TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS

Øving 9 - Integralet

Obligatoriske oppgaver

$\boxed{1}$ En beholder med høyde 4 lages ved å rotere kurven $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, om aksen $x = -1$ og sette en plan bunn i. Finn volumet V av beholderen.

$\boxed{2}$ La funksjonen F være definert for $x \geq 1$ ved

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt,$$

og la K være kurven $y = F(x)$ for $1 \leq x \leq 2$. Finn buelengden av K.

Anbefalte oppgaver

$\boxed{1}$ a) Et vannkar dannes ved å rotere kurven

$$y = \frac{x^3}{4}, \qquad x \geq 0$$

om y-aksen. Finn volumet av karet opp til høyde h.

b) Karet fylles med vann. Hvor fort stiger vannhøyden i karet idet høyden er 2 dm og vannet strømmer inn med 10 liter per sekund? (Vi antar at x og y er målt i dm.)

$\boxed{2}$ Et $45°$ hakk karves inn til midten av en sylindrisk kubbe som er 40cm tykk, slik som i Figur 7.20 på s. 406 i læreboka. Den ene overflaten til hakket er vinkelrett på aksen som går gjennom kubben. Hvor mye tre (i volum) ble fjernet ved å lage dette hakket?

$\boxed{3}$ La $f(x)$ være en ikkenegativ funksjon som er deriverbar med kontinuerlig derivert for $x \geq 1$. Buelengden til kurven $y = f(x)$ fra $x = 1$ til $x = u$ er gitt ved en funksjon $H(u)$. Bestem funksjonen f dersom

$$H(u) = \frac{u^3}{3} + u - \frac{4}{3} \quad \text{og} \quad f(1) = 0.$$

$\boxed{4}$ Lisa skal bake smultringer på dugnad for UKA-19. Smultringene skal være 2cm tykke, ha senterhull på 2cm i diameter og dekkes med sjokoladeglasur. Det trengs 5dl glasur for å dekke 1 kvadratmeter bakverk. Hvor mye sjokoladeglasur trenger hun om hun skal lage 100 smultringer?

$\boxed{5}$ Et av svømmebassengene på Pirbadet er 20 meter langt, 8 meter bredt og har en skrå bunn som er slik at dybden ved den ene kortsiden er 1 meter, og 3 meter ved den andre. Finn den totale kraften som virker på bassengbunnen, som følge av trykket i væsken, når bassenget er fylt opp med vann.

$\boxed{6}$ La S være området i xy-planet som er avgrensa av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$. Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie S om x-aksen. Bruk både sylinderskallmetoden og skivemetoden.

$\boxed{7}$ La R være området avgrenset av $y = x$ og $y = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

a) Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når R blir rotert om x-aksen.

b) Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår når R blir rotert om y-aksen.

$\boxed{8}$ Et legeme er 6 meter høyt. Det horisontale tversnittet i en høyde z meter over grunnflata er et rektangel med lengde $2 + z$ meter og bredde $8 - z$ meter. Finn volumet av legemet.

$\boxed{9}$ Finn buelengden til kurven

$$y^2 = (x - 1)^3$$

fra $(1, 0)$ til $(2, 1)$.

$\boxed{10}$ Finn arealet av overflata som oppstår ved å rotere kurven

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

om y-aksen.

$\boxed{11}$ La A være området i xy-planet som er avgrensa av kurvene

$$y_1 = 4 - x^2$$
$$y_2 = 2 - x.$$

Bestem volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie A om x-aksen.

(H16)

$\boxed{12}$ La a og h være positive størrelser, og la A være området i 1. kvadrant avgrenset av parabelen $y = ax^2$, y-aksen og den horisontale linjen $y = h$. Området A roteres om y-aksen.

a) Området A roteres om y-aksen. Finn volumet til rotasjonslegemet.

b) Anta at rotasjonslegemet er fylt med vann som deretter tappes ut. I et gitt øyeblikk er vannhøyden 1 m, og vannet strømmer ut med en hastighet av 2 dm^3 pr. sekund. Hvis $a = \pi(\text{dm}^{-1})$, hvor raskt avtar vannhøyden i dette øyeblikket?

(Sommer 2013)