Algebra 20231013

Esercizi in $\mathbb{C}$

valutare teor. dell'algebra: valida → 2 soluzioni

- risolvere: $z^2 + 2jz - 3 = 0$

$\rightarrow (a+jb)^2 + 2j(a+jb) - 3 = 0$
$a, b \in \mathbb{R}$

$\rightarrow a^2 - b^2 + 2jab + 2ja - 2b - 3 = 0$

$\rightarrow (a^2 - b^2 - 2b - 3) + j(2ab + 2a) = 0$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2b - 3 = 0 \\ 2ab + 2a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 2a(1+b) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 2a = 0 \ \vee \ 1 + b = 0 \end{cases}$$

ann. prodotto

$$\begin{cases} a = 0 \\ b^2 + 2b + 3 = 0 \end{cases} \downarrow \begin{cases} a = 0 \\ b_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4-12}}{2} \end{cases} \downarrow \ b \notin \mathbb{R}$$

impossibile

$$\begin{cases} b = -1 \\ a^2 + 1 - 2 + 3 = 0 \end{cases} \downarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b = -1 \end{cases} \downarrow \begin{cases} a_{1,2} = \pm\sqrt{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

2 soluzioni trovate:
- $z = \sqrt{2} - j$
- $z = -\sqrt{2} - j$

oppure possiamo risolvere con:

$z^2 + 2jz - 3 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-2j \mp \sqrt{(2j)^2 + 12}}{2}$$

questa volta ammette soluzioni in $\mathbb{C}$, dato che lavoriamo direttamente su z.

$$= \frac{-2j \mp \sqrt{-4+12}}{2} = \frac{-\cancel{2}j \mp \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \begin{cases} -j - \sqrt{2} \\ -j + \sqrt{2} \end{cases}$$

- risolvere: $z^2 + 2jz - \sqrt{3}j = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-2j \mp \sqrt{-4 + 4\sqrt{3}j}}{2}$$

applichiamo calcolo delle radici in $\mathbb{C}$

$\rightarrow \sqrt{-4 + 4\sqrt{3}j} =$

$\rightarrow \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64} = 8$

$\rightarrow \arg(-4 + 4\sqrt{3}j) =$

$\rightarrow a = -4 =$
$b = 4\sqrt{3} =$ ...

$\theta = \frac{2}{3}\pi$

$w_k = \sqrt{2}(\cos\theta_k + j\sin\theta_k) \quad k = 0, 1$

$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$w_1 = -w_0$

$\leftarrow \theta_k = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}$
$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

$z_{1,2} = -j \mp \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \dots$

- Risolvere $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$

$d = z^3$

$\rightarrow d^2 + 2d - 3 = 0$

$$d_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4+12}}{2} \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

$\rightarrow z^3 = -3, \quad z^3 = 1$

radici

$z^3 = -3$ — grado 3 → 3 radici

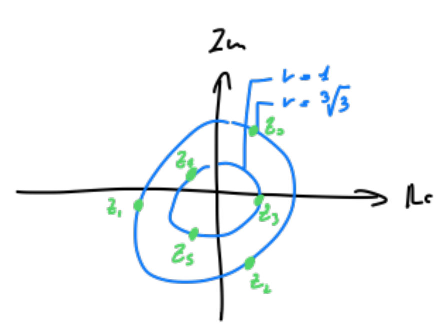
$\rightarrow r = 3$
$\alpha = \pi$

$z_k = \sqrt[3]{3}(\cos\theta_k + j\sin\theta_k)$

$\theta_k = \frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}$
$k = 0, 1, 2$

$z_0 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$z_1 = \sqrt[3]{3}(-1)$
$z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ma non si dispongono ai vertici di un esagono, non essendo direttamente una $\sqrt[6]{\ }$:

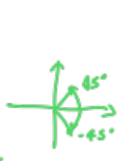


* $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
$|\bar{z}| = |z|$

- $iz^3 = \bar{z}$ non è eq. alg. per "$\bar{z}$":

si può procedere con
- $z = a + jb$ — con questa qui finiamo in $f^3(x)$ difficile
- $z = \rho e^{j\theta}$ — questa

$\rightarrow j\rho^3 e^{3j\theta} = \rho e^{-j\theta}$ → non semplificare: due ρ, perdita soluz. $\rho = 0$!



con il coniugato usiamo opposto dell'angolo!

non è ammesso nulla davanti all'esp.le → tradurre "j" in f. esp.le!

$\rightarrow e^{j\pi/2}\rho^3 e^{j3\theta} = \rho e^{-j\theta}$

$\rightarrow \rho^3 e^{j(3\theta + \pi/2)} = \rho e^{-j\theta}$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho \\ 3\theta + \frac{\pi}{2} = -\theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\rho^3 = \rho \rightarrow \rho^3 - \rho = 0 \rightarrow \rho(\rho^2 - 1) = 0 \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho^2 - 1 = 0 \rightarrow \rho = \pm 1 \end{cases}$

perché non si usa $\rho = -1$?

$$\begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 1 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

quante soluzioni troviamo?

$\rho = 0 \vee \rho = 1$
↳ vett. nullo, risolto in 1 soluzione
$z_0 = 0$

$\frac{1}{2}k\pi$ raggiunge 2π in 4 passi: $k = 0, 1, 2, 3$

$z_1 = e^{-j\frac{\pi}{8}}$
$z_2 = e^{-j\frac{3}{8}\pi}$
$z_3 = e^{-j\frac{9}{8}\pi}$
$z_4 = e^{-j\frac{11}{8}\pi}$

$z_0, \dots, z_4$ → 5 soluzioni

- ris. in f. esp.le:

$(\bar{z})^4 = |z|$

$z = \rho e^{j\theta}$

$(\rho e^{-j\theta})^4 = |z|$

$\rho^4 e^{-4j\theta} = \rho e^{j0}$

sistema di ρ ed θ (presi dagli esp.li reali)
coefficienti

$$\rightarrow \begin{cases} \rho^4 = \rho \\ -4\theta = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(\rho^3 - 1) = 0 \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 1 \end{cases} \\ \theta = -\frac{1}{2}k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$k = -3, -2, -1, 0$
per facilitare risultato??

per $\rho = 0 \rightarrow z_0 = 0$

per $\rho = 1 \rightarrow$
$z_1 = e^{j\frac{3}{2}\pi} = -j$
$z_2 = e^{j\pi} = -1$
$z_3 = e^{j\frac{1}{2}\pi} = j$
$z_4 = e^{j0} = 1$

$z = 0, \pm 1, \pm j$

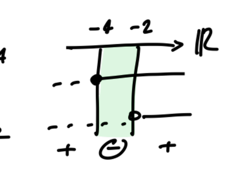
Estremi inf/sup, esercizi

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3 \leq \frac{x-2}{x+2} < 5 \right\}$$

prima ris. la diseq.:

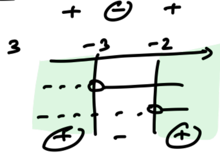
$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} \geq 3 \\ \frac{x-2}{x+2} < 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x+8}{x+2} \leq 0 \\ \frac{4x+12}{x+2} > 0 \end{cases}$$

$2x + 8 \geq 0 \rightarrow x \geq -4$
$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$



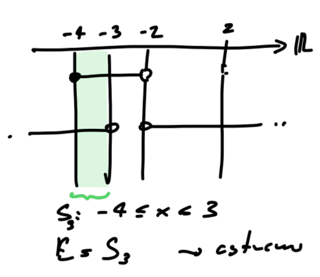
$S_1: -4 \leq x < -2$

$4x + 12 > 0 \rightarrow x > -3$
$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$



$S_2: x < -3 \vee x > -2$

$$\begin{cases} -4 \leq x < -2 \\ x < -3 \vee x > -2 \end{cases}$$



$S_3: -4 \leq x < 3$
$E = S_3$ → estremi sup/inf: 3, -4
minimo = -4

$$E = \{ n^2 - 5n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \}$$

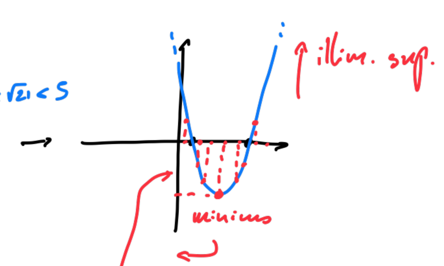
↳ $y = x^2 - 5x + 1$

$$x_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{25-4}}{2} = \frac{5 \mp \sqrt{21}}{2} \rightarrow$$

$4 < \sqrt{21} < 5$

~~vertice: $V\left(\frac{b}{2a}, \frac{\Delta}{4a}\right)$~~

solo x naturali! quindi inclusi solo i punti con x naturali della parabola!



prendiamo quindi i naturali più vicini, 2 e 3.
$y = -5$ per entrambi
→ minimo: -5

⚠ Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è illim. sup. → $\sup E = +\infty$
illim. inf. → $\inf E = -\infty$

⚠ Se $z = a + jb \rightarrow e^z = e^{a+jb} = e^a e^{j\theta} = e^a(\cos\theta + j\sin\theta)$
DEFINISCE I COMPLESSI IN F. DI EULERO