6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

scelgo $\alpha > 0 \wedge \frac{3}{2} - \alpha > 1$ $\quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$

cv. confronto? $\quad x \to +\infty$

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2} \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x^3}} = \ln x \cdot \frac{1}{x^{3/2}} \leq \frac{x^\alpha}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}-\alpha}} \quad \text{definit. } x \to +\infty$$

$\sqrt{x}\,(x + 2\sqrt{x} + 1)$
$x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x}$
prevale per $x \to +\infty$
$\to x\sqrt{x}$

$\alpha = 1/4$ $\quad$ converge...?

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \ldots + \int_1^{+\infty} \ldots$

$\Rightarrow \alpha > 1$ converge?
quindi $\alpha = 2$ converge!

$f(x) = e^{-x^2}$
$\exists f(0), \quad \exists \lim_{w \to +\infty} f(w)$

st. asint. per $x \to +\infty$ no, tende come da sé

$$e^{-x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$e^{x^2} \geq x^\alpha$ definit. $x \to +\infty$ $\forall \alpha$ $\quad$ perché esponenziale?

$\Rightarrow \alpha = 2$:

$$e^{-x^2} \leq x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x^2} \quad x \to +\infty$$

è integrabile all'infinito

invece di indovinare, usiamo un parametro!

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Sh} x \, \sin^2\sqrt{x}}{(e^{2x}-1)\ln(1+e^{x^3})}\,dx$

$\displaystyle\int_0^1 \ldots$

per $x \to 0^+$:
$\operatorname{Sh} x \sim x$
$\sin^2\sqrt{x} \sim x$ $\Big\}$!
$e^{2x} - 1 \sim 2x$
$\ln(1+e^{x^3}) \to \ln 2$

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2x \ln 2} = \underbrace{\frac{1}{2\ln 2}}_{\text{costante}} \cdot x$$

$\Rightarrow x$ integrabile in $(0, 1]$

$\Rightarrow$ converge

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \ldots$

per $x \to +\infty$:
$\operatorname{Sh} x \sim \frac{e^x}{2}$
lascio $\sin^2\sqrt{x}$
$(e^{2x}-1) \sim e^{2x}$
$\ln(1+e^{x^3}) \sim x^3$

asintotico significa che hanno la stessa velocità al limite, quindi 1 nel rapporto

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{2}\frac{\sin\sqrt{x}}{e^x x^3} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{e^x x^3} \leq \frac{1}{2}\boxed{\frac{1}{x^3}}$$

integrabile all'∞
quindi anche l'opposta alla maggiorante converge?

$\frac{1}{e^x} \leq 1 \quad \Rightarrow \boxed{e^x \geq 1}$

confronto

⚠ $\frac{1}{e^x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ ✗

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x\sqrt{x}}\,dx$ converge

Funzioni integrali:

T.: (fondamentale del calcolo integ. II)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\;$ integ.^{bile} in $[a,b]$.
Sia $x_0 \in [a,b]$. $\quad x \lesseqgtr x_0$

Definiamo $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $\quad x \in [a,b]$

- F continua in $[a,b]$ quando f è integ.^{bile}
- f continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ F derivabile in $[a,b]$ con $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

F si chiama "fn. integrale" per x nell'estr. sup.

Ossv.:
- f continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ F primitiva di f

  Ciò dimostra che ogni fn. continua ammette primitiva!
- f continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ F è di classe $C^1([a,b])$
  - derivabile una volta in $[a,b]$
  - $\equiv$ la sua derivata è CONTINUA in $[a,b]$

- Più in generale, se $f \in C^k([a,b])$, allora $F \in C^{k+1}([a,b])$ $\quad k \in \mathbb{N}$

- Vale anche per le integ.^{bile} in s. improprio!

Es.:

$$F(x) = \int_0^x (t+1)\operatorname{ch}(t^2 - 2t)\,dt \quad x \in \mathbb{R}$$

Scrivere il pol. MacLaurin di 2° ordine.

non tentare di calcolarlo!
studiamolo senza risolverlo

$f(t) = (t+1)\operatorname{ch}(t^2 - 2t)$

f è definita in $\mathbb{R}$, ed $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\Rightarrow F \in C^\infty(\mathbb{R})$

quindi $\exists$ MacLaurin a qualunque ordine!

$$T_{2,0}(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2$$

⚠ quando $\displaystyle\int_a^a F(x)\,dx$ coincidono gli estremi: $\displaystyle\int_a^a = 0$

$F(0) = 0$
$F'(0) = f(0) = (0+1)\operatorname{ch}(0^2 - 2 \cdot 0) = 1$
$F''(0) = f'(0) = \ldots = 1$

$$T_{2,0}(x) = x + \frac{1}{2}x^2$$

Ossv.:

Se f cont. $[a,b]$ e $\tilde{F}(x) = \displaystyle\int_x^{x_0} f(t)\,dt$ $\quad x, x_0 \in [a,b]$

$\Rightarrow \tilde{F}(x) = -F(x)$
$\quad\; \tilde{F}'(x) = -f(x)$

invento estremi per convenzione $\quad \displaystyle\int_b^a = -\int_a^b$

Se g è derivabile in $[a,b]$ allora $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{g(x)} f(t)\,dt$ è derivabile in $[a,b]$
$= F(g(x))$

e $G'(x) = F'(g(x))\,g'(x)$
$\quad = (F(g(x)))' = \ldots$

derivazione di composta!

Es.: Calc. derivata di $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sin t^2\,dt$

$G'(x) = (F(x^2))'$
$\quad = F'(x^2)\,2x \qquad F'(x^2) = f(x^2)$
$\quad = (\sin x^4)\,2x$

Infine se $H(x) = \displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$ $\quad f$ continua, g_1, g_2 derivabili

$\Rightarrow H$ derivabile e $H'(x) = f(g_2(x))\,g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$

Es.: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^{\ln^2(1+x)} \sqrt{4+t^2}\,dt = \infty \cdot 0$

$\ln^2(1+x) \to 0$ $\quad$ estremi 0

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{\ln^2(1+x)} \sqrt{4+t^2}\,dt}{x^2} = \frac{0}{0}$$

ora posso usare De L'Hospital

$$\Rightarrow \frac{f'}{g'}\;\; \frac{\sqrt{4+\ln^2(1+x)}}{2x}\,\frac{2\ln(1+x)}{(1+x)} = \frac{\ln(1+x)}{x}\,\frac{2\sqrt{4+\ln^4(1+x)}}{1+x} \to 4$$

$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$

Il limite richiesto è 4