$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

autovalori: da $p_A(t) = -(t-1)(t+2)^2$

$\lambda_1 = 1 \quad \mu_1 = m_1 = 1 \quad \mu_1 = m_1$

$\lambda_2 = -2 \quad \mu_2 = 2 \quad m_2 = 1 \quad \mu_2 \neq m_2$ irregolare (geom sempre ≤ alg)

⇒ necessaria cade: non diagonalizzabile

⇓

$\nexists N \underbrace{\text{invertibile}}_{\in GL(n,\mathbb{R})} : N^{-1}AN = \Delta$

quindi: non diagonalizzabile con un'altra con stessa pol. caratteristica

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui abbiamo un autovalore 1 per Be_1 e due autovalori (uno con molteplicità 2 (ma quale?)) -2 per Be_2, Be_3! ✓

Per E_O^3: fisso $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$

PRODOTTO SCALARE "canonico" STANDARD in $\mathbb{R}^n$. ↗ perché ci possono essere più prodotti sc.

Def.: Presi $X, Y \in \mathbb{R}^n$ chiamo pr. scal. tra X, Y la quantità $\langle X, Y \rangle$ così definita:

$X, Y \in M_{\mathbb{R}}(n, 1)$

$\langle X, Y \rangle = \underset{1\times n}{X^T}\underset{n\times 1}{Y} \in \mathbb{R}$ = a 1x1 scalare

ossia: $\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Oss.: dati $\underline{u}, \underline{v} \in E_O^3$ e $X = [\underline{u}]_B$, $Y = [\underline{v}]_B$ $\quad B = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}\}$ (in E_O^3 è la base ortonormale)

$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \langle X, Y \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$

Propr. prod. scalare "p. s." in $\mathbb{R}^n$

1) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \quad \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ simmetrico commutativo

2) $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n \quad \langle X, Y+Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$ distributivo

dim.: $\langle X, Y+Z \rangle = x_1(y_1+z_1) + x_2(y_2+z_2) + x_3(y_3+z_3)$

$= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \dots$

$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots)$

$= \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$

3) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\langle X, \alpha Y \rangle = \langle \alpha X, Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$ omogeneità

"X scalar alfa Y"

2) + 3): bilinearità prod. sc.

⇒ in termini di appl. lineari

fisso X, Y variabile

$L_X(Y) = XY$ = lineare $\begin{pmatrix} L_X \mapsto Y \\ \cancel{L_Y \mapsto X} \end{pmatrix}$? bilineare

fisso Y, variabile X stessa cosa

4) $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad \langle X, X \rangle \geq 0$ positività

$\langle X, X \rangle = 0$ sse $X = \underline{0}_n$

sono tutte le stesse propr. del p. s. in E_O^3!

modulo vett. E_O^3 ⇒ norma vett $\mathbb{R}^n$

Def.: dato 4), chiamo "NORMA" di $X \in \mathbb{R}^n$ lo scalare positivo/nullo dato da $\|X\|$ (come in E_O^3)

$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$

1) $\|X\| = 0$ sse $X = \underline{0}_n$

2) $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\| \quad \alpha \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n$

Esempio: in $\mathbb{R}^4$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\langle X, Y \rangle = -4 + 9 + 4 = 9$

$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 15$

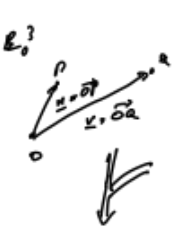
$\|X\| = \sqrt{15}$

$\|Y\|^2 = \langle Y, Y \rangle = 4 + 9 + 16 = 29$

$\|Y\| = \sqrt{29}$

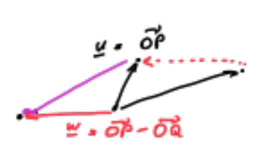
è la lunghezza dei vettori, utile a calcolare le distanze.

in E_O^3



distanza P, Q?

$= \|\vec{OP} - \vec{OQ}\| = \|\underline{u} - \underline{v}\|$



$[\underline{u} - \underline{v}] = [\underline{u}] - [\underline{v}]$

$X = [\underline{u}]_B$

$Y = [\underline{v}]_B$

$B = \{\hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}}\}$

fissato $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$

⇒ distanza fra X, Y: $d(P, Q) = \|X - Y\|$

⇒ quindi ciò vale anche in $\mathbb{R}^n$!

ossia il p. s. induce una norma e quindi una metrica in $\mathbb{R}^n$

E l'angolo tra vettori? θ tra loro

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \quad |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\|$ non supera mai il fatt. delle norme

quindi $-\|X\|\|Y\| \leq \langle X, Y \rangle \leq \|X\|\|Y\|$ ricordare del negativo

dim.: $X + tY$ c.l. $\in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$

per positività? $\langle X+tY, X+tY \rangle \geq 0$, $= 0$ sse $X + tY = \underline{0}_n$

$\langle X+tY, X+tY \rangle = \langle X, X \rangle + \langle X, tY \rangle + \langle tY, X \rangle + \langle tY, tY \rangle$ $= \langle X, Y \rangle$

$= \langle X, X \rangle + 2t\langle X, Y \rangle + t^2 \langle Y, Y \rangle$

$= \|Y\|^2 t^2 + 2t\langle X, Y \rangle + \|X\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \langle X+tY, X+tY \rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$a t^2 + 2bt + c \geq 0$

$\|Y\|^2 \geq 0$ ⇒ banale $\|Y\|^2 = 0$ ⇒ $\langle X, \underline{0}_n \rangle = 0$

$\|X\|^2 \geq 0$ ⇒ una parabola sotto asse x

⇒ $\frac{\Delta}{4} \leq 0$

$\frac{\Delta}{4} = b^2 - ac = (\langle X, Y \rangle)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$

Coroll.: $|\langle X, Y \rangle| = \|X\| \|Y\|$ solo quando $Y = \underline{0}_n$ o $X = -tY$, cioè $\{X, Y\}$ lin. dip.!

$X + tY = \underline{0}_n$

Uso Cauchy-Schwarz per angolo tra vettori!

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ se $X, Y \neq \underline{0}_n$

$$\underbrace{\frac{-\|X\|\|Y\|}{\|X\|\|Y\|}}_{-1} \leq \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\|\|Y\|} \leq \underbrace{\frac{\|X\|\|Y\|}{\|X\|\|Y\|}}_{1}$$

⇒ θ angolo tra X, Y: $\cos\theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\|\|Y\|}$ se $X, Y \neq \underline{0}_n$

e diciamo che se $\langle X, Y \rangle = 0$, X, Y sono ORTOGONALI $(\theta = \frac{\pi}{2})$

in generale, $X = \underline{0}_n \vee Y = \underline{0}_n \quad \langle X, Y \rangle = 0$ ⇒ $\underline{0}_n$ ortogonale a tutti i vettori non-nulli! (no angolo)

Def.: X, Y ortogonali se $\langle X, Y \rangle = 0$

Quindi se vogliamo l'angolo:

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$X, Y \neq \underline{0}_n$

$\|X\| = \sqrt{15}$

$\|Y\| = \sqrt{29}$

$\langle X, Y \rangle = 9$

⇒ $\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{15}\sqrt{29}}$

$\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{9}{\sqrt{15}\sqrt{29}}\right)$ ✓

⇒ la metrica definita dal p.s. standard è detta "EUCLIDEA"

proprietà derivante da C-S.:

in f. euclidei:

$\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ qui traslato da O su Q (quindi segm. orientato)

$|\|\underline{u}\| - \|\underline{v}\|| \leq \|\underline{u} - \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

⇒ in $\mathbb{R}^n$ Prop.: disug. triangolare:

$X = \underline{u} \quad Y = \underline{v} \quad X - Y = \underline{w}$

$\|X\| + \|Y\| \geq \|X - Y\| \geq |\|X\| - \|Y\||$

provviene da C-S. (traccia: controlliamo i quadrati delle disug.) ...

Ortogonalità ed ortonormalità in $\mathbb{R}^n$

$\hat{X}$ versore associato ad X così era il direttore? = versore?

$\hat{X} = \frac{X}{\|X\|}$ se $\|X\| \neq 0$ quando $X \neq \underline{0}_n$

$\left\|\frac{1}{\|X\|}X\right\| = \left|\frac{1}{\|X\|}\right| \|X\| = \frac{1}{\|X\|}\|X\| = 1$ il versore ha "lunghezza" = 1 ✓

Def.: Siano $X_1 \cdots X_k \in \mathbb{R}^n$

$\{X_1 \cdots X_k\}$ è detta lista ortoGOnale

se $X_i \neq \underline{0}_n \quad \forall i = 1 \cdots k$ e $\langle X_i, X_j \rangle = 0 \quad i \neq j$, $i, j = 1 \cdots k$

in altre parole $\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} a_i > 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ↳ ortogonale: regola!

$$\left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\langle X_i, X_i \rangle \geq 0 \quad \forall i = 1 \cdots 3$

$\langle X_1, X_2 \rangle = 1 - 1 + 0 + 0 = 0$

$\langle X_1, X_3 \rangle = 0 + 1 - 1 + 0 = 0$ (e tutte le simmetriche = 0)

$\langle X_2, X_3 \rangle = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$

↳ per la regola: lista ortogonale

Inoltre, la lista è ORTONORMALE se tutti i vettori sono versori!!

$$\Rightarrow \underbrace{\langle X_i, X_i \rangle = 1 \quad \forall i = 1 \cdots k}_{\text{ciascuno è un versore}}$$

in altre parole, $\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1 \cdots k$

e.g.: $\{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3\}$ è ortonormale

base canonica di $\mathbb{R}^n$ è lista ortonormale $\forall n$

nel cambio di sist. di riferimento (cambio base) non cambia nulla!

Prop.: Sia $\{X_1 \cdots X_k\}$ lista ortogonale

⇒ $X_1 \cdots X_k$ lin. indip. ↲ sufficiente per dire ma non necessaria all'indip.za lineare

$A = (X_1 | X_2 | X_3)$

$\operatorname{rk} A = 3$ (per pivot)

⇒ ortogonale

dim.: l'unica C.L. che produce $\underline{0}_n$ è quella banale $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

se vero ⇒ $\langle \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k, X_i \rangle = \alpha_i X_i$ ⇒ $\alpha_i = 0$ per avere $\underline{0}_n$

⇒ lin. indip. tutti gli altri nulli