Analisi 20231129

← Calcolo differenziale e approx.

$f' \Rightarrow$ approx. di fn

Sia f derivabile in x_0. Allora $f(x)$ si approssima con la formula:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

↳ infinitesimo di ord > $(x-x_0)$ $\Rightarrow$ $\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

"errore di approx"

Form. di linearizzazione

⇓ (di max)

è un polinomio di 1° grado $\Rightarrow$ $a + bx$

$\Rightarrow$ il graf. fn. si approssima con il grafico della retta tan.

approx. di tipo Locale, valida solo presso x_0.

- analiticam.: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
- geometricam.: approx. locale ad x_0 per la retta tan. al punto $(x_0, f(x_0))$

<u>Upgrade della formula:</u> più derivate possibili nel punto x_0 (in f) $\Rightarrow$ migliore approx.

$f' \dots f'' \dots f''' \to$

<u>Def.:</u> Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intv.
Sia x_0 pt. interno ad I
Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

assumo che f abbia derivate in x_0 fino all'ordine n
$f', \dots, f^{(n)}$

Con queste derivate possiamo costruire un polinomio:

Si chiama "polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0"

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right] =$$

$$= \underbrace{f(x_0)}_{k=0} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3}_{k=3} \dots + \underbrace{\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{k=n}$$

con grado di $T_{n,x_0} \leq n$

<u>Teorema:</u>

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intv. una fn derivabile n volte in x_0
$x_0 \in I$ interno, $n \geq 1$

Allora vale la seguente:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

↳ riduce l'errore

"o()" ⇑

$\Rightarrow$ formula di Taylor di ord. n centrata in x_0 con resto in forma di Peano

<u>Ossv.:</u>

① $T_{1,x_0} \equiv f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$
form. di linear.
⇓ generalizzata

② con $x_0 = 0$ si parla di <u>formula</u> (polinomio) di Maclaurin

③ T_{n,x_0} è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa la formula di Taylor
$\Rightarrow$ è il più approssimante?

④ T_{n,x_0} soddisfa le seguenti formule:

- $T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0)$ approx. della f!
  valore del polinomio al centro del pol.

  $T_{n,x_0}(x_0)$
  ↓ retta tan x_0
  ↳ presa nel pt. x_0

- $T^{(n)}_{n,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ anche le loro derivate

<u>Ex.:</u> Scrivi il pol. di Taylor di ord. 2 della fn centrata in $x_0 = 2$
$f(x) = \ln(1+x^2)$

$$T_{2,x_0}(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2$$

$f(2) = \ln 5$

$f'(2) = \frac{1}{1+2^2}(4) = \frac{4}{5}$ ($2x$, x^2)

$f''(2) = D\left[\frac{2x}{1+x^2}\right] = \frac{2(1+x^2)-(2x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{10-16}{25}$

$= -\frac{6}{25}$

$\Rightarrow T_{2,x_0}(x) = \ln 5 + \frac{4}{5}(x-2) - \frac{3}{25}(x-2)^2$
<u>POLINOMIO</u> DI TAYLOR

$\Rightarrow f(x) = \ln 5 + \frac{4}{5}(x-2) - \frac{3}{25}(x-2)^2 + o((x-2)^2)$ per $x \to 2$
<u>FORMULA</u> DI TAYLOR

nasconde un limite

<u>Ex.:</u> Sia f fn derivabile 2 volte in $\mathbb{R}$

Sia $T_{2,-1}(x) = 1 + x + x^2$ il suo pol. Taylor
- ord 2
- centrato -1

non è scritto in forma polinomiale di Taylor $\Rightarrow$ non conosciamo comp. della f!

(a) $f(-1) = -1$ (c) $f'(-1) = 1$
(b) $f''(-1) = 1$ (d) $f(-1) = 1$

$\Rightarrow$ il polinomio $T_{2,-1}(x)$ è implicito $T^{(k)}_{2,-1}(x)$
quindi nel centro -1 sappiamo che: (solo nel centro!!)
$f^{(k)}(-1) = T^{(k)}_{2,-1}(-1)$

$\Rightarrow$ qui $T_{2,-1}(-1)$ ha $k=0$ ed è $f(-1)$
⇓
$T_{2,-1}(-1) = 1 \Rightarrow f(-1) = 1$

<u>Ex.:</u> form. Maclaurin ord. 2 di ($x_0 = 0$)
$f(x) = \cos x$

$$T_{2,0}(x) = \cos \underset{x_0}{x} - \sin \underset{x_0}{x}(x) - \frac{1}{2}\cos x (x^2)$$

⚠ attento a dove usi x e x_0

$$= \cos x - x\sin x - \frac{1}{2}x^2\cos x$$

$$f(x) = \cos x - x \sin x - \frac{1}{2}x^2\cos x + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

↳ ord 2

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

è una parabola che si avvicina maggiore è il grado!

retry: form. Maclaurin
- ord. 2
- centro 0 implicito
- $f(x) = \cos x$

$$T_{2,0}(x) = \cos 0 - \sin 0\,(x-0) - \frac{1}{2}\cos 0\,(x-0)^2$$

$$= 1 - 0 - \frac{1}{2}(1)x^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0 \quad ✓$$

<u>Dim:</u> form. Taylor ord. 2

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \qquad x \to x_0$$

Ricordiamo che una $g(x) = o((x-x_0)^2)$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^2} = 0$ (infinitesimo)

↳ 1^a def. di o()

$\Rightarrow$ usando il limite, mostriamo che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

$\Rightarrow$ De L'Hopital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-0-f'(x_0)(1)-\frac{1}{2}f''(x_0)\,2(x-x_0)}{2(x-x_0)} = 0?$$

Skr

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2} = 0?$$

rapp. incr. f'

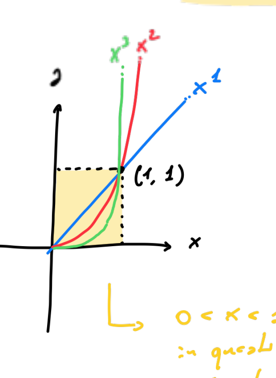
$$\lim_{x\to x_0}\cancel{\frac{f''(x_0)}{2}} - \cancel{\frac{f''(x_0)}{2}} = 0 \quad ✓$$

dicho a Taylor usando la dimostrazione con de L'Hopital, anche a gradi maggiori!

Ossv.: form. di Maclaurin ord. n

$$f(x) = T_{n,0} + o(x^n) \qquad x \to 0$$

infinitesimo (resto) di ord > x^n per $x \to 0$
cioè $o(x^n) \to 0$ più velocemente di x^n



↳ $0 < x < 1$
in questi punti, più è alto n, più velocemente si avvicinano a 0!

con resto di approx. di grado alto, abbiamo approx sempre migliori!
crescono più veloci

Solo le fn regolari (lisce) si possono approssimare!! non tutte $\Rightarrow$ verificare derivabilità.
↳ <u>quante derivate possiede</u> nel centro richiesto!

Sviluppi di Maclaurin notevoli (formule) (per i limiti)

1 $f(x) = e^x$ $\qquad x_0 = 0$

$\Rightarrow$ derivabile n volte in 0 $\forall n \in \mathbb{N}$ ($+\infty$)

vale la f. Maclaurin di qualunque ordine

formula → polinomio → ← formula

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \qquad x \to 0$$

$$e^x = \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}x^i\right] + o(x^n) \qquad x \to 0$$

perché $x_0 = 0$

<u>Es.:</u> $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{0}{0}$ f.i.

no stime asint. per termini di una somma, si evitano complicazioni!

uso sviluppo MacL. ord. 2
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{x}}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

perché con $x \to 0$ per def. $= 0$
↳ $o(x^2)$ più veloce tende a 0 quindi il denom. è maggiore del num. mentre $x^2 \to 0$

- stime asintotiche
- De L'Hopital
- Sviluppi di Maclaurin/Taylor

2 $f(x) = \sin x$ $\qquad x_0 = 0$

derivabile $+\infty$ volte

f ammette derivate di qualunque ordine in $\mathbb{R}$
e $0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f''''(x) = \sin x$

$f(0) = 0$
$f'(0) = 1$
$f''(0) = 0$
$f'''(0) = -1$

annullate tutte gli ordini pari!
si invertono tutte le dispari a due a due

$$\Rightarrow \sin x = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)!}\right] + o(x^{2n+1}) \qquad x \to 0$$

pol. Maclaurin di ord. $2n+1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \qquad x \to 0$$

ordine 3 = ord 4
ordine 7 = ord 8

} polinomio coincidono, ma non le formule, perché $o(x^3)$ in ord 3, $o(x^4)$ in ord 4!

$\sin x$ è dispari
→ solo potenze dispari

↳ se pari, solo pari
se dispari, solo dispari