

Fouriertransform

Det går an å vise at dersom $x = x(t)$ er et signal som oppfører seg pent (ikke tenk så mye på hva det vil si inntil videre), og

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Dette kalles fouriertransform, og er ganske vanskelig å skjønne noe av i begynnelsen. Men fouriertransform er helt ekstremt viktig i både matematikk og anvendelser. Det kan brukes til alt: https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform. I et klassisk matematikkemne brukes fouriertransform først og fremst til å løse partielle differensiallikninger.

Vi begynner med å beregne et par transformer.

- 1 Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

- 2 Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/a \\ 0 & |t| \geq 1/a \end{cases}$$

Hva skjer med fouriertransformen når $a \rightarrow \infty$?

- 3 Finn fouriertransformen til

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

I de to neste oppgavene må du nesten anta at inversformelen gjelder, og bruke de foregående oppgavene.

- 4 Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

- 5 Finn fouriertransformen til

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

Fouriertransformen er en lineæroperator:

$$\mathcal{F}\{x + y\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + y(t)) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt = X(\omega) + Y(\omega)$$

Det er greit nok. En mindre innlysende, men veldig viktig regneregel er:

$$\mathcal{F}(f') = i\omega \mathcal{F}(f)$$

- 6 Vis dette (hint: delvis integrasjon). Hva må du anta om x for at formelen skal gjelde?