Integrali impropri / generalizzati

- estensione integrali precedenti:

Finora • $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata
secondo Riemann

Ci espandiamo con:
→ illimitata?
→ intervalli aperti o anche illimitati?

Def.:
Sia $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ | f integrabile in $[w,b]$ $\forall a<w<b$
omega tra $a < b$ ⇒ $(\cdot \; [\,[\quad] \cdots$ a w b

Se $\exists \lim_{w \to a^+} \int_w^b f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}}$
tale limite si chiama "integ. improprio/generalizzato di f in $(a,b]$"
indicato con:

$$\lim_{w\to a^+} \int_w^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

se il limite è finito: integrale improprio/gen.to è CONVERGENTE in f
e si dice integrabile in senso improprio/gen.to in $(a,b]$

se il limite è infinito: integ. imp./gen. è DIVERGENTE e
f non è integrabile in senso imp/gen. in $(a,b]$

Analogamente: integ. improprio per $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
dovrà essere integrabile in ogni intv. di forma $[a,w]$ con $a<w<b$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{w\to b^-} \int_a^w f(x)\,dx \quad \text{se il limite } \exists, \text{ altrimenti DIVERGENTE}$$

ricorda voss: appunti mat1

Es.: notevole
Considero fn. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $x \in (0,+\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Voglio studiare integr. in s. improprio in
- $(0,1]$
- $[1,+\infty)$

Ossv.: ogni intv. chiuso e limitato incluso nel dominio è sicuramente integrabile per continuità parte dell'integrabilità:

$$f \in C^k([a,b])$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ non posso considerarlo in senso classico perché non so se in 0 f è continua o integrabile ⇒ mi avvicino gradualmente ⇒ $\lim_{w\to 0^+} \int_w^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$$\lim_{w\to0^+}\int_w^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{w\to 0^+} \begin{cases} [\ln x]_w^1 & \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_w^1 & \alpha \neq 1 \end{cases} = \lim_{w\to0^+} \begin{cases} -\ln w & \alpha = 1 \\ \frac{1-w^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \boxed{\alpha < 1} \\ \frac{-\infty}{1-\alpha} & \alpha > 1 \end{cases}$$

quindi l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $\begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1 \\ \text{diverge se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln|x| + c & \alpha = 1 \\ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Intv. $[1,+\infty)$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{w\to+\infty} \int_1^w \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{w\to+\infty} \begin{cases} [\ln x]_1^w & \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^w & \alpha \neq 1 \end{cases} = \lim_{w\to+\infty} \begin{cases} \ln w & \alpha = 1 \\ \frac{w^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \alpha > 1 \quad 1-\alpha<0 \\ \frac{+\infty}{1-\alpha} & \alpha < 1 \quad 1-\alpha>0 \end{cases}$$

converge se $\alpha > 1$
diverge se $\alpha \leq 1$

Comportamento dell'intg. improprio varia in base all'intv. considerato!

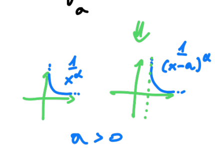
dall'esempio ($b=1$) ⇒ b non altera w! quindi b libero ⇒ esempio notevole riutilizzabile

Ossv.:

① $\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, $0 < b < +\infty$ — importante $a=0$ — converge se $\alpha < 1$, diverge se $\alpha \geq 1$

analog $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, con $0<a<+\infty$ — importante $b=+\infty$ — converge se $\alpha > 1$, div. se $\alpha \leq 1$

② $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \int_0^{b-a} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$, $t = x-a$, $dt = dx$ ⇒ $-\infty<a<b<+\infty$ converge se $\alpha<1$, div. $\alpha \geq 1$

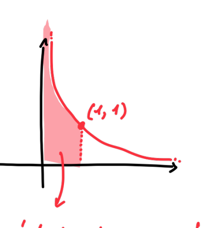


traslazione orizzontale

analog. $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ conv $\alpha<1$, div $\alpha \geq 1$
$t = b-x$

③ Graficamente:

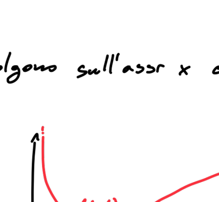
$y = \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$



$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ha area finita anche se asintoto a $+\infty$ (si avvicina abbastanza rapidamente!)
⇒ area di regione illimitata è FINITA SE $\alpha < 1$
tra 0 e 1 per essere rapido α deve essere piccolo ⇒ $\alpha < 1$

Le cose si capovolgono sull'asse x con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ⇒ $\alpha > 1$ converge: area finita; $\alpha \leq 1$ diverge
↳ come prima, $\alpha = 1$ è troppo lento

$y = \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$



α deve essere abbastanza forte ⇒ $\alpha > 1$

④ Caso critico: se $\alpha = 1$ $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ sono entrambi divergenti!

Es.:
in futuro: doppia singolarità (1 è indefinito in f)

$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx$ $\quad$ $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\ln x)^\beta}\,dx$
per intervallo 0–1 ln negativo: riporto positivo

$$I_1 = \lim_{w\to+\infty} \int_2^w \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx = \lim_{w\to+\infty} \int_2^w \frac{dt}{t^\beta} = \lim_{w\to+\infty} \begin{cases} [\ln(\ln x)]_2^w & \beta = 1 \\ \left[\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^w & \beta \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \beta = 1 \\ +\infty & 1-\beta>0 \\ \frac{-(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} & 1-\beta<0 \end{cases}$$

$t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$

I_1 conv $\beta > 1$, div. $\beta \leq 1$

$$I_2 = \int_0^{1/2} \frac{1}{x(-\ln x)^\beta}\,dx = \int_{-\infty}^{\ln\frac{1}{2}} \frac{dt}{(-t)^\beta} = \int_{+\infty}^{-\ln\frac{1}{2}} \frac{-ds}{s^\beta} = -\int_{-\ln\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{ds}{s^\beta}$$

$t = \ln x$, $s = -t$

ci siamo ricondotti alla forma dell'esempio $\frac{1}{x^\alpha}$ ⇒ $\begin{cases} \text{conv } \beta > 1 \\ \text{div } \beta \leq 1 \end{cases}$

Ci riconduciamo alle serie: $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \lim \boxed{S_i}$ difficile trovarlo

⇒ $\lim \int_w^b$ difficile ⇒ faccio solo una stima per criteri, in modo da studiarlo senza avere il valore concreto.

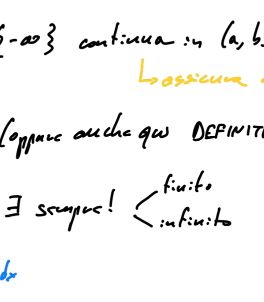
CRITERI:
confronto e conf. asintotico per f positiva (come t. positivi)

Sia $f: (a,b] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ continua in $(a,b]$.
↳ assicura integrabilità

Supp.: $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b]$ (oppure anche qui DEFINITIVAMENTE per $x \to a^+$) ⇒

⇒ intg. improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ $\exists$ sempre! $<$ finito / infinito
$= \lim_{w\to a^+} \int_w^b f(x)\,dx$

Infatti: fn. $w \mapsto \int_w^b f(x)\,dx = g(w)$



$w_1 < w_2$ ∃ $f(x) \geq 0$
area $w_1 \geq$ area w_2 → area decresce per $w \to b^-$
quindi l'area $A(w_i)$ è funzione MONOTONA

cr. confronto: eguale studio in b con $[a,b)$
Siano $f, g: (a,b] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, continua in $(a,b]$.
Supp.: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ definit. per $x \to a^+$
minor. magg.
positive ...?

Allora:
① $\int_a^b g(x)\,dx$ conv. ⇒ $\int_a^b f(x)\,dx$ conv
② $\int_a^b f(x)\,dx$ div. ⇒ $\int_a^b g(x)\,dx$ div.

cr. confr. asintotico:
Siano $f, g: (a,b] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, continua in $(a,b]$.
Supp.: $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ definit. per $x \to a^+$
positive

Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$ → nello stesso punto!
allora $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ conv/div. simultaneamente

Ossv.: i crit. precedenti valgono anche in intv. di forma $[a,b)$ $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con ipotesi adattate ($x \to a^+ \Rightarrow x \to b^-$)

Esempi:

① $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

f è continua sicuramente in:
- $1-x^2$ continua in $\mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{1-x^2}$ continua in $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ continua dove N e D continui e dove $D \neq 0$

⇓

f continua in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Prolungamento continuo?
$\lim_{x\to\pm1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \infty$ infinito ⇒ no prol. cont.

Intv. originale: $\int_0^1 f(x)\,dx$ ⇒ continua in $[0,1)$ richiesto
↓
intg. imp.

Inoltre $f(x) > 0$ $\forall x \in [0,1)$ per $1-x^2 > 0$
⇒ $\sqrt[3]{1-x^2} > 0$
⇒ $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} > 0$

cr. confr. asint.:
$f(x) \sim g(x)$ per $x \to 1^-$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}} \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}\,\sqrt[3]{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \; g(x)$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}}$
$(1+x)^{\frac{1}{3}} \underset{x\to1}{\sim} \sqrt[3]{2}$
no stime notevoli ⇒ st. asint. caratt. gen.

$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\,dx$ ⇒ f conv. per $\sim$

$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\beta}\,dx$ già saputo! CONVG. per $\frac{1}{3} < 1$
deve essere x^1

$\int_1^3 \frac{dx}{x^2-5x+4}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$
no prol. continuo (per lim. ∞)
$f \in C^0((1,3])$
continua in $(1,3]$
$f(x) > 0 \iff x < 1 \vee x > 4$
⇒ in $(1,3]$ $f(x) < 0$

quindi si può negare, rimane sempre di segno costante

$f(x) \underset{x\to1^+}{\sim}$?

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-4)} \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{(x-1)(-3)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} = g(x)$$

st. asint. generali, non notevoli.
quello a zero si tiene

⇓

$-\frac{1}{3}\int_1^3 \frac{1}{x-1}$ in base al modello $\frac{1}{(x-a)^\beta}$ ⇒ $\alpha = 1$ ✓ ⇒ diverge
quindi $\int_1^3 f(x)\,dx$ DIVERGE

Es.: dire se $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-5x-4}\,dx$ è $<$ conv / div