Algebra 5

Numeri complessi:

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ insieme di coppie ordinate

→ somma in $\mathbb{R}^2$:
$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

→ prodotto in $\mathbb{R}^2$:
$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ controlla

• assoc. • commut. • neutro • opposto
↳ tutte verificate con "+" e "•"
(erano le R_1, R_2)

"+" → neutro: $(0,0)$
opposto: $(-a,-b)$
+ opposto efficace
commut...
assoc...

"•" → neutro: $(1,0)$
reciproco: $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ • recipr. efficace
$(a,b) \neq (0,0)$
per i denominatori

con R_1, R_2 → vale anche la pr. distr.
quindi: $\mathbb{R}^2$ è un campo, "campo dei numeri complessi" → $\mathbb{C}$

Ossv.:
l'insieme $\mathbb{C}_0 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ è "chiuso" rispetto a "+" e "•"
→ due elem. $\mathbb{C}_0$ sommati o moltiplicati, rimangono sempre in $\mathbb{C}_0$
→ $\mathbb{C}_0$ è sottocampo di $\mathbb{C}$, dato che anche $\mathbb{C}_0$ è un campo per "+", "•"

$(a,0) + (c,0) = (a+c, 0)$
$(a,0)(c,0) = (ac, 0)$

si comportano normalmente, come ci aspettiamo:
corrisp. biunivoca tra $\mathbb{C}_0$ ed $\mathbb{R}$ (rispetto le operazioni)

$\mathbb{C}_0$	↔ $\mathbb{R}$
$(a,0)$	a
$(a,0)+(c,0)$	$a+c$
$(a,0)(c,0)$	ac

→ ne consegue che possiamo identificare $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}_0$ con $\mathbb{R}$ contenuto in $\mathbb{C}$
→ non propriamente contenuto, perché tipi di numero diverso (numero ≠ coppia) ma $\mathbb{C}_0$ identifica $\mathbb{R}$ per le coppie!
in termini equivalenti: $\mathbb{C}$ è ampliamento di $\mathbb{R}$

Consideriamo il num. complesso $(0,1)$
→ $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0)$
$= (-1, 0)$

→ $(-1,0) \in \mathbb{C}_0$
→ $(-1,0) \sim -1$ "si identifica con" (in $\mathbb{R}$)

→ $(0,1)$ è unità immaginaria in $\mathbb{C}$, indicato con "j".

quindi $j^2 = -1$
caratteristica essenziale!

quindi, l'equazione $x^2+1=0$ possiede soluzioni complesse, ma non reali, per $\Delta < 0$.
→ un'ulteriore opzione di risoluzione delle equazioni algebriche, con sempre almeno una soluzione in $\mathbb{C}$

→ $x^2+1=0$
usando "j", per cui: $j^2=-1$
→ $x = j$
$-1+1=0$ ✓

Forma algebrica

rappresentaz. dei num. complessi:
sia (a,b) un qualunque num. complesso
→ $(a,b) = (a,0) + \underbrace{(0,1)}_{j}(b,0)$

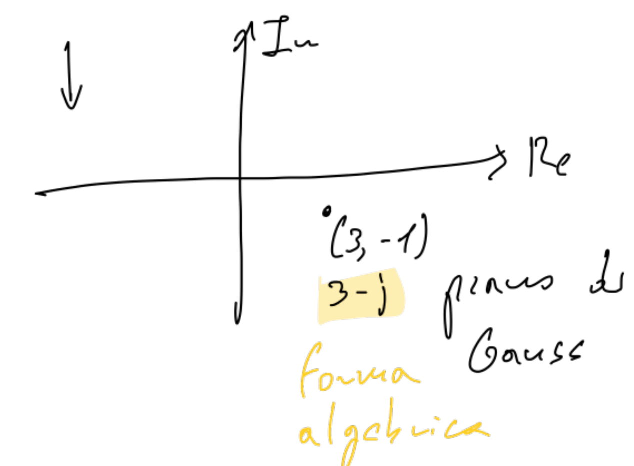
↳ usiamo la rappresentazione "~" in $\mathbb{R}$:
→ $(a,b) = a + jb$

utilizziamo quindi la rapp. algebrica da ora in poi! ora è possibile usare le regole del calcolo letterale.

Esempio: prodotto di "2+j" ed "1−j" in f. algebrica
usiamo solite regole!
$(2+j)(1-j) = 2-2j+j-j^2 = 2-j+1 = 3-j$

Def.: dato un num. complesso in f. algebrica, chiamiamo $\underline{a}$ "parte reale" e $\underline{b}$ "parte immaginaria"
→ $3-j = 3-1j$
parte reale
parte immaginaria
} entrambi sono numeri reali!
per risolvere equazioni

Rapp. geom. sul piano di Gauss
(a,b)
↳ sulla y → asse reale
↳ sulla x → asse immaginario



Ossv.
non esiste in $\mathbb{C}$ una relaz. d'ordine per soddisfare la proprietà R_3 (con il $\leq$)
→ R_1, R_2 = campo
→ R_1, R_2, R_3 = campo ordinato
infatti, da R_3 discendono due fatti:
① il quadrato di ogni numero è ≥ 0
② l'opposto di un numero è ≤ 0

ma in $\mathbb{C}$:
• $j^2 = -1$ minore di zero!
• $1^2 = 1$???
} quindi $\mathbb{C}$ non è c. ordinato
quindi no confronti

Esempio: calcolare la f. alg. dei seguenti num. compl.

• $\frac{2+j}{2-3j} = \frac{2+j}{2-3j} \cdot \frac{2+3j}{2+3j} = \frac{(2+j)(2+3j)}{(2-3j)(2+3j)} = \frac{4+8j+3j^2}{4-(3j)^2} = \frac{1+8j}{4-9j^2} = \frac{1+8j}{13} = \frac{1}{13} + \frac{8}{13}j$

• $\frac{1}{j(3-j)^2} = \frac{1}{9j+j^3-6j^2} = \frac{1}{9j+6-j} = \frac{1}{8j+6} \cdot \frac{-8j+6}{-8j+6} = \frac{-8j+6}{36-64j^2} = \frac{-8j+6}{100} = \frac{6}{100} - \frac{8}{100}j$

razionalizzazione di II tipo