Analisi: 20231108

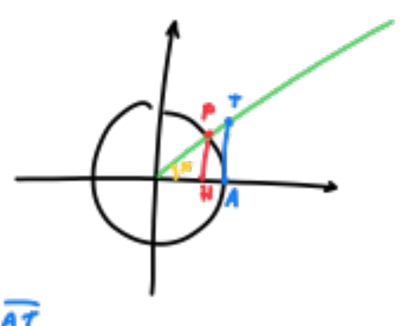
Limiti notevoli

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ anche $\frac{x}{\sin x} = 1$?

→ $\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

perché $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ continua? → ⚠ questo lo si fa implicitam., ma da controllare se utilizzabile!

→ rimane f.i. $\frac{0}{0}$



dim.:

fisso $0 < x < \pi/2$

→ osservo che $\overline{PH} \leq \widehat{AP} \leq \overline{AT}$

quindi $\sin x \leq x \leq \tan x$

$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$

con $\sin x > 0$ dividiamo:

$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

per il t. dei carabinieri:

$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$ ⇒ $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ ⇒ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}} = 1$

per simmetria?

siccome $\frac{\sin x}{x}$ è pari → anche $x \to 0^- = 1$ quindi ① ✓

② $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \left(\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{}\right)^2$ alg. limiti

$= \frac{1}{2}$ ↓ $\frac{1}{2}$ ↓ 1 → ALGEBRA DEI LIMITI!

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}$ ↓ 1 ↓ 1

Ricordiamo: se (a_n) è succ. infinita, allora $\lim_{n\to +\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

applicando il T. ponte → lim. di funzioni per e:

$\lim_{x\to c} f(x) = l \iff \forall x_n \to c \mid f(x_n) \to l$ (di solito)

→ $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ④

Vediamo il seg. risultato in vers. più generale del t. continuità della fn composta: verificare $g(x)$ cont. in x_0, $f(x)$ cont. $g(x_0)$

↓

T. di sost. dei limiti

Siano f, g fn per cui calcolare $f \circ g$ in un intorno di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tranne al più in x_0.

Supponiamo:

① $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) = t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

② $\exists \lim_{t\to t_0} f(t) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

③ $g(x) \neq t_0$ definitivam. per $x \to c$

Allora $t = g(x)$ ⌶

$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l$

$= \lim_{t\to t_0} f(t) = l$ T. di cambio variabile

Es.: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$ → $t = x^2$, $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$?

A partire dal limite ④ col T. sost. ricaviamo altri lim. notevoli:

$\lim_{x\to +\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$ → $t = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{t\to e} \ln t = \ln e = 1$ ma non è questo

↓

$\lim_{x\to \pm\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ → $\lim_{s\to 0^\pm} \frac{\ln(1+s)}{s} = 1$

$s = \frac{1}{x}$

dimostrato ⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Poniamo $y = \ln(1+x)$ e sostituiamo y ad x in ⑤

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ⑥

$= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1}$ ⇒ $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$

quando la $x \to 0$ anche la $y \to 0$

$e^y = 1+x$

$x = e^y - 1$

Poniamo $u = (1+x)^\alpha - 1$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ in limite ⑤

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$

$\lim_{?} \lim_{u\to 0} \frac{\ln\left[(u+1)^{\frac{1}{\alpha}}\right]}{(u+1)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} = \frac{1}{\alpha} \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \lim_{u\to 0} \frac{u}{(u+1)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}$

quando $x \to 0$, $u \to ?0$

↓ lim. not $= 1$

$u+1 = (1+x)^\alpha$

$(u+1)^{\frac{1}{\alpha}} = 1+x$

$\lim_{u\to 0} \frac{u}{(1+u)^{\frac{1}{\alpha}} - 1} = \alpha$

$\beta = \frac{1}{\alpha}$

$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^\beta - 1}{u} = \beta$

⇒ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\beta - 1}{x} = \beta$

↳ $y = x^\alpha$

$\sqrt[\alpha]{y} = x$

$(y)^{\frac{1}{\alpha}} = x$

Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$

$= \lim_{x\to 0} \ln(1+2x) \frac{1}{\sin 3x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \frac{\ln(1+2x)}{3x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}$ → vogliamo tenere $2x$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \frac{2}{3} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \frac{2}{3}$

Si può anche usare le STIME ASINTOTICHE! → perché nel rapporto = finito 1 ≠ c

Def.: f e g sono asintotiche per $x \to c$

"$f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$" se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Es.: ① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x$ per $x \to 0$

↳ $\sin[g(x)] \sim [g(x)]$ per $x \to 0$

sost.: $t = g(x)$

e.g.: $\underbrace{\sin(x-1)}_{\text{numeratore}} \sim \underbrace{(x-1)}_{\text{~~denominatore~~}}$ $x \to 1$ deve portare ad INFINITESIMO

'rapporto (2)

② $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ⇒ $1 - \cos[g(x)] \sim \frac{1}{2}[g(x)]^2$??

×4

③ $\tan x \sim x$ $x \to 0$

⑤ $\ln(1+x) \sim x$ $x \to 0$

⑥ $e^x - 1 \sim x$ $x \to 0$

⑦ $(1-x)^\beta - 1 \sim \beta x$ $x \to 0$

} $g(x)$ al posto di x

Es.: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$ $\sim 2x$ $x\to 0$, $\sim 3x$ $x \to 0$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

stiamo usando le stime note

si, c'è da ricondursi a quelle!

$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1}$ → $e^{3(x-1)^2} - 1 = e^{g(x)} - 1 \sim g(x)$

$g(x) = 3(x-1)^2 \xrightarrow[x-1]{} 0$?!

↓

$e^{g(x)} - 1 \sim g(x)$ se $g(x) \to 0$ quindi $x \to 1$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{(2x-2)^2}$ → $\ln x = \ln(1+\underbrace{x-1}_{g(x)}) \sim$ ⑤ $\underbrace{x-1}_{g(x)}$ se $\overbrace{x \to 1}^{??}$

→ $4(x-1)^2$ ↓ $(x-1)^2$

INFINITESIMA

↳ il limite di appartenenza deve farlo diventare $= 0$ quindi → 1 per $1-1=0$!

$= \frac{1}{4}$

$\ln x \sim x$ NO

$\lim_{x\to +\infty} x \ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$

$\frac{x+3}{x+1} \to 1$ per $x \to +\infty$

$1 + \left(\frac{x+3}{x+1} - 1\right) = 1 + \frac{\cancel{x}+3-\cancel{x}-1}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$

⇒ $\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right) \sim \frac{2}{x+1}$ per $x \to +\infty$ ok infinitesimo

$= \lim_{x\to +\infty} x \cdot \frac{2}{x+1} = 2$