← Ora sappiamo come decidere se mat. è diagon.bile o no, ma:

crit. più veloce

Prop.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$

se A diag.bile $\Rightarrow$ $p_A(x)$ è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$ ← non sufficiente, solo necessaria!

↳ tutti fattori in forma $(x-x_0)^n$ eventuale molteplicità

dim.: se A diag.bile, $\exists N \in GL(n, \mathbb{R})$: $\Delta = N^{-1}AN$ con $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

D'altronde, $p_A(x) = p_\Delta(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$

↳ quelli decomponibili sono ad es.: (x^2+1) che non è di 1° grado!

in $\mathbb{C}$: $(x^2+1) = (x+i)(x-i)$ in $\mathbb{R}$ no!

es.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile

$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$ tot. decomp. ← non trovo 2 autovett. lin. indip.

$\Downarrow$

$(1-x)^2$ $\lambda_1 = 1$ $\mu_1 = 2$

invece m (m_g) è il N° colonne − rk $(A - \lambda_1 I_n)$

$m_1 = 2 - \text{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2 - 1 = 1$

$\mu_1 \neq m_1$ e $1 \leq m_1 \leq \mu_1$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$p_B(t) = (4-t)(t^2-1)$

non essendo decomponibile, la condiz. necessaria manca quindi non è diagonalizzabile!

Comportamento degli autospazi $\Leftrightarrow$ diag.bili:

comp. autosp. tra loro:

T.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$

$\lambda_1 \cdots \lambda_k$ autovalori distinti di A ($\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 \cdots, \lambda_2 \neq \lambda_3 \cdots$) tutti diversi

$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ quindi $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \cancel{\emptyset}$ ~~(o~~ $\{0_n\}$ ~~?)~~ 0_n = dim. vet. nullo

V_{S1}

$\Downarrow$

$((V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}) \oplus V_{\lambda_3}) \cdots) \oplus V_{\lambda_n}$

e quindi $B_{V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots} = B_{V_1} + B_{V_2} \cdots$

quindi LIN INDIP. TI BASI!

non condividono vettori

Controlliamo somme dirette:

① $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ $X \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ $AX = \lambda_1 X$

$AX = \lambda_2 X$

$\Downarrow$

$\lambda_1 X = \lambda_2 X \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X = 0_n$

$\Rightarrow X = 0_n \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$

② $(V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}) \oplus V_{\lambda_3}$ per T. di induzione?

$X \in V_{\lambda_3}$ cioè $AX = \lambda_3 X$

$X \in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \Rightarrow X = Y_1 + Y_2$: $AY_1 = \lambda_1 Y_1$ decomp. unica

$AY_2 = \lambda_2 Y_2$

$\lambda_3(Y_1 + Y_2) = A(Y_1 + Y_2) = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$

$Y_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} Y_2$ $Y_1 \in \text{Span}\, Y_2 \subset V_{\lambda_2}$

ma essendo $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ questo

dev'essere il 0_n!

$\Rightarrow Y_1 = 0 \Rightarrow Y_2 = 0 \Rightarrow X = 0$

I crit. di diag.zabilità

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ autoval. dist. A ($\in \mathbb{R}$)

Se $m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_k) = n$, $\Leftrightarrow$ A è diagonalizzabile

e viceversa

corretto?

$m_a \Rightarrow$ quante volte salta fuori dalla decompos.

$m_g \Rightarrow$ quante volte lo stesso vettore salta fuori dalla matrice

II crit. diag.I