Geometria 20231123

TL. di Laplace   riga → i, colonna → j   

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{[i,j]}|$$ j fisso colonna, i scorre le righe → "indice di sommatoria corrente"

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{[i,j]}|$$ i fisso riga, j scorre le colonne

$[i,j]$ "cancella la riga i e la colonna j"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$|A| = \sum \dots$ per sviluppo lungo, OPPURE Laplace → si può usare qualunque colonna, rispettando pattern dei segni a scacchiera →

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ & \vdots & & \end{matrix} \dots$$

⚠ se $i+j$ è pari → +, dispari → −

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-4-3) - 2(0-6) + 1(0+2)$$
$$= -7 + 12 + 2 = 7$$

=

prendiamo la colonna 2:
$$|A| = 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2 + 9 = 7$$

e se prendessimo le righe?

funziona ancora! (usiamo) sviluppo lungo la riga 1:
$$|A| = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

SEGUENDO LA REGOLA DEI SEGNI.

dimostrata per induzione sull'ord. della matrice ($M_{\mathbb{R}}(n) \in \mathbb{R}^n$)

dim: T. Laplace (ricorsiva, tralasciata non qui)

Coroll.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$
allora $|A| = |A^T|$
colonne diventano righe, ma visto che Laplace equivale allora ∄

Prop. del det.:
basta enunciarle sulle colonne, che per TL equivalgono

① se scambio 2 colonne di A il segno |A| si inverte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = 7$$ → basta dimostrarlo su 2 col. adiacenti

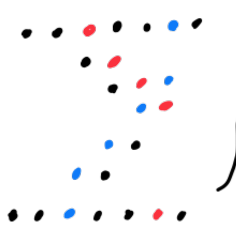
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad |B| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 = -|A|$$

$$|(A^2|A^1|\cdots|A^n)| = -|(A^1|A^2|\cdots|A^n)|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & & & \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & & \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & \dots & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$|B| = a_{12}\,\overset{=}{|B_{[1,1]}|} - a_{22}\,\overset{=}{|B_{[2,1]}|} + \cdots$$
$$|A| = -a_{12}\,|A_{[1,2]}| + a_{22}\,|A_{[2,2]}| - \cdots = -|B|$$
per Laplace scacchiera

colonne tolte in base alle a, e cancellate! che dopo lo scambio =



n° dispari di scambi

→ ogni volta che scambio colonne adiacenti inverto il segno: quindi se vogliamo scambiare colonne separate, ripetiamo più scambi e continuiamo a scambiare! } se n° scambi è dispari → $-\det B = \det A$, altrimenti $+\det B = \det A$ → MA SONO SEMPRE N° DISPARI DI SCAMBI, QUINDI, QUALSIASI 2 COL. INV. SEGNO!

② Se una colonna è · numero scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, il det · λ!

$A = (A^1|\cdots|A^n) \qquad |A| = 9$

$B = (\lambda A^1|A^2|\cdots|A^n) \qquad |B| = \lambda 9$

$C = (A^1|\lambda A^2|A^3|\cdots|A^n) \qquad |C| = \lambda 9$

$$|B| = b_{11}\,|B_{[1,1]}| - b_{21}\,|B_{[2,1]}| \cdots$$
$$\lambda a_{11}\,|A_{[1,1]}| \quad \lambda a_{21}\,|A_{[2,1]}|$$
raccolgo λ
$$= \lambda(|A|)$$

$$|C| = -\lambda a_{12}\,|A_{[1,2]}| + \cdots$$
$$= \lambda(-a_{12}\,|A_{[1,2]}| + \cdots)$$
per scambio scacchiera
$$= \lambda(|A|)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(8-4) - 3(2-8) = -4 + 18 = +14$$ $2 \cdot |A| = 2 \cdot 7$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad |C| = 3|A|$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ → prendiamo la riga con più zeri! semplifica i calcoli!

$$|M| = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \dots$$

③ $A = (A^1|A^2|\cdots|A^k|\cdots|A^n)$ sottointeso $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}$
$B = (A^1|A^2|\cdots|\underline{u}+\underline{v}|\cdots|A^n)$
$\underline{u}+\underline{v} = A^k$ su una qualsiasi colonna (indice corrisp.) per scambio Laplace

$|B| = |B'| + |B''|$
$B' = (A^1|A^2|\cdots|\underline{u}|\cdots|A^n)$
$B'' = (A^1|A^2|\cdots|\underline{v}|\cdots|A^n)$

Per Laplace:
$B = (\underline{u}+\underline{v}|\dots)$
$$|B| = \underset{(u_1+v_1)}{a_{11}}\,|A_{[1,1]}| - \underset{(u_2+v_2)}{a_{21}} \cdots$$
distribuisco su $\underline{u}, \underline{v}$
$$|B| = (u_1|A_{[1,1]}| - \dots)$$
$$+ (v_1|A_{[1,1]}| - \dots)$$
per sviluppo su Ia colonna → viceversa $\underline{u}, \underline{v}$ vett. colonna!
↳ è come se sviluppo seguendo $u_1, u_2 \dots$ / $v_1, v_2 \dots$

$|B| = |B'| + |B''|$

④ Se una riga/colonna di $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ è nulla allora ⇒ $|A| = 0$
↳ congettura (se una r/c è tutta zeri, allora DEV'ESSERE LIN. DIP!)

⑤ Se una mat. $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ ha 2 col/righe uguali
$|A| = 0$
↳ congettura: scambiando due colonne cambia il segno, ma se non cambia per colonna uguale dev'essere per forza 0 → +0 = −0

⑥ se una col è C.L. delle altre → $|A| = 0$
ossia $\{A^1|A^2\dots\}$ lin. dip.
→ quindi anche multipla

$$\det\left(\alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 \cdots + \alpha_n A^n \,\middle|\, A^2 \,\middle|\, A^3 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A^n\right)$$
per ③
$$= \det(\alpha_2 A^2|A^2\dots) + \det(\alpha_3 A^3|A^2\dots) + \dots + (\alpha_n A^n|A^2 \dots)$$
per ② (· scal)
$$= \alpha_2 \det(A^2|A^2\dots) + \alpha_3 \det(\dots$$
lin. dip.!

metà della congettura:

se col. lin. dip ⇒ det = 0

se det ≠ 0 ⇒ col. lin. indip

↳ usare questo invece di fare la prova in cascata!!
(almeno che non è = 0, non sappiamo ancora cos'è se det = 0...)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$ è lin. indip.! niente più sistema!

⑦ Se $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ in una colonna viene aggiunta una C.L. delle altre, det. non cambia!

$$(A^1 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 + \cdots | A^2 | A^3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$A^3 - 2A^1$