Areal

Etter fullendt R2 sitter man gjerne igjen med følgende ide:

> INTEGRASJON ER DET MOTSATTE AV DERIVASJON

som de fleste i sitt stille sinn oversetter til:

> INTEGRASJON = ANTIDERIVASJON

Den første av disse er i bunn og grunn riktig, men ikke den andre. Det som er riktig å si, er at man i mange tilfeller kan antiderivere for å finne integralet.

$\boxed{1}$ Finn arealet avgrenset av $y = x^3$, $y = 0$ og $x = 1$.

I mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Funksjonen e^{-x^2} har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en pen måte, og andre funksjoner har så kompliserte antideriverte at det ikke er vits i å prøve en gang:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)}\,dx = \\
&-\Bigg(\bigg(\log(\cos(x))\left(2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{1}{2}\left((1+i)-(1-i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)\right) + \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(-i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{1}{2}\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+(1+i)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\!\left(\tfrac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+(1-i)\right)\right) + \\
&\quad \log^2\!\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \log^2\!\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right) + \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right) + \\
&\quad 4\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \log(4)\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(1-i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\log\left(1+i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad \log(4)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\bigg)\Bigg)\Big/ \\
&\left(4\left(\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)+\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)+\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)\right) + \text{constant}
\end{aligned}
$$

Men det viktigste å skjønne når vi skal forstå integrasjon, er hva en riemannsum er. Disse brukes egentlig til å definere integralet, men kan også brukes til å finne en tilnærming til arealet under grafen.

$\boxed{2}$ Finn

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Viggo Brun skal ha sagt:

> Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!

Det han mente å si, var nok at derivasjon er ganske lett (det er bare å bruke noen regneregler), mens integrasjon kan være ganske vanskelig. Et tilforlatelig funksjonsuttrykk kan være enten lett, umulig, vanskelig, eller håpløst å antiderivere, og det kan være vanskelig å avgjøre hvilken av disse som er tilfelle. Man kan bruke et liv på å trene på antiderivasjon.

$\boxed{3}$ Regn ut integralene

$$(i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx \qquad\qquad (ii)\quad \int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx.$$

(Hint: $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.)