Serie a t. segno variabile

← tutti le precedenti criteri sono per serie con t. pos. definitivamente.

Sia $\sum a_n$ serie con termini a_n di segno qualunque

Def: Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge ASSOLUTAMENTE se la serie (a t. pos.) $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge

Es: Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ conv. assolut. $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$\Rightarrow \sum |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. perché armonica 2 exp

$\Rightarrow$ converge assolutamente

Dom: Se $\underbrace{\sum a_n \text{ conv. assolut.}}_{\text{se } \sum |a_n| \text{ conv.}}$, qual'è il carattere di $\sum a_n$?

La risposta è nel T.:

Crit. conv. assoluta:

Sia $\sum a_n$ serie assolut. conv.

$\Rightarrow$ anche la serie $\sum a_n$ converge

e $\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$

$|a_1 + a_2 + \dots| \leq |a_1| + |a_2| + \dots$ disug. tr. estesa ad n addendi purché sia assol. conv.

Es.: Stud. car.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

- a t. positivi? ✗ → $\sin n$ varia non varia invece $\frac{1}{\sin n}$
- $\Rightarrow$ crit. conv. ass.

$\sum \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \sum \frac{|\sin n|}{|n^3|}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\sin n|}{|n^3|} = 0$ probabilm. conv.

$\frac{|\sin n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ crit. confronto

$\Rightarrow$ convergente

Allora anche l'originale è conv.

Crit. serie a t. di segno alterno

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ c'è un crit. specifico

CRIT. DI LEIBNIZ

Sia (a_n) una succ. di $\mathbb{R} \geq 0$:

1) (a_n) è decrescente definit.
2) (a_n) è infinitesima

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente! da trovare questa a_n estraendo dalla orig

$\Rightarrow s = \underset{\text{totale}}{\text{somma}} \Rightarrow |s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n$

s_n = somma parz. n-esima

Es.: ⚠

S. armonica general. a segni alterni:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

per qual α è conv. assolutam.?

per qual α è conv.? $\quad |(-1)^n| = 1$

CONV. ASSOLUTA: $\alpha > 1$ (si riconduce alla f. armonica gen.)

MA per alcuni α può conv. senza conv. assoluta!!

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ appl. crit. leibniz

⇓

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$

$\frac{1}{n^\alpha} = a_n \Rightarrow$ 2) quand'è infinitesima la succ. $\frac{1}{n^\alpha}$?

$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$ infinitesima qui

$\Rightarrow \alpha > 0$

1) quand'è decrescente? Troviamo $\alpha > 0$, controllando è ancora valido.

Abbiamo scoperto che in $0 < \alpha < 1$, la serie converge anche se non assolutamente!

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} <$ conv. ass. $\alpha > 1$; conv. $\alpha > 0$

Dim: cr. leibniz

Consideriamo s_n somma parziale n-esima, distinguo $n <$ pari / dispari

Studiamo somme parziali con indice pari:

$s_0, s_2, s_4, s_6 \dots \Rightarrow \underbrace{s_{2k}, s_{2k+2}}_{\text{confrontiamoli:}}$

$\pm a_0 \mp a_1 \pm a_2 \mp a_3 \dots$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad \dots$

$+a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots + a_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \Rightarrow s_{2k+2} \leq s_{2k}$

$\underset{\text{senza il meno}}{a_{2k+2} \leq a_{2k+1}} \longrightarrow$ perché i termini negativi sono più efficaci dei positivi,

Siccome $s_{2k+2} \leq s_{2k}$ $\forall k$, la succ. delle somme parziali con indice pari è decrescente!

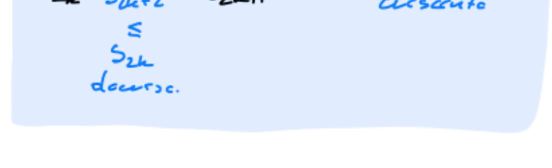
Analogamente $s_{2k+1} = s_{2k-1} \underbrace{+a_{2k}}\underbrace{-a_{2k+1}} \geq s_{2k-1}$

$a_{2k} \geq a_{2k+1}$ vale di più

ossia la succ. delle Σ parziali con indice dispari è crescente!

Per il T. succ. monotone ⇓ Quindi i dispari col − crescono verso n e i pari col + decrescono verso n?

$\exists \lim_{k\to+\infty} s_{2k} = \inf\{s_{2k}\} = l_1 \qquad \exists \lim_{k\to+\infty} s_{2k+1} = \sup\{s_{2k+1}\} = l_2$



$s_{2k} \leq s_0 \quad \forall k$ perché sono positivi!

$s_{2k+1} \geq s_1 \quad \forall k$ perché sono negativi!

$s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_0$

quindi le succ. ind. pari/dispari sono LIMITATE!

appl lim fino

$l_2 = l_1 - \underbrace{0}_{\text{perché per Hp. è infinitesima}} \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R} = l_1 = l_2$

⇓ converge con somma s

- $\underset{\text{indice pari}}{s_{2k}} \geq s$, $\underset{\text{indice dispari}}{s_{2k-1}} \leq s$

Infine

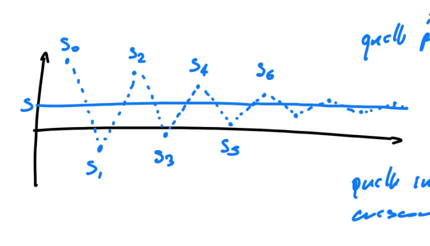
$0 \leq s_{2k} - s \leq \underbrace{s_{2k} - s_{2k+1}}_{\text{è il termine negativo, negato quindi}} = a_{2k+1}$

$0 \leq s - s_{2k-1} \leq \underbrace{s_{2k} - s_{2k-1}}_{\text{questo è } 2k-1 \text{, non } 2k+1} = a_{2k}$

⇓

$|s - s_n| \leq a_{n+1}$

$\Rightarrow$ graficamente



quelli indice pari decrescono

sommati portano a conv.

quelli indice dispari crescono

Esercizi:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ è a segni alterni

⇓ a_n

Hp. Leibniz:

$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ 2) infinitesima ✓

$a_n \sim \frac{1}{n}$ ✗ insuff. per decrescenza dice solo al limite!

$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$

$\frac{(n+1)-1}{(n+1)^2+(n+1)} \leq \frac{n-1}{n^2+n}$

$n(n^2+n) \leq (n-1)(n^2+3n+2)$

$n^2 \leq 2n^2 - n - 2$

$-n^2 \leq -n - 2$

$n^2 \geq n + 2$

$n^2 - n - 2 \geq 0$

$n_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} < \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$

$n \leq -1 \lor n \geq 2$

qui n usato come $\mathbb{R}$, ma $n \in \mathbb{N}$

n solo positiva $\Rightarrow n \geq 2$ perché $\in \mathbb{N}$

quindi 1) decrescente ✓ anche definitivamente

⇓

provate le 2 Hp.: è convergente

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \boxed{\frac{\ln n}{n}}$ $\quad a_n \geq 0$

2) infinitesima: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ✓ per gerarchia

1) decrescente

$a_{n+1} \leq a_n$ ma è un eq. mostro, difficile!

⇓

considero $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ andando in $\mathbb{R}$ (da succ a fn.)

f è decrescente? $\Rightarrow$ usiamo LA DERIVATA!

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) \leq 0$

$\frac{1 - \ln x}{x^2} \leq 0 \iff 1 - \ln x \leq 0 \iff \ln x \geq 1 \iff x \geq e$

x^2 non ha effetto, sempre positivo

Tornando in $\mathbb{N}$ prendo gli $\overset{n =}{x} \in \mathbb{N} \geq e$

$\Rightarrow \frac{\ln n}{n}$ per $n \geq 3$ ✓ decresc. definit.

e la conv. assoluta?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\overset{\text{tutta}}{\dots}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ = no stima asintotica, $\frac{\ln n}{n}$ è se stesso

$\frac{\ln n}{n} \sim \frac{1}{n}$? non può essere 1, perché $\ln n$ è un infinito e valuta $\frac{1}{n}$!

- stesso comportament.?
- stesso infinit/esimo?

controllo con il lim del confronto

$\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 1$ quindi non è $\sim$ ✗

⇓

ma possiamo usare $\sum \frac{1}{n}$ per crit. del confronto!

$a_n \leq b_n$

$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n} \iff 1 \leq \ln n$ ✓ vero definit. (come prima $x > e$)

spesso dove non si trovano stime asintotiche funzionano disuguaglianze

$\Rightarrow$ è convergente perché massimante??

ma conv o div?

Es: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

α che rendono conv? $\alpha > 1$

div? $\alpha \leq 1$

$\underline{\alpha > 1}$ $\quad \frac{\ln n}{n^\alpha}$

sappiamo che $\ln n$ ha ordine $< n^\beta \quad \forall \beta > 0$ "rispetto a qualunque potenza"

⇓

$\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-\varepsilon} n^\varepsilon} = \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} \qquad 0 < \varepsilon < \alpha - 1$

$\alpha - \varepsilon > 1 \iff \varepsilon < \alpha - 1$

⇓

uso il cr. confronto

$\frac{\ln n}{n^\varepsilon} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} \leq 1 \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$

$\frac{\ln n}{n^\varepsilon} \leq 1$?

se $a_n \to 0 \Rightarrow$ definitivam. $a_n \leq 1$ e sarà quindi convergente — why?

Per $\alpha > 1$ quindi la serie converge.

Ex casa: $\alpha \leq 1$ diverge? adattare $\alpha = 1$