← complemento ortogonale?

3. $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y-2z = 2y-t = x-y-2z+t = 0 \right\}$

a. $\dim U$, $\dim U^\perp$

b. base ortogonale di U

c. base ortonormale di $U^\perp$

d. $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; base di $U \cap V^\perp$

e. $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; pr. ortog. di $\underline{w}$ su U e $U^\perp$

1) rielaboro la condizione in sistema

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 2y-t = 0 \\ x-y-2z+t = 0 \end{cases}$$

- tolte le superflue (solo eq. indip.) calcolo la dim U con:

$$\dim U = n-k$$
$$= 4 - \text{"n° eq. indip.ti"}$$

- quindi cerchiamo le eq. indip.ti studiando il rk

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \cancel{2}\,-2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk}A = 2$$

quindi $k = 2$

$$\boxed{\dim U = 4-2 = 2}$$

- trovo $\dim U^\perp$

$$\boxed{\dim U^\perp = n - \dim U = 4-2 = 2}$$

- ora vogliamo una base o.g. di U
quindi cerco dapprima una base semplice:

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x \;\; y \;\; z \;\; t \end{array}$$

riprendo la rid. in scala di prima: vedo che z e t sono libere.

- uso la mat. ridotta per il rk per costruire un sistema equivalente: what

SOTTO SPIEGATO!!

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ y = \frac{1}{2}\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- trovo una base di U, quindi 2 vettori $\in U$ lin. indip.ti

base di U: $\mathcal{B}_U = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ \cancel{2}\,0 \end{pmatrix}}_{\underline{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{u}_2} \right\}$

$$\begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 2y-t = 0 \\ x-y-2z+t = 0 \end{cases}$$

provando nell'originale i vettori sono validi e i due non sono lin. dip. ✓

- verifico se è già ortogonale

$\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle = -2 \neq 0$ non è ortogonale

- applico Gram-Schmidt (vedi algoritmo)

$\underline{w}_1 = \underline{u}_1$

$\underline{w}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{w}_1 \rangle}{\|\underline{w}_1\|^2}\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cancel{-}\!+ \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \\ 2/5 \\ 2 \end{pmatrix}$ anche questo verifica l'originale ✓

base ortogonale di U:

$$\boxed{\bar{\mathcal{B}}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}}$$

primo rimane lo stesso per G-S

normalizzato 5, tolte le frazioni

- ora cerco base ortonormale di $U^\perp$
ricordando che $(U^\perp)^\perp = U$, quindi $U^\perp$ è compl. ortog. di U e QUINDI TROVO UNA BASE CERCANDO DUE VETTORI ORTOGONALI A U.

$x+y-2z = 0$
$2y-t = 0$

prendo due equaz. poste a 0? ~~why~~?

perché visto che in U sono messe $= 0$, sono ortogonali!

$$\Downarrow$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \perp : \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2} \right\} =$ base di $U^\perp$

↪ ALTERNATIVA:

$U^\perp : \begin{cases} \langle \underline{u}_1, x \rangle = 0 \\ \langle \underline{u}_2, x \rangle = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+z = 0 \\ -x+y+2t = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$ rk = 2, z t libere

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}\alpha \\ y = x - 2t = -\frac{1}{2}\alpha - 2\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

e poi, come trovo la base da qui?

- rendiamo ortonormale (ma prima ortogonale!)

$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 2$

Gram-Schmidt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\text{norm.}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

quindi base o.g. $\bar{\mathcal{B}}_{U^\perp}$

$$\bar{\mathcal{B}}_{U^\perp} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{z}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\underline{z}_2} \right\}$$

$\|\underline{z}_1\| = \sqrt{6}$

$\|\underline{z}_2\| = \sqrt{39}$

normalizzo in o.n.:

$$\boxed{\bar{\bar{\mathcal{B}}}_{U^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{39} \\ 5/\sqrt{39} \\ 2/\sqrt{39} \\ -3/\sqrt{39} \end{pmatrix} \right\}}$$

- ora svolgiamo d.

$V = \mathrm{Span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{questa è base di } V!}\Big)$

- cerco il sistema che definisce un intersecato di o.g. (interse. significa metto a sistema!)

$$U \cap V^\perp : \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 2y-t = 0 \\ \cancel{x+y-2z = 0} \\ x+y-2z+t = 0 \end{cases}$$

per U

per $V^\perp$

rimuovo la superflua

pongo i due vettori $= 0$ per trovare spazio o.g.! quindi se non siamo in V, devo essere in $V^\perp$!

- trasformo in matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rk} = 3$$

t libera!

- descrivo in $t = \alpha$ (una volta trovato un vettore, descrivo in base ad esso)

...

- infine e.

$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ma quale base di $U^\perp$ usare?

pr. ortog. di $\underline{w}$ su $U^\perp$

$\underline{n}_i$: norma del vet. i della base di $U^\perp$

$P_{U^\perp}(\underline{w}) = \langle \underline{w}, \underline{n}_1 \rangle \underline{n}_1 + \langle \underline{w}, \underline{n}_2 \rangle \underline{n}_2$

$\underline{a}_i$: vet. base $U^\perp$ indice i

$$= \frac{\langle \underline{w}, \underline{a}_1 \rangle}{\|\underline{a}_1\|^2}\underline{a}_1 + \frac{\langle \underline{w}, \underline{a}_2 \rangle}{\|\underline{a}_2\|^2}\underline{a}_2$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} -15/26 \\ -3/26 \\ 30/26 \\ -6/26 \end{pmatrix}$$

- trovo $P_U(\underline{w})$

$$P_U(\underline{w}) = \underline{w} - P_{U^\perp}(\underline{w}) = \dots = \begin{pmatrix} 11/26 \\ 55/26 \\ 108/26 \\ 98/26 \end{pmatrix}$$