Analisi 20231017

FUNZIONI

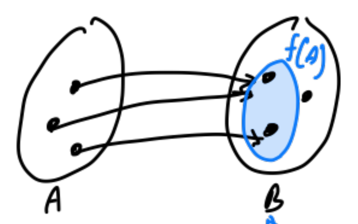
Def.: siano A, B insiemi (anche non numerici)
chiamiamo funzione di A a B e la indichiamo
con $f: A \to B$

relazione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

A: dominio di f
B: codominio di f

$f(a)$:
se $a \in A$, si chiama immagine di a mediante f l'unico elem. di B associato per f ad a.

variando a in A, troviamo molte immagini
→ immagine di f: insieme di tutte le immagini degli elementi di A.
→ "$Im(f)$"
→ "$f(A)$"



$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ — sottoinsieme di B

Funzioni tra ins. numerici

successioni: dominio $A = \mathbb{N}$, codominio $B = \mathbb{R}$

f. reale di var. reale: dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ (intervallo), codominio $B = \mathbb{R}$

propr. generali

sia $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$
si può interpretare graficamente
→ grafico di f è l'insieme così definito: graf(f) = $\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ — insieme di tutte coppie ordinate in $\mathbb{R}$

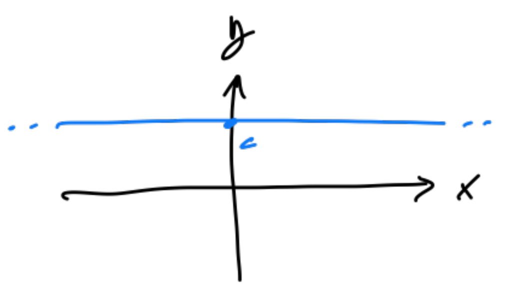
↳ $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ preferibile usare x — ordinate: non scambiabili

equazione del grafico:
$y = f(x)$

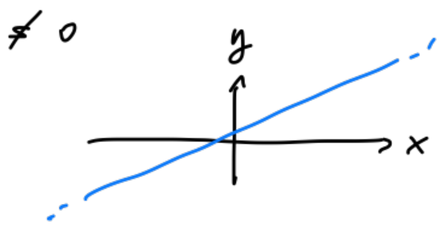
graf(f) è il luogo geometrico dei punti con coordinate cartesiane (x, y) legate dalla relazione $y = f(x)$

Esempi:

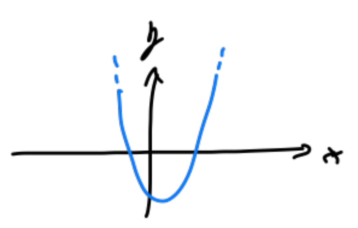
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\mapsto} c$ ($f(x) = c$) dove $c \in \mathbb{R}$ è fissato
  funzione costante
  → grafico con eq. $y = f(x)$ → $y = c$



- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \overset{f}{\mapsto} mx + q$ ($f(x) = mx+q$), $m, q \in \mathbb{R}$ assegnati, $m \neq 0$
  funzione lineare
  → $y = mx + q$



- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ assegnati, $a \neq 0$
  funzione quadratica
  parabola con asse di simmetria // y

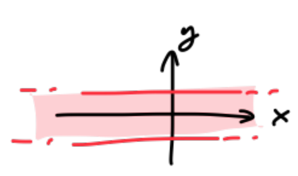


⚠ non sono g. funz. le equazioni con più immagini in un sol x

Def.: $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$
f è lim. sup/inf. se $f(A)$ è lim. sup/inf. (ci riconduce all'insieme immagine)
$\sup f(A) / \inf f(A)$ = estr. sup/inf.
→ $\sup f / \inf f$

in simboli matematici:
f è lim. sup. $\Leftrightarrow$ $f(A)$ ammette maggiorante
$\exists \sup f \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \mid m \geq f(x), \forall x \in A$
$\exists \inf f \Leftrightarrow n \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq n, \forall x \in A$

si trova sicuramente sopra o sotto una retta orizzontale



f è limitata se $\exists \sup f \wedge \exists \inf f$.

Esempi: LIMITAZIONI

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ limitata
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto mx + q$ illimitata, $\nexists \inf f$, $\nexists \sup f$
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $\begin{cases} \text{lim. solo sup} & a < 0 \\ \text{lim. solo inf} & a > 0 \end{cases}$

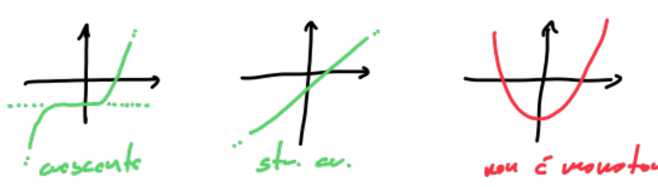
FUNZIONI MONOTONE

Def.: Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, f è:
- crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \mid f(x_1) \leq f(x_2)$
  immagini nello stesso ordine
- strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \mid f(x_1) < f(x_2)$
- decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \mid f(x_1) \geq f(x_2)$
- str. decr. " $>$
- simultanee cr. + decr. → funzioni costanti

immagine: retta // y nel punto che interseca la funzione; il suo riflesso ⊥ su y

f è monotona se soddisfa "crescente" o "decrescente";
strettamente mon. se "str. cr." o "str. decr.".

Esempi



FUNZIONI PERIODICHE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$
f periodica se $\exists T > 0 \mid f(x+T) = f(x) \ \forall x \in A$
→ T minimo = periodo