(a_n) successione

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ serie numerica

$\Downarrow$

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ somma parz. / ridotta n-esima

$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{serie conv.} \to l = \text{somma della serie} \\ \pm\infty & \text{serie div.} \\ \nexists & \text{serie indet.} \end{cases}$

Serie geometrica

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ serie geom. di ragione q

$\Rightarrow \begin{cases} \text{conv.} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{div.} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indet.} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

Cond. necessaria di conv.za

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ conv. $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

non è suff.
non vale $\Leftarrow$

termini man mano raggiungono zero

$\neg q \Rightarrow \neg p$

Conseguenza: $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ non conv.

Serie a termini positivi ≥ 0

Cr. confronto

$\sum a_n, \sum b_n$: $a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0$ definitivam.

minorante, maggiorante

Supp. $a_n \leq b_n$

a) $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

b) $\sum a_n$ div. $\Rightarrow \sum b_n$ div.

- magg. conv. $\Rightarrow$ min. conv.
- min. div. $\Rightarrow$ magg. div.

Cr. confronto asintotico

$\sum a_n, \sum b_n$: $a_n \geq 0 \wedge b_n \geq 0$ definit.

Supp. $a_n \sim b_n \quad n \to +\infty$

$\Rightarrow a_n$ ha carattere di b_n

Una serie a t. positivi non è mai indeterminata (perché crescente)

Serie armonica (generalizzata)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

è serie a t. positivi perché $\frac{1}{n}$ strett. positivo $\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$

$\Rightarrow$ conv. o div. $+\infty$

Per $\alpha = 1 \Rightarrow$ div. $+\infty$ per serie armonica (lez. prec.) $\Rightarrow$ converge troppo lentamente.

$\alpha = 2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ questa sappiamo che è convergente

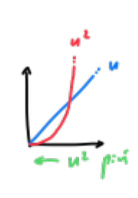
per il crit. conf. asintotico, anche $\frac{1}{n^2}$ converge

velocità di conv.za

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ vs. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

div. $\qquad$ conv. $\leftarrow$ allora perché?



$\leftarrow n^2$ più rapido a 0 di n!

se $\alpha > 2 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

quindi converge ancora, e più rapidamente

$\Downarrow$

per cr. confronto

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ minorante $\qquad b_n = \frac{1}{n^2}$ maggiorante

sappiamo $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

quindi $\alpha > 2$ risulta conv.

se $0 < \alpha < 1$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ diverge, allora per criterio di confronto diverge anche $0 < \alpha < 1$

$\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha > \left(\frac{1}{n}\right)^1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

minorante, maggiorante

b) $\sum \frac{1}{n}$ div. $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ div.

se $\alpha \leq 0$ $\quad \frac{1}{n^\alpha}$ non è infinitesimo! $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ non converge $\leftarrow$ div. ~~indet.~~ no perché a termini positivi

div. $\quad$ conv. $\quad$ conv. $\quad \alpha$ (1, 2)

perché?

se $1 < \alpha < 2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n}$

maggiorante diverge

minorante converge

direzioni sbagliate

$\Downarrow$

$\emptyset$ cr. confronto

$\Rightarrow$ Non sappiamo farlo, servirà l'integrazione, ma si dimostra che con $1 < \alpha < 2$ converge.

Come dim. cr. confronto:

Sappiamo $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per semplicità (lo è anche se lo è solo definitivam.)

Siano $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

$a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad b_0 + b_1 + \dots + b_n \Rightarrow \begin{matrix} a_0 \leq b_0 \\ a_1 \leq b_1 \\ \vdots \end{matrix} \Rightarrow s_n \leq t_n \quad \forall n$

per confronto, il $\lim_n s_n \leq \lim_n t_n$

$\exists \quad \exists$ per t. positivi

Se $\sum b_n$ converge, ossia $\lim_n t_n \in \mathbb{R}$ (è la somma) allora da anche $\lim_n s_n \in \mathbb{R}$ (è la somma!)

Se $\sum a_n$ div., ossia $\lim_n s_n = +\infty$ allora unica possib. $\lim_n t_n = +\infty$

Esercizio: studio del carattere delle seg. serie:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$ $\qquad$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ $\qquad$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

non so ancora se è convergente!

lo era se $\neq 0 \Rightarrow$ div.

⚠ provare anche, se è immediato, a dimostrare serie a t. positivi $\Rightarrow$ se asintotica a t. pos. anche l'iniziale lo è.

$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow$ è convergente

Ossv.: $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$ a patto che $\sum a_n, \sum b_n$ non siano indeterminate e non diano origine alla f. indeterminata $+\infty - \infty$

b) $\sum \frac{1}{n} - \sum \sin\frac{1}{n} = +\infty - \infty$ f. i.

armonica div. $+\infty$; $\sim \sum \frac{1}{n}$ div. $+\infty$

$\Rightarrow$ usiamo Maclaurin sul 2°:

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \to 0$

$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad x \to 0$

$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \quad x \to 0$

$(x_n = \frac{1}{n})$

$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \quad n \to +\infty$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{6} \sum \frac{1}{n^3}$ converge $\Rightarrow$ b) converge

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \sum \underbrace{\ln(n+1)}_{b_n} - \sum \underbrace{\ln(n+2)}_{b_{n+1}}$

quoziente < 1 $\Rightarrow$ ln negativo

$\Leftrightarrow b_n = \ln(n+1)$ serie telescopica

$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \Rightarrow$ divergente (per t. negativi) a $-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

oppure $\frac{n+1}{n+2} = 1 + \frac{-1}{n+2}$

$\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{-1}{n+2}\right) \sim \frac{-1}{n+2} \sim -\frac{1}{n}$

armonica div. a $-(+\infty)$ quindi $-\infty$

Es.: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$\sqrt{n^2+n+1} \sim \sqrt{n^2} = n \quad n \to +\infty$ prendiamo il max grado

$\sum n^{-\frac{2}{3}} = \sum \frac{1}{n^{2/3}}$

armonica con $\alpha < 1$ divergente

$\Rightarrow$ div. per confronto asintotico.

Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ serie a termini positivi. Supp. che $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$

$l \in [0, +\infty]$

Se $l < 1 \Rightarrow$ serie converge

se $l > 1 \Rightarrow$ serie diverge

se $l = 1$ non si sa

$\hookrightarrow a_n = 1 \quad \sqrt[n]{a_n} = 1 \to 1 \quad \sum a_n = \sum 1$ div.

$\hookrightarrow a_n = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1 \quad \sum a_n$ conv.

$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1 \quad \sum \frac{1}{n^2}$ conv.

se $l = 1$ quindi abbandono cr. radice.

Es.: stabilire il carattere della serie

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^n}$ con $a > 0$

Cond. suff $\Rightarrow$ cond. necessaria

perché con $\neg q \Rightarrow \neg p$ si annulla la suff.

$\lim_n a_n = \lim_n \frac{a^n}{n^n} = 0$ ✓ ma non sappiamo ancora

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow l < 1$ è convergente

Es.: $\sum \frac{n^\alpha}{a^n} \quad a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

serie a t. pos.

cr. radice

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^\alpha}}{a} = \frac{1}{a} = l$

$\sqrt[n]{n^\alpha} \to 1$ per $n \to +\infty$

se $a < 1 \Rightarrow l < 1$ converge
se $a > 1 \Rightarrow l > 1$ diverge $\Big\}$ $\forall \alpha$, conta solo se $a = 1$

se $a = 1$ è un sing. val. critico: sostituisco

$\sum n^\alpha = \sum \frac{1}{n^{-\alpha}} \Rightarrow$ converge se $\alpha < -1$
diverge se $\alpha \geq -1$

Crit. del rapporto

Sia $\sum a_n$ serie a termini positivi

Supp. che $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$

se $l < 1$ Σ conv.

se $l > 1$ Σ div.

se $l = 1$ si cambia strada, come la sost. ~~dall'alto~~

Es.: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad a > 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{n!(n+1)} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1 \quad \forall a > 0$

$\Rightarrow$ convergente!

Ex: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

Es.: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}$ div/conv (non indet. perché a t. positivi!)

$\wr$

$\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ serie geom. $q = \frac{2}{3} \in (-1, 1)$ intv. di conv.

$\Rightarrow$ converge, quindi per $\sim$ anche l'altra.

~~$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}+n+1} \frac{3^n+n}{2^n+1} = \frac{(2 \cdot 2^n + 1)(3^n+n)}{(3 \cdot 3^n + n + 1)(2^n+1)}$~~

Es: $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+4}\right), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n+2}{n^2+4}\right), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + \ln n}{(n+\cos n)^2}$