Geometria 20231130

- T. Rouché-Capelli

$Ax = b \quad A \in M_{\mathbb{R}}(k,n),\ b \in \mathbb{R}^k,\ x \in \mathbb{R}^n$

risolubile $\Leftrightarrow rkA = rk\tilde{A} = rk(A|B)$

<u>Coroll. I</u> se sist. lin. è OMOGENEO
$\Updownarrow$
$b = \underline{0}_k$ tutte sol $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$

<u>il sist. è risolubile.</u>

<u>Coroll. II</u> se e solo se $\{A^1, \dots, A^n\}$ lin. indip. e $rkA = rk\tilde{A}$ $\Updownarrow$ risolubile

$\Rightarrow$ soluzione è unica
$\downarrow$
è l'unica C.L. della lista di colonne di A possibile!
$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 \dots = b$
ossia $b \in Span(A^1 \dots A^n)$
combin. differente di $A^1 \dots A^n$ lin. ind. producono vett. diversi!

L'opposto?
se $A^1 \dots A^n$ lin. DIP., sia x_0 soluzione: $Ax_0 = b$

$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix} \neq \underline{0}_n : \beta_1 A^1 + \beta_2 A^2 \dots = \underline{0}_n$

$x_1 = x_0 + \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix} \neq x_0$ ($\neq \underline{0}_n$) $\quad Ax_1 = A\left(x_0 + \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}\right) = Ax_0 + A\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix} = b + \underbrace{\beta_1 A^1 + \beta_2 A^2 \dots}_{\underline{0}_n} = b$

quindi soluzione $x_1 \neq x_0$

$\Downarrow$
se le col. sono lin. <u>Dip.</u>
$\Rightarrow$ infinite soluzioni.

- non risolubile
- una sola soluzione
- infinite soluzioni

} Uno, Nessuno, Centomila

<u>Prop.</u>: Sia $Ax = b$ sist. lin. con $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$
Se $\exists x_1, x_2$ sol. di $Ax = b \mid x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow \exists \infty$ soluzioni

<u>Dim</u>: $Ax_1 = B,\ Ax_2 = B$

$x_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \quad Ax_3 = A\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \overset{\text{distributiva ad un gancio}}{=} \frac{1}{2}Ax_1 + \frac{1}{2}Ax_2 = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = B$

x_3 è soluzione!
$\Downarrow$
$x = \alpha x_1 + \beta x_2 : \alpha + \beta = 1$
$Ax = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha A + \beta B = (\alpha+\beta) B = B$

<u>Ossv.</u>: La soluz. è unica sse $rkA = rk\tilde{A} = n$ → è il n° di colonne ↓ <u>tutte lin. indip</u>

$\Rightarrow rkA = n^\circ$ incognite

↳ 2×3 ma rk massimo è il min $(2,3)$ quindi non il rk max, ma il n° colonne!

$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \left(A \middle| \begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)$

sol. non è unica!

una sol è $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ per $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

perché $k < n$ ↓ rk max $= k$

quando ho ∞ sol. come le costruisco?

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

<u>ad esempio</u>

~~Conseg. del T. Cramer:~~

<u>Prop.</u>: (reg. Cramer)
sia $Ax = b$ un sist. lin. quadrato non singolare
ossia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, $|A| \neq 0$ ⟸ quindi non lin. dip. (e risolubile in una sol.?)

$x_0 = A^{-1}b$

$(x_0)_i = \dfrac{|(A^1 | \dots | A^{i-1} | \overset{\text{colonna } i}{B} | A^{i+1} | \dots | A^n)|}{|A|}$

<u>Es.</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$Ax = b = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \dfrac{|(b|A^2|A^3)|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\cancel{|A|}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

$x_2 = \dfrac{|(A^1|b|A^3)|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\cancel{|A|}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$x_3 = \dfrac{|(A^1|A^2|b)|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\cancel{|A|}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$

$x = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ✓ sistema risolto con Cramer

<u>Risoluz. di un sist. con Gauss:</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad x = ?$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ → possiamo operarlo come fosse un sistema!
- scambio tra eq. ⇒ righe
- c.l. tra eq. delle altre ⇒ righe

} mosse di Gauss

portare a triang. sup. le prime 3 col.

Opero su $\tilde{A}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (tr. sup. (le prime 3)) $\Rightarrow$ risolvo sist. dal fondo: ↑ $\Rightarrow z = 2,\ y = 1,\ x + z = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow x = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ✓ sistema risolto con Gauss

e anche il $rk\tilde{A} = 3 = rkA$

<u>I T. di Struttura:</u>

Sia $Ax = \underline{0}_k$ sist. lin. omogeneo con $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$ (essenziale alla dim. ⇒ porta tutti gli $\underline{0}_k$ del ssv)

l'ins. delle soluzioni è detto "kernel" o nucleo di A

$\Rightarrow kerA = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \underline{0}_k\}$ è un SSV di $\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow = Span$ (degli x in kerA)

<u>Dim</u>: 0) $\underline{0}_n$ è sol. di $Ax = \underline{0}_k$, $A\underline{0}_n = \underline{0}_k$, $\underline{0}_n \in kerA$ ✓ contiene $\underline{0}$ (SS0)

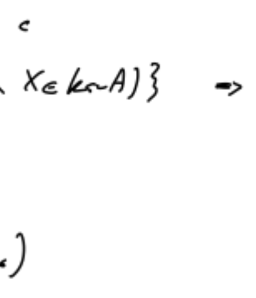
1) Siano $x_1, x_2 \in kerA$ ossia $Ax_1 = Ax_2 = \underline{0}_k$ (SS1)
$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \underline{0}_k + \underline{0}_k = \underline{0}_k$
$\Rightarrow x_1 + x_2 \in kerA$ ✓ interno alla somma

2) Sia $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ossia $Ax = \underline{0}_k$ (SS2)
$A(\alpha x) \overset{\text{omog.}}{=} \alpha(Ax) = \alpha \underline{0}_k = \underline{0}_k$
$\Rightarrow \alpha x \in kerA$ ✓ interno alla molt.

e se non fosse omogeneo?

$E_0^3 \Leftrightarrow \mathbb{R}^3$ (con base ortonorm. fissata)

$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ due piani non passanti per $\underline{0}$
$\Downarrow$
sol. è una retta r con r non passa per $\underline{0}$



$r': \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

$Span\ \underline{d} + \vec{OP_0} : r$
r' trasl. di ogni punto.

P_0 è una soluz. particolare, e può traslare da una mat. omog. r' a quella r desiderata

<u>II T. Struttura:</u>

Sia $AX = B$ sist. lin. $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$
$\Rightarrow$ Ins delle soluz $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = B\}$ è dato da $kerA + x_0$
dove x_0 è sol. di $AX = B$ "soluz. particolare" e

$\underbrace{kerA + x_0}_{} = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid Y = x_0 + x,\ AX = \underline{0}_k \text{ (ossia } X \in kerA)\}$ ⇒ può traslare il kerA del vettore X_0 soluz. particolare!

SOTTOSP. AFFINE / VARIETÀ LINEARE / SS TRASLATO

Se $x_0 \in kerA$, rimango in kerA per SS1

<u>Dim</u>: 1) $S \subset kerA + x_0$ (x_0 sol. particolare)
2) $kerA + x_0 \subset S$

2) $Y \in kerA + x_0$
$Y = x_0 + x$, $x \in kerA$ per var. lineare
$AY = A(x_0 + x) = Ax_0 + Ax = B + \underline{0}_k = B \Rightarrow Y \in S$

1) $Y \in S \overset{\text{"è soluz."}}{\Rightarrow} AY = B$
$X = Y - X_0$
$AX = A(Y - X_0) = AY - AX_0 = B - B = \underline{0}_k \Rightarrow X \in kerA$
$\Downarrow$
$Y \in kerA + X_0$

<u>Es.</u>: sist. lin. non omog. con soluz. retta E_0^3

$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ in f. parametrica $\overset{z = t}{\begin{cases} x + y = 1 + t \\ x - y = 3 + t \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}_{X_0} + t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{kerA} \quad t \in \mathbb{R}$ traslazione

↳ sarà anche la dim. sol.

$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1-k & 2+k \\ k & 1+k & 1 & -k \\ k & k & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$

$B = \begin{pmatrix}3\\1\\1+k\end{pmatrix}$

1. $rkA(k) \quad k \in \mathbb{R}$
2. per quali k il sist. è risolubile?
3. sol. per $k = 1$
4. dim. sol. per $k = 1$
5. per quali k la dim. soluz. $= 2$?

- Essendo 3×4, non avrà mai unica sol.!
- $\begin{vmatrix} k & 1 & 1-k \\ k & 1+k & 1 \\ k & k & 0 \end{vmatrix}$ scopriamo se $rkA = 3$

$= \begin{vmatrix} k & 1-k & 1-k \\ k & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1-k & 1-k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k(1 - k - 1 + k) = 0$

lin. dip.? NO, dobbiamo tentarne altre colonne.

$\begin{vmatrix} k & 1-k & 2+k \\ k & 1 & -k \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1-k & 2+k \\ 1 & -k \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} k & 1-k \\ k & 1 \end{vmatrix} =$

$= k(-k + k^2 - 2 - k) + 1(k + k^2 - k)$

$= k(k^2 - k - 2) = 0$

$k = 0 \ \vee \ k^2 - k - 2 = 0$
$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} < {}^{-1}_{2}$

$\Rightarrow k \neq 0, -1, 2$

k	rkA	$rk\tilde{A}$	Sol?
0	2	2	✓
−1	2	3	✗
2	2	3	✗
altrim	3	3	✓

$k = 0$ lavoro direttam. su $\tilde{A}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ (A | B) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0}_A & \underline{0}_{\tilde{A}} \end{pmatrix}$

$rkA = rk\tilde{A} = 2$

$k = -1$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ (A | B) $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{0}_A & \underline{1}_{\tilde{A}} \end{pmatrix}$

$rkA = 2$
$rk\tilde{A} = 3$ ✗

$k = 2$

$(\ \dots\ )$ $rkA = 2$, $rk\tilde{A} = 3$ ✗

1. $rkA = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \vee k = -1 \vee k = 2 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$

2. risolubile per $k \neq -1, 2$

per 3. sostituire k, ridurre mat. a scala e cercare le sol. con Gauss/Cramer