# Geometria 20231108

← alg. estrazione, alg. completamento
in avanti, all'indietro
stessa cosa, della verifica l'indipendenza lineare + risulta in lista di generatori

## alg. estr. indietro

- prendo l'ultimo della lista
- guardo se i suoi elem. precedenti lo potrebbero comporre
- lo tengo se è lin. indip.te, ma poi passo all'elem. precedente e non lo considero più (lo segno) sulla base di se è superfluo!

**dimensione dello sp. vettoriale:**

finitamente generato ⟷ ammette basi ⟨ lista lin. indip. / lista generatori

__Lemma 1:__ $V$ svn, $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ base di $V$

__aggiungendo__ o __togliendo__ un vettore dalla lista non ho più una base

se togliamo: perché, anche se rimane lista lin. indip., non è più lista di generatori!

se aggiungiamo: la lista non è più lin. indip.! anche se rimane lista di gen.

se aggiungiamo $\notin V$: non è più base ... non l'ho detto 3

__Lemma 2__ "dello scambio"

se $V$ svn e $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ $k \in \mathbb{N}$ lin. indip.

$U = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ ossia $B$ base di $U$

__SOSTITUENDO__ a uno dei vettori $\underline{v}_i$ un vettore $\underline{u}$ che è C.L. di $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k$ E il coeff. del vettore $\underline{v}_i$ nella C.L. __non è nullo__, la lista risultante rimane base di $U$.

__Dim.:__ sost. $\underline{v}_k$ e.g.

$\underline{u} = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \underline{v}_n$ condizione $\alpha_k \neq 0$

$B' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}, \underline{u}\}$ ↳ posto di $\underline{v}_k$

$$\left(\sum_{n=1}^{k-1} \beta_n \underline{v}_n\right) + \beta_k \left(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n \underline{v}_n\right) = \underline{0}$$

$$(\beta_1 + \beta_k \alpha_1)\underline{v}_1 + \dots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) + \beta_k \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_k \alpha_1 = 0 \\ \beta_2 + \beta_k \alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1} = 0 \\ \beta_k \underbrace{\alpha_k}_{\text{condizione} \neq 0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_k = 0 \qquad \text{tutti i } \beta_k = 0$$

__Dim.:__ $B = \{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k\}$ dimostriamo perché la sost. funziona

$\underline{u} \in \text{Span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k)$

$\rightarrow \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underbrace{\underline{u}}_{\text{superfluo}}) = \text{Span}(\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k)$

$\underline{u} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k$

$$\cancel{\alpha_k} \underline{v}_k = \frac{\underline{u} - \alpha_1 \underline{v}_1 - \alpha_2 \underline{v}_2 - \dots - \alpha_{k-1} \underline{v}_{k-1}}{\alpha_k} \quad \neq 0$$

$\underline{v}_k \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots \underline{v}_{k-1}, \underline{u}) \rightarrow \underline{v}_k$ è superfluo

__Lemma 3__ Lemma 2 qui utilizzato del 3!

Sia $B = \{\underbrace{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n}_{n \text{ elem.}}\}$ base di $V$ svn

se $D = \{\underbrace{\underline{w}_1 \dots \underline{w}_n}_{n \text{ elem.}}\}$ contiene vett. lin. indip. allora $D$ è una base di $V$

→ se troviamo n lin. indip. lunga come la base allora per forza

__Dim.:__ $n = 3$ $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ $D = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ lin. indip.te

in una lista lin. indip. $\notin \underline{0}$

dimostra $D$ base di $V$ svn con base $B$, $D \in V$ $V = \text{Span}(B)$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ non sono contemporan. $= 0$

$\underline{w}_1 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3$ perché $\underline{w}_1 \in V$

$\underline{w}_1 \neq \underline{0}$

per lemma 2: $\{\underline{w}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è base di $V$

$\underline{w}_2 = \beta_1 \underline{w}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \beta_3 \underline{v}_3$ non tutti $= 0$ altrimenti C.L. di $\underline{w}_1$! $(\beta_1 \underline{w}_1 = \underline{w}_2)$ e noi vogliamo 3 vett. lin. indip. per avere base!

per lemma 2: $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{v}_3\}$

$\underline{w}_3 = \gamma_1 \underline{w}_1 + \gamma_2 \underline{w}_2 + \gamma_3 \underline{v}_3$ $\gamma_3 \neq 0$ altrimenti C.L. di $\underline{w}_1, \underline{w}_2$! $(\gamma_1 \underline{w}_1 + \gamma_2 \underline{w}_2)$

per lemma 2: $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ __è una base!__

__Teorema__

Sia $V$ svn fin. gen.
Se $B, D$ sono basi di $V$, hanno stessa dimensione → n° vettori

__Dim.:__ $B = \{\underline{v}_1 \dots \underline{v}_k\}$ k vettori, $D = \{\underline{w}_1 \dots \underline{w}_h\}$ h vettori } basi di $V$ svn

Hp. $h = k$

per assurdo:
se $k > h$, potremmo togliere elementi da $B$, e quindi il numero rimanendo base perché rimangono lin. indip! → lemma 3
ma per il lemma 1 ciò non dovrebbe succedere → IMPOSSIBILE → 1 vs. 3
se $h > k$ stessa cosa
→ rimane solo $k = h$

__Def.:__ si chiama DIMENSIONE dello SV il n° vettori che sta in una sua qualunque base

$\dim V = n$

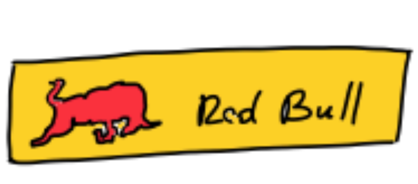
- $\dim_{\mathbb{R}} V$ no: solo in SVN
- $\dim_{\mathbb{C}} V$ ← l'indice

} dipendente dal __campo__ su cui si lavora
ad es. in $\mathbb{R}$ base è su 1, $\mathbb{C}$ è su 1 ed $i$!
$\dim = 1 \not\longleftrightarrow \dim = 2$

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ $\neq$ $\dim \mathbb{R}_n = n$

$\dim \{1, x, x^2 \dots x^n\}$

$\dim \overline{E_0^3} = 3$




Inoltre se $U$ ssv $V$ chiamo $\dim U$ il n° vett. di una base di $U$

__Conv.:__ Se $U = \{\underline{0}_V\}$ $\dim U = 0$ e non ha base → perché v. nullo non è lin. indip.

__Teorema__ Sia $V$ svn fin. gen. $n = \dim V$
Sia $U$ ssv $V$
allora ($U$ è fin. gen) implicato per
$0 \leq \dim U \leq n$

__Ossv.:__ Se in $V$ $\exists$ ssv $U$ non fin. gen., $V$ non è fin. gen.

__Dim.:__ (alg)

$U = \{\underline{0}_V\}$? sì: $\dim U = 0$
no, allora $\exists\, \underline{u}_1 \in U \mid \underline{u}_1 \neq \underline{0}_V$
↓
$\text{Span}(\underline{u}_1) = U$? sì: $\dim U = 1$
no, allora $\exists\, \underline{u}_2 \in U \mid \underline{u}_2 \notin \text{Span}(\underline{u}_1)$
e $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ sono sicuramente lin. indip.
↓
$\text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = U$? sì: $U = 2$
no, allora $\exists\, \underline{u}_3 \in U \mid \underline{u}_3 \notin \text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$
e $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ lin. indip.
↓
$\text{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = U$? sì: $U = 3$
no ...
⋮
$\text{Span}(\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_{n-1})$ sì: $\dim U = n-1$
no: allora $\exists\, \underline{u}_n \cdots$
↓
$\text{Span}(\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_n)$ sì: $\dim U = n$
no: impossibile, altrimenti per lemma 3 abbiamo superato il numero di elementi di una base, → tutti lin. indip., non possiamo avere oltre altrimenti stoviamo da $V$

se $\dim U = n$
allora $U \equiv V$

→ quindi in $E_0^3$ ssv ⟸ $\underline{0}_V$

__Corollario:__ Sia $V$ ssv fin gen

① $\dim V = n$
② $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ lin. indip.
③ $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ lista di gen. di $V$

sono ridondanti: se 2 valgono, anche la terza
② + ③ → base di $V$ → Lemma 3 → ①
① + ② → Lemma 3 → base di $V$ → ③
① + ③ → alg. estrazione verifica $\xrightarrow{\text{lin. ind.}}$ ② (nessuno scarto)

__Es.:__

$$\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } \mathbb{R}^3?$$

① num. giusto ✓
prendiamo ② o ③ a scelta:
più veloce indip. lin.:

$$\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 + \gamma \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha, \beta, \gamma = 0 \ ✓$$

$\beta = -\alpha$
$\gamma = -\alpha$
↓
$\beta = \gamma$