Integrali: strum. approx. usando limiti

- area di regioni piane senza poligono di contorno (sopra i rettang.)

allarghiamo integrabili alle fn:
- continue
- monotone

T.

Sono integrabili in $[a,b]$ (chiuso & limitato)

1) continue in $[a,b]$
2) monotone in $[a,b]$

} non sono più che siano continue
⇓
1) continua ⇒ limitata perché Hp. T. Weierstrass
- ammette max/min in $[a,b]$ ⇒ limitata

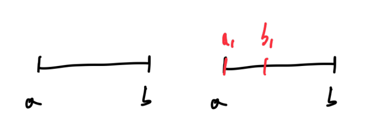
2) crescente ⇒ $f(a) \le f(x) \le f(b)$

⇓

generalizzazioni:

Def.: f è continua "a tratti" in $[a,b]$
se $\exists$ suddivi/partizione di $[a,b]$ in un
n° finito di intervalli $[a_k, b_k]$ $k=1 \dots n$
t.c. f è continua in ogni intervallo $[a_k, b_k]$

Si può dividere f non continua in intervalli
in cui f è continua



in una f continua a tratti in $[a,b]$ è una f continua tranne in un n° finito di punti in cui presenta un salto! Solo salto

Def.: stessa cosa per f monotona "a tratti"

T. se f è continua a tratti in $[a,b]$
oppure monotona a tratti in $[a,b]$
⇒ f è integrabile in $[a,b]$

$\hat{5}$
C^2 derivabile 2 volte?
$R[a,b]$ integrabile in $[a,b]$

Def.: indico con $\underbrace{R[a,b]}_{\text{classe non vuota}}$ l'insieme delle fn integrabili in $[a,b]$

Proprietà di $R[a,b]$ e dell'integrale

Siano $f, g \in R[a,b]$

a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$
e $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

cioè $(R[a,b], +, \cdot)$ è uno SVR senza dim. finita
↳ perché contiene polinomi

⇓
in termini di appl. lineare:
$L: R[a,b] \to \mathbb{R}$
$f \mapsto L(f) = \int_a^b f(x) dx$

$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$

Quindi integrale è LINEARE
linearità dell'integrale

b) Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ allora $\int_a^b f(x) dx \le \int_a^b g(x) dx$
monotonia dell'integrale

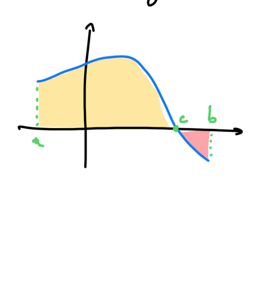
c) Se $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$ ⇒ $\int_a^b f(x) dx \ge 0$
positività dell'integrale

d) Se $c \in (a,b)$ ⇒ $f \in R([a,c]) \cap R[c,b]$
$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
additività dell'integrale rispetto all'intv. integraz.

e) $|f| \in R[a,b]$ e $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \le \int_a^b |f(x)| dx$
disug. tr. (tra somme continue)

Ossv.: 1

Sia f integrabile in $[a,b]$ ma non di segno costante



$\int_a^c f(x) dx$
$-\int_c^b -f(x) dx$
} $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b -f(x) dx$

ritorna positiva ma sarà finalm. col segno meno applicato (quindi inserisco (-1) e anche fuori metto (-1))

↳ stessa area per simmetria

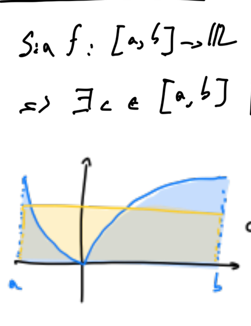
L'integrale di fn negativa è l'opposto dell'area tra il grafico e l'asse x

Ossv.: 2

è utile considerare $\int_a^b$ anche se $a > b$
per convenzione per cui se $a > b$ $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

T. della media:

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua (in $[a,b]$)
⇒ $\exists c \in [a,b] \mid \int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(c)(b-a)}$
~ cauchy-riemann
è il rettangolo di base $[a,b]$ e altezza $f(c)$



Dim.: Siano m, M min, max di f in $[a,b]$
⇒ $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$

Usando: $\int_a^b m \, dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M \, dx$
per monotonia dell'integrale
rimangono i segni!

$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M \, dx = M(b-a)$

dividendo per $(b-a)$:

$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \le M$

per T. val. intermedi: deve $\exists c \in [a,b]$: $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
⇒ lo si deve trovare nel piano di funzione, perché va da m a M!
moltiplicando per $(b-a)$ ottengo la tesi

Significato: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ (distanza intervallo; area fn su intervallo)

media integrale di f in $[a,b]$
generalizzaz. della media aritmetica.
⇓

$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} S_n}_{\text{somma di Cauchy-Riemann?}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{lo nel suo intervallo}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{lunghezza intervallo}}$

$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ (stessa lunghezza)

⇒ $\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = (b-a) \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$

⇒ $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}}_{\text{questa è la media aritmetica degli elementi } 1 \dots n!}$

Primitive:

Def.: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una fn. Si chiama primitiva
di f in $[a,b]$ una funzione $G: [a,b] \to \mathbb{R}$
t.c. $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$
"primitiva" o "antiderivata"

2. Se $\exists$ primitiva, ne $\exists$ infinite
G primitiva di f ⇒ $G + c$ primitiva di f $\forall c \in \mathbb{R}$
$(G+c)' = G' = f$

3. Se G_1, G_2 due primitive di f in $[a,b]$ ⇒ $\exists c \in \mathbb{R} \mid G_1(x) = G_2(x) + c$ $\forall x \in [a,b]$
$G_1' - G_2' = f - f = 0$ ⇒ $(G_1 - G_2)' = 0$ in $[a,b]$

⇒ $G_1 - G_2$ costante in $[a,b]$, ossia $\exists c \in \mathbb{R}$: $G_1(x) - G_2(x) = c$ $\forall x \in [a,b]$

Notazione: Indico con $\int f(x) dx$ la famiglia di tutte le primitive G di f, quando esistono
integrale indefinito

Ossv.: Se f è continua ⇒ ammette primitiva (vedremo dopo)

Es.: $f(x) = x$ $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
$f(x) = \cos x$ $G(x) = \sin x + c$

Primitive delle fn. elementari:

$f(x)$	$G(x)$
k	$kx + c$
x^α $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
x^α $\alpha = -1$	$\ln \lvert x \rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
e^x	$e^x + c$ (a^x con cambio di var.)
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\tan x} + c$
$Sh\, x$	$Ch\, x + c$
$Ch\, x$	$Sh\, x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$

T.: legame tra integ. e primitive:

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e (integ. limitata)
sia $G(x)$ una sua primitiva in $[a,b]$

S_n somme di Cauchy-Riemann

⇒ $\int_a^b f(x) dx = \underbrace{G(b)}_{\text{primitiva in } b} - \underbrace{G(a)}_{\text{primitiva in } a}$ ⇒ usiamo la famiglia di primitive $G(x)$ in a e b.

teorema fondamentale del calcolo integrale
Si riduce il calcolo di un integ. al calcolo di primitive

dim.: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to +\infty} S_n$

$S_n = \sum_{i=1}^{+\infty} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

considero G (primitiva di f) in $[x_{i-1}, x_i]$
si vede come G soddisfa le Hp. T. Lagrange
- continua in intv. chiuso
- derivabile all'interno

⇓
applico T. Lagrange
⇒ $\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i)$: $G(x_{i-1}) - G(x_i) = \boxed{G'(c_i)}(x_i - x_{i-1})$

non sono più gli ξ_i, ma i punti del T. Lagrange, ma dato che la scelta è arbitraria funziona!

Quindi
$G(x_i) - G(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ $\forall i = 1 \dots n$

$\sum_{i=1}^{n} [G(x_i) - G(x_{i-1})] = G(b) - G(a)$
telescopica! perché rimane solo l'ultimo e il primo!

⇓
$G(b) - G(a) = S_n$ ⇒ $\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$

$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx \overset{def}{:=} [G(x)]_a^b$, $G(x)\Big|_a^b$

Esempio: calcolo della media integrale

$\frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx$

per T. fondam. calc. integ.

$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \left(\frac{1}{b-a} \right) \left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{a+b}{2}$ = in x, c è il punto medio

c inteso $[a,c]$, $[c,b]$

Esempio:
Calcolare $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x} + 2\cos x \right) dx \underset{\text{linearità}}{=} \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx + 2\int_1^2 \cos x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \left[\ln|x| \right]_1^2 + 2\left[\sin x \right]_1^2 = \frac{7}{3} - (\ln 2 - \ln 1) + 2(\sin 2 - \sin 1)$

$= \frac{7}{3} - \ln 2 + 2\sin 2 - 2\sin 1$ ✓

Esempio: calc.

$\int_0^2 |x-1| dx$ quando val. ass.: $|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \ge 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$

per additività nel dominio di integ.:

$\int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} + \cancel{2} - \cancel{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 1$