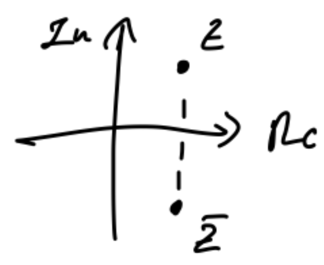
Algebra 5 - parte 2

Coniugato e modulo

sia $z = a + jb$ un num. complesso, il coniugato di z è $\bar{z} = a - jb$, $\neq$ opposto di z, cambia solo il segno della parte immaginaria



proprietà

- $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
  coniugato di somma = somma dei coniugati
- $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
  " prodotto = prodotto "
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \neq 0$

negli esempi precedenti, usavamo il coniugato senza saperlo!

$\rightarrow \frac{2+j}{2-3j} \cdot \frac{2+3j}{2+3j} \rightarrow (2-3j)$

come nel secondo esempio

$\rightarrow \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd}$ equivale a $\frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{-c+jd}{-c+jd}$

Modulo

si chiama modulo di $z = a + jb$

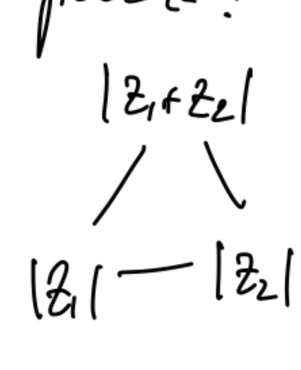
$\rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

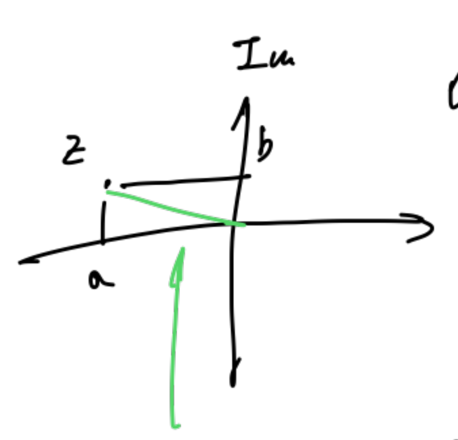
$\rightarrow |z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$

proprietà

- $|z| \geq 0$, si annulla se e solo se $z = 0$
- $z\bar{z} = (a+jb)(a-jb) = a^2 - j^2b^2 = a^2 + b^2$
  $\hookrightarrow = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ disuguaglianza triangolare
  $\rightarrow \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

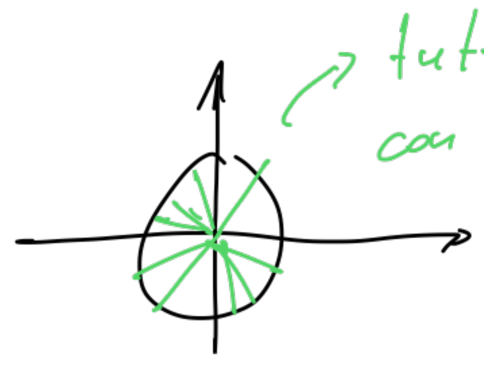
$\hookrightarrow$ perché:





$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow$ distanza di z dall'Origine

quindi, se cercassimo le soluzioni di $|z| = 2$:



$\text{Re}\,z \rightarrow$ parte reale di z

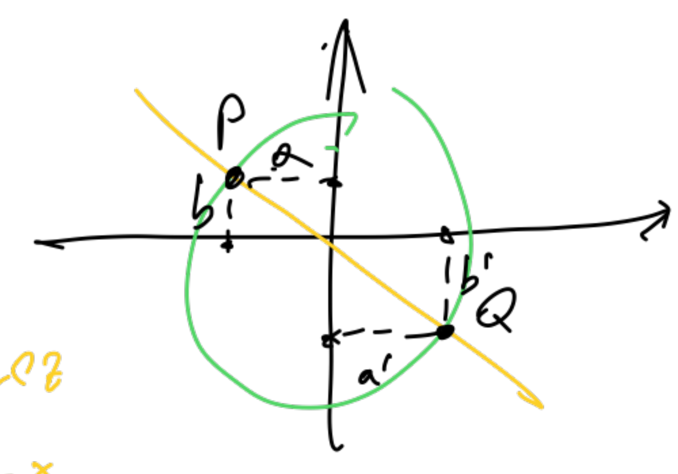
$\text{Im}\,z \rightarrow$ parte immaginaria di z

Esercizio

$$\begin{cases} \text{Re}\,z + \text{Im}\,z = 0 \\ |z| = 5 \end{cases}$$

$\text{Im}\,z = -\text{Re}\,z$ come $y = -x$

$|x| + |y| = 5$



$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 5$ per $a^2 = b^2$

$= \sqrt{2a^2} = 5$

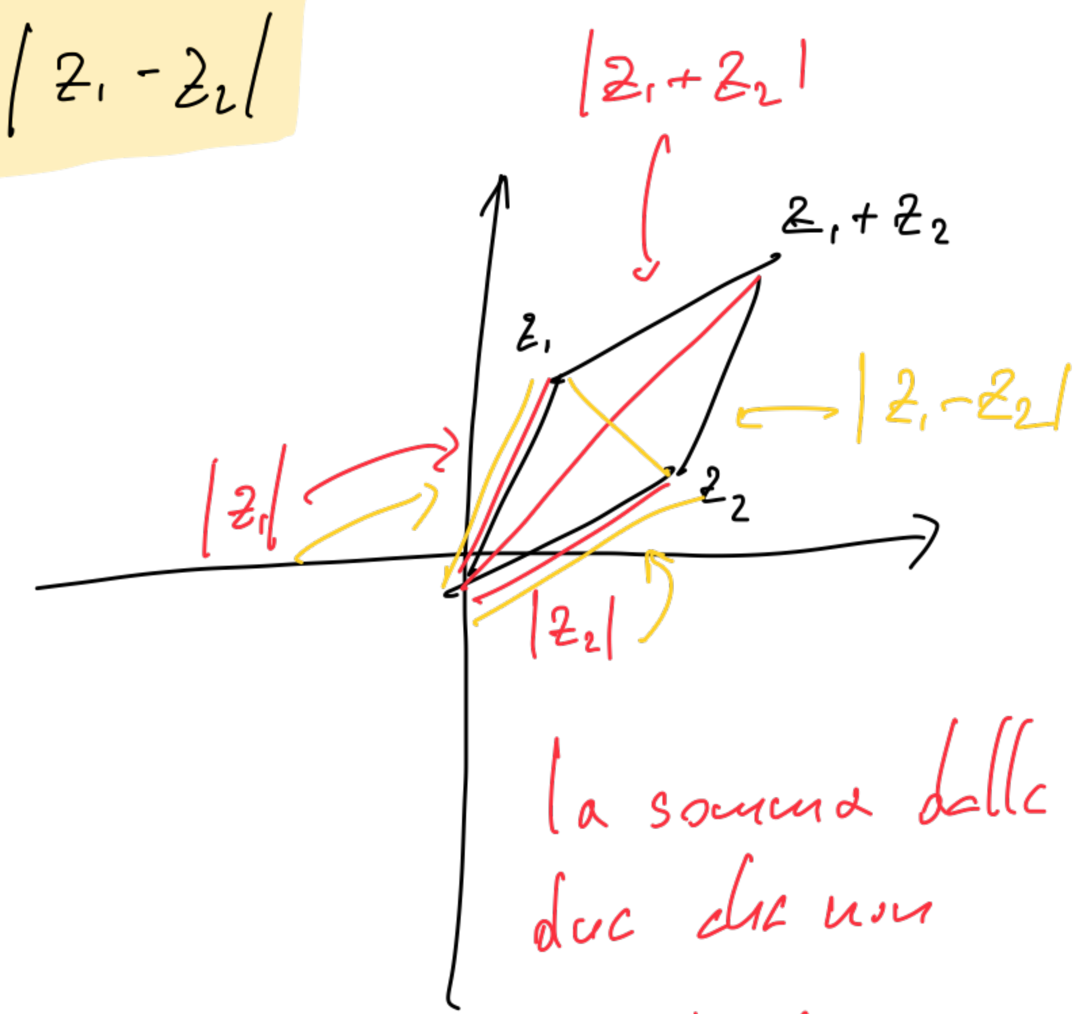
$\rightarrow a = \pm 5 \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow |a| = |b|$ $\rightarrow$ $P = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $Q = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

controllare

Esempio: disug. tr.

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$



la somma delle due che non raggiungono direttamente $z_1 + z_2$ è sempre maggiore o uguale!