Analisi 2023/201

← resto di Peano, resto di Lagrange

f derivabile intorno al suo dom f

f. Taylor con resto in forma di Peano

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \boxed{o((x-x_0)^n)} \qquad x \to x_0$$

T.: $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in I.
Sia $x_0 \in I$ interno $\Rightarrow$ $\forall x \in I$ $\exists c$ compreso tra x e x_0:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

forma più esplicita

Ossv.: preso $n=0$
f derivabile in I
presi: $x, x_0 \in I$
$\exists c$ compreso tra x_0, x:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0) \leftarrow \text{T. Lagrange}$$

Lo so retta tangente $\Rightarrow$ T. Lagrange

ma condotta in c, non x_0!

Applicazione: stima di "e"

$$e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- succ. crescente : ?
- succ. limitata superiormente : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 3 \quad \forall n \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\sup\{\ \} \le 3 \quad \forall n \neq 0$$

Serie Maclaurin per e^x con resto in forma di Lagrange

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists c$ compreso $\underset{0}{x_0}, x$ | $e^x = T_{n,0}(x) + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{(n+1)}$

con $x=1$ $\exists c$ tra $\underset{0}{x_0}, \underset{1}{x}$ t.c. $e = T_{n,0}(1) + \frac{e^c}{(n+1)!}$

$$\Updownarrow$$

$$0 < e - T_{n,0}(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} \le \frac{3}{(n+1)!}$$

più aumenta n, più si avvicina

$$T_{n,0}(1) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Es.: calcolo di limiti

① $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sin 2x}{x \sin x}$

$x \sin x \sim x^2 \quad x \to 0$

$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \dots + o(t^n)$?

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5!} \dots$

continuo finché nella somma del lim. non si annullano $\Rightarrow$ tenere solo il $2x$ non basta

$e^{\sqrt[5]{7x}} - 1 \sim \sqrt[5]{7x} \quad x \to 0^+$