Risol. sist. lineari

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1-k & 2+k \\ k & 1+k & 1 & -k \\ k & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1+k \end{pmatrix}$$

$AX = B$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ ⇒ $AX = xA^1 + yA^2 + zA^3 + tA^4$

① sol? → $= x_0 + \ker A$ (trasl.)

② per quali k, dim soluzioni $= 2$? → = dim ker A!

① risolvo per $k=1$ per riduz. a scala di Gauss ⇒ sia quadrata che non, sia singolare che non (intendo unica soluzione)

per $k=1$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

(colonne $x\ y\ z\ t$; ultima colonna B)

$rk\tilde{A} = rkA = 3$

non unica, dato che A non avrà mai $rkA = 4$ (controllare ⇐)

su z non ho pivot: è libera! non è in funzione di nulla!! ⇒

dal fondo:
$$\begin{cases} -2t = -1 \\ y + z - 4t = -2 \\ x + y + 3t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ z = \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ y = -\alpha + 4t - 2 = -\alpha \\ x = \alpha + \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \alpha + \frac{3}{2} \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

in f. espl.

⇒ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{x_0} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$ — ker A = Span??

in f. kernel?

tutti i vettori che trovo sono generatori del kernel

⇒ ~~dim kernel~~ − rk = ~~theo~~?
colonne della matrice − rango della matrice (vedi appl.)

$A\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}A^1 + \frac{1}{2}A^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = B$ ✓ sol. particolare x_0 ⇒ perché non è unica!!

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^1 - A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $\in \ker A$

"il kernel traslato dalla sol. particolare"

② quando la dim sol $= 2$?

dim kernel: $n°$ col. $-$ rkA $= 2$

$4 - rkA = 2$

quando il rkA $= 2$?

k	rkA	rk$\tilde{A}$	sol?	dim sol
0	2	2	✓	2
−1	2	3	✗	
2	2	3	✗	
altrimenti	3	3	✓	1

dim sol 2 per $k = 0$

Es.:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_5 = 1 \end{cases}$$

⇓

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rkA = rk\tilde{A} = 3$ ⇒ risolubile con dim $=$ col A $-$ rk A $= 5 - 3 = \boxed{2}$

colonne libere per variabili x_3, x_5

⇒ $x_3 = \alpha$, $x_5 = \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

⇒ $\begin{cases} -6x_4 - x_5 = 0 & \Rightarrow x_4 = \frac{-\beta}{6} \\ -x_2 + 4x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 & \Rightarrow x_2 = 4\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 & \Rightarrow x_1 = -(4\alpha - \frac{1}{3}\beta) + 2\alpha - 2\left(\frac{-\beta}{6}\right) - \beta + 1 \\ & = -2\alpha - \frac{\beta}{3} + 1 \end{cases}$

⇒ struttureremo soluzione per trasla. del kernel di x_0 (sol. omog.?)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_0} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1/6 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\ker A}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

possiamo usare multipli, dato che $\beta \in \mathbb{R}$ ⇒ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

x_0 + ker A (contenente lin. ind. e ker A)

↓ non fattore ≠ non ha coeff. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

BαββB

Altro utilizzo Gauss:

trovare di 2 vett. lin. indip.:

in $\mathbb{R}^3 \sim E_0^3$

$R(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

$[\underline{v}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[\underline{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Span $(\underline{u}, \underline{v})$?

$\boxed{\text{trovo eq. cartesiane}}$: è rapido.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ Span $(\underline{u}, \underline{v})$

vet. generico

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & -3 & z-2y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & z-2y+3x \end{pmatrix}$$

(colonne di A: $\underline{u}$, $\underline{v}$)

rk rimane uguale per appart. allo Span dei primi due vettori.

$3x - 2y + z = 0$ è un piano che ci determina

oppure: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$ ⇒ $-3x + 2y - z = 0$

$3x - 2y + z = 0$ = EQ CARTESIANA DEL PIANO DEI 2 VETTORI IN E_0^3!!

$\mathbb{R}^4$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ lista lin. indp.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

U: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0$ quindi in modo da avere i vettori con X dipendente?

tutti i determinanti per X e sarebbe scegli:

$-1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$ IPERPIANO

piano con dim $n-1$ (tutto lo spazio -1)

ottenuta l'eq. cart. possiamo verificare dei vettori se $= 0$

Def.: Sia U ssv $\mathbb{R}^n$ se...

se dim $U = n - 1$ ⇒ U "iperpiano"

e risulta caratterizzato da una eq. cartesiana nelle entrate di $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vet. generico di $\mathbb{R}^n$

LINEARE perché sviluppato come il det() lungo la colonna X.

omogenea perché lin. dip. dagli altri vettori perché sia iperpiano

Prop.: Sia $U = $ Span$(\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_k)$, dim $U = k$

con $U \subset \mathbb{R}^n$

Detto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ generico, U è descritto

da $n-k$ equaz. cartesiane!

un ssv $\mathbb{R}^8$ con dim $= 5$ avrà $8 - 5 = 3$ eq. lineari omogenee lin. indipendenti

Oss.: Span$(\underline{u})$ retta, Span$(\underline{u}, \underline{v})$ piano $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \notin$ Span$(\underline{u})$

ma iperpiano ha $\underline{u}\,\underline{v} \cdots n-1$

Es.: $\mathbb{R}^4$

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. indp.

$U = $ Span $(\underline{u}, \underline{v}) \subset \mathbb{R}^4$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

quali sono le eq. cartesiane?

dim $U = 2$, dim $\mathbb{R}^4 = 4$ $\Big\}$ $4 - 2 = \boxed{2 \text{ eq.}}$ non iperpiano:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -2 & t-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & y-x+z \\ 0 & 0 & t-x-2y+2x \end{pmatrix} \to U: \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ x-2y+t = 0 \end{cases}$$

troviamo questi 2 pivot

parzialmente a scala ma NON CONTINUO: non possiamo comunque abbiamo le due eq. cartesiane! (perché abbiamo già il max. di 2 pivot per lin. indip. fino al v. generico)

perché abbiamo 3 colonne e le due espress. non si annullano con Gauss

rimangono le eq. alla fine!

MAT. DEI COEFF. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $rkA = 2$

$U = \ker A$

Ricerca delle equazioni dagli Span()