Geometria 20231129

← Kronecker

$A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$ $\quad rkA = \dim Span(A^1 \dots A^n)$

$rkA = r_{max}$ (max ord. di un minore di A non nullo)

Prop

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$ $\quad rkA = rk(A^T)$

per $|A| = |(A^T)|$

Prop

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$ $\quad$ se $A' \equiv A$ a meno di uno scambio di row/col oppure l'aggiunta di C.L. a row/col → dal lemma di sostituz.

⇓

$rkA = rk(A')$

Def: Matrice a Scala

- espansione delle tr. sup.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n \in M_{\mathbb{R}}(3)$$

$rkQ = 3$ $\qquad$ $rkI_n = 3$

pivot, "scalini"

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rkQ = 2$

⇓

n° pivot = rk

$$Q^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$rkQ^T = 2$ (banale) $\qquad$ $rkQ^T = 3$

1. se una riga è nulla, le righe succ. sono nulle
2. se una riga non è nulla, il 1° elem. non nullo è detto "pivot" e nelle righe succ. sarà possibile avere pivot in colonne seguenti a quelle del pivot.

⇒ quindi per trovare il rk possiamo usare le Mosse di Gauss e trasformare la matrice in mat. a scala!

Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 0 & 8 \\ -2 & 1 & -1 & -4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

0 $\quad 2A^1$ $\qquad 2A'_3$ $\qquad$ n° 4

non usiamo Kronecker qui... $\qquad$ $rkA = 4$

invece di togliere ogni volta lascia gli zeri e opera con C.L. per eliminarle, ma usare con mat. della stessa grandezza!

⇑

rk per Gauss

Se abbiamo matrici parametriche, diventa tutto più problematico

↳ "il param è nullo?"

$$B = \begin{pmatrix} h-1 & h & 1 & -h \\ 0 & 1 & h & -1 \\ 1-h & 2+h & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4×3 $\qquad$ ⇒ max $rkB = \min(k,n) = 3$

rkB in fn di h?

⇒ minore delle prime 3 col.

$$\begin{vmatrix} h-1 & h & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 1-h & 2+h & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h-1 & h & 1 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 2+2h & 2 \end{vmatrix} = (h-1)\begin{vmatrix} 1 & h \\ 2+2h & 2 \end{vmatrix} = (h-1)[2-h(2+2h)]$$

C.L.?

$= (h-1)(-2h^2-2h+2) \longrightarrow h=1 \lor h = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

non fermo per det = 0 ann. prodotto ⇒ det = 0 per controllare quando è lin. dip. il minore!

$= -2h^3 - \cancel{2h^2} + \cancel{2h} + \cancel{2h^2} + 2h - 2$

$= -2h^3 + 4h - 2$

$= -2h(h^2 - 2h + 1)$

⇒ ~~quando abbiamo det = 0?~~

~~$-2h(h^2-2h+1) = 0$~~

~~$-2h = 0 \lor h^2 - 2h + 1 = 0$~~

~~$h = 2 \qquad h = \pm 1$~~

In tutti gli altri casi in cui: det ≠ 0 del minore, abbiamo trovato il max rank ⇒ $rkB = 3$ solo negli altri o sarà possibile $rkB \leq 3$

per $h = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$rkB(1) = 2$

Per semplificare i calcoli:

provano con altre colonne

$$\begin{vmatrix} h & 1 & -h \\ 1 & h & -1 \\ 2+h & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ 2+h & 1 & 1+h \end{vmatrix} = (1+h)\begin{vmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{vmatrix} = (1+h)(h^2+1) = (h-1)(h+1)^2$$

poniamo = 0 il det

$(h-1)(h+1)^2 = 0$

$h = 1 \lor h = -1$

⇓

$$rkB(h) = \begin{cases} 3 & h \neq \pm 1 \\ ? & h = \pm 1 \end{cases}$$

scrivere sempre il caso generale!

bisogna verificare tutti i casi specifici dove h porta det = 0 → o sarà falsi casi derivanti dalla necessità di fare intersezione fra tutti i minori che elimnerebbe casi falsi!

2 se h = 1

2 se h = -1

si inserisce in h ≠ ±1 ed è un caso falso

Risoluz. sist. lineari per 1ª variabile definita: sarà all'esame

- ortogonalizzaz.
- quadratiche.
- geom. analitica

Sistemi Lineari:

$\underset{k\times n}{A}\ \underset{n}{X} = \underset{k}{B}$ è sist. lineare di k equazioni in n incognite

mat. dei coeff. $\quad$ vett. delle incognite $\quad$ vett. dei t. noti

⇕

$x_1A^1 + x_2A^2 + \dots + x_nA^n = B$

$x_1\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} +$

Teorema di Rouché-Capelli:

Il sist. lineare $AX = B$ con $A \in M_{\mathbb{R}}(k,n)$, $B \in \mathbb{R}^k$, $X \in \mathbb{R}^n$

è risolubile ⇔ $rkA = rk\tilde{A}$

$\underset{k\times(n+1)}{\tilde{A} = (A \mid B)} = (A^1 | A^2 | \dots | A^n | B)$ $\quad$ "matrice completa"

Def.: sist. risolubile se ∃ vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ l'eq è soddisfatta

quindi esiste almeno una soluzione

- se è risolubile ⇔ $rkA = rk\tilde{A}$ da dimostrare in entrambe ⇒, ⇐

Dim: risolubile ⇒ $rkA = rk\tilde{A}$

Hp. risolubile

⇒ $\exists\, \alpha_1A^1 + \dots + \alpha_nA^n = B$

quindi $B \in$ C.L. di $A^1 \dots A^n$

⇒ $rkA = \dim Span(A^1 \dots A^n)$

$rk\tilde{A} = \dim Span(A^1 \dots A^n, B)$

che è gen. superflua nel caso sia risolubile DEVE ESSERLO PER

⇒ $rkA = rk\tilde{A}$

Dim: $rkA = rk\tilde{A}$ ⇒ risolubile

$$\Rightarrow \dim \underbrace{Span(A^1 \dots A^n)}_{\subset W} = \dim \underbrace{Span(A^1 \dots A^n, B)}_{W \text{ sv}}$$

quindi ssv di W quindi dim sarà da 0 a dim W $\qquad$ dim W ≤ n+1

⇓

sapendo le loro dim sono uguali, allora il loro span deve coincidere!

⇓

sapendo che quindi

Span = Span

$B \in W$

essendo span ≡ il gen. superfluo dovrà appartenere ad entrambe, cioè

$$\underbrace{A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\text{soluzione del sistema}} = B$$

Es.:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

→ sono due piani con normali $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad rkA = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad rk\tilde{A} = 2$$

essendo lin. indip. riconosciamo due piani incidenti in una retta

⇓

risolubile

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

∈ Span stesso perché C.L.!

sono due normali parallele ⇒ due piani paralleli NON È RISOLUBILE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad rkA = 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad rk\tilde{A} = 2$$

non è risolubile