Algebra 20231012 – p2

Teorema fondamentale dell'algebra:

siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n \neq 0$

allora l'eq. algebrica di grado n

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

ammette n radici (inteso soluzioni) in $\mathbb{C}$ contate con la loro molteplicità.

↳ tante soluz. quanto il grado dell'eq. alg.ca ($=n$)

sia distinte, sia coincidenti sono possibili

non in $\mathbb{R}$, solo in $\mathbb{C}$

caso particolare: $z^n + a_0 = 0$ con $n=1$ (grado 1)

→ radici n-esime di $-a_0$??

Esercizio:

calcolare $\operatorname{Im}\left[\frac{z+5}{z-3j} + \operatorname{Re}(z) + 3z\bar{z}\right]$ dove $z = 5j$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{5+5j}{2j} + \underbrace{0}_{\text{reale}} + \underbrace{3(5j)(-5j)}_{\text{reale}}\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{5+5j}{2j}\right] \quad \text{raz.}$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{5+5j}{2j}\cdot\frac{j}{j}\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{5j-5}{-2}\right] = -\frac{5}{2}$$

nota:
$\operatorname{Im}(z_1+z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$
$\operatorname{Re}(z_1+z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$
ma non nel prodotto

Esercizio

- $\operatorname{Im}\left[\frac{z+3}{z-5} + 3\operatorname{Re}(z\bar{z})\right]$ $\quad z = 2+j$
- $\operatorname{Re}\left[(z-3\bar{z})\, e^{j\frac{\pi}{3}}\right]$ $\quad z = 2-3j$

Formula di Eulero:
$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$= \operatorname{Re}\left[(2-3j-6-9j)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \operatorname{Re}\left[(-4-12j)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right]$$

$$= -\frac{4}{2} - 12\frac{\sqrt{3}}{2}j^2 = -2+6\sqrt{3}$$

solo a·c e b·d per avere reali!

Esercizio soluzioni di $z|z|^2 - j\bar{z} = 0$

risolto per z

non è eq. algebrica che ammette solo potenze, quindi non sappiamo n. di soluzioni come nei polinomi.

usiamo f. alg. o f. trig.ca?

proviamo ad accorgiamoci della diffic.

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{importante!}$$

$z^2\bar{z} - j\bar{z} = 0$

$\bar{z}(z^2 - j) = 0$

legge di ann. prod.

soluzioni:

$\bar{z} = 0$

$z^2 = j \quad \to \quad z = \sqrt{j}$

$r = 1$, $\alpha = \pi/2$ $\to$ $w_k = \cancel{\sqrt{1}}\,(\cos\theta_k + j\sin\theta_k)$ $\quad n=2$, $k = 0,1$

$$\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

soluzioni: z, w_0, w_1

$$\begin{cases} w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ w_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

Esercizi:

- $2z - 7z^2 = 7|z|^2$
- calcola $\left|z - \frac{j}{\bar{z}}\right|$, $z = 1+j$

$$\left|z - \frac{j}{\bar{z}}\right| \to \left|(1+j) - \frac{j}{1-j}\right| =$$

$$= \left|(1+j) - \frac{j(1+j)}{2}\right| =$$

$$= \left|(1+j) - \frac{1}{2}j(1+j)\right| =$$

$$= \left|(1+j)\left(1-\frac{1}{2}j\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$