⇐ persi vecchi appunti...

II crit. diag.bile

Se $p_A(x)$ è totalmente decomponibile in $\mathbb{R}$ con tutti autovalori regolari
⟺ diag.bile

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{\mu_1} + \dots + (x-\lambda_k)^{\mu_k} \underbrace{(-1)^n}_{\text{segno automatico}}$$

$\Rightarrow \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$ per totalmente decomponibile

⇓

$\mu_i = m_i$

$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n \Rightarrow$ I crit.

POLINOMIO TOTALMENTE DECOMPONIBILE NECESSARIO

μ è la molteplicità di ogni λ nella decomp., quante volte si ripete!
m è la molteplicità di vettori nella matrice!

$\mu = (\lambda_1 - x)^{\mu_1} (\lambda_2 - x)^{\mu_2} \dots$ ogni m ha m
ma danno cose buone! ✗ (x^2+1) e.g.

$m =$ colonne $-$ rk$(A - \lambda I_n)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & \mu_1 = m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & \boxed{\mu_2 = 2 \quad m_2 = 1} \end{array}$$

irregolare
✗ diagon.le

Coroll. Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$. Se gli autovalori di A sono n e tutti distinti $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile

Es.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile

⇓

$p_A(x)$ ha radici 1, 7, 3

Se $p_A(t)$ è tot. decomponibile: $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots$
$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 \dots$

Dim.: banale se A diag.le

$\exists N : \Delta = N^{-1} A N$
$\det A = \det \Delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots$
$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \Delta = \lambda_1 + \lambda_2 \dots$

} perché se è diag.le è simile ⇒ ha stessa tr e det.

Es.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) quali vettori $\underline{v}_n$ sono autovettori di A?
2) autovalori con μ e m
2b) basi degli autospazi
3) $\exists N \in GL(n, \mathbb{R}) : N^{-1} A N$ è diagonale?
   - se sì, produrre N
   - se no, dare B diagonalizzabile t.c. $p_B(x) = p_A(x)$

"polinomio caratteristico"

1) non nulli: ✗ v_2

$A \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$? $\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A\underline{v}_1 = -2\underline{v}_1$ ✓

$A \underline{v}_3 = \lambda_3 \underline{v}_3$? $\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad A\underline{v}_3 \notin \operatorname{Span} v_3$ ✗

$A \underline{v}_4 = \lambda_4 v_4$? $\quad \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad A\underline{v}_4 \notin \operatorname{Span} v_4$ ✗

per questo sappiamo che $p_A(x)$ è divisibile per $(x-(-2))$

-2	-2	λ
$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\underline{v}$

abbiamo trovato $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovet. con autovalore $\lambda_1 = -2$

⇒ anche $\alpha \underline{v}_n$, se $\underline{v}_n$ è autovet. sarà autovet.! (e λ rimane identico all'iniziale)

2) $p_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 4 & 3 \\ -4 & -6-x & -3 \\ 3 & 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 4 & 3 \\ -2-x & -2-x & 0 \\ 3 & 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2+x & 3 \\ -2-x & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(2+x)\begin{vmatrix} -2-x & 0 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = -(2+x)(-2-x)(1-x) = (x+2)^2(1-x)$

pongo $p_A(x) = 0 \Rightarrow (x+2)^2(1-x) = 0$

gli zeri (radici) sono: λ

$x+2 \Rightarrow -2+2=0 \qquad \lambda_1 = -2$
$1-x \Rightarrow 1-1=0 \qquad \lambda_2 = 1$

prendiamo molteplic. alg.:
$\mu_1 = \boxed{2}$
$\mu_2 = 1$

calcolo m $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$m_1 = 3 - |A - (-2) I_3| = 3 - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = \boxed{1}$ $\quad \mu_1 \neq m_1 \Rightarrow$ irregolare

$m_2 = 3 - |A - 1 I_3| = 3 - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \dots 1$

$V_{\lambda_1} : \begin{cases} 4x + 4y + 3z = 0 \\ \cancel{3}x + \cancel{3}y + \cancel{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$x \quad y \quad z$
y libera

$V_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I_3)$

Sol. generica:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

⇓

$\mathcal{B}_{V_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2bis)

$(A - \lambda_2 I_3) = (A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker(A - I_3)$

noi vogliamo trovare $\mu_1 = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

rk$A = 2$

$\ker(A - I_3) = V_{\lambda_2} : \begin{cases} x + 4y + 3z = 0 \\ \cancel{9}y + \cancel{9}z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{array}{l} z = \beta \\ y = -\beta \\ x = \beta \end{array}$ $\Rightarrow \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (sol. gen.) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_{V_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3) $N^{-1} A N \stackrel{?}{=} \Delta$ diagonale? ✗

$\exists N \in GL(n, \mathbb{R}) : N^{-1} A N = \Delta$

allora uso: $p_B(x) = p_A(x)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ usiamo la molteplicità (algebrica?) per il n° di vettori con stesso λ

✓

non è 2, ma -2