es.: $q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$q(x,y,z,t) = 2x^2 + 2t^2 + 2xt + 2yz$

a. A associata a q

b. f. canonica in $x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$

c. M: $MX' = X$ (cambio di var.)

d. segno di q

(2,1)
(1,2)

• costruisco A con la formula delle posizioni a, b

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• per la f. canonica mi servono autovalori di A

$$|A - tI_4| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 & 3-t \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$ Gauss

$$= (3-t)\begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (3-t)(1-t)(t^2-1) = (t-1)^2(t-3)(t+1)$$ Gauss

• autovalori di A

$\lambda_1 = 1 \quad \mu_1 = m_1 = 2$

$\lambda_2 = 3 \quad \mu_2 = m_2 = 1$

$\lambda_3 = -1 \quad \mu_3 = m_3 = 1$

essenziale l'ordine trovato! 1, 1, 3, -1

sarà sicuramente diagonalizzabile perché simmetrica...? non serve guardare le molt. geom.

• segno: indefinita, abbiamo due autoval. di segno opposto.

• q'

$q'(x',y',z',t') = x'^2 + y'^2 + 3z'^2 - 1t'^2$

• cerco gli autospazi:

$$V_{\lambda_1} = \ker(A - 1I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + t = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

risolvo la matrice sempl.

sono già ortogonali! ✓
quindi base dell'autospazio che sappiamo ha $\mu_1 = m_1 = 2$ quindi dim 2 ✓

matrice non singolare?

$$V_{\lambda_2} = \ker(A - 3I_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -x + t = 0 \\ -3y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ortog. al primo autospazio ✓
dim 1 ✓

$$V_{\lambda_3} = \ker(A + I_4) = \dots = \begin{cases} 3x + t = 0 \\ x + 3t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ortog. agli altri due ✓
dim 1 ✓

tutti ortog. fra loro ✓

altrimenti si deve ortogonalizzare, ma prima o dopo?