Es.: Studia la conv.za di:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \boxed{\frac{\arctg(n^3)}{n^3-3n^2+3n+1}}$ a_n

cr. Leibniz.

- $a_{n+1} \le a_n$
- $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

passo a fn da succ. (a_n)

$f(x) = \frac{\arctg x^3}{x^3-3x^2+3x+1}$

studio segno della $f'(x)$

$f' \le 0$

strada complessa... provo prima con

↳ conv.za assoluta?

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{\arctg(n^3)}{n^3-3n^2+3n+1}\right|$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctg(n^3)}{n^3-3n^2+3n+1}$ positiva (almeno def.t.) $\Downarrow$ serie a t. positivi • con confr. asint.

$\Downarrow$

confronto asintotico

$\frac{\arctg n^3}{n^3-3n^2+3n+1}$

$\arctg x \sim x$ per $x \to 0$

✗ no, qui abbiamo $n \to +\infty$

ma essendo $a \to +\infty$: $\frac{\pi}{2}$ perché tende a $\frac{\pi}{2}$!

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi/2}{n^3-3n^2+3n+1} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ è serie armonica con $\alpha > 2$ $\Downarrow$ $\boxed{\text{convergente}}$

lo posso fare perché: $(n \to +\infty)$

$a_n \to \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Downarrow$

$a_n \sim \ell$

$\frac{a_n}{\ell} \to \frac{\ell}{\ell} = 1$ ✓

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\left(e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2}\right)}{\sin^2\frac{1}{n}}$

segno? stima asintotica per segno def.t.

$\sin^2\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ $n \to +\infty$

$e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} \sim$?

$\Rightarrow f(x)$ associata

$f(x) = e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2$ $\boxed{x \to 0}$

$\boxed{x = \frac{1}{n} \quad n \to +\infty}$

cerchiamo il 1° termine non-nullo!

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \dots$

t. ordine dispari si annullano!

in realtà $o(x^5)$

$\Rightarrow f(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \boxed{o(x^4)}$

$= \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)$

$\Downarrow$

per la stima che stavamo facendo

$x = \frac{1}{n}$ $\begin{matrix} x \to 0 \\ n \to +\infty \end{matrix}$

$e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} \sim \frac{11}{24}\frac{1}{n^4}$ $n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n \sim \frac{\frac{11}{24n^4}\, n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{11}{24n}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{divergente}}$ per armonica $\frac{1}{n}$?

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left[\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - \sin\frac{1}{n^3}\right]$

per quali α la serie converge?

si ferma per coerenza: stesso ordine max!

$x = \frac{1}{n^3} \Rightarrow f(x) = \ln(1+x) - \sin x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)$

↳ $n \to +\infty \Downarrow x \to 0$

$= -\frac{1}{2}x^2 + \boxed{o(x^2)}$

non usare: termini extra se ne trovo uno di ordine minore!! USO IL 1°

$\Downarrow$

iniziale a_n

$a_n \sim n^\alpha\left[-\frac{1}{2n^6}\right] = -\frac{1}{2}\frac{n^\alpha}{n^6}$ $\Leftarrow$ $f(x) \sim -\frac{1}{2}x^2$

$\Downarrow$

per quali α converge? poi per cr. asint. si applica sull'originale!

$\sum \frac{1}{n^{6-\alpha}}$ converge se $\boxed{6-\alpha > 1}$ cioè $\alpha < 5$

$\boxed{\text{Risultato: } \alpha < 5}$

↳ porto fuori $-\frac{1}{2}$ per avere serie a t. positivi

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3(e^\alpha)^n}$ per quali α conv.te?

$\frac{4^n}{n^3(e^\alpha)^n} \sim \frac{4^n}{(e^\alpha)^n}$? ✗ $\Rightarrow$ limite di confronto $= \boxed{\frac{1}{n^3} \not\to 1}$

nemmeno $n^3 + (e^\alpha)^n \sim (e^\alpha)^n$ ✗

se $\alpha < 0$ diventa infinito + infinitesimo per $n \to +\infty$

- $n^3 e^n \not\sim e^n$
- $n^3 + e^n \sim e^n$
- $\boxed{\text{ma } n^3 + (e^\alpha)^n \not\sim e^n}$

parametri possono trasformare infiniti in infinitesimi! $\Leftarrow$

cosa faccio?

cr. radice o cr. rapporto provare:

qui posso entrambi...

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^3(e^\alpha)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\boxed{\sqrt[n]{n^3}}\, e^\alpha} = \frac{4}{e^\alpha} = \ell$?

$\to 1$ per $n \to +\infty$

criterio:

$\ell > 1$ div.

$\ell < 1$ conv.

$\Downarrow$

$\frac{4}{e^\alpha} > 1 \iff \alpha < \ln 4$

" $<$ " $\alpha > \ln 4$

" $=$ " $\boxed{" = "}$

valore critico: si sostituisce nell'originale e controllo risultato

$\Downarrow$

$\alpha = \ln 4$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3 4^n} = \sum \frac{1}{n^3}$ conv. $=$ ✓

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Risultato conv. se } \alpha \ge \ln 4}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + e^{-n}}{n^6 \arctg\frac{1}{n}}$

$\arctg\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n} \to 0$

$\Downarrow$

alg. delle serie!! (entrambe a t. pos ✓)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + e^{-n}}{n^5} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-5} + \frac{e^{-n}}{n^5} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-5}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 e^n}}_{\mathrm{II}}$

I conv. $\iff 5 - \alpha > 1$ (da $n^{\alpha-5} = \frac{1}{n^{5-\alpha}}$)

II conv. $\iff$ sappiamo $\frac{1}{n^5 e^n} \le \frac{1}{n^5}$ armonica è maggiorante

magg. è conv. $\Rightarrow$ anche $\frac{1}{n^5 e^n}$ è conv. $\forall n \ge 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \forall n \ge 1 \\ 5 - \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha < 4$ converg.

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctg n}{n^{3/2} \ln(1+q^n)}$ $q > 0$ quali q conv.te?

$q < 1$ studio

$\ln(1+q^n) \sim q^n$

vogliamo q^n infinitesima per la st. asintotica

quali q?

$\arctg n \sim \frac{\pi}{2}$ $n \to +\infty$

$\Downarrow$

$\frac{\arctg n}{n^{3/2}\ln(1+q^n)} = \frac{\pi}{2}\boxed{\frac{1}{n^{3/2}q^n}}$ $\to \sum \frac{1}{n^{3/2}q^n}$ conv. q?

q^n non è infinito e $n^{3/2}q^n$ non è più rapido

cr. rapporto:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}q^{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}q^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{q^n}{q^{n+1}} = \frac{1}{q} > 1$ $\Rightarrow$ serie diverge $\Rightarrow$ div. per $q < 1$

studio per $q < 1$

cr. rapporto

$q > 1$ studio

ora $\ln(1+q^n) \not\sim q^n$

↳ non più infinitesimo!

$\ln(1+q^n) \sim \ln q^n = n \ln q$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+q^n)}{n\ln q} = \frac{\ln\left[q^n\left(1+\frac{1}{q^n}\right)\right]}{n\ln q} = \frac{\ln q^n + \ln\left(1+\frac{1}{q^n}\right)}{n\ln q}$

$= \frac{n\ln q + \boxed{\ln\left(1+\frac{1}{q^n}\right)}}{n\ln q}$ infinitesimo, quindi $\to 0$ $= \frac{n\ln q}{n\ln q} = 1$

⚠ $a_n \sim b_n \not\Rightarrow f(a_n) \sim f(b_n)$ → funziona

bisogna provarlo

Es.: $n^2 \sim n^2 - n$ ma $e^{n^2} \not\sim e^{n^2-n}$

$\Rightarrow \frac{e^{n^2}}{e^{n^2-n}} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n \to +\infty$

$\boxed{\text{non} \to 1}$

$\frac{\arctg n}{n^{3/2}\ln(1+q^n)} \sim \frac{\pi/2}{n^{3/2}\, n\ln q} = \frac{1}{n^{5/2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\ln q}}$ quindi per $q > 1$ $\boxed{\text{conv.te}}$

fisso nella somma

$q = 1$ converge banale (sost.ne)

$\Rightarrow$ per $q \ge 1$ conv.te