Geometria 20231017

⇦ SV, SVR, E_o^3, $\mathcal{E}$, basi e generatori

Oss.:

Sia $B = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ base di E_o^3

$\forall\ \vec{OP} = \underline{a} \in E_o^3\quad \exists!\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \mid \vec{OP} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$

si trovano infinite combinazioni lineari per trovare $\underline{a}$ dalla base B.

allora:

Def.: sia $B = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ base di E_o^3, $\forall\ \vec{OP} \in E_o^3$ chiamiamo "coordinate di $\vec{OP}$ su B" la terna ordinata $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{OP} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$

→ scrivo $[\vec{OP}]_B = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ → generalizzabile in SV qualunque

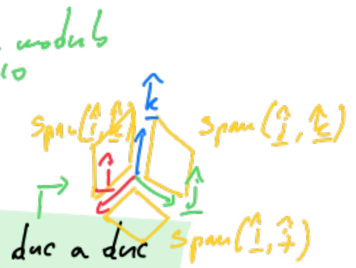
scegliamo coordinate adeguate:

in E_o^3 cerchiamo base ORTONORMALE → vett. di base ortonorm.

Def.: $B = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}\}$ se B è base di E_o^3

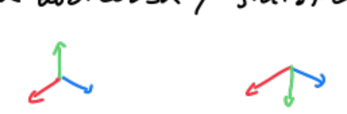
versori = vett. a modulo UNITARIO

e $\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}$ hanno modulo unitario: $\|\hat{\underline{i}}\| = \|\hat{\underline{j}}\| = \|\hat{\underline{k}}\|$



inoltre i tre versori sono mutuamente ortogonali → ⊥ due a due

(terna destrorsa / sinistrorsa



"regola delle tre dita")

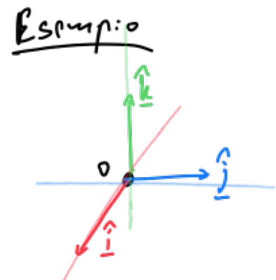
Def.: chiamiamo riferimento cartesiano ortogonale (ortonormale) $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$

la scelta di un'origine e una base ortonormale $B = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}\}$

inoltre, dato $\vec{OP} = \underline{v} \in E_o^3$, si chiamano coordinate cartesiane di $\vec{OP}$ su B i numeri della terna $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = [\vec{OP}]_B$ "vett. delle coordinate"

$\vec{OP} = \alpha\hat{\underline{i}} + \beta\hat{\underline{j}} + \gamma\hat{\underline{k}}$

Esempio



Fissato $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$,

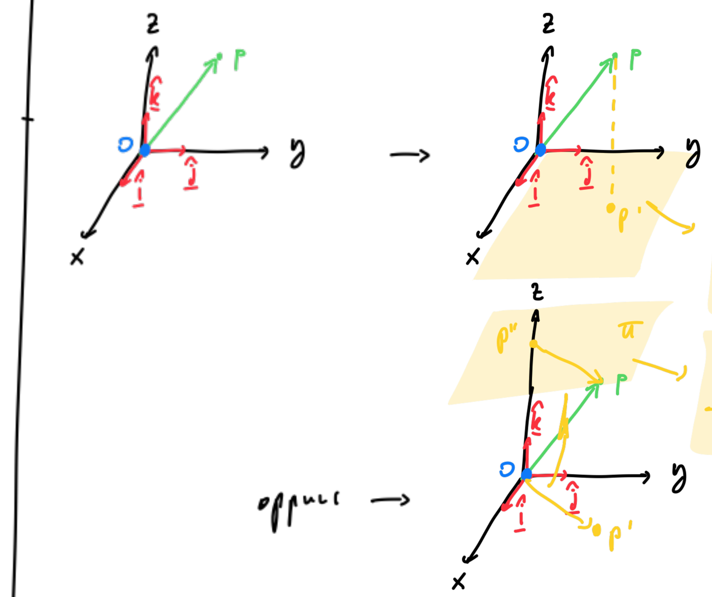
i, j, k possono essere scelti anche diversamente, son il riferimento di tutto il resto! Basta siano base e seguano regole sopra

Span$(\hat{\underline{i}})$ → retta O_x
Span$(\hat{\underline{j}})$ → retta O_y
Span$(\hat{\underline{k}})$ → retta O_z
rette coordinate

piano xO_y: Span$(\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}})$ piani coordinati
stessa cosa per le altre due permutaz.

$\vec{OP} = \underline{v}$

$[\vec{OP}]_B = [\underline{v}]_B = \begin{pmatrix}x_P\\y_P\\z_P\end{pmatrix}$ coordinate del punto P → vett. coord. di P

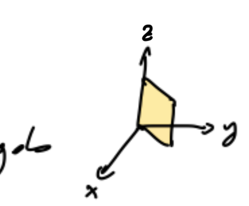


① $OP' \in$ Span$(\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}})$ → $OP' = \alpha\hat{\underline{i}} + \beta\hat{\underline{j}}$

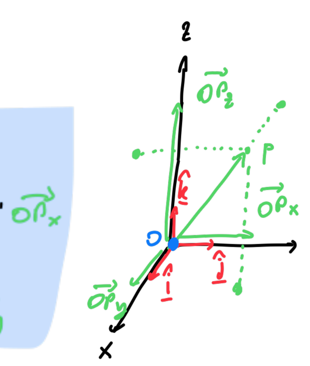
② $P'' \in \pi \cap O_z$ → $\vec{OP''} = \gamma\hat{\underline{k}}$

π è il piano passante per P e // xO_y

Oss.: $OP'PP''$ è un rettangolo



- γ è rapporto tra $\hat{\underline{k}}$ ed $\vec{OP''}$ $\vec{OP_z}$
- α " $\hat{\underline{i}}$ e la componente x di $\vec{OP'}$ $\vec{OP_x}$
- β " $\hat{\underline{j}}$ e la componente y di $\vec{OP'}$ $\vec{OP_y}$



Oss.: fissato $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$

i vettori $\vec{OP} \in E_o^3$ sono in corr. biunivoca con i $P \in \mathcal{E}$ piano euclidiano dei PUNTI

mediante la rappr. di $\vec{OP}$ attr. le sue coordinate $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$

Oss. II: $\underline{O}_{E_o^3} = \vec{OO} \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{O}_3 \in \mathbb{R}^3$ (isomorfismo tra sp. vettoriali)

fisso riferimento $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$

$\underline{v} = \vec{OP} \mid [\vec{OP}]_B = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ ossia $\vec{OP} = v_x\hat{\underline{i}} + v_y\hat{\underline{j}} + v_z\hat{\underline{k}}$

$\underline{u} = \vec{OQ} \mid [\vec{OQ}]_B = \begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$

chiamiamo la base $B = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}\}$

$\underline{u}$??
$\vec{OP}$ rappr. geometrica

$\hat{\underline{i}}$ è "versore": avendo lungh. unitaria, serve a dare la direzione! è base...?

$\vec{OP} + \vec{OQ} = (v_x\hat{\underline{i}} + v_y\hat{\underline{j}} + v_z\hat{\underline{k}}) + (u_x\hat{\underline{i}} + u_y\hat{\underline{j}} + u_z\hat{\underline{k}})$

per propr. assoc. si possono togliere le parentesi

omogeneità sol. in "+"? sì

$= (u_x + v_x)\hat{\underline{i}} + (u_y + v_y)\hat{\underline{j}} + (u_z + v_z)\hat{\underline{k}}$ → distributiva è applicata

coordinate di ... su base B

$[\vec{OP} + \vec{OQ}]_B = \begin{pmatrix}u_x + v_x\\u_y + v_y\\u_z + v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$ per "+" in $\mathbb{R}^3$ $= [\vec{OP}]_B + [\vec{OQ}]_B$

somma delle coord. omologhe

$\vec{OP} = (v_x\hat{\underline{i}} + v_y\hat{\underline{j}} + v_z\hat{\underline{k}})$

$[\vec{OP}]_B = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$

⇨ versori nel risultato di $\vec{OP} + \vec{OQ}$; solo coordinate al risultato di $[\vec{OP}]_B + [\vec{OQ}]_B$

$\alpha\vec{OP} = \alpha(v_x\hat{\underline{i}} + v_y\hat{\underline{j}} + v_z\hat{\underline{k}})$

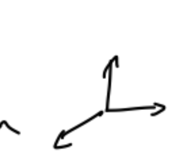
$= \alpha(v_x\hat{\underline{i}}) + \dots$

$= (\alpha v_x)\hat{\underline{i}} + \dots$ omogeneità

$\Rightarrow [\alpha\vec{OP}]_B = \begin{pmatrix}\alpha v_x\\\alpha v_y\\\alpha v_z\end{pmatrix} = \alpha[\vec{OP}]_B$

vettori ⇔ coordinate

addiz. geometrica → parallelogramma



addiz. aritmetica → trasf. in coordinate e somma

$\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}$ da soli → coord. del vett. nel piano (?) → $\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$ generalizzato