Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$
(quindi appl. lineari che sono endomorfismi perché $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n\}$ base di $\mathbb{R}^n$

Costruiamo $N = (\underline{v}_1 | \cdots | \underline{v}_n)$ che è la mat. del cambio di base

$X \in \mathbb{R}^n \quad X = [X]_{canonica}$

$\Rightarrow$ canonica $= \{\underline{e}_1 | \cdots | \underline{e}_n\}$

$X' = [X]_{\mathcal{B}}$

$[X]_{canonica} = X = \boxed{N} X'$

cambio base da $\mathcal{B}$ a canonica

Per l'op. lin.:

$Y = L_A(X) = AX$

$Y' = [Y]_{\mathcal{B}} \Rightarrow Y = NY'$

sappiamo $N \in GL(n, \mathbb{R})$ quindi invertibile

$NY' = ANX'$

$\cancel{N^{-1}N}Y' = N^{-1}ANX'$ non commutativo!

$Y' = N^{-1}ANX'$

$Y' = [Y]_{\mathcal{B}}$ coord. su base diversa

A' chiamata similitudine
funziona $\forall$ applic. lineari!

A' è la matr. che rappresenta l'applicaz. lineare sulla base $\mathcal{B}$!

$A' = [L_A]_{\mathcal{B}}$

$\dim \operatorname{Im} L_A = \dim A' = \operatorname{rk} A$
per il n° colonne?

Def: $A, B \in M_{\mathbb{R}}(n)$

B è simile ad A se $\exists N \in GL(n, \mathbb{R}) : B = N^{-1}AN$
quindi si possiedono matrici di cambio di base per raggiungersi

$B \sim A$

Proprietà:

1) riflessiva
$A \sim A$ per $N = I_n$
$A = N^{-1}AN = I_n A I_n = A$

2) simmetrica
$B \sim A \Rightarrow A \sim B$
Hp. $\exists N \in GL(n, \mathbb{R})$ invertibile: $B = N^{-1}AN$
Th. $\exists M \in GL(n, \mathbb{R}) : B = M^{-1}BM$

$B = N^{-1}AN$
$NBN^{-1} = \cancel{N(N^{-1}AN)N^{-1}}$
$NBN^{-1} = A$
quindi $M = N^{-1}$
$N^{-1} = M^{-1^{-1}} = M$

in pratica usiamo il cambio di base avanti e indietro e da entrambe A e B raggiungo B ed A, usando le matrici inverse

quindi "A e B sono simili" senza priorità di: A, B.

3) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\exists N : B = N^{-1}AN$
$\exists P : C = P^{-1}BP \Rightarrow C = \underbrace{P^{-1}N^{-1}}_{M^{-1}} A \underbrace{NP}_{M} = M^{-1}AM$

è come se passasse alla B canonica, poi andasse alla base viceversa, in questo caso 2 volte?

possiede propr.:
• riflessiva, simmetrica, transitiva

$\Rightarrow$ è una relazione "equivalenza"

I_n n è la dimensione non il nome $\nearrow I_2, I_4 \cdots$

Ossv.: I_n è simile solo a se stessa $\forall n \in \mathbb{N}$

Sia $B \sim I_n \Rightarrow \exists N : N^{-1}I_nN = N^{-1}N = I_n$
è solo I_n

anche per O_n vale lo stesso

Prop.: Siano $A, B \in M_{\mathbb{R}}(n)$ simili

$\Rightarrow$ 1) $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$

$\exists L_A, N : B = N^{-1}AN$ $\quad N$ è invertibile $\Rightarrow$ mat. al cambio di base $\mathcal{B} = \{N^1, \dots, N^n\}$
e $\underset{A'}{B} = [L_A]_{\mathcal{B}} \Rightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$

2) $|A| = |B|$

$\exists N : B = N^{-1}AN$
$|B| = |N^{-1}||A||N| = |A|$
th. Binet

3) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$
$(\cdots)$

1, 2, 3 sono invarianti per similitudine
significa che le quantità che variano al variare della base non contano, quindi c'è invariabilità indipendentemente dalla base che usiamo!!
come se il punto di vista cambia, il vettore non si modifica ma solo si riorienta/ridimensione

Lemma Date $P, Q \in M_{\mathbb{R}}(n)$
$\operatorname{tr} PQ = \operatorname{tr} QP$

$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \operatorname{tr} PQ = \sum_{i=1}^{n} (PQ)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} P_i Q^i$

$= P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{21} + \cdots + P_{1n}Q_{n1} +$
$+ P_{21}Q_{12} + P_{22}Q_{22} + \cdots + P_{2n}Q_{n2} +$
$\vdots$
$+ P_{n1}Q_{1n} + P_{n2}Q_{2n} + \cdots + P_{nn}Q_{nn} =$
$Q_1P^1 + Q_2P^2 + \cdots + Q_nP^n = \operatorname{tr} PQ$

$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(N^{-1}AN) = \operatorname{tr}(ANN^{-1}) = \operatorname{tr} A$

1), 2), 3) cond. necessaria per dire $A \sim B$
sufficiente?

AB: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$; $\det A = \det B$; $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \Rightarrow B \sim A$?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 1 \qquad |B| = 1$
$\operatorname{tr} A = 2 \qquad \operatorname{tr} B = 2$
$\operatorname{rk} A = 2 \qquad \operatorname{rk} B = 2$

$A = I_2 \not\sim B$ $\quad$ è solo cond. necessaria ma non sufficiente

Prendiamo $L : E_0^2 \to E_0^2$
$\mathcal{B} = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}\}$

Prop.: un'ap. lineare è definita una volta note le immagini dei vettori del dominio

$L(\hat{\underline{i}}) = \hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}$
$L(\hat{\underline{j}}) = \hat{\underline{i}}$
$\Rightarrow \underset{= L}{[L]_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ prendo le immagini del dominio e le trasformo nella base del codom. manca un pezzo

$\mathcal{D} = \{\underline{v}_1 = \hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}, \underline{v}_2 = \hat{\underline{i}} - \hat{\underline{j}}\}$

$[L]_{\mathcal{D}}$?

$L(\underline{v}_1) = L(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}) = L(\hat{\underline{i}}) + L(\hat{\underline{j}}) = 2\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}$
ricorda che stiamo applicando un vettore sulle incognite del sistema

$= \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 = \alpha(\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}}) + \beta(\hat{\underline{i}} - \hat{\underline{j}}) = (\alpha + \beta)\hat{\underline{i}} + (\alpha - \beta)\hat{\underline{j}}$
$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow [L]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\exists N : B = N^{-1}AN$

$X = [\underline{u}]_{\mathcal{B}} \quad Y = [L(\underline{u})]_{\mathcal{B}} \qquad Y = AX$
$X' = [\underline{u}]_{\mathcal{D}} \quad Y' = [L(\underline{u})]_{\mathcal{B}} \qquad Y' = \boxed{B}X' = N^{-1}ANX'$

$[\underline{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}[\underline{u}]_{\mathcal{D}}$

$X = NX'$
$Y = N^{-1}Y'$
mat. cambio base

$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

prendiamo la matrice colonna per colonna $[\underline{u}]$ e ricaviamo $\underline{u}$ cambiato di base.

$N^{-1} = ?$

Prop.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$

Colonne di A lin. dip. $\Leftrightarrow \det A = 0$
$\Leftrightarrow \exists$ c.l. non banale di: $A^1 \dots A^n$ che produce il v. nullo.
$\Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq \underline{O}_n : \alpha_1 A^1 + \cdots + \alpha_n A^n = \underline{O}_n$
$\Longleftrightarrow$ cioè sol. di $AX = \underline{O}_n$
$\Longleftrightarrow$ cioè $\in \ker A$
"kernel non è banale contiene altro che $\underline{O}_n$"
perché il kernel è l'ins. delle sol. del sist. omog. associato
$\Leftrightarrow$ è autovettore di: A con autovalore nullo $\lambda = 0$

Ossv.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$: $A^j = \alpha \underline{e}_j$ per un certo j

Es.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 2ª colonna! ed anche $4\underline{e}_2$

$A\underline{e}_2 = A^2 = 4\underline{e}_2 \to$ perché abbiamo selezionato la 2ª colonna, ed otteniamo valore equivalente a 4 volte $\underline{e}_2$!
quindi $\in$ Span $\underline{e}_2$ pertanto autovettore moll. ·4 autovalore

$\Rightarrow \underline{e}_j$ è autovettore di A con autovalore α

Ossv.: Sia $\Delta \in M_{\mathbb{R}}(n)$ diagonale

$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (d_1\underline{e}_1 | d_2\underline{e}_2 | \cdots)$

$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ sono autovettori di Δ perché diagonale!
con autovalori $d_1 \cdots d_n$ nell'ordine

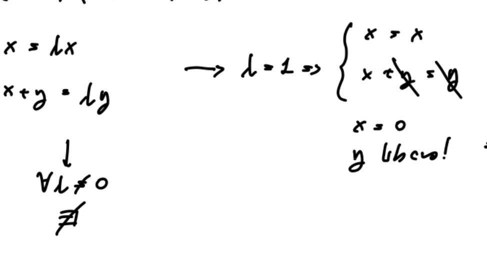
"e quindi" matrice $\Leftrightarrow$ appl. lineare?

Ci saranno certe matrici che si riuscirà a rendere simili ad una diagonale:
"diagonalizzabile"

Es: $L : E_0^2 \to E_0^2$ lineare $|$ $L(\hat{\underline{i}}) = \hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}} \quad L(\hat{\underline{j}}) = \hat{\underline{i}}$
$\mathcal{B} = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}\}$

mat. rappr. appl. lineare su base $\mathcal{B}$:
$A = [L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

vediamo che il 2ª colonna è $= 1\underline{e}_2$
$\Rightarrow \underline{e}_2$ è autovettore di A con autov. 1 $(A\underline{e}_2 = 1\underline{e}_2)$
$\in$ al suo Span invariato (del vettore)



$L(\alpha\hat{\underline{i}}) = \alpha L(\hat{\underline{i}}) = \alpha\hat{\underline{i}} + \alpha\hat{\underline{j}}$ immagine di $\alpha\hat{\underline{i}}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \longrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x + \cancel{y} = \cancel{y} \end{cases}$

$\downarrow$
$\forall \lambda \neq 0$
$\nexists$

$x = 0$
y libero! $\Rightarrow$ quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore!

Ossv.: Se X autovet. A con autoval λ
$\Rightarrow Y \in \operatorname{Span}(X) \quad Y \neq \underline{O}_n$
è autovettore di: A con autoval λ

$Y = \alpha X$?
$AY = \lambda(\alpha X)$

Diagonalizzabilità

Prop.: equivalente in $M_{\mathbb{R}}(n)$:

1) A è simile a una mat. diagonale
2) $\exists$ base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovet. A