Geometria 20231124

← Determinanti

Def.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$, A è detta

i) triangolare superiore se $a_{ij} = 0 \quad i > j \quad \Rightarrow \mathcal{T}^+$ $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) triang. inf. se $a_{ij} = 0 \quad i < j \quad \Rightarrow \mathcal{T}^-$ $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$A^+ \updownarrow A^T$ una diventa l'altra quando trasposta!

iii) diagonale se A è ii) $\wedge$ i) allo stesso tempo. $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- I_n ← sono diagonali
- $\underline{0}_n$

→ dividiamo sva delle $M_{\mathbb{R}}(n)$ in SSV per ↑:

tutti e tre gli insiemi (ssv) contengono $\underline{0}_n$!

SS1? (chiusura +)
SS2? (chiusura ·)

SS0 ✓ ($\in \underline{0}_n$)

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to$ rimane in $M_{\mathbb{R}}(n)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{T}^+ = \{ A \in M_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = 0 \quad i > j, \quad i,j = 1 \dots n \}$

$\Rightarrow A + B \in \mathcal{T}^+, \quad \lambda A \in \mathcal{T}^+$

Def.:

$\mathcal{T}^+ = \{ A \in M_{\mathbb{R}}(n) \mid a_{ij} = 0 \quad i > j \quad i,j = 1 \dots n \}$

$\mathcal{T}^- = \{ \quad " \quad \mid \quad " \quad i < j \quad " \quad \}$

$\mathcal{D} = \{ \quad " \quad \mid \quad " \quad i \neq j \quad " \quad \}$

↓

sono SSV di $M_{\mathbb{R}}(n)$ sva!

$\dim \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{pmatrix} = 3 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$? (colonne $\underline{v}_1\ \underline{v}_2\ \underline{v}_3$)

Ossv.: $\mathcal{D} = \mathcal{T}^+ \cap \mathcal{T}^-$

$\mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{T}^-$ No! $\to \mathcal{T}^+ \cap \mathcal{T}^- \neq \underline{0}_n$

$\mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- = M_{\mathbb{R}}(n) \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{T}^+} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{T}^-}$

↳ quindi $M_{\mathbb{R}}(n) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^-$

se fosse stato in $\oplus$ ci sarebbe stata una sola versione per generare invece qui possiamo usare matrici alternative! (scambiare numeri etc...)

$\oplus \Rightarrow$ una sola C.L. per vettore finale

$\not\oplus \Rightarrow$ possibile avere più modi!

Ossv.: $|A+B| = |A| + |B|$? (A tsup, B tinf)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \neq \quad |A+B| \neq |A| + |B|$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

il det. di una mat. triang. è facile! → per gli zeri

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -18$

$\det = \det^T \to$ anche per le altre mat. tr.

$\begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & d_3 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_3 \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \to$ basta la · delle diagonale!

- alg. di trasf. $M_{\mathbb{R}}(n)$ in due triangolari

→ MOSSE DI GAUSS

Mosse di Gauss (per righe) → Su $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$

1) Scambio due righe (cambio segno det.)
2) Aggiungo a una riga un'altra riga $\cdot \lambda$ (det. non cambia per ⑦)

prendo la 1ª riga, se il 1° elem. è nullo, prossima riga.

" 2ª riga " 1° "

⋮

nª 1°

quando incontro non-nullo 1°, scambio la riga con la prima!

→ in prima riga voglio la riga con 1° elem. $\neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to$ · 1ª riga 1° elem $\neq 0$ ✓

· aggiungo alle righe successive la prima $\cdot \alpha_i$ in modo da avere il 1° numero nullo.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ A^2 - 2A^1 \\ A^3 - A^1 \end{matrix}$

ripeto sulla 2ª senza toccare la 1ª

→ ripeto sulla 3ª senza toccare la 2ª

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{non serve} \cdot \\ A^2 - 2A^1 \\ A^3 - A^1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{non serve} \cdot \\ \\ A^3 + 3A^2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \leadsto$ poi il det. sarà molto più veloce! $= 1(-1)(-7) = 7$

guardo il 1° elem (ferma)   guardo il 2° elem (ferma)   non serve ·

⇓ trovata mat. tr.!!

- **Teorema di Binet**

Dato $A, B, C \in M_{\mathbb{R}}(n)$

$|AB| = |A||B|$ determ. del prodotto è prod. determinanti

Oss.: $\det |I_n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = -5$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad |B| = 2$

$|AB| = |A||B| = -10$

$|AB| = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 8 = -10$

Per le propr. del det.: $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$

$\{A^1, A^2 \dots\}$ lin. dip $\Rightarrow |A| = 0$

contropposta: $|A| \neq 0 \Rightarrow \{A^1 \dots\}$ lin. indip

⇕

A è invertibile

⇕

$AX = \underline{0}_n$ ha solo la sol. banale

Prop. Banale Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ invertibile allora $|A| \neq 0$ e anche $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Dim.: $\exists! A^{-1} \mid AA^{-1} = I_n$

se Binet $\Rightarrow |A||A^{-1}| = |I_n| = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ ($\det A^{-1} \neq 0$)

$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$

quindi se è invertibile $\Rightarrow \det A \neq 0$

Esiste met. alternativo per scrivere inversione?

AB invertibile ⇒ né A né B possono avere det = 0 altrimenti binet non sarebbe valido: $|AB| = |A||B|$

quindi ⇔

$A \in M_{\mathbb{R}}(2) \quad |2A| = |(2A^1 | 2A^2)| = 2|(A^1 | 2A^2)| = 4|(A^1 | A^2)|$

$\Rightarrow A \in M_{\mathbb{R}}(2) \quad |2A| = 2^n |A|$

↳ perché si applica scalare ② su ogni colonna!

$A \in M_{\mathbb{R}}(n) \quad |\alpha A| = \alpha^n |A|$

⇓

$|-A| = (-1)^n |A|$ ⟨ ordine pari $|-A| = |A|$; ordine dispari $|-A| = -|A|$

┌ gr. lin. matrici INVERTIBILI

Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$ λA è invertibile solo se $\lambda \neq 0$

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

$(\lambda A) A^{-1} = \lambda (AA^{-1}) = \lambda I_n$

$(\lambda A) \frac{1}{\lambda} A^{-1} = \cancel{\lambda} \cancel{\frac{1}{\lambda}} (\cancel{AA^{-1}}) = I_n$

Es.: Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(4) \mid |A| = -3$

$|2A|$? $\quad |2A| = 2^4 |A| = 16|A| = -48$

$|-A|$? $\quad |-A| = (-1)^4 |A| = |A| = -3$

$|A^T|$? $\quad |A^T| = |A| = -3$

$|A^{-1}|$? $\quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{3}$

T. Cramer (no dim) ┌→ = gr. lin. mat. invert.

Sia $A \in M_{\mathbb{R}}(n)$ invert. ossia: $A \in GL(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow (A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} |(A^T)_{ij}|}{|A|}$ → complemento algebrico

$= |A_{ji}|$

↳ ~~minori~~ ji? o presi ji?

utilità teorica, non pratica

non usare per calcolare l'inversa di grandi matrici!

Es.: Mat 2x2 inv.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix}$

$ad - bc \neq 0$
$\quad \|$
$\quad |A|$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \left[(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} |(A^T)_{ij}|}{|A|} \right]$ → $|A_{ji}|$

┌→ ogni volta rimuovo quelle righe e colonne ∂ 2x2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/12 & 2/12 \\ -1/12 & 2/12 \end{pmatrix}$

$|A| = 10 + 2 = 12$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

→ comodo per 2x2, non 3x3 +

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

vecchio metodo

$A^{-1} = \left([e_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \right)$ dove $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \neq 0$ lin. indip

$A^3 - A^1$
C.L. ⑦

A^{-1} con Cramer: non era questa la notaz.?

$A^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|} |(A^T)_{[i,j]}| \quad A_7 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

si può applicare a un singolo valore

$= \begin{pmatrix} +|\cdot| & -|\cdot| & +|\cdot| \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \dots$

↓

usare segni a scacchiera per velocità!

risolviamo una 3x3 usando Mosse di Gauss + Cramer?

$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$|Q| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

⊛ Partire dai risultati!