Analisi 20231024.2

T. (alg. dei limiti): $+, -, \cdot, :$ sui limiti, come si comporta l'op. di limite?

(a_n), (b_n) succ. convergenti a l_1, l_2 rispett.

allora:

a) $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = l_1 + l_2 = \lim_{n \to +\infty} a_n + \lim_{n \to +\infty} b_n$ (termine per termine)

lim. somma = somma dei limiti

b) $\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = l_1 l_2$

c) $\lim_{n \to +\infty} a_n - b_n = l_1 - l_2$

d) con $l_2 \neq 0$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$

per PERM. DEL SEGNO

→ anche $b_n \neq 0$ definitivam.

e) $\lim_{n \to +\infty} a_n^{b_n} = l_1^{l_2}$ se $l_1 > 0$

se una o entrambe (a_n), (b_n) divergono, alg. dei limiti:

$l_1 + \infty = +\infty$ ← $\lim a_n = l_1$, $\lim b_n = +\infty$ ⇒ $\lim (a_n + b_n) = +\infty$

$l_1 - \infty = -\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty - \infty$ indeterminata → non sappiamo come si comporta, ma può comunque ammettere limite

$$l_1 \infty = \begin{cases} +\infty & l_1 \text{ concorde } \infty \\ -\infty & l_1 \text{ discorde } \infty \\ \text{indet.} & l_1 = 0 \end{cases}$$

$\infty \infty = \infty$ con pr. dei segni

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & + & - \\ \hline + & + & - \\ - & - & + \end{array}$$

$\frac{l_1}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ indet.

$\frac{l_1}{0} = \infty$ se $l_1 \neq 0$

Es.: calc. limiti:

possiamo usare alg. lim. ...

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2} = \frac{\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{5}{2}} - \lim_{n \to +\infty} -3n + \lim_{n \to +\infty} 7}{\lim_{n \to +\infty} n^3 + \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} - \lim_{n \to +\infty} -3n^2}$$

ma è troppo convoluto → sapendo che alla fine sostituiamo, prendiamo i gradi massimi: (1)

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}} \left[1 - 3n^{1-\frac{5}{2}} + 7n^{-\frac{5}{2}}\right]}{n^3 \left[1 + n^{\frac{1}{2}-3} - 3n^{2-3}\right]}$$

RACCOLGO PER GRADI MASSIMI, ALMENO GLI ALTRI GRADI DIVENTANO < 0 E CON $n \to +\infty$ VANNO AD ELIMINARSI

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{n^{-\frac{1}{2}}}_{\to 0} \frac{\overbrace{1 - 3n^{-\frac{3}{2}} + 7n^{-\frac{5}{2}}}^{\to 1 - 0 + 0}}{\underbrace{1 + n^{-\frac{5}{2}} - 3n^{-1}}_{\to 1 + 0 - 0}} = 0 \cdot 1 = \boxed{0}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1/3} - 7n + 5}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-7\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = -0$$

$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ indet. $+\infty - \infty$

e.g.: $\sqrt{n} = a_n$
$\sqrt{n+1} = a_{n+1}$ → traslaz.

$\lim a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ⇒ $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = l$, $\lim_{n \to +\infty} a_{n-1} = l$

(2)

quindi cosa si fa? razional. II

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1 - n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \boxed{+0}$$

$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$ per casa ↵

$\sqrt{n^2+n} \to \sqrt{n}\sqrt{n+1}$?

$$\to \lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indet}$$

$$\hookrightarrow = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\cdot \frac{(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n\right) = \lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) = 0 \cdot \infty$ indet

T. di confronto:

Teor. 1

(a_n), (b_n) succ. conv.g l_1, l_2 rispettiv.

i) $l_1 > l_2$ ⇒ $a_n > b_n$ definitiv. ($\forall n \geq \bar{n}$, ad un certo punto)

ii) $a_n \geq b_n$ definitiv. ⇒ $l_1 \geq l_2$

dalle regole di prima!

Teor. 2

(a_n), (b_n), (c_n) succ. |

1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitiv.

2) (a_n), (c_n) converg. allo stesso $l \in \mathbb{R}$ (finito, non $\in \overline{\mathbb{R}}$)

allora anche (b_n) ha limite l

(b_n) non sappiamo in anticipo che è convergente → è effetto delle disug.