Analisi: 20231018

⇐ funz. reali di var. reale, proprietà

FUNZIONI ELEMENTARI

- **f. POTENZA**

$f(x) = x^\alpha$ — α exp fisso, $\alpha \in \mathbb{R}$; x base variabile

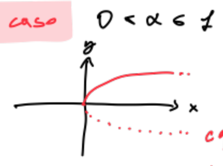
$x \geq 0 \wedge x \neq 0$ "$x^{\frac{1}{2}}$" "x^{-1}"

!! se α è irrazionale: dominio $= [0, +\infty)$
solo: razionali con denom. dispari hanno le $x<0$!!

Dom. di f (comune): $\mathbb{D}(0, +\infty) \rightarrow x > 0$

Il grafico di x^α dipende da:

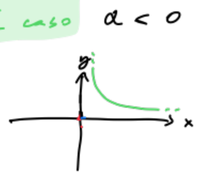
- I caso $0 < \alpha < 1$ — per modello ricordare "$x^{\frac{1}{2}}$"



equivale alla parte positiva della parabola $x = y^2$

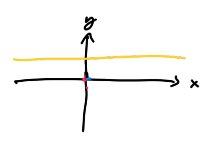
- II caso $\alpha > 1$ — per modello ricordare "x^2" $y = x^2$

- III caso $\alpha < 0$ — per modello "x^{-1}" $y = \frac{1}{x}$

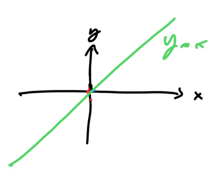


Casi particolari:

- $\alpha = 0$, $f(x) = 1$ } f. costante



- $\alpha = 1$, $f(x) = x$ } f. identità (lineare)



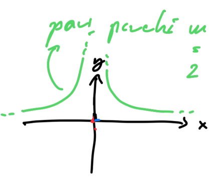
- Se $\alpha \geq 0$ dominio diventa $[0, +\infty)$
- Se $\alpha = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n dispari ed m, n primi tra loro allora x^α esiste anche per $x<0$ e il grafico risulta simm.co per asse y se m è pari, oppure all'origine se m è dispari.

!! controllo se x negative sono ammesse

Esercizio: rappr. grafica di

- $x^{-\frac{2}{7}}$ • $x^{\frac{6}{5}}$ • $x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
- $x^{\frac{4}{5}}$ • x^{π}

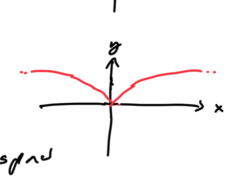
$x^{-\frac{2}{7}}$ III caso, quarto caso particolare
dominio naturale $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

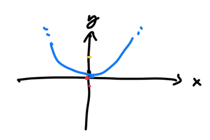


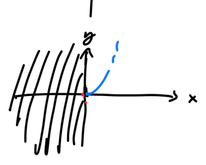
pari perché m è pari $= 2$

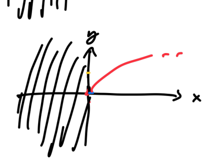
$x^{\frac{4}{5}}$ I caso, quarto caso particolare
dominio nat. $= \mathbb{R}$ ~~$\setminus\{0\}$~~ perché raz. con denom. dispari

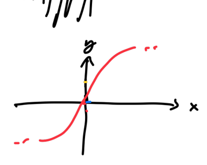
↳ $\sqrt[5]{x^4}$ $x = \frac{1}{100}$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{100^4}} \approx \frac{1}{1}$

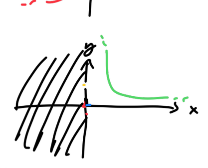


$x^{\frac{6}{5}}$  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

x^{π}  $\mathbb{D} = [0, +\infty)$

$x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$  $\mathbb{D} = [0, +\infty)$

$x^{\frac{3}{7}}$  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$x^{-\frac{1}{4}}$  $\mathbb{D} = (0, +\infty)$

↓
$\sqrt[4]{x^{-1}} \rightarrow$ no $x = 0 \rightarrow \frac{1}{0}$
no $x < 0 \rightarrow \sqrt[4]{-1}$

F. ESP.LI, F. LOG.CHE

$f(x) = a^x$ qui è l'esponente che varia

con $a > 0$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

con $0 < a < 1$: $(0, 1) \in graf(f)$ con $a > 1$: $=$

- lim. inf • lim. inf.
- str. monotona (str. decr.) • str. monotona (str. cr.)

quindi $\exists f^{-1}(y)$ e sarà anch'essa str. monotona!

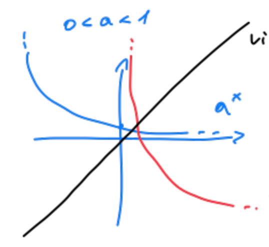
str. d. / str. c. } rimangono così

f. inversa:

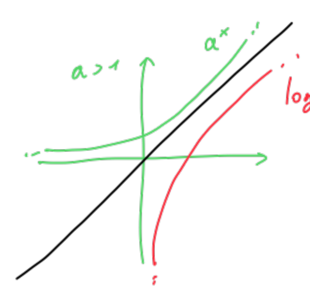
$f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (dominio originale)

comprimiamo tutte le immagini proiettandole su asse y
$\rightarrow \mathbb{D} = (0, +\infty)$

$y = a^x$?
$= \log_a y = f^{-1}(y)$
esp. da dare ad a per raggiungere y = x



riflesso per $y = x$ come a. simmetria

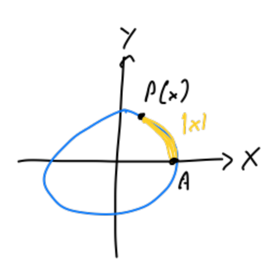


né pari, né dispari, dato che sta solo nelle $y > 0$?

F. TRIG.CHE

in un s. rif. assi cartesiani X, Y consideriamo circ. centrata in O di raggio 1

eq. circ.: $X^2 + Y^2 = 1$



se $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ è il punto sulla circ. ottenuto percorrendo un arco di lunghezza $|x|$ a partire da $(1, 0)$ in senso antiorario se $x > 0$, orario se $x < 0$

l'angolo $A\hat{O}P$ misura x radianti

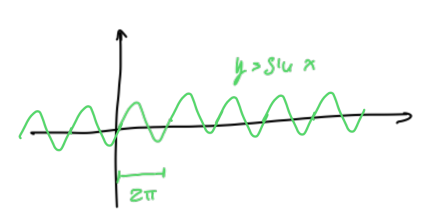
coord. $P(x) = (\cos x, \sin x)$ punto della circ.
↓
soddisfa $X^2 + Y^2 = 1$
↓ relazione fondam. sin/cos
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

inoltre, $P(x + 2\pi) = P(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

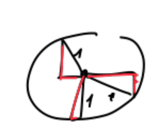
f. periodiche $T = 2\pi$

$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Ossv.: $-1 \leq \cos \leq 1$
$-1 \leq \sin \leq 1$



sempre tra -1 e 1

↳ f. limitate

infine: $\cos(-x) = \cos(x)$ f. pari
$\sin(-x) = -\sin(x)$ f. dispari

tan e cot:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow$ lungh. di $\overline{AT}$ con segno dipendente da I/IV quadrante di T

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\mathbb{D} \tan x = \cos x \neq 0 \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$

$\rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

tan è dispari:

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

$f(-x) = -f(x)$

$\frac{\text{f. pari}}{\text{f. pari}} = \frac{\text{f. disp.}}{\text{f. disp.}} \rightarrow$ f. pari

$\frac{\text{f. pari}}{\text{f. dispari}}$ è dispari

$= \frac{\text{dispari}}{\text{pari}}$

tan: periodo π, sfasato di $\frac{\pi}{2}$

infine cot:

$\mathbb{D} \cot x = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- periodica π
- dispari
- illimitata

F. TRIG.CHE INVERSE

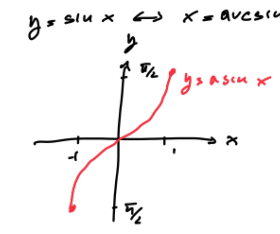
$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è invertibile → periodica
$\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ ogni periodo ripete immagine da x diversi!

→ quindi prendiamo sol. tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$

$\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ è invertibile

→ arcsin: $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

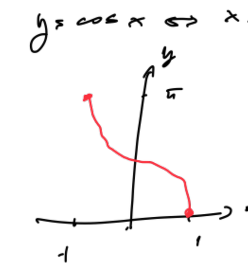
$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$



se andiamo oltre si ripete!

→ arccos: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

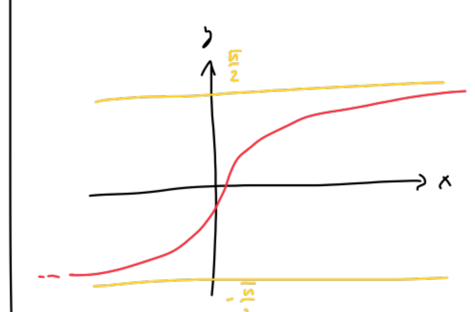
$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$



→ arctan: ?

$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile ($\neq$ viceversa)

$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



arctan x
limitata
simm. orig: dispari