Analisi 20231110

Derivata: velocità di variazione di una grandezza in fn di altre

Def.: Calcolo differenziale (= derivate)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$
Sia $x_0 \in (a,b)$
Se $h \in \mathbb{R}$ suff. piccolo
allora $(x_0+h) \in (a,b)$

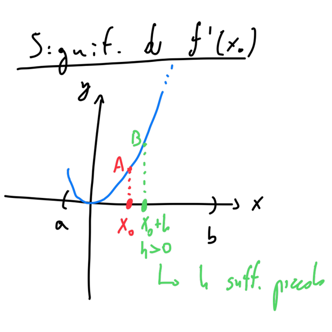
Diciamo che f è derivabile in x_0 se $\exists$ il lim:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

"Derivata prima di f in x_0"

"$f'(x_0)$" "$\frac{df}{dx}(x_0)$"

Signif. di $f'(x_0)$

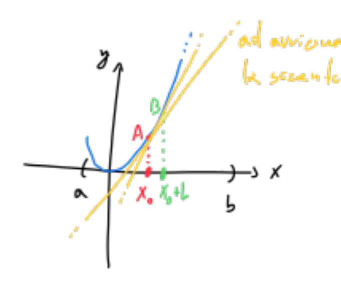


$A = (x_0, f(x_0))$
$B = (x_0+h, f(x_0+h))$

↳ h suff. piccolo da non superare b

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\text{incremento della } f}}{\underbrace{(x_0+h)-x_0}_{\text{incremento di } x_0}} = \text{"rapporto incrementale"}$$

$= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ è il coeff. angolare della retta passante A, B



ad avvicinarsi $B \to A$
la secante diventa tangente

→ più $h\to 0$, più $B \to A$ lungo f
e la retta AB raggiunge la pos. limite che individua la "retta tangente al grafico di f in x_0 oppure $P(x_0, f(x_0))$". La f' è il coeff. ang. della retta tangente:

$y - y_0 = m(x-x_0)$
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$
$y = f(x_0) + f'(x_0)x - f'(x_0)x_0$

Signif. cinematico di $f'(x_0)$

$x = t$
$f = s$ → $s(t)$
interpreto:
- t = tempo
- $s(t)$ = posizione all'istante
→ legge oraria del moto

Fisso istante t_0
$s'(t_0)$?
- rapp. incr. in t_0 con s

$$\frac{\overbrace{s(t_0+h)-s(t_0)}^{\text{spostamento}}}{\underbrace{h}_{\text{tempo}}} = \text{velocità media tra i due istanti di tempo } (h>0)$$

... ma la vel. istantanea?

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \text{vel. istantanea in } t_0$$

Altro signif.:

Approx. lineare / linearizzazione:

Sia $f: (a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$

f è derivabile in x_0 se $\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\iff \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0$$

$$\iff \underset{\text{nuova var.}}{x = x_0+h}, \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)} = 0 \quad (*)$$

$h\to 0 \Rightarrow x \to x_0$

"o piccolo"

Def.: Diciamo che una fn $g(x) = o(h(x))$ per $x\to x_0$
se $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)} = 0$ "di h"

se $h(x)\to 0$ per $x\to x_0$ $\wedge$ $g(x) = o(h(x))$ per $x\to x_0$
allora g è infinitesimo di ord. sup. ad h per $x\to x_0$

riformulo per o()

$\iff f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

formula di linearizzazione (appr. lineare)
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

La struttura della formula precedente è:

$f(x) = g(x) + \underbrace{o(x-x_0)}_{}$ ← errore di appr. è un infinitesimo, più mi avvicino al punto, più è trascurabile, ed è di ord > $(x-x_0)$?

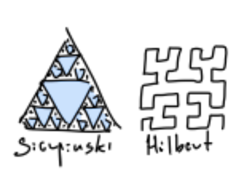
$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x)$ appx. con $g(x)$

Perché "lineare"? per $g(x)$, che ha grafico di una retta.
$g(x)$ approssima $f(x)$ vicino ad x.

$o(x-x_0)$ err. appx tra $f(x)$ e $g(x)$
è un infinitesimo per $x\to x_0$ di ord > $x-x_0$

In sostanza se x è vicino x_0, approssimo $f(x)$ con $g(x)$
$(x_0, f(x_0))$ graf. f ↑ $(x_0, g(x_0))$ graf. g ↑ (retta tangente)



Tra tutte le passanti in $(x_0, f(x_0))$ la retta tan appx meglio il graf. $f(x)$ a meno di un $\frac{1}{\infty}$ di ord > $x-x_0$

Prendiamo una generica r passante in $P(x_0, f(x_0))$

$y = f(x_0) + m(x-x_0)$ $m\in\mathbb{R}$

Consideriamo le funz. $g_m(x) = f(x_0) + m(x-x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - g_m(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)] = 0 \text{ se } f \text{ cont. in } x_0$$

Ma se chiediamo che $f(x) - g_m(x)$ non solo infinitesimo, ma inf.mo ord > $x-x_0$
→ $m = f'(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g_m(x)}{x-x_0} = 0$$

$$\iff \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{m\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} = 0$$

$$\iff \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \cancel{\lim_{x\to x_0}}\, m = f'(x_0)$$

Test: derivate delle fn elementari

- fn di tipo potenza

x^α $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>0$ → sempre ben definita

$f(x) = x^\alpha$ $x\in(0,+\infty)$

serve un lim. notevole: $\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$ come ottenere questa formula?

Sia $x_0 \in (0,+\infty)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^\alpha\left[\frac{(x_0+h)^\alpha}{x_0^\alpha} - 1\right]}{h}$$

$$= x_0^\alpha \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{h} = x_0^\alpha \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1}{h}$$

st. asintot. $= x_0^\alpha \lim_{h\to 0}\frac{\alpha\frac{h}{x_0}}{h} = \alpha x_0^{\alpha-1}$

Diciamo che x^α è derivabile in $(0,+\infty)$ per indicare che è derivabile in ogni punto di I

- fn trigonom.: $\sin x$, $\cos x$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

formula di addiz. del sin

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0\cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin x_0 \cos h - \sin x_0}{h} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1 \; h\to 0}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin x_0 \cos h - \sin x_0}{h}\right] + \cos x_0 =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\sin x_0 \frac{\overbrace{(\cos h - 1)}^{\sim -\frac{1}{2}h^2}}{h}\right] + \cos x_0 =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\sin x_0\left(-\tfrac{1}{2}h\right)\right] + \cos x_0$$

$= \cos x_0$ ⟹ $\sin x$ derivabile in $\mathbb{R}$
$f' = \cos x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Es.: f', $f(x) = \cos x$

- Fn esponenz. base e

$f(x) = e^x$

sia $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x}\overbrace{\frac{e^h - 1}{h}}^{\text{notev. } h\to 0 \Rightarrow = 1?} = e^{x_0}$$

$f(x) = \ln x$

sia $x_0 > 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}$$

controlla sempre se è infinitesimo $= h/x_0$ $h\to 0$

$= \frac{1}{x_0}$

$\ln x$ è derivabile $\forall x>0$

- fn potenza con $x \leq 0$?

per $x<0$ → simmetria
per $x=0$: punto di non-derivabilità

Derivabilità e continuità

f continua in x_0 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
↳ (per $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$ uguali, lim glob.)

f derivabile in x_0

$$\Updownarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \; !!!$$

equivale a $h\to 0$
→ dimostrare che è valido (con cambio di var.)

Teorema:

f derivabile in x_0 ⟹ f continua in x_0

dim.: dobbiamo dimostrare la continuità

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$$

$x\neq x_0$ $\quad f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$

allora

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}(x-x_0) \cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0\cdot f'(x_0) = 0$$

discont cont cont discont
$\lim \neq f$

non vale il viceversa

fn con grafico continuo, ma non derivabile in un punto:

$f(x) = |x|$ $\quad x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \quad \text{f.i.} \to \text{calcoliamo dx/sx}$$

$$\lim_{h\to 0^\pm}\frac{\cancel{|h|}^{\pm 1}}{\cancel{h}\,1} = \begin{cases}1\\-1\end{cases} \quad \neq \to \nexists$$

Non deriv. in $x=0$

Derivabilità dx/sx

$f: (a,b)\to\mathbb{R}$

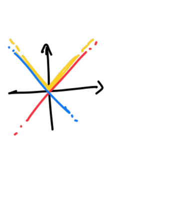
sia $x_0 \in (a,b)$

$\exists$ finito $\lim_{h\to 0^+}$ R.APP

→ derivata destra di f → $f'_+(x_0)$

analoga sx

Es.: $|x|$ ha $f'_\pm$ $\neq$ in $x_0 = 0$ $\begin{cases}1\\-1\end{cases}$



f deriv. in $x_0 \iff \exists f'_\pm \wedge f'_+ = f'_-$