Teorema spettrale

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ simmetrica
(funziona in $\mathbb{R}$, ~~non è detto in $\mathbb{C}$~~) $\Longleftrightarrow$ è un ssc!

Allora $\exists$ base o.n. di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Ossia: $\Downarrow$

1. A è diagonalizzabile, quindi gli autovalori di A sono tutti reali ossia $p_A(t)$ è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$ cond. necessaria diag.?

ortog. di Gram-Schmidt?

2. gli autospazi associati ad autovalori differenti sono mutuamente ortogonali (es.: $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$: $\forall X \in V_{\lambda_1}$, $\forall Y \in V_{\lambda_2}$ $\langle X, Y \rangle = 0$)

3. esiste Q ortogonale $(Q \in O(n))$: $\Delta = Q^T A Q$ $(= Q^{-1} A Q)$ è diagonale
molto più veloce di Q^{-1}

Per dimostrare 1. devo lavorare in $\mathbb{C}$

Dim 2) (A è simmetrica!)

λ_1, λ_2 autoval. A : $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$V_{\lambda_1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda_1 x \}$

$V_{\lambda_2} = \{ x \in \mathbb{R}^n , Ax = \lambda_2 x \}$

$\forall x \in V_{\lambda_1}$, $\forall y \in V_{\lambda_2}$

$\langle X, AY \rangle = \langle X, \lambda_2 Y \rangle = \lambda_2 \langle X, Y \rangle$
$\shortparallel$
$\langle A^T X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = \langle \lambda_1 X, Y \rangle = \lambda_1 \langle X, Y \rangle$

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\text{so che è } \neq 0} \langle X, Y \rangle = 0$

$\Downarrow$ $\langle X, Y \rangle = 0$ allora autospazi ortogonali! (questo è il controllo vettore per vettore)

in ogni autospazio potrei rendere le ~~matrici~~ basi ortogonali con gram-schmidt e normalizzare in ortonormale

Es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ reale ✓ simmetrica ✓

calc. autovalori: POLINOMIO CARATTERISTICO

$p_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 4$

posto $p_A(t) = 0$

$\Rightarrow t = <^{3 \,= \lambda_1}_{-1 \,= \lambda_2}$ $\Rightarrow p_A(t) = (t-3)(t+1)$

$\lambda_1 = 3$ $\mu_1 = 1$ $m_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$ $\mu_2 = 1$ $m_2 = 1$
} due autovalori unici $\Rightarrow$ diagonalizzabile

$V_{\lambda_1} \,(= V_3) = \ker(A - \lambda_1 I_2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$: $-2x + 2y = 0$, $-x + y = 0$, $x = y$
rk = 1
$\Rightarrow \mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\Downarrow$

$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\Uparrow$

$V_{\lambda_2} \,(= V_{-1}) = \ker(A - \lambda_2 I_2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: $2x + 2y = 0$, $x + y = 0$, $x = -y$
rk = 1
$\Rightarrow \mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow V_{\lambda_2} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Per la diagonalità?

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $N^{-1} A N = \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
entrambe norma $\sqrt{2}$

$Q \,(N \text{ o.n.}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in O(2)$ ⊛
autovett.: 3, −1

qualcosa che è ±1 ...

$Q^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$: simmetrie rispetto a una retta nel piano

⊛ $Q^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \Rightarrow$ matrice che rappr. l'appl. lineare della rotazione di θ ...

Q rientra nel pattern di Q^-

una delle due simmetrica e una diagonalizzabile?

$Q \in O(2)$: $Q^T A Q = \Delta$

colonne formano base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
cond. suff. e nec. all. ortog. della matrice Q

$\Rightarrow Q^{-1} = Q^T$

$Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓
autov. 3, autov. −1

- **Es.:**

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ reale ✓ simmetrica ✓

$p_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2 - 4t + 3) = (t-1)^2 (t-3)$

$p_A(t) = 0 \Leftrightarrow (1-t)(t^2 - 4t + 3) = 0$
$t = 1$
$t_{1,2} = 1, 3$

$\lambda_1 = 1$ $\mu_1 = 2$ $m_1 = 2$ (why?)
$\lambda_2 = 3$ $\mu_2 = 1$ $m_2 = 1$
} A è diagonalizzabile
(anche perché $1 \leq m_i \leq \mu_i$ quindi per forza?)

$V_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
"trovo il kernel" = "moltiplico per x, y, z"

$\begin{cases} x + z = 0 \\ 0 = 0 \ ✓ \\ \cancel{x + z = 0} \text{ duplicato} \end{cases}$

$x + z = 0$ PIANO

$[n] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ normale al piano
perché sono $\underset{1}{\alpha} x + \underset{0}{\beta} y + \underset{1}{\gamma} z = 0$

$\mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ -\alpha \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} -2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

è una retta
trovo vettore direttore

$[d] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

coincide alla normale dell'altro piano!

VERSORE = VET. DIRETTORE?

$\mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Abbiamo già tutti vet. ortogonali
lista complessiva:

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

sistema ortogonale

gram-schmidt è quello delle proiezioni per trovare lista ortogonale

per controllare vet. ortog. 2 a 2: $\langle X, Y \rangle = 0$

$\Rightarrow Q = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \middle| \frac{v_2}{\|v_2\|} \middle| \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) \in O(3)$ ortonormale!

$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: $Q^T A Q = \Delta$
ROTAZ. SU ASSE Y

ottengo la diagonalizzata finale (?)

$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
autov = 3
2 autovalori = 1

Teorema di Eulero → mat. descrive appl. in E_O^3

Sia $Q \in SO(3)$, cioè ortog. di ord. 3 con $|Q| = +1$

allora $\exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v} \neq \underline{0}$: $Q \underline{v} = \underline{v}$

cioè la matrice ha l'autoval. +1 ss esiste una direzione (una retta) $(r = \mathrm{Span}(\underline{v}))$ con autovettore $\underline{v}$

DESCRIVE UNA ROTAZIONE SU ASSE r

costanza di rotazione di un corpo rigido (non funziona fuori da E_O^3)

Forme Quadratiche in $\mathbb{R}^n$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$

$q(x)$
$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
è una f. quadratica del vet. x se $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$ è un pol. omogeneo di grado 2 in $x_1 \dots x_n$.
solo secondo grado in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $x^2 - xy$ ✓ $x^2 - y^3$ ✗
$x^2 - 1$ ✗
$x^2 - y$ ✗

in $\mathbb{R}^2$
$q(x) = q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = q(x, y) = x^2 - xy$ è una f. q. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

in $\mathbb{R}^3$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$q(x) = \underbrace{x^2}_{\text{"termine quadrato"}} + \underbrace{4xz}_{\text{"termine rettangolare"}} - 2yz - y^2$ ✓ perché quadratica ha 2° grado anche in $\mathbb{R}^n$! $n \geq 2$

Come la scriviamo in forma di matrice?

Osserv.: $\forall A \in M_{\mathbb{R}}(2)$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $X^T A X = \langle X, AX \rangle$ è una f. q. in $\mathbb{R}^2$

$(x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cxy + dy^2$

		a	b
		c	d
x	y	$ax+cy$	$bx+dy$

		x
		y
$ax+cy$	$bx+dy$	$ax^2 + cxy + bxy + dy^2$ ✓

data $q(x) = x^2 - xy$ è unica A : $X^T A X = q(x)$?

se impongo che $A^T = A$ (simmetria) diventa univoca

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & d \end{pmatrix}$ $\beta + \beta = b + c = -1$
$\beta = -\frac{1}{2}$ scelta univoca

quindi è la MAT. ASSOCIATA ALLA F. QUADRATICA

vero in generale

in $\mathbb{R}^3$: $q(x) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + b_1 xy + b_2 xz + b_3 yz$
(1, 2) (1, 3) (2, 3)
(2, 1) (3, 1) (3, 2)

mat. assoc. q:

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1/2 & b_2/2 \\ b_1/2 & a_2 & b_3/2 \\ b_2/2 & b_3/2 & a_3 \end{pmatrix}$

$q(x) = X^T A X$

Segno della f. q.:

- positiva DEFINITA se $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \underline{0}_n$ $q(x) > 0$
- positiva SEMI-DEFINITA se $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $q(x) \geq 0$ ma $\exists x \neq \underline{0}_n : q(x) = 0$

identico per negativa.

- /
- /
- indefinita altrimenti (cioè quando è sia positiva, sia negativa)

in $\mathbb{R}^2$:

$q(x) = x^2 + y^2$ positiva definita (ricorda $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$q(x) = x^2$ positiva semidefinita (y libera)

$q(x) = x^2 - y^2$ indefinita