Geometria 20231029

fiss. rif. ortonormale $(R(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}))$

$P \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

piano in E_O^3 è in forma $\pi: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$

$\downarrow$

$[\underline{n}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\underline{n}$ vett. ortogonale (normale) al piano π

Oss.: $\delta = 0 \iff O \in \pi$

delta zero — passa per l'origine

sostituibili per corrisp. biunivoca

retta in f. cartesiana: r in E_O^3 / E

→ individuabile da due piani intersecati!

$\pi_1: ax + by + cz + d = 0$

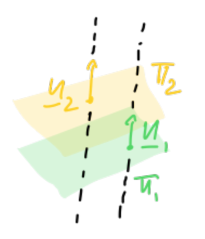
$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$\Big\} \; \pi_1 \cap \pi_2$ — un caso normale e due speciali:

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} r & \text{per } \pi_1, \pi_2 \text{ incidenti} \\ \emptyset & \text{per } \pi_1, \pi_2 \text{ // distinti} \\ \pi_1 = \pi_2 & \text{per (//) coincidenti} \end{cases}$$

$[\underline{n}_1] = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ normale a π_1 — perpendicolare...? sì

$[\underline{n}_2] = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ normale a π_2



$\underline{n}_1 // \underline{n}_2$

cioè: $\underline{n}_1 \neq \underline{0} \;\wedge\; \underline{n}_2 \in Span(\underline{n}_1)$

es.: $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ 4x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ → normale 1: $[\underline{n}_1] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[\underline{n}_2] = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

→ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ $(a_2, b_2, c_2 \neq 0)$ ⟶ 2 casi:

sulla base del t. noto è al rapporto degli altri tra le due

- $\dfrac{d_1}{d_2} \neq \dfrac{a_1}{a_2}$ → vuol dire che abbiamo due piani diversi
- $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$ → vuol dire che possiamo raccogliere un fattore che porta ad ottenere l'originale!

$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$

→ $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ \cancel{2}(x + y + z + 1) = 0 \cancel{:2} \end{cases}$

In generale se $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \in Span \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$ piani coincidenti $\in \mathbb{R}^4$

altrimenti distinti

il vett. normale composto dai coefficienti del piano in x, y, z. !!

tra O e punto più vicino di π?? — non credo

vett. normale a π_1: $[\underline{n}_1] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(\pi_1) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ -4x + 2y - 6z = 0 \end{cases} (\pi_2)$

$[\underline{n}_2] = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2[\underline{n}_1]$ — quindi sta nello Span$(\underline{n}_1)$!! È un suo prolungamento!!

↳: punti app. ad entrambi quindi retta a sistema

→ piani coincidenti: non è una retta

$r = \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6z = 0 \end{cases}$

- $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in r$? ✗ per sost.
- $s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$s // r$?

fattori di t sono il vett. direttore rappresentante il suo span

$\underline{d}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\notin$ Span r → non è //?

$x = a \quad a \in \mathbb{R}$

$2y = a - 3$

$y = \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}$

$\cancel{3}a - \cancel{6}^{2}z = 0$

$z = \frac{1}{2}a$

→ $\begin{cases} x = 1a \\ y = \frac{1}{2}a - \frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2}a \end{cases}$

$[\underline{d}_r] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\underline{d}_r = \hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\hat{k}$

} per notazione, dato che poi sarebbero la stessa cosa

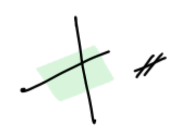
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in Span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? ✗

qui va il fattore che si prova

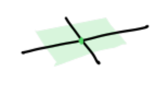
$s \not\parallel r$ ←

ora, se abbiamo due rette, non è detto che si intersechino!

devono almeno condividere un piano:



∦ e non incidenti → sghembe



∦ e incidenti!

$[\underline{d}_r'] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fraziono rimosse (stesso Span)

eq. retta

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$r: \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

sost. $\begin{cases} t - 2(2t) - 3 = 0 \\ t - 2(3t) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \end{cases}$ impossibile, quindi sghembe

→ proviamo in f. cartesiana:

$s: \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$ $r: \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

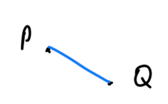
$r \cap s: \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$ sost per $x = 2z$ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ -3 = 0 \end{cases}$ impossibile quindi sghembe

$= \emptyset$

$\underline{d}_r \notin Span\, \underline{d}_s$

Distanza tra 2 punti euclidei

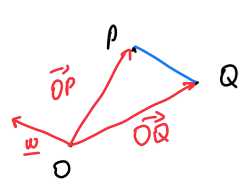
[fisso $R(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$]



$d(P, Q)$

→ lungh. di $\overline{PQ}$

O ↓



$\|\vec{OP} - \vec{OQ}\| = \|\vec{OQ} - \vec{OP}\| = \|\underline{w}\| = \overline{PQ}$

$= \sqrt{\underline{w} \cdot \underline{w}} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$

= pitagora 3D!

se $P \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

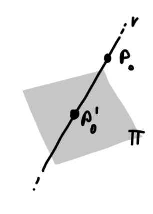
allora $d(P, Q) = \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{11}$

Distanza di P_0 da π

$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$\pi: ax + by + cz + d = 0$



$r \perp \pi$, $P_0 \in r$

P_0' è il "piede della ⊥"

$P_0' = r \cap \pi$

$d(\pi, P_0) = d(P_0', P_0)$ → tra punti

$\underline{d}_r // \underline{n}_\pi$ — direttore della retta parallelo alla normale del piano

esempio:

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$\pi: x + 2y + 3z + 1 = 0$

$[\underline{n}_\pi] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ prendiamolo come $[\underline{d}_r]$

$r: \begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ ← retta parametrica

lo sfruscia lungo lo Span → con t numero, ogni valore sarà tra loro x1 in x, x2 in y, x3 in z

↓

$r: (1 + t_{P_0'}) + 2(1 + 2t_{P_0'}) + 3(-1 + 3t_{P_0'}) + 1 = 0$ → abbiamo inserito gli x, y, z di r dentro π

$t_{P_0'} = -\frac{1}{14}$

$$\to \begin{cases} x_{P_0'} = 1 + t_{P_0'} = 1 - \frac{1}{14} \\ y_{P_0'} = 1 + 2t_{P_0'} = 1 - \frac{2}{14} \\ z_{P_0'} = -1 + 3t_{P_0'} = -\frac{3}{14} - 1 \end{cases}$$

$$d(P_0, P_0') = d(P_0, \pi) = \sqrt{(x_{P_0'} - x_0)^2 + (y_{P_0'} - y_0)^2 + (z_{P_0'} - z_0)^2} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$[\underline{d}_r] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $r: \begin{cases} x = x_0 + at_H \\ y = y_0 + bt_H \\ z = z_0 + ct_H \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$a(x_0 + at_H) + b(y_0 + bt_H) + c(z_0 + ct_H) + d = 0$

$(a^2 + b^2 + c^2)t_H + (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$

$$t_H = \frac{-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)t_H^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

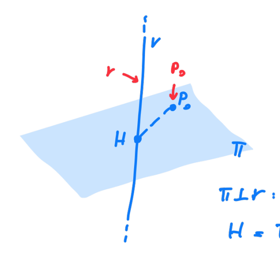
??

Es.:

$r: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$

$P_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d(P_0, r)$?



$\pi \perp r$: $P_0 \in \pi$

$H = \pi \cap r$

$\underline{d}_r = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\pi: ax + by + cz + d = 0$