Geometria 20231115

matrici: scrittura compatta di sistemi lineari

⇐ • come le rette in descriz. cartesiana e le loro intersezioni...

Sistemi Lineari di k equazioni in n incognite

grado complessivo = 1° < tutte variabili 1°

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

↳ n incognite nel vett. colonna

$a x_1 x_2$ è 2° grado non si usa
↓ 0° 1°,1°

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$

↓

$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n$

L indice dell'elemento
L indice dell'equaz. →

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + \dots + a_{3,n} x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{k,1} x_1 + a_{k,2} x_2 + \dots + a_{k,n} x_n = b_k \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = B$ = vett. di incognite

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overset{2}{a_{11}} x_1 + \overset{1}{a_{12}} x_2 + \overset{0}{a_{13}} x_3 = \overset{3}{b_1} \\ \underset{1}{a_{21}} x_1 + \underset{-1}{a_{22}} x_2 + \underset{-1}{a_{23}} x_3 = \underset{1}{b_2} \end{cases}$$

prendiamo tab. dei soli coefficienti:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

riga 1

colonna 3

→ matrice (I)
| → determinante (II)

matrice (di ordine) $k \times n$

entrata, componente

→ a_{ij}, $[M]_{ij}$, M_{ij} (matrice), $(M)_{ij}$

M_i = i-esima riga

M^j = j-esima colonna

$M^j \in \mathbb{R}^k$, vettore (colonna) di k entrate, con n possibili indici

$M_i \in \overline{\mathbb{R}}^n$, vettore riga di n entrate, con k possibili indici

} $\mathbb{R}^k$ ed $\overline{\mathbb{R}}^n$ sono SV!

$M = (A^1 | A^2 | \dots | A^n)$

$M = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_k \end{pmatrix}$

vettori si sommano solo con stesso ordine

⇓

stessa cosa per le matrici!

Operazioni tra matrici

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3x4

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ 3x4

} + OK

$A + B = (A^1 + B^1 | \dots | A^n + B^n)$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Ossv.: $(A+B)_{2,3} = (A)_{2,3} + (B)_{2,3}$

$= a_{2,3} + b_{2,3} = a_{23} + b_{23}$

L'addiz. in matrici è
- commutativa → $A + B = B + A$
- associativa
- elem. neutro ∃ → $O_{k \times n} = (\underline{0}_k | \underline{0}_k | \dots | \underline{0}_n)$ matrice nulla
- ammette opposto → $-A = (-A^1 | -A^2 | \dots | -A^k)$
  $A + (-A) = O_{k \times n}$

→ $M_{\mathbb{R}}(k, n)$ è l'ins. di matrici $k \times n$ a entrate reali

→ $(M_{\mathbb{R}}(k,n), +)$ è un gruppo abeliano $\forall k, n$

→ def. molt. per scalare: definiamo

Def.: $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ scalare

$\lambda A = (\lambda A^1 | \lambda A^2 | \dots | \lambda A^n)$
$\quad \in \mathbb{R}^k$

Es.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Oss.: $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} = \lambda [A]_{ij}$

- distr. $\forall A, B \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- distr. $\forall A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
- omogeneità " $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu) A$
- $1 A = A$

→ è uno SVR (non un campo, quasi un anello)

hmm... → deve godere di tutte le proprietà prima

- gr. abeliano in +
- molt. per scalare e propr....

Dim distr. 1

$M_{\mathbb{R}}(2,3)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ $\mu = -5$

$\lambda(A+B) = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 16 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ← provata la distrib. 1

$\lambda A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

} $\lambda A + \lambda B = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Essendo uno SVR, possiamo scrivere una lista di generatori di $M_{\mathbb{R}}(2,3)$!

$\mathcal{L} = \left\{ \underset{\underline{v}_1}{E_{1,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underset{\underline{v}_2}{E_{1,2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \underset{\underline{v}_6}{E_{2,3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{L}$ è lista di generatori di $M_{\mathbb{R}}(2,3)$? ✓

$\mathcal{L}$ è lista lin. indip.? ✓ → controllare se produce $\underline{0}$ univoco

$M_{\mathbb{R}}(k,n)$ è SV univocamente generato di dimens. kn.

→ $\dim M_{\mathbb{R}}(2,3) = 6$

Def.: Se $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$ $k \neq n$

allora A è "matrice rettangolare"

altrimenti A è "matrice quadrata" → $M_{\mathbb{R}}(n,n)$ abbreviato in $M_{\mathbb{R}}(n)$

l'insieme delle matrici è anello? (str. alg.)

→ prodotto tra matrici

→ serve prodotto matrice · vettore

Def.: Prod. matrice · vettore
(ma non vettore · matrice)

$A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$A\underline{v} = v_1 A^1 + v_2 A^2 + \dots + v_n A^n \in \mathbb{R}^k$

Es.: $A = \begin{pmatrix} 2&2&2&2&2&2&2 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&2&2&3 \end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↘ interpretabile come matrice di $k \times 1$

$A\underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$

$= 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$+ 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$+ 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$+ 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(A\underline{v})_i = A_i \underline{v}$ prod. mat. · vett. colonna

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} & & & & 2 & 0 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 5 & 2 & 2 & 0 & 10 & 2 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}$$

1x4

4x3

3x1

4x3 vs 1x4
└ OK ┘

Ossv.: Se $A \in M_{\mathbb{R}}(1,n)$ $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \in M_{\mathbb{R}}(n,1)$

allora $A\underline{v} \in \mathbb{R} \in M_{\mathbb{R}}(1,1)$

se $\underline{v} = \underline{0}_n$ → $A\underline{v} = \underline{0}_k$

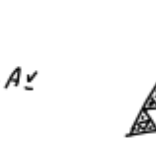
se $A = O_{k \times n}$ → $A\underline{v} = \underline{0}_k$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\underline{v} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

prodotto risulta nullo senza elem. nullo!



Hilbert Fractal
n = 4

$A(\underline{v} + \underline{u}) = A\underline{v} + A\underline{u}$

$= (v_1 + u_1) A^1 + (v_2 u_2) A^2 + \dots + (v_n u_n) A^n$

$= (v_1 A^1 + \dots + v_n A^n) + (u_1 A^1 + \dots + u_n A^n) = A\underline{u} + A\underline{v}$

⑦ $\forall A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$, $\forall \underline{e}_j \in B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

$A\underline{e}_j = A^j$ $j \in [1, n]$

$A\underline{e}_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = A^1$

$A\underline{e}_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = A^2$

$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + \dots + v_n \underline{e}_n$

$A\underline{v} = A(\underline{v})$

$= A(v_1 \underline{e}_1) + \dots + A(v_n \underline{e}_n) = v_1(A\underline{e}_1) + \dots + v_n(A\underline{e}_n)$

$A(\lambda \underline{v}) = (\lambda A)\underline{v} = \lambda(A\underline{v})$