Prop: Q, P mat. o.g. ord. n

$\Rightarrow QQ^T = Q^TQ = I_n$
$PP^T = P^TP = I_n$

$f\!\!\Rightarrow (PQ)^T = Q^TP^T$

$\Downarrow$

$(PQ)(PQ)^T = PQQ^TP^T = PI_nP^T = PP^T = I_n$
$(PQ)^T(PQ) = Q^TP^TPQ = QI_nQ^T = QQ^T = I_n$

in altre parole: PQ è o.g.

Inoltre:

$(Q^T)^T = Q$

$QQ^T = Q^TQ = I_n$

$(Q^T)^TQ^T = Q^T(Q^T)^T = I_n$

cioè Q^T è o.g.

Cor.: $\{(Q^T)^1 \cdots (Q^T)^n\}$ sono basi o.n. di $\mathbb{R}^n$ colonna → su vett. riga

$\downarrow$

$(Q^1)^T \cdots (Q^n)^T$ anche le righe sono basi di $\mathbb{R}^n$

$O(n) = \{Q \in GL(n, \mathbb{R}) : \underline{Q^{-1} = Q^T}\}$ → verifica l'ortogonalità ... vedi sopra

- moltipl. associativa e interna
- possiede elem. neutro
- $\forall Q \in O(n)\ \exists P \in O(n): QP = PQ = I_n$ ($\exists$ mat. inversa cioè la trasposta)
  $PQ^{-1} = Q^T \in O(n)$

ossia $(O(n), \cdot)$ è gruppo detto "gruppo ortogonale"

$SO(n) = \{Q \in O(n) : |Q| = +1\}$

oss.: SS2 ✓ e valgono le stesse ⤴ ✓

$\Rightarrow SO(n)$ è il "gruppo ortogonale speciale"

mat. ortog. di ord. 2

$Q \in O(2)$

$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a^2 + c^2 = \|Q^1\|^2 ? = 1$
$b^2 + d^2 = 1$
$ab + cd = 0$

$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \cancel{a^2} + b^2 = \cancel{a^2} + c^2 \Rightarrow b = \pm c$
$c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b^2 + c^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow a = \pm d$
$ac + bd = 0$

$f\!\!\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm b & \pm a \end{pmatrix}$

$a^2 + b^2 = 1$

è possibile solo due scelte $< \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

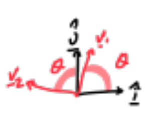
$\exists \theta : \begin{matrix} \sin\theta = b \\ \cos\theta = a \end{matrix}$ $f\!\!\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = [R_{(-\theta)}]_{\mathcal{B}}$

$\downarrow$ $\det = +1$ $\qquad$ $\downarrow$ $\det = -1$

$\Downarrow$

$Q^- = \circlearrowright \qquad Q^+ = \circlearrowleft$

ROTAZIONE DELLA MATRICE!



$v_1 = R_\theta(\underline{i})$
$v_2 = R_\theta(\underline{j})$

← rotazione è appl. lineare quindi rappresentab. da matrice

matrice rappresenta rotazione

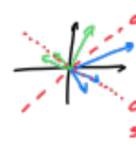
tutte le mat. ortog. di ord. 2 sono $<$ simmetrie, rotazioni delle generale!

$[\underline{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$
$[\underline{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

rotazione degli ortogonali

↓ cambio tutti gli span dei vettori (a parte 0 con π)

Q^- simmetrie assiali



Prop.:

① $Q \in M_{\mathbb{R}}(n)$ ssc. conserva il p.s.

ossia $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$\langle X, Y\rangle = \langle QX, QY\rangle$
$\qquad Q^T(QX)\ Y$
$\qquad I_nX \quad Y$
$\qquad = \langle X, Y\rangle$

↱ con il p.s. possediamo METRICA
- no cambio distanza
- no cambio angolo

} conservo la metrica

$\Downarrow$

TRASFORMAZIONE RIGIDA

② $Q \in M_{\mathbb{R}}(n)$ è o.g. ssc Q è mat. del cambio base fra basi o.n.

ossia se

$\mathcal{B} = \{X_1 \cdots X_n\}$ base o.n. di $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{D} = \{Y_1 \cdots Y_n\}$ " " " "

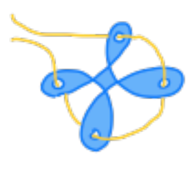
$Q = M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$
mat. del cambio di base

①
Lemma: siano $X, Y \in \mathbb{R}^n\ \forall$, $A \in M_{\mathbb{R}}(n)\ \forall$

$\langle X, AY\rangle = \langle A^TX, Y\rangle$

si porta la trasposta!

se la mat. è o.g. conserva il p.s. ⤴

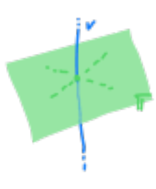


Def.: Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ ssv

Indico con $U^\perp = \{X \in \mathbb{R}^n : \langle X, Y\rangle = 0\ \forall Y \in U\}$ "U ortogonale" → ricordarsi o.g.lità

insieme dei vettori ortog. a tutti i vettori di U

quindi tutti i vett. quelli che hanno $\cap\ \underline{0}_n$ allo ssv. originale!



se $U = \pi$
$\Rightarrow U^\perp = v$

se $U^\perp = v$
$\Rightarrow U = \pi$

trovo sempre un SSV

① ortogonale:
$x_1, x_2 \in U^\perp \quad Y \in U$
$\langle x_1 + x_2, Y\rangle = \langle x_1, Y\rangle + \langle x_2, Y\rangle \Rightarrow x_1 + x_2 \in U^\perp$
SS1 ✓

$U^\perp$ è ssv di $\mathbb{R}^n$:
$\langle \alpha x, Y\rangle$
SS2 ✓

SS0 ✓ $\langle \underline{0}_n, X\rangle = 0 \quad \forall X \in U^\perp$

② allora $U^\perp \oplus U$ ✓ hanno sempre $U \cap U^\perp = \{\underline{0}_n\}$

$X \in U \wedge X \in U^\perp \Rightarrow X \in U \cap U^\perp$
$\|X\|^2 = \langle X, X\rangle = 0 \Rightarrow X = \underline{0}_n$ ✓

③ Con $\mathcal{B}$ base di U → le equazioni lineari omogenee

$X \in U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle X, \underline{b}_1\rangle = 0 \\ \cdots \\ \langle X, \underline{b}_k\rangle = 0 \end{cases}$

deve essere ortogonale a tutti i vettori della base di U per essere in $U^\perp$

quindi sono spazi complementari? (sin Hp.)

Cor.: $\begin{cases} \langle X, Y_1\rangle = 0 \\ \cdots \\ \langle X, Y_k\rangle = 0 \end{cases}$ è un sist. lin. omog.

$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
$Y_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$
$\vdots$

$\Rightarrow$
$\langle X, Y_1\rangle = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \cdots$
$\langle X, Y_2\rangle = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 \cdots$
$\vdots$

$\Rightarrow AX = \underline{0}_k$
ker
$\downarrow$
dim ker A
$= n - \text{rk}A$

④ dim $U^\perp = n - k$ ← essendo una base, il rk è il n° di colonne (esattamente)

$\Rightarrow \dim(U \oplus U^\perp) = k + n - k = n$

ossia $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$

$U^\perp$ è detto il "COMPLEMENTO ORTOGONALE di U in $\mathbb{R}^n$"

complementi sono molteplici, ma solo uno è ORTOG.

Oss.: decomp. unica
$\forall X \in \mathbb{R}^n\ \exists!\ X_U \in U,\ X_{U^\perp} \in U^\perp : X = X_U + X_{U^\perp}$

X_U è detto PROIEZ. ORTOG. di X su U
$X_{U^\perp}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $U^\perp$

$U = \left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 = x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}$

1) base di U
2) base di $U^\perp$
3) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $X_U, X_{U^\perp}$?

↳ $\mathcal{B} = \{\hat{Y}_1 \cdots \hat{Y}_k\}$ base o.n. di U

$X_U = \langle X, \hat{Y}_1\rangle\hat{Y}_1 + \langle X, \hat{Y}_2\rangle\hat{Y}_2 \cdots$

vis:

$U: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$U = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$\text{rk}U = 2$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x_2 = \alpha - \beta$
$x_1 = -x_2 = -\alpha + \beta$
$\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$U^\perp: \begin{cases} \langle X, Y_1\rangle = 0 \\ \langle X, Y_2\rangle = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

U è caratt. dai v. o.g. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oss.: $(U^\perp)^\perp = U$

} $U^\perp = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

non serve risolvere il sistema, basta verif. che le eq. sono indip.

3) $\mathcal{B}_U = \left\{\underset{\underline{u}_1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{u}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right\}$ $\xrightarrow{\text{gram-schmidt}}$

$\underline{w}_1 = \underline{u}_1$
$\underline{w}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{w}_1\rangle \underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ } verifica con l'equazione di U ✓

$\Downarrow$

normalizzo in o.n.

$\|X\| = |x_1| + |x_2| \cdots ?$ $=15$?? $\cdot 3$ è o.n. ✓

$\mathcal{B}_{U}$ o.n. di $U = \left\{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{15} \\ -1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{15} \\ 3/\sqrt{15} \end{pmatrix}\right\}$

$X_U \quad \frac{4}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{17}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 54 \\ 51 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

e poi $X_{U^\perp} = X - X_U$