Equazioni Differenziali

(solo alcuni modelli semplici)

"equazione": relazione in 1+ incognite $\quad 2x-1=0 \quad x\in\mathbb{R} \quad x=\frac{1}{2}$

ma al posto delle incognite abbiamo FUNZIONI!

soddisfa uguaglianza che coinvolge la funz. ma anche le sue DERIVATE!

MODELLISTICA MATEMATICA

matematica provvede le basi per le altre mat. scientifiche

1. individuo il fenomeno da studiare
2. " le grandezze fisiche coinvolte → VARIABILI
3. cerco relazioni tra le grandezze individuate → "LEGGI FISICHE"

provengono dal contesto scientifico

⇒ EQUAZIONI, principalmente DIFFERENZIALI
"permettono di studiare la realtà"

Es.:

1. Sia f continua in $[a,b]$ assegnata (nota dal problema)

determina $y=y(x) \mid y'=\underbrace{f}_{f(x)\ \forall x\in[a,b]}$ in $[a,b]$

con $f(x)=x^2$

$\Rightarrow y'=x^2 \quad y(x)?$ EQ. DIFF.

$y(x)=\frac{1}{3}x^3+c \quad \infty$ soluzioni $\quad c\in\mathbb{R}$

quindi in generale $y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad x_0\in[a,b]$ fissato, $x\in[a,b]$

2. II legge della dinamica

$m\ddot{x}(t)=F(t,x,\dot{x})$

$x(t) \quad x'(t)$

$m>0$

$t\in I$

$x(t)$: legge oraria che descrive il moto di una particella lungo una guida (1-D) rettilinea sotto l'azione della forza F che dipende da t, $x(t)$ posizione e $\dot{x}(t)$ velocità

$\Rightarrow \ddot{x}(t)$ accelerazione

$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=x'\\ \ddot{x}=x''\end{array}\right\}$ in fisica, derivate con punto!

per esempio se agisce solo la forza peso: $m\ddot{x}(t)=-mg$

se agisce una forza elastica: $m\ddot{x}(t)=-k\dot{x}(t) \quad k>0$ costante elastica

forza di richiamo proporz. alla velocità

" f. elastica + attrito: $m\ddot{x}(t)=-kx(t)-h\dot{x}(t) \quad h>0$?

Def.: eq. diff. è una relazione/uguaglianza del tipo: $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

dove x = var. indip.te, $y=y(x)$ e $y^{(n)}$ derivata.

(E) $F(t,x,x'\dots)=0$ — incognita t e le sue derivate fino a un certo punto

ad esempio $\overbrace{m\ddot{x}(t)+mg}^{F(t,\ddot{x})?}=0$ forza peso?

F è nota!

Ordine dell'eq. diff. è l'ord. max delle derivate presenti.

- $y'=f$ eq. diff. ord = 1
- $m\ddot{x}=F(t,x,\dot{x})$ $\underbrace{\text{ord}=2}_{\text{derivo fino a ord 2}}$

Si chiama soluzione o integrale particolare di E una fn. y definita in un certo intv. I derivabile n-volte in I che SODDISFA L'UGUAGLIANZA quando sostituita in E con le sue derivate.

Si chiama integrale generale dell'eq. E l'insieme di tutte le soluzioni.

"integrare" l'eq. diff. = risolvere

Es.

Verifica $y(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{2}+e^{-2\sqrt{x}}, \quad x>0$

se è soluzione di $\underbrace{y'+\frac{1}{\sqrt{x}}y-1=0}_{\text{eq. diff.le}}$

($x=0$ per $\sqrt{x}$ è punto di non derivabilità a tang. verticale per $\sqrt{x}$)

Calcoliamo y' e verifichiamo

$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}$

Sostituendo nell. eq. diff.:

$y'+\frac{1}{\sqrt{x}}y-1=0$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2\sqrt{x}}-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}+e^{-2\sqrt{x}}\right)$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2\sqrt{x}}-1+1-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-2\sqrt{x}}$

$0=0$ vero

L'eq. diff. (E) si dice in forma normale se la derivata di ord. max è isolata (esplicitata) alle altre, cioè:

~~$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1$~~ si può coeff?

$y^{(n)}=F(x,y,\dots,y^{(n-1)})$ forma normale

L'eq. diff. (E) è lineare se F che compare in (E) è lineare rispetto a $y,y',\dots,y^{(n)}$ ossia:

$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=f$

dove a_i e f sono fn. continue di x in I certo. $(a_i=a_i(x),\ f=f(x))$

Esempi:

Di ciascuna delle seguenti eq. diff. stabilire se è lineare

normale è la forma, lineare è il contenuto non la forma!

a) $x^2\dot{y}+xy=1$ $\qquad$ c) $\dot{y}=\frac{xy}{1+x^2}$

b) $\dot{y}=\frac{xy^2}{1+x^2}$ $\qquad$ d) $y\dot{y}^2+x\dot{y}=0$

→ non dipende da come è scritta perché se si può riscrivere come lineare allora è lineare!

invece bisogna assicurarsi che y sia sempre da sola!

$\otimes\, y^2 \quad \otimes\, y\dot{y}$ ...

tutte di ordine 1

Eq. diff. lineare del I ord. in f. normale

$\dot{y}+a(x)y=b(x)$ (*)

a,b fn. continue e note, in I.

Se l'eq. non ha certe caratt. allora non si può risolvere.

Se $b(x)=0$ l'eq. è OMOGENEA

altrimenti COMPLETA

Formula risolutiva

anche qui c fissata = 0

$y(x)=ce^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int e^{A(x)}b(x)\,dx \quad x\in I$

ci fornisce l'intg. generale dell'eq. (*) dove $c\in\mathbb{R}$ e $A(x)$ è primitiva di $a(x)$

Ossv.: A è primitiva di a con costante fissata ⇒ basta prenderne una con c scelta e rimossa (di solito $c=0$)

ignoro quindi tutte le costanti dalla scelta di primitive ($c=0$)

Proviamo la formula risolutiva:

Se A primitiva di a, allora $A'=a$ $\quad A'(x)=a(x)\ \forall x\in I$

y soluz. di (*) sse y derivabile e $\dot{y}+a(x)y=b(x)$

Ora molt. ambo per $e^{A(x)}$

$\Leftrightarrow \underbrace{[\dot{y}+a(x)y]e^{A(x)}}=e^{A(x)}b(x)$

$[\dot{y}+a(x)y]e^{A(x)}=\boxed{[ye^{A(x)}]'}$

infatti $=\dot{y}e^{A(x)}+ye^{A(x)}A'(x)=e^{A(x)}[\dot{y}+a(x)y]$

$\Leftrightarrow [ye^{A(x)}]'=e^{A(x)}b(x)$

voglio la y che è solo al 1° m. ora!

$\Leftrightarrow ye^{A(x)}=\int e^{A(x)}b(x)\,dx+c$ $\quad$ aggiungo c (solo a sx, dopo derivato)

$\Leftrightarrow y(x)=ce^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int e^{A(x)}b(x)\,dx \quad \boxed{c\in\mathbb{R}}$

valore variabile che conta le soluzioni (∞)

Ossv.: Tutte le sol. sono in I in cui a,b sono continue! (in generale non è vero, per eq. non lineari l'intv. di ∃ delle eq. è più piccolo)

L'intg. generale della form. precedente è composta da due addendi:

- $ce^{-A(x)}$ al variare di c in $\mathbb{R}$ è l'intg. generale dell'eq. omogenea associata! ⇒ $\dot{y}+a(x)y=0$
- $e^{-A(x)}\int e^{A(x)}b(x)\,dx$ è una sol. particolare dell'eq. completa. ritroveremo questa prop. con le eq. lin. del II ordine.

Es.: determinare l'intg generale di

$x^2\dot{y}+2xy=1$

è nella forma valida $\dot{y}+a(x)y=b(x)$? FORMA NORMALE

X: divido per x^2

⇓

$\dot{y}+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2}$ ✓

$\underbrace{a(x)=\frac{2}{x} \quad b(x)=\frac{1}{x^2}}$

definite e continue in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

⇒ soluz. definite in $(-\infty,0)$ o $(0,+\infty)$ (NE SCELGO UNO) perché salto in intv.

⇒ $I=(0,+\infty)$

calcolo $A(x)$ primitiva di $\frac{2}{x}$ in $(0,+\infty)$

$A(x)=\int\frac{2}{x}\,dx=2\ln|x| \cancel{+c}_{=0} = 2\ln x$ $\quad$ x positivo

ora formula risolutiva:

$y(x)=ce^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int e^{A(x)}b(x)\,dx$

$e^{-A(x)}=e^{-2\ln x}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

$e^{A(x)}=e^{2\ln x}=x^2$

$y(x)=c\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\int x^2\frac{1}{x^2}\,dx$

$=\frac{c}{x^2}+\frac{1}{x} \quad c\in\mathbb{R} \quad x>0$

si verifica sostituendo a y nell'eq. iniziale.

Problema di Cauchy in eq. lin. I ord f. normale

Per selezionare una soluzione nell'ambito dell'integrale generale spesso si assegna una condizione iniziale

$\begin{cases}\dot{y}+a(x)y=b(x)\\ y(x_0)=y_0 \quad \text{cond. iniziale}\end{cases}$ problema di Cauchy

Teorema: Siano $a,b\in C^0(I)$ allora $\forall x_0\in I$ e $y_0\in\mathbb{R}$ ∃! problema di Cauchy ammette unica sol.

Come si fa?

- risolvo eq. diff. con formula

es.: $\begin{cases}\dot{y}+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2} \quad \text{es. di prima}\\ y(1)=0\end{cases}$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ scelgo 1 DEVE ESSERE IN I! $\quad$ $\mathbb{R}$ scelgo 0

$\begin{cases}y(x)=\frac{c}{x^2}+\frac{1}{x} \quad c\in\mathbb{R} \quad \boxed{x>0}\\ y(1)=\underbrace{c+1=0}_{c=-1} ✓\end{cases}$