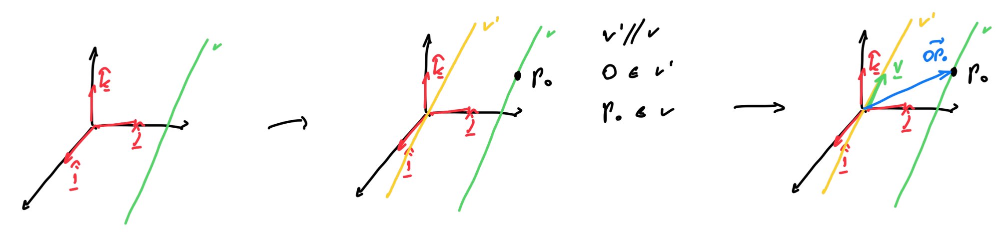
Geometria 20231018

fisso $R(O, \hat{\underline{i}}, \hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$



$r' \parallel r$
$O \in r'$
$P_0 \in r$ → è un punto qualsiasi di r

$\underline{v}$: $r' = \text{span}\,\underline{v}$

$P_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = [\vec{OP_0}]_B$

$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\underline{v}$ direttore di r, r'

i vettori $\vec{OP}$ qualsiasi non formano lo span($\underline{v}$) perché variano direzione.

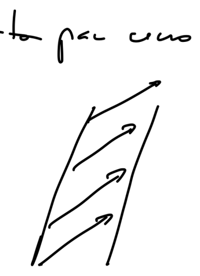
$P = P_0 + t\underline{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\underline{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{OP} = \underbrace{\vec{OP_0} + \text{Span}(\underline{v})}$

traslato di tutti i punti della retta per uno stesso vettore

perché segue lo stesso versore, quindi tutti i suoi allungamenti



$[\vec{OP}] = [\vec{OP_0}] + [t\underline{v}]$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$ $\quad$ eq. parametriche

Se $P_0 \equiv O$ ossia $\vec{OP_0} = \underline{0}$

ossia $P_0 \in \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

allora $[\vec{OP_0}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$

$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$ $\quad \rightarrow \quad P_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

versore direttore $[\underline{v}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{v} = \hat{\underline{i}} + 2\hat{\underline{j}} - \hat{\underline{k}}$

r passa per O?

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 2 + 2t \\ 0 = -1 - t \end{cases}$ $\quad$ vero per $t = -1$

Ox (retta)

$= \text{Span}(\hat{\underline{i}})$

$[\hat{\underline{i}}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow [\underline{d}_r]$ $\quad$ versore direttore $\quad Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

r passante per $A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ diretta come $\underline{d} = \hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}} + 2\hat{\underline{k}}$

$\rightarrow A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad [\underline{d}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = -2 + 1t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$P = A + t\underline{d}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$(= A + \text{Span}(\underline{d})\,?)$

se $t = (x - 1)$

$r: \begin{cases} y = -2 + (x-1) \\ z = 3 + 2(x-1) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$

2 eq. cartesiane

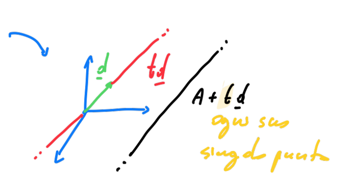
MINIMO PER RAPPRESENTARE SEGMENTO ASSE!

$[\underline{d}] =$ e.g.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ punta usando la base, non è il vettore!

$P = A + t\underline{d}$

└ versore ~~unitario~~ moltiplicato per il fattore che scorre tutto $\mathbb{R}$

└ sommato alle coordinate del punto, al quale il vettore si trasla di conseguenza!

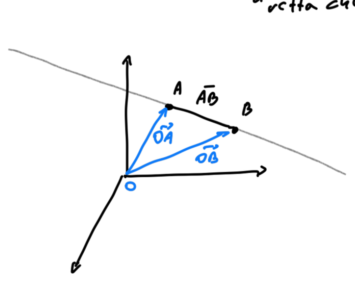


Esercizio:

$A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

eq. param. → $r = AB$?

"retta che passa per A, B?"



$\underline{d} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$[\vec{OA}] - [\vec{OB}]$ va anche

$\rightarrow [\underline{d}] = [\vec{OB}] - [\vec{OA}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

sostituendo $\underline{d}$ nella parametrica:

$r: \begin{cases} x = 1 + (-1)t \\ y = 2 + (-1)t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ → più di una sola risposta

parametrica

cartesiana (non ha t) → sostituito serve a controllare se il punto è retta

$\vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$ $\quad t \in \mathbb{R}$

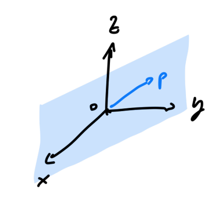
→ $t \in [0, 1]$ ci fa ottenere $\overline{AB}$!

per fattori di $\vec{OA}$ ed $\vec{OB}$

piano passante per O

$\{\underline{u}, \underline{v}\}$ giacitura di π

→ ovvero $\pi = \text{Span}(\underline{u}, \underline{v})$



$[\vec{OP}] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ coord. generiche base

$\vec{OP} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$[\vec{OP}] = \alpha\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

⚠ tutti gli Span passano da O

$\underline{u} = \vec{OA}$ $\quad \underline{v} = \vec{OB}$

$[\underline{u}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[\underline{v}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano giacitura π con Span$(\underline{u}, \underline{v})$

$\rightarrow \begin{cases} x = \alpha u_x + \beta v_x = \alpha \\ y = \alpha u_y + \beta v_y = \beta + 2\alpha \\ z = \alpha u_z + \beta v_z = -\alpha + \beta \end{cases}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

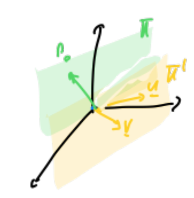
└ queste tre eq. descrivono il piano in f. parametrica → 2 vettori che trovano la giacitura del piano: il suo span

piano yOz = Span$(\hat{\underline{j}}, \hat{\underline{k}})$

~~= Span(O_y, O_z)~~ non rette solo vettori

versori unitari:

$[\hat{\underline{j}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\hat{\underline{k}}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$



$\pi' \parallel \pi$, $O \in \pi'$

└ Span$(\underline{u}, \underline{v})$

$P_0 \in \pi$

$P = P_0 + \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ → finiamo in un punto P sul piano π parallelo ad π' che passa per O

$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

└ eq. parametriche non scritte ma si possono estrarre

$\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ → come $t \in \mathbb{R}$ era per la retta

$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \text{Span}(\underline{u}, \underline{v})$

tutti i punti del piano traslati del vettore!

Quindi

- vettori spostano le rette
- vettori spostano i piani

$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 + 2t - 2s \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad t, s \in \mathbb{R}$

└ $t = -1$, $s = 0$ $\quad x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Esercizio

π passante per $P_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ // Span$(\underline{u}, \underline{v})$

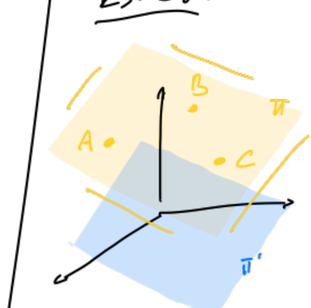
con $\underline{u} = \hat{\underline{i}} - \hat{\underline{j}}$ $\quad \rightarrow [\underline{u}] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{v} = 2\hat{\underline{i}} + \hat{\underline{j}} + \hat{\underline{k}}$ $\quad$ └ $[\underline{v}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\pi: \begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 - 2 + \beta \\ z = 2 + \beta \end{cases}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

abbiamo trovato il piano π

Esercizio



$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, B…, C…

$= [\vec{OA}]$ $= [\vec{OB}]$ $= [\vec{OC}]$

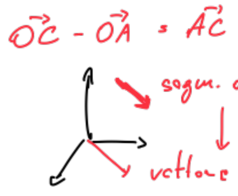
π passante per A, B, C non allineati

$\pi' \parallel \pi$

$\vec{AC} = \underline{v} = \vec{OC} - \vec{OA}$

traslerebbe su O

(tutti i vettori partono da O, non c'è offset, $\vec{OC} - \vec{OA} = \vec{AC}$ va traslato per iniziare da O)



$\rightarrow \vec{AC} = \underline{v} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$\vec{AB} = \underline{u} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$P = A + \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$

$\vec{OP} = \vec{OA} + \text{Span}(\underline{u}, \underline{v})$

└ lo span è di vettori, in E_O^3, non è di punti!

$\longrightarrow \quad x = x_A + \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_C - x_A)$

$y = y_A + \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_C - y_A)$

$z = z_A + \alpha(z_B - z_A) + \beta(z_C - z_A)$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

versore direttore $[\underline{d}_r] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow [\underline{u}]$

$\rightarrow [\vec{OB} - \vec{OA}] = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix}$ $\quad [\vec{OC} - \vec{OA}] = [\underline{v}]$

$r = AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

π pas. A, B, C: $\begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 + 0 - 2\beta \\ z = 2 - 3\alpha + 0 \end{cases}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3} - \frac{z}{3}$, $\beta = \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$ $\quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{3} - y - \frac{z}{3}$

$\downarrow$

$3x = 8 - 3y - z$

(*) $3x + 3y + z = 8 : \pi$