Analisi 2023/11/15

← T. che usa continuità fn elementari ?

Esercizio:

Provare che $|x|$ è continua in $\mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = |0| = \lim_{x \to 0^-} |x|$$

quindi $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ è continua in 0!

→ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ continuità in c

fn a tratti

controllato per distacco possibile

visto che in $x=0$ il salto è nullo, e $x, -x$ sono entrambe continue, $|x|$ sarà continua!

↳ coincide con almeno una tra x e $-x$.

Fn monotone in un intervallo ~ succ. mon.

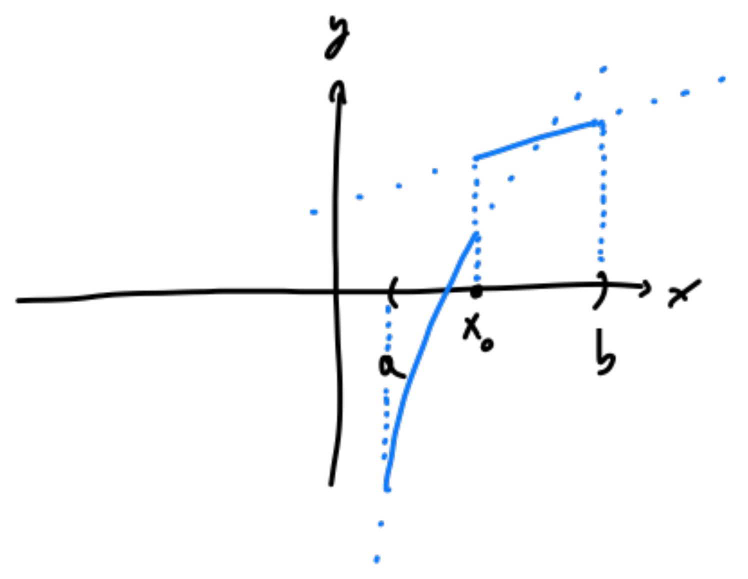
per entrambe ∃ sempre limite

T.: Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ fn mon., a, b finiti/infiniti.

Se $x_0 \in (a, b)$ allora ∃ $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ FINITI ma possono essere diversi.

Inoltre esistono $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$ finiti o infiniti

Ossv.:



Si dimostra che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^- = \sup\{f(x) \mid a < x < x_0\}$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^+ = \inf\{f(x) \mid x_0 < x < b\}$$

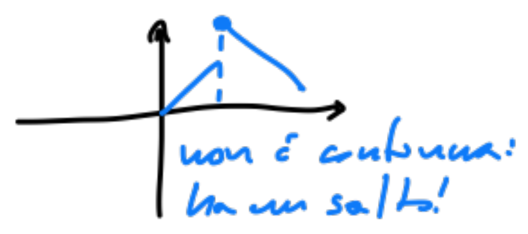
fn monotone ammettono sempre limiti finiti all'interno e f/inf agli estremi?

Continuità e invertibilità

$f: E \to \mathbb{R}$ strett. monotona in E ⇒ f invertibile in E e f^{-1} è dello stesso tipo di monotonia → suo D sarà l'immagine di f

$\not\Leftarrow$ esistono anche fn invertibili ma non str. monotone!

se richiediamo in più che la fn sia continua, allora vale anche il viceversa



↳ **T.:** Sia $f: I \to \mathbb{R}$ fn cont. in I intervallo

allora f invertibile in I ⟺ f str. mon. in I

continuità della fn inversa

↳ col anche f^{-1} sarà continua!

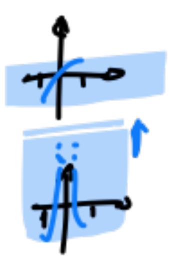
quindi: altre fn continue sono le inverse delle trigonometriche
- continue
- str. monotone in intervalli → infatti solo in pezzi

arcsin, arccos, arctan (in sombra)

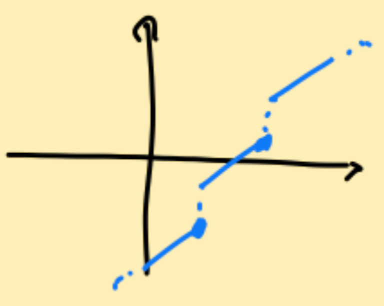
2 rette orizzontali

limitata

illimitata



f monotona non significa f continua!



Per il T. Weierstrasse:

Se f è illimitata in $[a, b]$

allora f ammette almeno un p. discont.

↓

perché ha min/max

↓

quindi deve essere limitata!

Ex: $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} \sin x$ amm. prolung. continuo in $x_0 = 0$?

→ $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$$\lim_{x \to 0^\pm} 2^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \to 0^\pm} \sin x = 0 \cdot 2^{\pm\infty} \begin{cases} x \to 0^+ & 0 \cdot 2^{+\infty} \text{ f.i.} \\ x \to 0^- & 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} \sin x = \lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} x = \lim_{t \to +\infty} \frac{2^t}{t} = +\infty$$

$t = \frac{1}{x}$

→ no prolungamento

$+\infty$ $x \to 0^+$

0 $x \to 0^-$