es.: $\Delta = 0$

$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

con $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ base di Ker L

$xe^{\lambda x}$ risolve l'iniziale?

devi sostituendo

$a_2(xe^{\lambda x})'' + a_1(xe^{\lambda x})' + a_0 xe^{\lambda x} = 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda a_2 + \lambda^2 x a_2 + a_1 + a_1 x\lambda + a_0 x)e^{\lambda x} = 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda a_2 + a_1)e^{\lambda x} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_2}$ ✓

es.: $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$

$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{-2x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0$??

allora due sol. complesse coniugate!

$\lambda_1 = a + jb, \quad \lambda_2 = a - jb$

$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ base di Ker L

$e^{\lambda_1 x} = e^{(a+jb)x} = e^{ax}e^{jbx} = e^{ax}[\cos(bx) + j\sin(bx)]$

quindi $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ sono fn $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

per avere base Ker L con fn val $\mathbb{R}$:

$y_1 = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2} \qquad y_2 = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2j}$

per linearità:

$y_1, y_2 \in$ Ker L, $\{y_1, y_2\}$ lin. ind.

$y_1 = \frac{1}{2}\left[e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) - e^{ax}(\cos(-bx) + j\sin(-bx))\right]$

$= e^{ax}\cos bx$ (scompare j)

$y_2 = e^{ax}\sin bx$

es.: Integ. generale di:

trattavamo sempre λ costante, quindi più semplice di quelle del 1° ordine!

$3\ddot{y} + 4y = 0$

1) lambda

$3\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 = -\frac{4}{3}$

$\lambda_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}j \Rightarrow \mathbb{C}$

2) formula ($\overbrace{\alpha, \beta}^{\text{2 param.}}$ per dim Ker L = 2)

$y(x) = \alpha y_1 + \beta y_2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$= \alpha \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right) + \beta \cdot \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)$ ✓?

Punto della situazione:

$a_2(x)\ddot{y} + a_1(x)\dot{y} + a_0(x)y = b(x)$

1) $a_2, a_1, a_0, b \in C^0(I) \Rightarrow L^{-1}(b) = \text{Ker}L + y_p$

2) se l'eq. è in f. normale $a_2(x) = 1 \Rightarrow$ dim Ker L = 2

3) se l'eq. ha coeff. costanti trovo Ker L

ci mancano le complete, quindi $b(x)$ quando ha f. particolari

METODO DI SOMIGLIANZA

$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b$

Ω I caso: $b(x) = e^{\lambda x}P(x)$ ← prodotto tra esponenziale e polinomio

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \qquad c_i \in \mathbb{R}, \ c_n \neq 0$

$y_p(x) = x^m e^{\lambda x}Q(x)$

$m = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \text{ non è radice dell'eq. caratt.} \\ \text{molt. alg. di } \lambda & \text{altrimenti} \end{cases}$

$Q(x)$ polinomio con st. grado P a coeff. incogniti da trovare imponendo y_p soluz. della completa

es.: Determina y_p per $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = xe^x$

$b(x) = xe^x \qquad \lambda = 1 \qquad P(x) = x$

$Q(x) = Ax + B$

m? $\lambda = 1$ non è soluz. dell'eq. caratt.

$\Rightarrow m = 0$

formula:

$y_p(x) = x^m e^{\lambda x}Q(x)$

$\rightarrow = (Ax + B)e^x$

$\dot{y}_p(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x$

$\ddot{y}_p(x) = Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x$

impongo l'uguaglianza tra i due polinomi

$e^x[2A + Ax + B + A + Ax + B - 6(Ax + B)] \boxed{= xe^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3A - 4Ax - 4B = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3A - 4B = 0 \\ -4A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{3}{16} \end{cases}$

es.: det. y_p per $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2x}$

$b(x) = \underbrace{e^{-2x}}_{e^{\lambda x}}\underbrace{1}_{P(x)} \qquad \lambda = -2 \qquad y_p(x) = ?$

... tentare più candidati se non risolvono.

$y_p(x) = x^2 e^{-2x}A$

$\dot{y}_p(x) = \dots$

$\ddot{y}_p(x) = \dots$

$\cancel{e^{-2x}}[\dots] = \cancel{e^{-2x}}$

$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$

Concludo con l'integ. gen.:

dall'omog. associata alla gen.

$y(x) = \alpha e^{-2x} + \beta xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$ ✓ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

es.: Scrivi integ. gen. $\ddot{y} + 4\dot{y} = x^2 + 1$

- omog. assoc.: $\ddot{y} + 4\dot{y} = 0$
- integ. gen. omog.: $y(x) = \alpha + \beta e^{-4x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- soluz. particolare eq. completa: $y_p(x) = ?$

$y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$

$A = \frac{1}{12}, \quad B = -\frac{1}{16}, \quad C = \frac{9}{32}$

- int. gen. eq. completa:

$y(x) = \alpha + \beta e^{-4x} + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + \frac{9}{32}x \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

II caso: $b(x) = e^{ax}P(x)\sin(bx)$ (cos)

$a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0$

$P(x)$ è polinomio

soluzione senza complessi:

$y_p(x) = x^m e^{ax}[Q_1(x)\cos(bx) + Q_2(x)\sin(bx)]$

Q_1, Q_2 stesso grado di P → 0°: A; 1°: $Ax + B$; 2°: $Ax^2 + Bx + C$ } è giusto? forse..

$m = \begin{cases} 0 & \text{se } a+jb \text{ \underline{non} risolve l'eq. caratt.} \\ \text{molt. alg. di } a+jb & \text{se risolve l'eq. caratt.} \end{cases}$

es.: sol. particolare di: $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 2e^x\cos 3x$

- met. somiglianza

sono: pol. generici di 0° ($Q_1 \neq Q_2$ possibile)

LETTERE MAIUSCOLE PER POLINOMI COSTANTI GENERICI

$y_p(x) = e^x \cdot 1 \cdot [A\cos 3x + B\sin 3x]$

$1 + 3j$ risolve l'eq. caratt.? $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

no $\Rightarrow m = 0$

- $\dot{y}_p, \ddot{y}_p$
- calcolo per sost.

$\cancel{e^x}[-8A\cos 3x + 6B\cos 3x - 8B\sin 3x - 6A\sin 3x$

$-2A\cos 3x - 2B\sin 3x + 6A\sin 3x - 6B\cos 3x$

$+ A\cos 3x + B\sin 3x] = 2\cancel{e^x}\cos 3x$

$\Updownarrow$

& & & & & &
@ @ @ @ @ @
$ $ $ $ $ $

$\begin{cases} A = -\frac{2}{9} \\ B = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$y_p(x) = -\frac{2}{9}e^x\cos 3x$

es.: det. sol. parl. di: $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 3e^{-x}\sin\sqrt{2}x$

$a + jb = -1 + \sqrt{2}$

$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = xe^{-x}[A\cos\sqrt{2}x + B\sin\sqrt{2}x]$

$\lambda_{1,2} = -1 \mp \sqrt{2}j$