Analisi 20231114

← teorema degli zeri (1ª prova)

T. zeri: data una fn continua $f: \underbrace{[a,b]}_{\text{chiuso e limitato}} \to \mathbb{R}$

e con $f(a)f(b) < 0$

$\exists\ c \in (a,b) \mid f(c) = 0$

Dim. iterativa: $n=0$ $\quad f(a)f(b) < 0$

procediamo convergendo: punto medio — si annulla? se sì, verificato, altrimenti:

procedendo per sezione di intervallo: $n=1$ $\quad f(a_1)f(b_1) < 0$ — prendiamo intervallo che presenta $f(x)$ opposta ai limiti dell'int. — si annulla? $n=2$

Dimostriamo che (a_n), (b_n) sono succ. monotone e convergenti

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\} = l_1$

$\lim_{n\to+\infty} b_n = \inf\{b_n\} = l_2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le l_1 \quad b_n \ge l_2$

Inoltre l'int. $[a_n, b_n]$ ha come lunghezza

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ perché dividiamo int. in 2 iterativ.

Quindi

$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0$

D'altra parte $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n = l_2 - l_1$

$\Big\}\ l_2 - l_1 = 0 \Rightarrow l_2 = l_1 \overset{def}{=} c$

Obiettivo: $f(c) = 0$

Sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = c$, $c \in [a,b]$

teorema ponte succ.→ fn

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ per f continua in c

- continuità
- t. ponte

Ora $f(a_n)f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) = [f(c)]^2 \le 0$ — T. perm. segno succ → fn

↓

unica sol.:

$f(c) = 0$ **qed**

Oss.: Lo zero c è ottenuto come limite di (a_n), (b_n):

siccome $a_n \le l_1 = c \quad b_n \ge l_2 = c$

allora (a_n) approssima c per difetto, (b_n) per eccesso

La dim. non indica il valore esatto di c, ma possiamo fare un'approssimazione:

prendiamo a_n al posto di c, l'errore di approssimaz.:

$= |c - a_n| \underset{c > a_n}{=} c - a_n \le b_n - a_n = \boxed{\frac{b-a}{2^n}}$

Come usare il T.?

Sia $f(x) = x + e^x - 3$

$\exists\ x_0 \in (0,1) \mid f(x_0) = 0$?

x_0 è soluz. di $x + e^x - 3 = 0$ → difficile da risolvere, è di tipo misto

con il T. zeri sappiamo se ha zeri!

ipotesi T. zeri:

① f continua in $[0,1]$ per Σ di fn continue — perché elementari → $\mathbb{R}$

② $f(0)f(1) < 0$

$f(0) = -2$
$f(1) = e - 2 \simeq 0{,}7\ldots$ } vero

Per il T. zeri, $\exists x_0 \mid f(x_0) = 0$

è l'unico zero? per monotonia, il fattore di f str. cresc. con se stesso somma str. cr.

come calcolo x_0, sapendo $x_0 \in [0,1]$

→ processo iterativo! METODO DI BISEZIONE

$f(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} > 0$?

$\sqrt{e} > \frac{5}{2}$?

$e > \frac{25}{4}$ falso

quindi $f(\frac{1}{2})$ è negativa → prendiamo $[\frac{1}{2}, 1]$ dove segni rimangono discordi

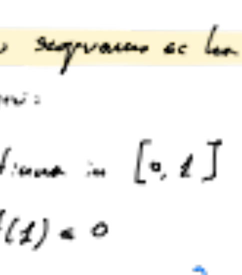
Oss.:

Mostriamo che ogni Hp T. zeri è essenziale a garantire la tesi: $\exists$ zero

- Con f non continua in $[a,b]$ basta che ci sia un salto da $-$ a $+$ e non avrò la zero! fn a tratti

- Con $f(a)f(b) > 0$ non può attraversare l'asse x per segni concordi!

E in questo caso?



è una se-allora, non un se e solo se ($\Rightarrow$, $\not\Leftrightarrow$)

perché se Hp ✓ sicuro lo zero
Hp ✗ non si sa!

Varianti T. zeri:

① int. illim.:

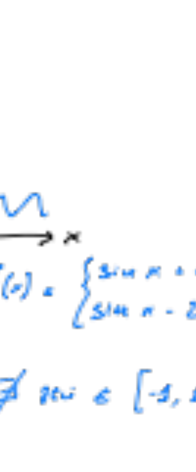
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R} \mid \underbrace{\lim_{x\to-\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} f(x)}_{\text{finiti o infiniti OK}} < 0$

allora $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0$

si può ancora usare

② int. aperto; fn continua, ma non negli estremi

sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ cont. $(a,b) \mid \lim_{x\to a^+} f(x) \cdot \lim_{x\to b^-} f(x) < 0$



allora $\exists c \in \mathbb{R} \mid f(c) = 0$

si può ancora usare

perché sottoint. $[x_1, x_2]$ è ancora valido!

↓

come?

vanno verificate le Hp di unico

se $\lim_{x\to-\infty} f(x) > 0 \to f(x) > 0$ nell'intorno di $-\infty$: $(-\infty, a_0)]$ — perm. segno limite fn

se $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0 \to f(x) < 0$ in $[(b_0, +\infty)$

Es.: dim. ②

e.g.: $\tan x + e^x - 5 = 0$

ha almeno una soluz. in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

f non definita in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ → $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x + e^x - 5 = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x + e^x - 5 = +\infty$

Massimi/minimi fn:

Sia $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ non per forza un intervallo

Ricordiamo $\sup_E f$ = minimo dei maggioranti degli estremi?

$= \sup \underset{\text{immagine}}{\mathrm{Im} f} = \sup\{f(x) \mid x \in E\}$

$\inf_E f = \inf \mathrm{Im} f = \inf\{f(x) \mid x \in E\}$

} $\exists$ garantito per assioma di continuità

Analogamente alla definizione:

Def: Sia $f: E \to \mathbb{R}$

$\max_E f = \max \mathrm{Im} f$ se esiste → min/max $\in E$, non $\mathbb{R}$

in tal caso esiste un'immagine massima → $\exists x_1 \in E \mid f(x_1) \ge f(x)\ \forall x \in E$

x_1 è il punto di massimo → posso averne tanti
$f(x_1)$ è il massimo della fn → è unico nella funzione
} e.g.: $\sin x$

Def: Sia $f: E \to \mathbb{R}$

$\min_E f = \min \mathrm{Im} f$ se esiste

in tal caso, $x_2 \in E \mid f(x_2) \le f(x),\ \forall x \in E$

- punto di minimo
- minimo

} $\ne$

Come si garantisce $\exists$ min/max? ≈ T. zeri?

Domanda: $\exists$ condiz. suff. $\exists$ m/M fn?

Risposta: sì, stabilita dal teorema di Weierstrass

T. WEIERSTRASS

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f. cont. in $[a,b]$

allora f ammette m/M in $[a,b]$ ossia $\exists\ x_m, x_M \in [a,b]$

tale che $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$

① f continua

② int. chiuso e limitato

Dim sempre bisezione...

T. valori intermedi

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f. cont. $[a,b]$

Allora f assume ogni valore compreso tra il suo min/Max

→ Siano $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$ ($\exists$ per T. Weierstrass)

→ m, M già assunti

Sia $c \in (m, M)$.

Allora $\exists\ x \in [a,b] \mid f(x) = c$

Conseg.: (corollario)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f cont. $[a,b]$

Siano m, M minimo e massimo di f in $[a,b]$

Allora $\mathrm{Im} f \subseteq [m, M]$ e $\mathrm{Im} f \supseteq [m, M]$ } $\mathrm{Im} f \overset{\supseteq}{\underset{\subseteq}{}} [m,M]$ ⇓ $=$

$m \le f(x) \le M$ — perché!

Esercizio:

Sia $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}}$

- dov'è definita f?
- " continua f?
- limiti di frontiera dell'ins. di def.?
- $\exists$ asintoti?

- Ins. di definizione (Dominio)

  $x > 0 \ \wedge\ \sqrt[3]{x-1} \ne 0$
  ↓
  $x \ne 1$

  → $(0,1) \cup (1, +\infty)$

- Ins. continuità

  potenze sono continue dove sono definite
  Denom ha pot. $\frac{1}{3}$ → $\mathbb{R}$

  $\underbrace{\text{logaritmo cont. } x > 0, \text{ frazione } x \ne 1}$

  continuità fn elementari + alg. fn continue (÷)
  verifica ins. cont. = dominio!

- limiti alla frontiera del dominio

  $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

  $\lim_{x\to1^-} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{0}{0}$ f.i.

  $\lim_{x\to1^-} \frac{\ln(1+(x-1))}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x\to1^-} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x\to1^-} (x-1)^{\frac{2}{3}} = 0$

  stessa cosa $x \to 1^+$

  lim. globale in $1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 0$

  $\exists$ prolungamento continuo di f in 1 → si può disegnare

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ f.i. → gerarchia infiniti: potenza > log. → $= 0$

- Asintoti $\quad x = 0$ as. vert. destro

  $y = 0$ as. orizz. $x \to +\infty$

- Grafico?
  - passa per $(1,0)$
  - è sempre ≥ 0

  } non abbastanza info.