Analisi 20231027

← Succ.

Altre successioni notevoli

- (n^n)
- $(n!)$ "n fattoriale" $\overset{def}{=} \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n & n\geq 1 \end{cases}$

proprietà del fatt.:
$(n+1)! = (n+1)n!$

sono entrambi infiniti: $\lim_{n\to+\infty} = \infty$

infatti

$\boxed{n \geq 2}$ $\quad n^n = \underbrace{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}_{n \text{ volte}} \geq 2\cdot 2\cdot\dots\cdot 2 = 2^n$

$\to n^n \geq 2^n$ definitivamente da 2 in poi

siccome $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, per confronto anche $\lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$

inoltre, $n! = n(n-1)\cdots 1 \geq n \quad \forall n \geq 1$

$n! \geq n$

$n!$	n
1	1
2	2
6	3
...	

siccome $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \to \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

Gerarchia rispetto a questi infiniti

Pb: confr. (n^n), $(n!)$ con gli infiniti $(\log_a n)$, (n^α), (q^n)
con $a>1$, $\alpha>0$, $q>1$

Per rispondere alla richiesta: criterio del rapporto

→ Sia (a_n) una succ. a termini positivi definitivamente,
supponiamo che esista, fin./infin. $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$
$\exists$ $\quad \ell\in\overline{\mathbb{R}}$

HP da verificare quando si usa la TH

allora:
$\ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ infinitesima
$\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ infinito

Dim.:

con $\ell<1$
$\to \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, quindi deve essere FINITO:

1. $(a_n) \to$ term. positivi definitivam. ~~$-\infty$~~
2. ~~$+\infty$~~ perché con <1

$\to \ell\in\mathbb{R}$

$\to$ per def. di succ. convergente:

$\forall\varepsilon>0 \ \exists\bar{n}\in\mathbb{N} \mid \ell-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell+\varepsilon \quad \forall n\geq\bar{n}$
sapendo che a_n positivo!
$(\ell-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)a_n \quad \forall n\geq\bar{n}$

Dim:
prendiamo $n=\bar{n}+k$
allora $a_{n+1} = a_{\bar{n}+k+1} < (\ell+\varepsilon)a_{\bar{n}+k} < (\ell+\varepsilon)(\ell+\varepsilon)a_{\bar{n}+k-1} < (\ell+\varepsilon)^2(\ell+\varepsilon)a_{\bar{n}+k-2} \cdots$
cioè $0 < a_{\bar{n}+k+1} < (\ell+\varepsilon)^{k+1}a_{\bar{n}\cancel{+k}} \quad \forall k\in\mathbb{N}$

consideriamo $b_k = (\ell+\varepsilon)^{k+1}a_{\bar{n}}$

$\to a_{\bar{n}} = q^k c$ dove $q = \ell+\varepsilon$
$c = (\ell+\varepsilon)a_{\bar{n}}$

vorremmo che $q = \ell+\varepsilon \in (-1,1)$

$\to -1 < \ell+\varepsilon < 1$

$\ell = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0 \Rightarrow \ell+\varepsilon > 0 \quad \forall\varepsilon>0$

$\ell<1$: siccome $\ell<1$, scegliamo ε positivo tale che:
$\ell+\varepsilon<1 \to \varepsilon < 1-\ell$

pertanto $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0 \to \lim_{k\to+\infty} a_{\bar{n}+k+1} = 0 \to \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
per t. carab.
dimostrato che $\ell<1$ porta ad infinitesimo

Utile per quando troviamo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

Es.:
$\lim_{n\to+\infty}\frac{q^n}{n!} = \frac{\infty}{\infty}$
con $q>1$

applico cr. rapp.:
$a_n = \frac{q^n}{n!}$
HP: $a_n>0$ definitivam. ✓ $\forall n$
$\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{q^n}{n!}\right)} = \frac{q^{n+1}n!}{q^n(n+1)!} = \frac{q^{n+1}\cancel{n!}}{q^n(n+1)\cancel{n!}} = \frac{\cancel{q^n}q}{\cancel{q^n}(n+1)} = \frac{q}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{q}{n+1} = 0 = \ell$

$\ell<1$ quindi per cr. rapp.: $\lim_{n\to+\infty}\frac{q^n}{n!} = 0$

quindi q^n è di ordine inferiore ad $n!$

Es.:
$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n} = \frac{\infty}{\infty}$

$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad \forall n\geq 1 \quad (n\neq 0^0)$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}\,n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}+1} = 1 \to 1^\infty$ f.i.
$\to \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

riconduciamo ad e:
$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{[n(1+\frac{1}{n})]^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^n}}{\cancel{n^n}(1+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$

per TH: $\frac{1}{e}<1$, quindi nell'ord. infiniti $(n!) < (n^n)$

Nuova scaletta
$(\log_a n)$ (n^a) (q^n) $(n!)$ (n^n)

ma se moltiplico tra loro succ. infinite, il nuovo infinito avrà ord. superiore alle precedenti!
e se le sommo, mantengono lo stesso grado dell'inf. più grande.

Es.:
$(3^n + n^{100})$ ha ord. inf. di 3^n
per verificare: (q^n+n^α) si possono mettere a rapporto:

lez. precedente: $\frac{\text{illim.}}{\text{infinitesimo}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n^{100}}{3^n} = 1+0 = 1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
ord. infiniti applicato

trovamo che il grado del rapporto mantiene il grado della succ. max.

Def.: se $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, (a_n) e (b_n) sono ASINTOTICHE

scriviamo $a_n \sim b_n$
"asintotica a"

Proprietà:

i) $a_n\sim b_n \Rightarrow (a_n), (b_n)$ hanno lo stesso comportamento per $n\to+\infty$
entrambe divergenti $\pm\infty$, convergenti ℓ o indeterm.

$\frac{3^n+n^{100}}{3^n}\to 1 \Rightarrow 3^n+n^{100}\sim 3^n$
stesso comportamento

$n^2+n\sim n^2$
$2^n-3n^n\sim -3n^n$
...

ii) se $a_n\sim b_n$, $a'_n\sim b'_n$
allora $a_n a'_n \sim b_n b'_n$

$\frac{a_n}{a'_n}\sim\frac{b_n}{b'_n}$

$(n^2+n)(3^n-\ln n)\sim n^2 3^n$

troviamo la "stima asintotica"

iii) transitiva:
$\left.\begin{array}{l} a_n\sim b_n \\ b_n\sim c_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_n\sim c_n$

Es.:

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{3n}+n!}{10^n-3^n n^n}$

⚠ non confondere $n^{3+n}\to n^3 n^n$ ✓ con $n^{3n}\to n^3 n^n$ ✗

→ per succ. asintotiche con $n\to+\infty$ passiamo a stime asintotiche!
$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{3n}}{-3^n n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\cancel{3n}\,2n}}{-3^n\cancel{n^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2n}}{-3^n} = -\infty$ ✓

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^3 n+\sqrt[3]{n}}{-n^2+n}$

$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n^{1/3}}{n^2} = 0$ ✓

- $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$

$= \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}$ $=$ $\lim n = +\infty$, $\lim\frac{1}{n} = 0$ $\to +\infty^0$ f.i.

$\to x = a^{\log_a x}$ per $a>0 \wedge a\neq 1$
con $a=e$ ed $x=\sqrt[n]{n}$
$= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$ gr. max $= e^0 = 1$

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$ → oscilla tra 0 e 2 → indet
→ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ è infinitesima
→ per vecchio corollario, $\frac{\text{indet}}{\text{infinito}}\to 0$?

$= 0$

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+\cos n}{2n+(-1)^n}$ irregolare (indet), non ha regola fissa
però limitata (sempre quel corollario)
→ contribuisce poco la parte indet! → $n^3+\cos n\sim n^3$
$2n+(-1)^n\sim 2n$

verifica: $\frac{n^3+\cos n}{n^3}\xrightarrow{+\infty} 1+\frac{\cos n}{n^3} = 1+0 = 1$
per regola indet/inf → 0

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{2n} = +\frac{1}{2}\infty$

Ossv.: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+(-1)^n n^4}{2n+(-1)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^4}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(-1)^n n^3$ indet. $\to\nexists$
prevale l'indet.