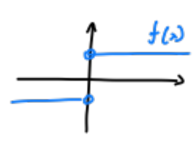
Analisi 20231107

Lim sx/dx

Consideriamo $f(x) = \frac{x}{|x|}$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

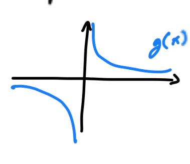
$|x| \neq 0 \iff x \neq 0$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



analogamente, $g(x) = \frac{1}{x}$ def. in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
e come f ha comportamento $\neq$ come limite se sx/dx di 0

$g(x) = \frac{1}{x}$



→ INTORNO SX/DX

Def.:
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, intorno dx/sx di x_0 è ogni intervallo del tipo $[x_0, x_0+\delta)$ / $(x_0-\delta, x_0]$

→ Definitivamente per $x \to$ da dx/sx:

Def.:
Se $x_0 \in \mathbb{R}$, una propr. P vale definitivamente per $x \to x_0$ da dx/sx e scriviamo $x \to x_0^+$ / $x \to x_0^-$ se $\exists$ un intorno dx/sx di x_0 tale che P è soddisfatta $\forall x \in$ a tale intorno.

Quindi per intorno dx/sx otteniamo limite dx/sx

Limite destro

Def.:
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, f definita in intorno destro di x_0 tranne al più x_0
Sia $l \in \overline{\mathbb{R}}$,
diciamo che f ammette lim. dx l in x_0:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

se $\forall V$ intorno di l risulta $f(x) \in V$ definitivam. per $x \to x_0^+$ per ogni $x \in V \wedge x \neq x_0$
↳ va ad usare def. di limite con ε?

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R}$

→ $\forall V$ int l, $f(x) \in V$ definitiv. $x \to x_0^+$

dalla diseq. originale togliamo per lim dx

cioè: $V = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon\ \forall x \mid x_0 \cancel{-\delta} < x < x_0+\delta$

Calcoliamo limite dx/sx in $x_0 = 0$

- $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$
- $g(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$, $\quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$

Ossv.:
$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

devono esistere da dx/sx allo stesso l
non vuoi dire segua sono limiti diversi se da dx/sx! quindi:

$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$, $\nexists$ lim...

Def.:
Se f ammette lim. dx/sx in x_0 diversi → salto nel punto x_0

salto $s = l^+ - l^-$

$f(x)$ ha salto di 2 in 0
$g(x)$ ha un ASINTOTO VERTICALE in 0

Def.:
Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0^{+/-}} f(x)$ è infinito allora la retta $x = x_0$ si chiama asintoto verticale dx/sx, se è entrambi lo si chiama solo asint. vert.

Def.:
Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $y = l$ è l'asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$

Def.:
Diciamo che la retta $y = mx+q$ con $m \neq 0$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$ se:

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0 \quad \to \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

quando $f(x) - (mx+q) = 0$ significa che hanno lo stesso valore!

→ $f(x) = mx+q$
si avvicinano sempre di più per $x \to +\infty$ se è l'asint. obl.

Come trovare as. obl.: m/q

Criterio:

$y = mx+q$ as. obl. di f per $x \to +\infty$ $\iff$ a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

→ non possono coesistere orizz. ed obliquo

Esercizio

Verif. con la def. di limite (in term. di intorni) i seguenti limiti:

1) $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$

2) $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$

CONTINUARE
← $q^n \to 0$ se $-1 < q < 1$
ma $n \in \mathbb{N}$, con $n \in \mathbb{R}$ $0 < q < 1$

3) $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$

Dire se $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ ammette as. obl/orizz per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\nexists$ non è orizz.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 + \frac{\sqrt{x}}{x} = 3$

più rilevante x di $\sqrt{x}$

$m = 3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\nexists$ as. obl

Lim dx/sx in termini di successioni:

$\lim_{x \to c} f(x) = l \iff \forall$ succ. (x_n) con $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$ e $x_n \neq c$ definit. risulta $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

tutte le successioni che tendono allo stesso limite della funz. senza incontrare il limite rendono valido il lim. di funzione

$c = x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall$ succ. $(x_n) \mid \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

... ed $x_n < x_0$?

Notazione: solo successioni

$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0^+$ se $\lim x_n = x_0$ e $x_n > x_0$ definitiv.

→ ci avviciniamo dalla parte positiva
= lim. "per eccesso"

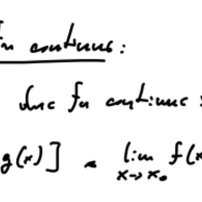
l'opposto "per difetto"

Funz. Continue,

Def.: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia f una funzione definita in un intorno di x_0 incluso x_0.

f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f è continua in un insieme se lo è in ogni suo punto (dell'insieme)



Ossv.: se f è definita in $[x_0, b)$ diciamo: continua da destra in x_0 se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

sx $(a, x_0]$ con $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

T. permanenza segno per fn continue: → per le funzioni normali

per f continua in x_0 (quindi sappiamo $\exists$)
se $f(x_0) > 0$ allora $f(x) > 0$ in un intorno di x_0.

T. alg. delle fn continue:

siano f, g due fn continue in x_0 $\qquad$ per continuità:

$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$

... algebra valide anche per $-, \cdot, :$ (ma quoziente: se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0)

T. continuità delle fn elementari:

- potenza
- esponenziale
- logaritmo
- seno
- coseno

→ le fn: x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ sono continue nei loro domini

ESPONENZIALE SOLO SE ESP x: 2^x $\quad 2^{x^2}$ → va trasformato fino ad avere x esp.

Es: $\sqrt{x}$ è continua in $[0, +\infty)$

$\frac{1}{x}$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

x^e è continua in $[0, +\infty)$ → potenze a base reale hanno dominio $x \geq 0$

$x^{\frac{1}{3}}$ " in $\mathbb{R}$ → $\sqrt[3]{x}$

Dove sono continue le fn iperboliche?

fn iperboliche: $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ ...

deduciamo la loro continuità

$Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - (\frac{1}{e})^x}{2}$ è continua in $\mathbb{R}$

$Ch(x)$ ⤴

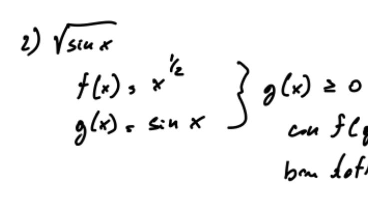
$Th(x)$ ⤴ denom. non si annulla mai

$\tan x$ è cont. in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
quindi in tutto il suo dominio

per composizione (non op. algebrica, non fa parte dell' T. alg. fn. continue)

$2^{x^2} = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ dove $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$

T. cont. delle fn composte:



$g(x)$ continua in x_0
$f(g(x))$ continua in $g(x_0)$

se questo è vero, allora: $f \circ g$ cont. in x_0

quindi 2^{x^2} è continua in $\mathbb{R}$

Es.:

1) $2^{x^2} \to 2^x, x^2$

2) $\sqrt{\sin x}$

$f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = \sin x$ $\Big\}$ $g(x) \geq 0$
con $f(g(x))$ $g(x)$ dev'essere ben definita

sappiamo quindi $g(x) \geq 0$, quindi quando arriva in $f(g(x))$ si applicherà f su positivi
→ controllare ed applicare i domini!

3) $\ln(1 - e^x)$

composta da:

$f(x) = \ln x$, $g(x) = 1 - e^x$ $\Big\}$ f vuole $x > 0$

↓

$g(x) > 0$

$1 - e^x > 0$

$x < 0$

Es:

1) quale $\alpha \in \mathbb{R}$ rende f continua?

$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin(x + \frac{\pi}{2}) & x > 0 \\ 2x^2 + 3 & x \leq 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

dove controlliamo? manca solo un punto: $x_0 = 0$

$x \neq 0$ → $2x^2 + 3$, $\alpha \sin(x + \frac{\pi}{2})$ sempre continue nelle loro sezioni

ma se ci avviciniamo a 0 da dx/sx ha valori diversi!

verifichiamo cont. in $x_0 = 0$

f cont. in $0 \iff \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$f(0) = 3$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$ per quale α accade?

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \alpha \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \alpha \quad \to \quad \alpha = 3$ ✓

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x^2 + 3 = 3$ ✓

2) quale $\alpha \in \mathbb{R}$ cont.?

$f(x) = \begin{cases} 3e^{\alpha x - 1} & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$