Ultimi cenni sulle f. quadratiche

$q_1(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

segno? $\Leftarrow$ pos. def. / pos s/d. / neg. def. / neg. s/d. / indef. / non def.?

possiamo fare: $= (x-y)^2$

$(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

q_1 è positiva semidefinita (e.g. $q_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$)

$q_2 = 3x^2 + 2y^2 \geq 0$

q_2 è positiva definita

$q_3 = x^2 - xy + y^2$

hmm...

provo: $= \left(x^2 - xy + \frac{x^2}{4}\right) + y^2 - \frac{y^2}{4}$

aggiungo e tolgo, poi associo:

$\underbrace{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2 \geq 0} \quad \underbrace{\frac{3}{4}y^2 \geq 0}$

somma di quadrati fa zero solo in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi positiva definita

$q_4(x,y) = x^2 - y^2$

non definita

$q(x_1 \cdots x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$

se $\lambda_i > 0 \quad \forall \lambda_i \quad i = 1 \cdots n$ pos. def.

se $\lambda_i < 0 \quad \forall \lambda_i \quad i = 1 \cdots n$ neg. def.

se anche un solo $\lambda_i = 0$: pos/neg. s/d

se segni diversi : non def.

Def.: dato:

$q\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f. q.

Sia $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ un cambio di var. ossia $= \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ $\mathcal{B}$ base opportuna

e $X = NX'$ ossia $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ N mat. del cambio di base

$q': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

e $q'(x') = q(x) \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}$: N fissato

q' è una f.q. canonica di q

e determinarne il segno è banale!

$q'(x') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$

Data: $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f. q. $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad q(x) = q(x_1 \cdots x_n) = q\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ab. notazione

$\Updownarrow$

$\exists!\, A \in M_{\mathbb{R}}(n) : \underbrace{A^T = A}_{\text{simmetrica}} : \quad q(x) = X^T A X = \langle X, AX \rangle$

$\Downarrow$ Th Spettrale

$\exists\, Q \in O(n) : \quad Q^T A Q = \Delta$ diagonale $\quad \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 \cdots \lambda_n$ autovalori di A

nuove var.

$X = QX'$

$X' = Q^T X$

vecchie var.

$q(x) = (QX')^T A (QX') \underset{\text{wtf}}{=} (x')^T Q^T A Q x' = (x')^T \Delta x'$

$(x_1' \cdots x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

$= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$

f. q. scritta in f. canonica!

Es.: $q(x,y) = x^2 - xy + y^2$

(1, 2)
(2, 1)
$xy = yx$

1) mat. associata

$A = \begin{pmatrix} 1^{a_1} & -\frac{1}{2}^{b} \\ -\frac{1}{2}^{b} & 1^{a_2} \end{pmatrix}$

2) diagonalizzo A

dove??

3) calcolo autovalori

$|A - tI_2| = \begin{vmatrix} 1-t & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - \frac{1}{4} \underset{\text{posto}=0}{=} 0 \iff t - 1 = \pm\frac{1}{2} \iff t = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$ autovalori $= \lambda_1$, $= \lambda_2$

4) ??

$\ker\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to x + y = 0 \iff x = -y \implies \begin{cases} \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \\ \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \end{cases}$

si può ortogonalizzare (ortogonalizz. di) con gram-schmidt se necessario, ma qui c'è solo un vettore

5) mat. delle basi normalizzate $\implies$ usa la FORMULA 5

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$

6) sostituisco gli x, y nella f.q. iniziale

$q(x,y) = \cdots$

$= \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2$

$\lambda_1 \quad \lambda_2$ sulla f. canonica troviamo gli autovalori!

autovalori della simmetrica associata ci danno indicazioni sul segno della f.q.

- tutti +   • presenza di 0, gli altri +   •
- tutti −   • "   −   −
- segni discordi

⚠ in una 2x2 gli autovalori si possono stabilire anche con solo det e tr!

det +	det −	det 0, tr +	det 0, tr −
def+	def−	sd+	sd−

↑ RIDUZ. IN F. CANONICA DELLA F. Q.

Prop.: Sia $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f. q., con A mat. associata

Siano $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ gli autovalori di A (anche ripetuti)

① $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1 \cdots n \implies$ def. +

② $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1 \cdots n \implies$ def −

③ $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \cdots n \wedge \exists \lambda_j = 0 \implies$ sd+

④ $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1 \cdots n \wedge \exists \lambda_k = 0 \implies$ sd−

⑤ $\exists\, \lambda_j > 0 \wedge \lambda_k < 0$

Es.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (simm) $\quad q(x)$ f.q. associata

OSSIA $q(x) = x^T A x$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

① autovalori & molteplicità di A

② segno di q

③ N: $X = NX'$ per la quale la f.q. è espressa in f. can.

④ $\bar{x} \neq 0_n$: $q(\bar{x}) = 0$ o se non esiste spiegare

pol. caratteristico?

① $|A - tI_3| = \begin{vmatrix} -1-t & 0 & 2 \\ 0 & 1-t & -2 \\ 2 & -2 & -t \end{vmatrix} = (-1-t)\begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ -2 & -t \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1-t & -2 \end{vmatrix} = (-1-t)(t^2 - t - 4) - 4(1-t) =$

$= -t^2 + t + 4 - t^3 + t^2 + 4t - 4 + 4t = -t^3 + 9t = -t(t^2 - 3^2) \underset{\text{pongo}=0}{=} 0$

$\downarrow \downarrow$

$0 \quad \pm 3 \implies$

$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 0 & \mu_1 = m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 & \mu_2 = m_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 & \mu_3 = m_3 = 1 \end{matrix}}$

POTREBBE SERVIRE DIV. TRA POLINOMI!

③ inizio un cambio di variabile

$V_0 = \ker(A - 0I_3) = \ker A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rk = 2 $\implies \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

se proviamo facendo $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ trovo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi autovettore ✓ (a.val = 0)

$V_3 = \ker(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

verifico $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

ora per trovare l'ultimo autovettore, essendo in $\mathbb{R}^3$ ci basta fare

$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$: prime due sappiamo essere o.g. (non serve provarlo)

ci basta trovare un autov. o.g. con a.v. = −3

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓

(oppure come prima) $\implies$ base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

N è la mat. normalizzata!

VA SCRITTA QUANDO CHIESTA NELL'ORDINE CORRETTO! $\implies$ 0, 3, −3

$N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$X = NX' = N\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$q(x', y', z') = 0x'^2 + 3y'^2 - 3z'^2$

④ se $\exists \lambda_i = 0 \to$ banale $\qquad X \in \ker A = V_0$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad AX = 0_n$

$X^T A X = 0$

(oppure)

$x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$q(x') = 0 \cdot 0^2 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 = 0$

$x = Qx' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \bar{x}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \notin \ker A$ ma è comunque valido!