Geometria 20231012

span generale ha $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ perché GEOMETRIA SOLIDA! E_O^3

$\{\underline{u}\}$ in E_O^3 è lin. indip. se $\underline{u} \neq \underline{0}$

$\{\underline{u}, \underline{v}\}$ " se $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \notin \mathrm{Span}(\underline{u})$

$\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ " se $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \notin \mathrm{Span}(\underline{u})$, $\underline{w} \notin \mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v})$

in E_O^3:

$\vec{OP} = \underline{u} \neq 0$

$\mathrm{Span}(\underline{u}) \Leftrightarrow$ (è la) $v = OP$ (retta) passante per O direttamente o parallela $\underline{u}$

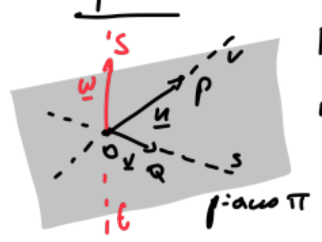
$\left.\begin{array}{l}\vec{OP} = \underline{u} \\ \vec{OQ} = \underline{v}\end{array}\right\}$ lin. indip.ti

$\mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}) \Leftrightarrow$ (è la) π (piano) passante per O avente giacitura (due direzioni) $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{OP} = \underline{u} \\ \vec{OQ} = \underline{v} \\ \vec{OS} = \underline{w}\end{array}\right\}$ lin. ind.ti

$\mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \subset E_O^3$ → dimostriamo che anche $E_O^3 \subset \mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$

Ipotesi:



lista di vettori, per essere LIN. INDIP.TI, devono essere su rette diverse

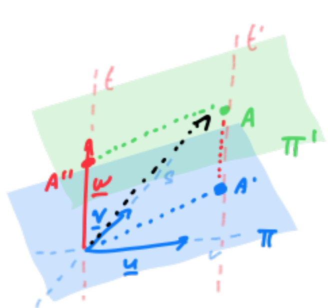
$\forall \vec{OA} \in E_O^3$ (prendo vettore tra O ed A)

se $A \in t$ $\exists! \gamma \in \mathbb{R} \mid \vec{OA} = \gamma \underline{w}$
(allora A fa parte dello Span di $\underline{w}$)

se $A \in \pi$ $\exists! \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \vec{OA} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$
(allora A fa parte dello Span di $\underline{u}, \underline{v}$)

$\left.\begin{array}{l}\to \vec{OA} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + 0\underline{w} \in \mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \\ \vec{OA} = 0\underline{u} + 0\underline{v} + \gamma\underline{w} \in \mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})\end{array}\right\}$

se $A \notin t$, $A \notin \pi$
$t' \parallel t \mid A \in t'$ e trova un punto A'
→ $A' = t' \cap \pi$
→ prendiamo il piano π' parallelo a π passante per A (π' viene da A)



se prendiamo A'' su $\underline{w}$ troviamo il parallelogramma $OA'AA''$

$\vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{OA''}$

$\vec{OA'}$ nello $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{v}) \leftrightarrow$ sul piano π

$\vec{OA''}$ nello $\mathrm{Span}(\underline{w}) \leftrightarrow$ sulla retta t

quindi abbiamo dimostrato che con questi tre è possibile raggiungere * in E_O^3

↗ tra due piani

$\vec{OA'}$: $\exists! \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \vec{OA'} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$

$\vec{OA''}$: $\exists! \gamma \in \mathbb{R} \mid \vec{OA''} = \gamma\underline{w}$

visto che $\mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \subseteq E_O^3$
↓
sono lo stesso insieme

Dalle combinazioni lineari di $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ possiamo orientarci in E_O^3

Def. V svr, $\{\underline{u}_1, \dots \underline{u}_k\}$ lista di vettori di V.
Diciamo che la lista è lin. indip. (liberi) o che i vettori sono lin. indip.ti se nessun vettore della lista è comb. lineare degli altri vett. della lista.
↳ escluso se stesso
↳ devono essere tutti così

Proposizione

V svr, $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ lista SI PUÒ DIRE LIN. INDIP.TE

se e solo se
$\left.\begin{array}{l}\underline{u}_1 \neq \underline{0} \\ \underline{u}_2 \notin \mathrm{Span}(\underline{u}_1) \\ \underline{u}_3 \notin \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \\ \dots \\ \underline{u}_k \notin \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{k-1})\end{array}\right\}$ controllo in cascata

in questo caso, nessuna C.L. dei vettori della lista $\neq$ sé permette di raggiungere quel vettore

Esercizio verificare (dimostrare) le proprietà per 3 vettori $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$

(provare che almeno uno è ottenibile da C.L. degli altri) ??
altrimenti: lin. dipendenti (legati)

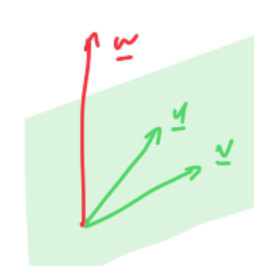
Def.

V svr, la lista (ordinata) (implicito) $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ con $n \in \mathbb{N}^*$

B è detta "base" di V se

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \forall \underline{u} \in V\ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \mid \underline{u} = \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \dots + \alpha_n\underline{v}_n \\ \quad \text{ossia } \underline{u} \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \\ \quad \text{ossia "}B \text{ è una lista di generatori di } V\text{"} \\ \bullet\ B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \text{ è lin. indipendente}\end{array}\right\}$ Condizioni indipendenti!

Esempio: in E_O^3 $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ lin. indip.



abbiamo mostrato che $E_O^3 = \mathrm{Span}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$
ogni vettore $\vec{OA} \in E_O^3$ è combo lineare di $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.
→ $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ sono generatori di E_O^3
→ essendo lin. indip., la lista è una base di E_O^3.

Esempio

$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) = 0\}$ (illimitata per densità)
tutte le funzioni che con x tra 0, 1 inclusi ci fa ricavare un $\mathbb{R}$, e nello specifico ha radici in 0 ed 1.

in V $\left.\begin{array}{l} f + g : (f+g)x = f(x) + g(x) \quad \text{"+"} \\ \alpha f : (\alpha f)x = \alpha f(x) \quad \text{"}\cdot\text{"} \\ \alpha \in \mathbb{R}\end{array}\right\}$ V è uno SVR, con queste due operazioni!

⇓

non ha base:
nessuna lista ordinata di lunghezza finita di vettori per C.L. di tutti i vettori di V.

Ulteriori spazi vettoriali non solo E_O^3 per V

Esempio in $\mathbb{R}^2$

$\left\{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti? sono generatori di $V = \mathbb{R}^2$?

proviamo con controllo in cascata

$\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ ✓
$\underline{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\underline{v}_1)$ ✓ → $\exists \alpha \underline{v}_1 = \underline{v}_2$? no, non esiste perché c'è uno 0.
$\underline{v}_3 \notin \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ ✗

$\exists \alpha, \beta \mid \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 = \underline{v}_3$

esiste! $\begin{cases} 1\alpha + 0\beta = 2 \\ 0\alpha + 1\beta = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$

possiamo usarli per ricavare qualsiasi valore in $\mathbb{R}^2$ tramite C.L.?

$\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^2 \quad \exists \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \mid$ C.L. $\underline{u}$?

$C_1 \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

prendiamo $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ → $\begin{cases} 1\alpha + 0\beta + 2\gamma = 4 \\ 0\alpha + 1\beta - 1\gamma = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1\alpha + 2\gamma = 4 \\ 1\beta - 1\gamma = 1 \end{cases}$

possiamo tentare un $\gamma = 0$
$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$\gamma = 2$
$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{cases}$

ci sono opzioni illimitate in questo caso

ciò conclusione tra le due cose lin. dip. → più di una soluz.

↓

$\begin{cases} \alpha = u_1 \\ \beta = u_2 \end{cases}$ → valido per tutti i valori di: $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

quindi è una lista di generatori di V