Analisi 20231109

Ordine di infiniti & infinitesimi

come per le successioni

Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$, siano f, g due infiniti per $x \to c$

allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{diciamo } f \text{ ord} < g \\ \pm\infty & \text{"} \quad f \text{ ord} > g \\ l \in \mathbb{R}\setminus\{0\} & f \text{ ord} = g \\ \nexists & \text{"} \quad f \text{ e } g \text{ non confrontabili} \end{cases}$$

Teorema (gerarchia degli infiniti)

Siano $\alpha > 0$, $a > 1$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

Quindi $\log_a x$ ord $< x^\alpha$; x^α ord $< a^x$

Def.: ordine di infinitesimi

Siano f, g infinitesimi $x \to c$

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x), \quad c \in \overline{\mathbb{R}}$$

Se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & f \text{ ord} > g \\ \pm\infty & f \text{ ord} < g \\ l \in \mathbb{R}\setminus\{0\} & f \text{ ord} = g \\ \nexists & \text{non confrontabili} \end{cases}$$

Es.: Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} - x^2}$ limite ad infinito

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} - x^2}$ limite a ?

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{6}} - x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ numeratore ha ord > al denom.

valore 0 più alto

$\sim x^3$
$\sim -x^2$
stime asintotiche, verificabili per comparazione

e.g.: $\lim \frac{x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}}}{x^3}$

vedi appunti

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{6}} - x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \lim_{x\to 0^+} 4\sqrt[30]{x} = 0$ per continuità di x^α $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0^\alpha = 0$

stiamo prendendo i valori più bassi!

verifichiamo:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/6} - x^2}{x^{1/6}} = \lim_{x\to 0^+} 1 - x^{2-\frac{1}{6}} = 1 - 0 = 1$

equivalgono sul limite quindi ha effetto sulla fn in $x \to 0^+$

Corollario della gerarchia infiniti

Per ogni $\alpha > 0$, $a > 1$ $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \lim_{t\to+\infty} \log_a \frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\log_a 1}_{=0} - \log_a t = -\infty$

$t = \frac{1}{x}$

per provare il limite faccio lo stesso cambio di var.

$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a x = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^\alpha (-\log_a t) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\log_a t}{t^\alpha}$ per ordine inf $= 0$

Es. generali:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3+\sin x)}{x^3}$

$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x \to \nexists \lim_{x\to+\infty} \ln(3+\sin x)$

però:

$-1 \le \sin x \le 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$3-1 \le 3+\sin x \le 3+1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\ln(3-1) \le \ln(3+\sin x) \le \ln(3+1)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

decrescente si invertono / monotona della fn!

perché $\ln x$ è CRESCENTE $\to$ disug. non cambiano

$\ln(3+\sin x)$ è limitata $\to$ limitata · infinitesimo

stime Notevoli

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x} = \frac{0}{0}$ f.i.

$\hookrightarrow \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}$

$\hookrightarrow \frac{|x|\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{|x|}\right)}{x} \underset{x>0}{=} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}}_{+\infty?} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}$

non facciamo questo

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x+x^2}+1}{\sqrt{1-x+x^2}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x + x\sqrt{x^2-x+1}}$ $\sim x^2$ / $\sim x\sqrt{x^2-x+1}$

$= \dots$

usiamo stima notevole $\to \beta = \frac{1}{2}$

$(1+g(x))^\beta - 1 \sim \beta g(x)$ $\quad x \to 0$

$\sqrt{1-x+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(x^2 - x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x^2-x)}{x} = -\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$

$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{1+\ln x}$

$\ln(\ln x + 1 - 1) = \ln(1 + \overbrace{(\ln x - 1)}^{g(x) \not\to 0})$ ✗ st. asint.

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{1+t}$ per asintotiche e gerarchia $= \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

$t = \ln x$

e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{e^{-x} + x\ln x} = \frac{0 \cdot +\infty}{1 + 0}$

$e^{-x} \to 1$, $x \to 0^+$

$x \ln x \to 0$, $x \to 0^+$