Analisi 20231205

Serie Numeriche
(succ., non f.)

• (a_n) succ. di $x \in \mathbb{R}$

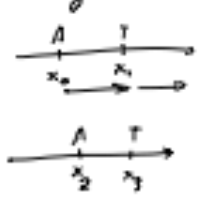
$\rightsquigarrow$ "somma di tutti i termini della succ. x"

Pb.: cosa significa sommare ∞ addendi?

Esempi:

• Paradosso di Zenone

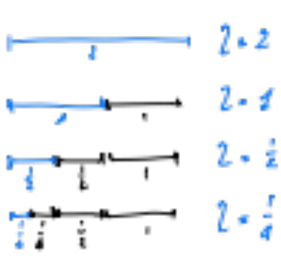
  • Achille e la tartaruga

$A, T \rightsquigarrow$ 

in t_0, in t_1, $x_{n+1} > x_n$

$\rightsquigarrow \sum t_0, t_1, t_2 \dots$ dovrebbe essere finito perché A raggiunga T, ma ciò è impossibile? o invece
$\Downarrow$

• Geometricamente



$2 = 2$
$2 = 1$
$2 = \frac{1}{2}$
$2 = \frac{1}{4}$

$\sum 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots = 2$

sommando ∞ termini positivi possiamo raggiungere un val. finito!

Def.: dato (a_n),

la serie numerica è:

serie formale: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ termine generale della serie

Introduciamo una succ.:

$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Somma tra 0 ed n, non fino a $+\infty$

s_n: somma parziale/ridotta n-esima della serie!

Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{convergente} \\ \text{divergente} \\ \text{indeterminata} \end{cases}$

a seconda che la succ. s_n sia una delle $\rightsquigarrow$ da s_n ricaviamo c/d/i per la serie infinita!

⚠ il comportamento della serie è definito attraverso la succ. (S_n) e non (a_n)

$\Rightarrow$ una serie è convergente quando (S_n) è convergente! NON (a_n)
$\Downarrow$
somme parziali $0 - n$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente $\Rightarrow$ somma della serie = $\lim(S_n)$

$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

questo è ciò che significa sommare ∞ termini.

Studiare il ~~comportam.~~ carattere di una serie $\Leftrightarrow$ stabilire $\begin{cases} \text{conv} \\ \text{div} \\ \text{indet} \end{cases}$

Es.: Serie geometrica $\Rightarrow$ richiede $q^{(n)}$ $\rightsquigarrow q$: RAGIONE

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ con $q \in \mathbb{R}$ fissato

carattere al variare di q

$\Rightarrow$ succ. somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \dots + q^n$

$q = 1 \Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1$

$\hookrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \rightsquigarrow$ divergente

Forma chiusa: per ogni n so dire esattam. il valore di s_n

$q \neq 1 \Rightarrow s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

moltiplico per q: $(q \neq 0)$

$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$
$qS_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$

diff. tra membri: sopra - sotto $\quad S_n - qS_n = 1 - q^{n+1} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

ne faccio il limite: $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$

In conclusione la ser. geom. $\sum_{n=0}^{+\infty}$ converge se $-1 < q < 1$ e in tal caso la sua somma è $\frac{1}{1-q}$

diverge se $q \geq 1$; è indet. se $q \leq -1$

Nell'esempio del segmento:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 = \frac{1}{1-q} = 2$

$\hookrightarrow q = \frac{1}{2}$ perché $\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\exists$ anche le serie "telescopiche"...!

Il caratt. di una serie non cambia se si aggiungono/tolgono/modificano un n° finito di termini

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ convergente
$\Downarrow$
$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \neq 2$ ma rimane convergente

$= 2 - \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Nel caso di convergente, cambia il val. somma

SERIE TELESCOPICHE

Una serie telescopica è la serie di Mengoli

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

non 0, si annulla denom.

Calcoliamo S_n

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

prop. assoc. (per n° finito di addendi! non nelle serie)

$= 1 \cancel{- \frac{1}{2}} \cancel{+ \frac{1}{2}} \cancel{- \frac{1}{3}} \cancel{+} \dots \cancel{+ \frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

$= \boxed{1 - \frac{1}{n+1} = S_n}$

Carattere:

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}$

Ne segue che la serie di Mengoli è converg. e la sua Σ è 1.

È esempio di serie telescopica

$\hookrightarrow$ come si scrive il T. generale?

$\sum a_n$?

$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ t. consecutivi

$a_n = b_n - b_{n+1}$ oppure $a_n = b_{n+1} - b_n$
$\Downarrow$
termine succ. di b_n

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = b_0 \cancel{- b_1} \cancel{+ b_1} \cancel{- b_2} \cancel{+ b_2} \cancel{- b_3} \cancel{+ b_3} \dots \cancel{+ b_n} - b_{n+1} = b_0 - b_{n+1}$

Il caratt. conv/div/indet a seconda che b_n sia una delle 3

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

studio sempre lim somma parz.

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

essendo composto di n addendi, dovremmo usarli tutti nel lim s_n (NON SI PUÒ FARE)
$\Downarrow$
riscrivo a_n più conveniente

$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \underbrace{\ln(n+1)}_{b_{n+1}} - \underbrace{\ln n}_{b_n}$

$\Rightarrow S_n = (\cancel{\ln 2} - \underbrace{\ln 1}_{0}) + (\ln 3 \cancel{- \ln 2}) \cancel{+ \dots +} (\ln(n+1) \cancel{- \ln n}) = \ln(n+1)$ quando $n \to +\infty$

Pertanto la serie data è diverg. a $+\infty$

$\nexists$ questa op. non si fa quasi mai: cercare di scrivere riscrittura di a_n perché molto freq. è impossibile!
$\Downarrow$
Criteri di Convergenza in base di a_n, che è come scritto!

Prop.: (cond. necessaria di convergenza)

se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ "l'ultimo" termine $= 0$

$(a_n) = a_0, a_1 \dots \boxed{\in \mathbb{R}}$ $\Rightarrow (a_n)$ deve essere infinitesima, ma ciò non è sufficiente!

Oss.: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non basta

per esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ div. a $+\infty$

nonostante $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$

RAPIDITÀ DI CONVERGENZA DI $\frac{1}{n}$ TROPPO LENTA!

Dim.: Hp. $\lim_{n\to+\infty} S_n = l \in \mathbb{R}$
$\hookrightarrow$ per Hp. converg.

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = l - l = 0$

$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = l$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = l$ sono la stessa serie

Serie a termini positivi

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serie a t. pos.: Hp. $a_n \geq 0$ ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ definit.

quali richiediamo $a_n \geq 0$?

(+) ricorda che si possono escludere n° finito, quindi basta definitivamente!

Tale serie non è mai indeterminata

Infatti $\boxed{S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n} = \boxed{S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}}$

$S_n \geq S_{n-1}$

Quindi è CRESCENTE $\Rightarrow$ avrà sempre limite in/finito

mai indeterminata! $\boxed{\text{prop. delle serie a termini definit. positivi}}$

Es.: $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{1}{n}$

t. generale: $a_n = \cos \frac{1}{n} \Rightarrow$  tutti a_n positivi $\Rightarrow (S_n)$ crescente

conv/div.

conv. se $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \cos \frac{1}{n} = 0}$ cond. necessaria di convergenza

ma $= 1 \Rightarrow$ è divergente

Criterio del confronto: tra 2 Σ

Siano $\boxed{\sum a_k, \sum b_k}$ due serie a t. pos. definit.: $\boxed{a_n \leq b_n \text{ definit}}$

omesso indice perché serie non sono finite (implicito)

$\Rightarrow$ a) se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge

b) se $\sum a_k$ diverge (a $+\infty$ t. pos), $\Rightarrow \sum b_k$ diverge

$\sum b_k$ maggiorante
$\sum a_k$ minorante

$\boxed{\text{mag conv} \Rightarrow \text{min conv.} \quad \text{min div} \Rightarrow \text{mag div}}$

Crit. del confr. asintotico

Siano $\sum a_k, \sum b_k$ serie a t. pos definitivam.: $\boxed{a_n \sim b_n}$ $n \to +\infty$

Allora le due serie hanno lo stesso carattere

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ SERIE ARMONICA $\neq$ GEOMETRICA

perché a_n = media armonica tra il prec. e succ.

$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$

$\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ div. $\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ div.

per II crit.