Analisi 20231128

← Convessità

fu. convesse

<u>Def.</u>: f convessa in I se il suo $epi(f)$ è un ins. convesso

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in I \wedge y \geq f(x)\}$

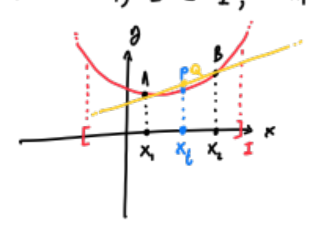
<u>alt. def</u>: f convessa in I int. se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad \forall t \in [0,1]$$
$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq t f(x_2) + (1-t) f(x_1)$$

"disuguaglianza di convessità"

<u>signif. geom. della disug. di convessità</u>:

Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$



definiamo $g: [0,1] \to [x_1, x_2]$

$t \mapsto g(t) = tx_2 + (1-t)x_1$

si prova che g è biiettiva

da questo segue che un punto di $[x_1, x_2]$ si può rappresentare in forma:

$\underbrace{tx_2 + (1-t)x_1}_{\text{C.L. convessa di } x_1 \wedge x_2}$ per $t \in [0,1]$

C.L. $\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
C.L. convessa $\Rightarrow$ aggiungo $\alpha, \beta \geq 0 \wedge \alpha + \beta = 1$

Poniamo $x_t = tx_2 + (1-t)x_1$
$t \in [0,1]$
↓
$x_t = g(t)$ quindi tra x_1 ed x_2

Costruiamo i punti:
$A(x_1, f(x_1))$
$B(x_2, f(x_2))$
$P(x_t, f(x_t))$

E proviamo la retta per i due punti AB:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, con $(x_0, y_0) = A$ oppure B, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$\Big\}\ y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

questa è la retta AB in x mobile

Tale retta è anche il grafico della fu. $h(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Cosa rappresenta $h(x_t)$?

$\Rightarrow$ è il punto di AB in $x = x_t$

$$h(x_t) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_t - x_1)$$

$$= \quad " \qquad \frac{(tx_2 + x_1 - tx_1 - x_1)}{t(x_2 - x_1)}$$

$$= f(x_1) + tf(x_2) - tf(x_1)$$

$$= tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$$ è il II membro della disug. conv.

Quindi f è convessa $\iff \forall x_1, x_2 \in I \wedge \forall t \in [0,1]$ $y_P \leq y_Q$

In qualsiasi due punti di f in cui creiamo una corda ($\overline{AB}$), P è al di sotto

<u>Def</u>: f è strett. convessa in I se nella disug. di conv. vale $<$ $\forall t \in (0,1)$

↳ perché in 0, 1 $x_t = A$ o $x_t = B$ quindi no?

<u>Es</u>: f convessa ma non str. conv.:

<u>T. prop. fu convessa</u>:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa in I int

$\Rightarrow \forall$ punto interno a I x_0, f è continua in x_0 ed $\exists$ $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ finite

@

[In generale, una fu. convessa non è derivabile, perché può avere pt. angolosi in I

Se assumo f derivabile, posso dare condizioni necessarie e sufficienti affinché sia convessa

↓

<u>T. caratt. della conv.</u>

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I intervallo

Le seguenti aff. sono equivalenti:

(a) f è (str) convessa in I

(b) f' è (str) crescente in I

(c) graf(f) si trova al di sopra di ogni retta tangente

$\iff f(x) \overset{> \text{str}}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x_0, x \in I \quad x \neq x_0 \to$ non nel pt. di tangenza

ricorda di usare questa per le tan al posto di geometry

a $\iff$ b $\iff$ c

Usando il Test di monotonia

<u>T.</u> $\exists f'' \in I$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in I intv.

$\Rightarrow f$ convessa in $I \iff f'$ cresc.

$\Updownarrow$ ← per il test di monotonia allora è quando la sua derivata ≥ 0

$f''(x) \geq 0$

è come l'accelerazione della fu!

$\Rightarrow f$ str. convessa in $I \Leftarrow f''(x) > 0$

↳ <u>es.</u>: $f(x) = x^4$ perché f'' si annulla in 0 nonostante sia str. crescente

<u>Esempi di fu. convesse</u>:

1) $f(x) = a^x \quad a > 0, \ a \neq 1$

dom $f = \mathbb{R}$

$\exists f'(x) = a^x \ln a$

$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = a^x \ln a$

$\exists f''(x) = (a^x \ln a)\ln a = a^x (\ln a)^2$

$f''(x) > 0 \ \forall x \Rightarrow f$ è str. convessa in $\mathbb{R}$

2) $f(x) = x^\alpha \quad x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$

dom $f = \mathbb{R}$

derivabile

$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}$

↓

quando $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \overset{>}{\geq} 0$, f è convessa stretta

$\Rightarrow \alpha \overset{<}{\leq} 0 \vee \alpha \overset{>}{\geq} 1$

3) $f(x) = \log_a x \quad a > 0, \ a \neq 1$

dom $f = (0, +\infty)$

$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

$f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln a}\right)$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\ln a}\right)}_{\text{costante in } x}$ non tocca

quando $f''(x) \geq 0$?

$f''(x) > 0 \ \forall x > 0 \iff -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln a}\right) > 0 \ \forall x > 0$

$\iff x^2 \ln a < 0$ "

$\iff 0 < a < 1$

<u>Es.</u>: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa

$\Rightarrow$ non sappiamo se è derivabile, ma sappiamo che:

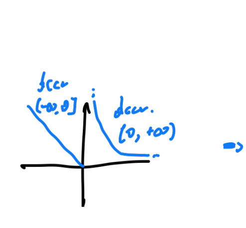
f è continua in (a,b)

<u>Es</u>: $f(x) = \begin{cases} e^{3x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ non è continua $\overset{\text{in dom} f}{\iff}$ non può essere convessa ai punti interni in dom f

$\Updownarrow$

non è iniettiva, è monotona



$\Rightarrow$ non è $\nearrow$cre in dom f ... why?

<u>Es</u>: stabilire disug. usando la convessità/concavità delle fu coinvolte:

a) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$

a) in e^x tro disug. convessità ?
" $1+x$ " concavità

$f(x) = e^x \Rightarrow$ str. conv. in $\mathbb{R}$

provo in $x_0 = 0$ la retta tan al graf. f in $y = 0$:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= 1 + x \quad \Rightarrow$ in $x = 0$ le due si incontrano ma non in altri punti $\Rightarrow$

b) $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$

$f(x) = \ln(1+x)$

è str. concava in $(-1, +\infty)$ dalla trasl. a sinistra della concavità $\ln(x)$!

$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

basta provare per un qualsiasi x_0 ...?

$x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) \leq x$ è verificato

<u>Es.</u>: Sia (a_n) succ. definita:

succ. definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = e^{a_n} - 1 \quad n \geq 0 \end{cases}$

↓

$a_0 = 1$
$a_1 = e - 1$
$a_2 = \dots$

• a_n è monotona?

$\iff a_n \leq a_{n+1} \ \forall n$?

$\iff a_n \leq e^{a_n} - 1 \ \forall n$?

sfruttiamo una fu. per associarla alla succ.:

da a) $\Rightarrow e^x \geq 1 + x$

ma allora $a_n \leq e^{a_n} - 1 \ \forall n$

$\Updownarrow$

$e^{a_n} \geq a_n + 1 \ \forall n$

Punti di flesso

<u>Def.</u>: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intv.
Sia $x_0 \in I$ interno

Assumiamo $\exists f'(x_0)$ in/finita ($f'_+ = f'_-$)

Diciamo x_0 punto di flesso per f se $\exists$ intorno sx. di x_0 in cui f è convessa e un intorno dx x_0 in cui f è concava o viceversa

se $\exists f''$ in x_0 sarà 0

<u>T.</u>:
Se x_0 è pt flesso in cui $\exists f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$

no $\Leftarrow$
perché $\exists$ punti che annullano f'' ma non sono di flesso!

$f(x) = x^4$

$f''(0) = 0$ ma non è pt. di flesso!
str. convessa ovunque!

<u>Ossv.</u>: $\exists$ pt flesso dove $\nexists f''$

<u>es</u>: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$

$f'(0) = +\infty \to f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \ \nexists$

$\nexists f''(0)$

ma ha comunque flesso!

<u>Ossv</u>: graf. f. attraversa la retta tangente in un pt. di flesso (con f derivabile)