v}) = \text{Span}(\vec{OP})$ coincide con retta OP, retta pass. per O avente direz. $\underline{v}$.



(punti associati ai vettori: $E_0^3 \Leftrightarrow \mathcal{E}$)

con $\underline{u} = \underline{v} = \underline{0}$: $\text{Span}(\underline{u}, \underline{v}) = \{\alpha\underline{0} + \beta\underline{0}\} = \{\underline{0}\}$

C $\text{Span}(\underline{u}, \underline{v}) = \{\alpha\underline{u}\}$

B $\text{Span}(\underline{u}, \underline{v}) = \text{Span}(\underline{u}) = \text{Span}(\underline{v})$ — $\underline{u} \neq \underline{v}$, ma hanno la stessa retta creata dallo span: insieme delle soluzioni del sistema

A linearmente indipendenti

se $\underline{u} \neq 0$, $\underline{v} \in \text{span}(\underline{u})$

altrimenti sono lin. dipendenti

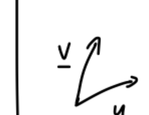
↳ quindi se almeno uno dei due è $= \underline{0}$

Ossv.: V SVR, $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k \in V$

$\underline{v}_1 \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$

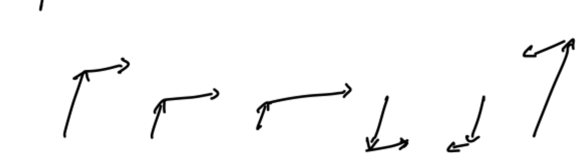
infatti $\text{Span}(\underline{v}_1) \subset \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$

basta che tutti i loro coeff siano $= 0$



$S = \text{Span}(\underline{u}, \underline{v})$

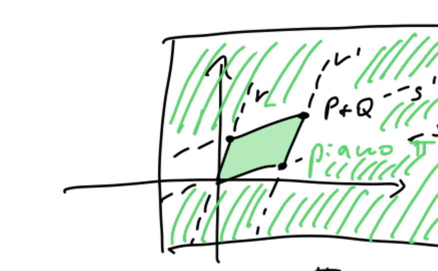
quindi:



sempre appartenenti alle loro rette (qui esplosi)

quindi sta sul piano, non più solo su una retta!

PER 3 PUNTI NON ALLINEATI PASSA UNO E UN SOLO PIANO!



tutti i vett. piano sono combinazioni di vettori

↓

quindi anche soluzioni C.L. forse?