Ex.:

Determina l'intg. generale di:

$\dot{y} + \frac{1}{\sqrt{x}} y = 1$

1) forma Ok: $\dot{y} + a(x) y = b(x)$

$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $b(x) = 1$ } definite e continue in $I = (0, +\infty)$

Tutte le sol. dell'eq. diff. sono in I!

2) trovo $A(x)$

$A(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$

3) uso la formula

$y(x) = c e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\, dx$

$\Downarrow$

$e^{A(x)} = e^{2\sqrt{x}}$

$e^{-A(x)} = e^{-2\sqrt{x}}$

$\int e^{2\sqrt{x}} 1\, dx = \int e^t \frac{1}{2} t\, dt = \frac{1}{2}\left[t e^t - \int e^t dt\right] = \frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 1)$

$2\sqrt{x} = t$

$dx = \frac{1}{2} t\, dt$

4) sostituisco in y

$y(x) = c e^{-2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}} \frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 1)$

$= c e^{-2\sqrt{x}} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \quad c \in \mathbb{R}$

Ex.: Solve il seg. probl. Cauchy:

$\begin{cases} \dot{y} = y + Ch^{-1} x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(In che intervallo I si possono trovare le sol.?)

1. $\dot{y} - y = Ch^{-1} x$

$a(x) = -1$
$b(x) = Ch^{-1} x$
$I = \mathbb{R}$

$a(x)$, $b(x)$ sono entrambe in tutto $\mathbb{R}$ (il cos. iperbolico non si annulla mai)

2. $A(x) = \int -1\, dx = -x \quad (c = 0)$

3. $y(x) = c e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\, dx$

$= c e^x + e^x \int e^{-x} Ch^{-1} x\, dx$

$= \;'' \int -2 \frac{u}{1+u^2} du$

$u = e^{-x}$
$du = D[u]\, dx = -e^{-x} dx$
$\Rightarrow dx = -\frac{du}{u}$

tengo sempre questa parte solo in u, l'altra solo in x

4. $= c e^x + e^x\left[-\ln(1 + e^{-2x})\right]$

5) risolvo Cauchy

$y(0) = 0 \Leftrightarrow c - \ln 2 = 0 \Leftrightarrow c = \ln 2$

la sol. è $= e^x \ln\left(\frac{2}{1+e^{-2x}}\right)$ wtf

Eq. diff. II ordine

$a_2(x)\ddot{y} + a_1(x)\dot{y} + a_0(x) y = b(x)$

a_0, a_1, a_2 continue in I per Hp
b (t. noto) è una fn. cont. in I per Hp

Se $b = 0$: eq. diff. omogenea, altrimenti completa

Obiettivo: Intg. generale dell'eq.

Intr. la seguente applicazione:

$L: C^2(I) \to C^0(I)$

$L: y \mapsto a_2(x)\ddot{y} + a_1(x)\dot{y} + a_0(x) y$

$C^2(I)$ e $C^0(I)$ sono SVR con op.:
- somma tra funzioni
- prodotto funzione reale (scalare)

(soddisfa le pr. di uno SVR)

L è un'appl. lineare: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in C^2(I)$ risulta $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L y_1 + \beta L y_2$

LINEARITÀ: Le costanti si estraggono!

$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = a_2(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)'' + a_1(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_2(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)$
$= \alpha L y_1 + \beta L y_2$

L'eq. omogenea associata a quella di partenza

$a_2(x)\ddot{y} + a_1(x)\dot{y} + a_0(x) y = 0$

$Ly = a_2(x)\ddot{y} + a_1(x)\dot{y} + a_0(x) y$

ha come intg. generale $\underset{\text{"nucleo di L"}}{\ker L} = \{ y \in C^2(I) \mid Ly = 0 \}$

$\{ y \in C^2(I) \mid Ly = b \} \overset{\text{def}}{=} L^{-1}(b)$ antiimmagine di b (non è inversa)

wtf

L, L^{-1}: insiemi di fn.

Teorema

Assumendo $a_2, a_1, a_0, b \in C^0(I)$ si ha $\underbrace{L^{-1}(b)}_{\text{intg. generale completo}} = \overbrace{\ker L}^{\text{intg. generale omogenea associata}} + \underbrace{y_p}_{\text{sol. particolare}}$

come traslazione del kernel in Geom.?

Dim.: per doppia inclusione "$\subseteq$" + "$\supseteq$" = "="

"$\subseteq$" $L^{-1}(b) \subseteq \ker L + y_p$

Sia $y \in L^{-1}(b)$ cioè $Ly = b$

Proviamo $y = \ker L + y_p$ ossia

$\exists w \in \ker L : y = w + y_p$

Affinché $w \in \ker L \Leftrightarrow Lw = 0 \Leftrightarrow L(y - y_p) = Ly - Ly_p = b - b = 0$ ✓

Quindi per risolvere una completa in tutte le sol:
- trovo tutte sol omogenea ($\ker L$)
- trovo una singola sol della completa (y_p)

TRASLAZIONE?

Nelle quadratiche, $\ker L$ ha dim. 2 (come l'ord. dell'eq. diff.) (se $a_2(x) = 1$, $a_1, a_0 \in C^0(I)$)

Basta avere una base per trovare l'intero spazio delle soluzioni! (lin. indip.li)

$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Non è sempre fattibile $\to$ ipotesi semplificano: coeff a_0, a_1, a_2 costanti

$\Downarrow$

$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0 \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
$a_2 \neq 0$

Particolari soluzioni esponenziali

VEDI APPUNTI ONLINE PERCHÉ WTF

$\Delta > 0$ Es: a) $3\ddot{y} - 4\dot{y} = 0$

Eq. caratt: $3\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\lambda_{1,2} = 0, \frac{4}{3}$

$\{1, e^{\frac{4}{3}x}\}$ base

$y(x) = \alpha + \beta e^{\frac{4}{3}x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2, -3$

$\{e^{2x}, e^{-3x}\}$ base

$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-3x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Delta = 0$ es: $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ pongo una x in fronte al 2° fn nelle base per rimanere lin. indip. $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$ base di $\ker L$

$\Downarrow$

$y(x) = (\alpha + \beta x) e^{\lambda x}$

es: verifica che $x e^{\lambda_1 x}$ risolve l'eq. diff.

es 2: risolvi $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$