Analisi: 20231031

IP. OI F

Sia I intervallo limitato o illimitato (almeno 1 estr. inf.). aperto o chiuso o semiaperto
$\rightarrow$ qualsiasi I $\quad$ () — [] — (] $\rightarrow$?

Sia $c \in I$ punto interno o estremo o $\pm\infty$

Sia f funz. a valori reali definita in I tranne al più c

$\rightarrow$ esiste in tutto I a parte c:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $I = [0, +\infty)$

f definita in $I \setminus \{0\}$

$\rightarrow c = 0$

IP. OI C

<u>Problema</u>: come si comporta $f(x)$ avvicinandosi a c? cosa significa "vicino a c"?

"-no le immagini

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(0) \nexists$ $\quad$ $f(c)$ in generale non ha senso

D'ora in avanti, intendiamo come intorno di c un intorno sferico di c.

$\rightarrow$ il concetto di vicinanza si traduce da "intorno"

<u>Def.</u>: intorno del punto

Sia $c \in \mathbb{R}$

Chiamiamo intorno di c ogni intervallo aperto contenente c $\quad$ $c=0$ $\quad$ $I = (-1, 1)$

inoltre, si chiama intorno sferico ogni intervallo simmetrico per c

$\rightarrow (c-\delta, c+\delta)$ $\quad$ $c=0$ $\quad$ $I = (-2, 2)$ $\quad$ $\rightarrow$ distanza da c è al più δ con $\delta > 0$ piccolo

δ: "raggio dell'intorno"

si chiama intorno $+\infty$ ogni: $(a, +\infty)$ con $a > 0$

" $\quad$ $-\infty$ " $(-\infty, b)$ con $b < 0$

$+\infty$

nelle ip. iniziali di f e c diciamo che $f(x)$ soddisfa una proprietà P definitivamente per $x \to c$ se:

come detto, c può essere indefinito!

- $\exists\, U$ intorno di c | $f(x)$ gode di P $\forall x \in U \setminus \{c\}$

LIMITE

<u>Def</u>: nelle ip. iniziali su f e c, f ammette limite l per $x \to c$, dove $l \in \overline{\mathbb{R}}$

e scriveremo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

se $\forall\, V$ intorno di l si ha che $f(x) \in V$ definitivamente per $x \to c$

$\rightarrow \forall c, \forall l$ finiti o infiniti!

<u>Osserv.</u>: La def. è unica per c finito o infinito e anche l finito o infinito

$\neq$ successioni $\begin{cases} l \text{ finito converge} \\ l \text{ infinito diverge} \end{cases}$, qui invece stessa def

c finito: limite AL FINITO $\quad$ $\lim\limits_{x \to \#}$

c infinito: limite ALL'INFINITO

Casi particolari:

- $c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

limite finito al finito
$\quad\quad\quad\quad l \quad\quad\quad c$

$\begin{pmatrix} \varepsilon \text{ per } l \\ \delta \text{ per } c \end{pmatrix}$

$f(x) \in V \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$
quindi consideriamo i due intorni: ogni x porta ad $f(x)$

tornando alla def. limite:

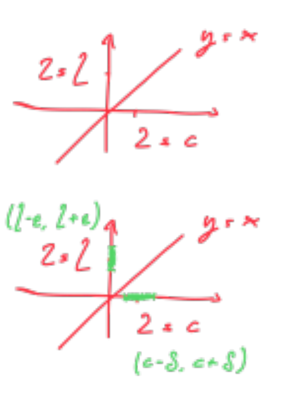
$(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ $\quad$ è sempre questa con qualche modifica!

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \mid f(x) \in V \ \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \mid l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \ \forall x \text{ con } \underbrace{0 < |x-c| < \delta}_{x \text{ dista da } c \text{ al massimo } \delta, \text{ ma non è lui, quindi } > 0}$$

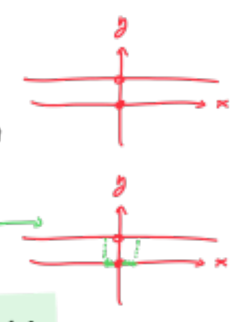
<u>Es</u>: $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

per la def.



siamo sicuri che avvicinandosi a c con x, la $f(x)$ rimane vicina ad l

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \exists$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

altri casi:

- $c \in \mathbb{R}$, $l = -\infty$
  lim. inf. al finito

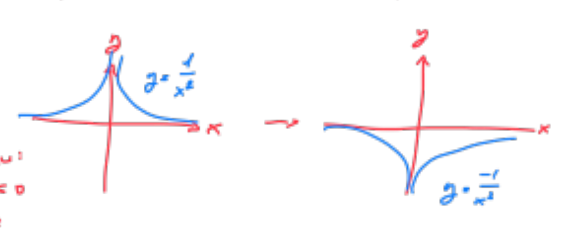
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty \iff$ ~~$\forall \varepsilon > 0$~~ $\exists\, \delta > 0 \mid$ ~~$f(x) = -\infty$~~ $\forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$

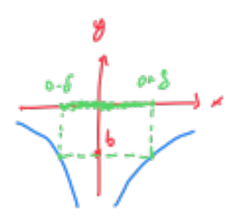
$\forall b < 0 \ \exists\, \delta > 0 \mid f(x) \in V \ \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$
$\quad (-\infty, b)$

$\iff \forall b < 0 \ \exists\, \delta > 0 \mid f(x) < b \ \forall x \mid 0 < |x-c| < \delta$

<u>Es.</u>: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2}$

x^{-2} $\rightarrow$ 1 dispari: anche < 0; -2 pari: funz. pari





se prendo tra $(0-\delta, 0+\delta)$, avrò $f(x) < b$!

sono sempre ridefinizioni della regola sopra!

- $c = +\infty$ $\quad$ $l = +\infty$ $\quad$ lim. inf. all'inf.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall a > 0 \ \exists\, M > 0 \mid f(x) \in V \ \forall x \in (M, +\infty) \cancel{\setminus \{+\infty\}}$ $\quad$ $f(x) > a$

<u>Teorema ponte tra lim. f. e lim. succ.</u>:

Nelle ip. iniziali su c ed f (per semplicità) si ha che:

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall (x_n)$ con $x_n \neq c$ definitivamente e $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$ risulta che $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

questo vale se e solo se

di conseguenza:

possibile importare risultati dei limiti di succ. a lim. di funzioni.

$\rightarrow$ UNICITÀ DEL LIMITE

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to c} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) = l_2 \end{array}\right| \Rightarrow l_1 = l_2$$

$\rightarrow$ ALGEBRA DEI LIMITI

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to c} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x \to c} g(x) = l_2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2 \\ \lim\limits_{x \to c} f(x) g(x) = l_1 l_2 \\ \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \\ \lim\limits_{x \to c} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2} \end{array}$$

$\forall l_1, l_2$ non f.i.

$\rightarrow$ T. PERM. SEGNO (permanenza)

$a_n \to l$ $\quad (n \to +\infty)$

$l > 0 \Rightarrow a_n > 0$ definitivam.

$a_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

$l > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ definit. $\underbrace{\text{per } x \to c}$

$f(x) \geq 0$ definit. $x \to c \Rightarrow l \geq 0$

nelle f. sempre da specif. nelle a_n era indice grande

$\rightarrow$ T. CARABINIERI (confronto)

siano f, g, h tre f. definite in I al più c (tranne) $\quad$ non $\pm\infty$

tali che

- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = l \in \mathbb{R}$
- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivam. per $x \to c$ $\quad$ da specif. nelle f. $\Rightarrow$ o avviciniamo a c

allora $\lim\limits_{x \to c} g(x) = l$

potrebbero non essere definite

<u>coroll.</u>: siano f, g due f. definite in I tranne al più c

- $|f(x)| \leq g(x)$ definit. $x \to c$
- $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ allora $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ $\rightarrow$

$-b_n \leq a_n \leq b_n$
se $\lim b_n = 0$ allora $\lim -b_n = 0$
$0 \leq a_n \leq 0$

<u>coroll.</u>: siano f, g due f. definite in I tranne al più

- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$
- g limitata $\underbrace{\text{in un intorno di } c}_{\text{definit. } x \to c}$ ($\neq$ ammette limite)

allora $\lim\limits_{x \to c} f(x) g(x) = 0$

<u>Conseg. t. ponte</u>:

- $\exists\, (x_n), (x_n')$ con $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n' = c$ e $x_n, x_n' \neq c$ definit.

tali che $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n')$ $\rightarrow$ più di un solo valore

allora $\nexists \lim\limits_{x \to c} f(x)$

succ. $\rightarrow$ può indet.
funz. $\rightarrow \nexists$, no indet.

- oppure $\exists\, (x_n)$ con $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$, $x_n \neq c$ def. e $(f(x_n))$ indet.
  allora

<u>Es.</u>: $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

applicando il secondo, dobbiamo trovare una success. ($\exists$)

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty \ \wedge \ (\sin(x_n))$ indet.

trovata: $x_n = n \rightarrow$ allora $\nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

applicando il primo: trovare due succ. $(x_n), (x_n')$ per

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim x_n' \ \wedge \ \lim \sin(x_n) \neq \lim \sin(x_n')$
tutti

sugg: sceglierle in modo da $(\sin(x_n))$ e $(\sin(x_n'))$ costanti

$\rightarrow x_n = 2n\pi$
sempre zero, un valore di $x_n \to +\infty$
$f(x_n)$
sin

$\rightarrow x_n' = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$
sempre $= 1$, un valore di $x_n \to +\infty$
$f(x_n')$
sin