Analisi 20231017.2

Def.: sia $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme simmetrico rispetto all'origine

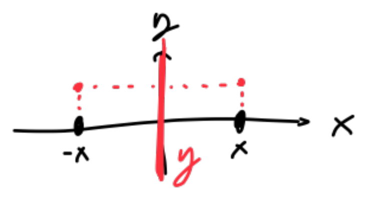
$x \in A \to -x \in A$

$[-2, 2]$

diciamo che f è:

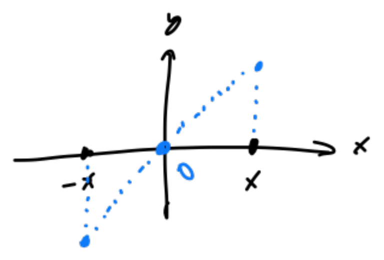
- pari: se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A$
- dispari se $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A$

se è una delle due: f. simmetrica



f pari $\Leftrightarrow$ simm. all'asse y

esempio: $f(x) = ax^2 + c$
$f(-x) = ax^2 + c$



f dispari $\Leftrightarrow$ simm. all'origine

Esercizio: simmetrica? pari o dispari?

- $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad f(-x) = \dfrac{-x}{1+x^2}$ $\quad -f(-x) = -\dfrac{-x}{1+x^2} = \dfrac{x}{1+x^2}$ $= f(x)$

- $f(x) = \cos(x^4)$ $\quad f(-x) = \cos(x^4)$ $= f(x)$
  $-f(-x) = -\cos(x^4)$

- $f(x) = 2^{x^3}$ $\quad f(-x) = 2^{(-x)^3} = 2^{-1x^3}$
  $-f(-x) = -2^{-1x^3}$ non simm.ca

- $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+2}$ $\quad f(-x) = \dfrac{-x^3+1}{-x+2}$
  $-f(-x) = -\dfrac{-x^3+1}{-x+2}$ non simm.ca

FUNZIONI INVERTIBILI

Def: sia $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. f è invertibile se almeno una di queste proprietà è vera:

- $\forall y \in f(A) \;\; \exists!\, x \in A \mid y = f(x)$
  non ci sono punti spaiati in y
- $\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  lo stesso punto nel dominio deve avere la stessa immagine
- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  "

Se f è invertibile, f^{-1} è la funzione da $f(A)$ ad A che associa ad ogni $y \in f(A)$ l'unico $x \in A \mid y = f(x)$

Il grafico di f^{-1} è simm. rispetto ad $y = x$ del grafico di f.

Come si verifica?

① tentare di risolvere l'eq. $y = f(x)$ per x

$y = x^3 + 1 \quad \to \quad x = \sqrt[3]{y-1}$
$f^{-1}(y)$

$y = f(x) \to x = f^{-1}(y)$

però:

$y = e^x + x \to x = ?$

② **Teorema:** se $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ strettamente monotona, allora è invertibile ed anche f^{-1} sarà monotona.

Dim.: supponiamo f sia str. crescente, cioè:

$\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 < x_2 \mid f(x_1) < f(x_2)$

proviamo invertibilità per terza opzione:

se $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

- $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $x_1 > x_2 \to f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ "

entrambi sufficienti per provare invertibilità

Dim.: provare che f^{-1} è strettamente crescente (usiamo seconda opzione?)

Esercizio

come proviamo se è str. monotona?
$\to$ derivate