

# Ikkelineære systemer

Dette kapitlet gir en introduksjon til dynamiske systemer. Mens vi tidligere har sett at det finnes god teori og fine formler for lineære systemer gjelder ikke dette for ikkelineære systemer. For ikkelineære systemer kan man som regel ikke finne analytiske løsninger, og vi må bruke andre metoder. Disse inkluderer hovedsaklig kvalitative argumenter i fase-diagrammet og numerisk analyse.

**Eksempel 1.** Som et eksempel på at forståelse noen ganger kan være mer nyttig enn eksakte formler begynner vi med å betrakte ligningen

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)). \quad (1)$$

Her er  $x(t)$  en funksjon av variabelen  $t$ , og  $\dot{x}$  er den deriverte av funksjonen. Dette er en ikkelineær førsteordens differensialligning. Løsningen kan vi finne ved separasjon. Først skriver vi ligningen på formen

$$\frac{1}{\sin(x(t))} \frac{dx(t)}{dt} = 1.$$

Nå kan vi bruke formelen

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = -\ln(\csc(x) + \cot(x))$$

for den antideriverte av  $1/\sin(x)$  (du trenger ikke å regne ut dette) og kjerneregelen til å skrive ligningen som

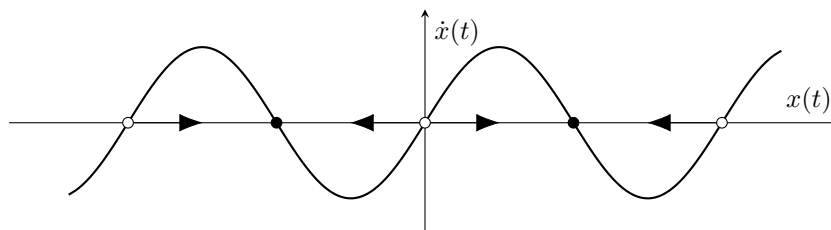
$$\frac{d}{dt}(-\ln(\csc(x) + \cot(x))) = 1.$$

Integrasjon med initialbetingelse  $x = x_0$  i  $t = 0$  gir da den implisitte løsningen

$$t = \ln \left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right|. \quad (2)$$

Selv om dette er en av få ikkelineære differensialligningen man kan finne analytisk løsning til var denne utregningen vanskelig, og enda vanskeligere er det å tolke løsningen (2). Kan vi forstå ligningen på andre måter?

Vi kan tenke oss at  $x(t)$  beskriver posisjonen til en partikkel som beveger seg langs den reelle tallinjen. Ligning (1) gir da at hastigheten til partikkelen er avhengig av en sinusfunksjon med partikkelens posisjon som argument. Under er en skissert av det endimensjonale fase-diagrammet til ligningen.



I punktene der sinusfunksjonen er positiv er hastigheten til partikkelen positiv, der den er negativ er hastigheten negativ, og der funksjonen krysser null er også hastigheten til partikkelen null. Punktene hvor hastigheten er null, og dermed partikkelen er i ro, kalles likevektspunkter. Vi klassifiserer gjerne likevektspunktene som enten stabile eller ustabile, avhengig av hva som skjer dersom en partikkel i et likevektspunkt får et lite dytt på seg. De ustabile likevektspunktene er tegnet inn som hvite punkter mens de stabile er svarte.

Ut fra diagrammet kan vi se hvordan partikkelen vil bevege seg. Dersom den begynner i posisjon  $x_0$  beveger den seg til et likevektspunkt til høyre eller til venstre, avhengig av om hastigheten er positiv eller negativ.

Eksempel 1 viser hvordan det ofte kan være nyttig å skissere faseplanet til en ligning i stedet for å lete etter eksakte løsninger. På denne måten kan vi få mer informasjon ut av systemet for mindre arbeid.

## Todimensjonale faseplaner

Vi skal nå se litt på todimensjonale faseplaner. For lineære systemer på formen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

kan man, med litt erfaring, skissere faseplanet bare ved å se på egenskapene til matrisen  $A$  i systemet. Vi ser nå på noen eksempler på dette.

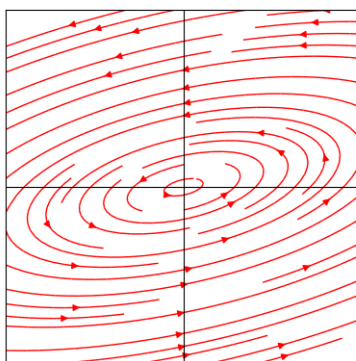
**Eksempel 2.** Betrakt systemet

$$\dot{x} = x - 5y, \quad \dot{y} = x - y.$$

Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har komplekse egenverdier  $\lambda_1 = 2j$  og  $\lambda_2 = -2j$ . Vi får derfor sirkelbaner i faseplanet, som vist under.



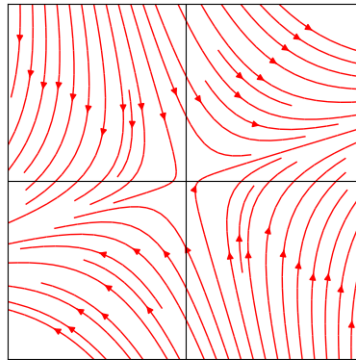
**Eksempel 3.** Se nå på systemet

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = x - 2y.$$

Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

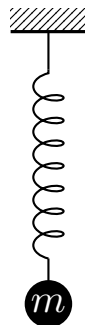
har reelle egenverdier  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13})$  og  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13})$  med tilhørende reelle egenvektorer. Vi får da en sadel i faseplanet, bestemt av linjene til egenverdiene for systemet.



**Eksempel 4.** Vi har tidligere sett at dersom et lodd henger i en fjær som vist under kan svingningen til loddet beskrives av

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0,$$

der  $m$  er massen til loddet,  $\gamma$  er en friksjonskoeffisient, og  $k$  er fjærstivheten.



Desom vi innfører den nye funksjonen  $y(t) = \dot{x}(t)$  for hastigheten til loddet kan ligningen skrives om til systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

For enkelhets skyld velger vi verdier  $m = 1$ ,  $\gamma = 2$  og  $k = 5$ . Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

har egenverdier  $\lambda_1 = -1 + 2j$  og  $\lambda_2 = -1 - 2j$ , med tilhørende egenvektorer

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 - 2j \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 + 2j \\ 5 \end{pmatrix},$$

Tidligere har vi sett at systemet da har to lineært uavhengige løsninger på formen  $v_1 e^{\lambda_1 t}$  og  $v_2 e^{\lambda_2 t}$ . Dette gir løsningene

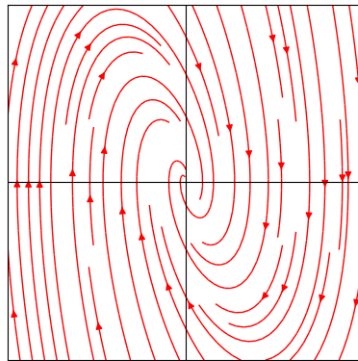
$$\begin{pmatrix} -1-2j \\ 5 \end{pmatrix} e^{(-1+2j)t} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -1+2j \\ 5 \end{pmatrix} e^{(-1-2j)t}.$$

Videre kan vi bruke superposisjonsprinsippet til å skrive den generelle løsningen til systemet på formen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right] e^{-t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right] e^{-t},$$

der  $c_1$  og  $c_2$  er to konstanter som kan bestemmes av eventuelle initialbetingelser. Ut fra dette kan vi lese at systemet inneholder periodiske svingninger, men at disse dempes av  $e^{-t}$ -funksjonen i løsningen.

Følgende viser fasediagrammet for systemet, med  $x(t)$  på den horisontale akse og  $y(t)$  på den vertikale akse.



Her finner vi det vi forventet; posisjonen til loddet  $x(t)$  og hastigheten til loddet  $y(t)$  beveger seg periodisk i forhold til hverandre samtidig som begge dempes inn mot null av friksjon. Ingen energi blir tilført systemet, som derfor til slutt vil komme til stillstand.

I fasediagrammet plotter vi løsningene mot hverandre, i motsetning til å plote dem hver for seg som funksjoner av tid. Tiden  $t$  er dermed implisitt i diagrammet. Hvert punkt i planet tilsvarer én tilstand systemet kan befinne seg i, hvor både posisjon og hastighet er bestemt. Kurver i fasediagrammet er spesielle løsninger til systemet, hvor konstantene i den generelle løsningen er bestemt av initialbetingelser.

## Grensesykluser

Vi går nå over til å studere systemer som ikke er lineære. I disse kan man få helt andre fenomener enn de vi tidligere har sett i lineære systemer. Her kommer analyse av faseplan til sin rett, i og med at vi som regel ikke kan løse slike systemer analytisk. La oss først se på to situasjoner hvor ikkelineære ligninger oppstår.

**Eksempel 5.** I Eksempel 4 så vi på fasediagrammet til ligningen

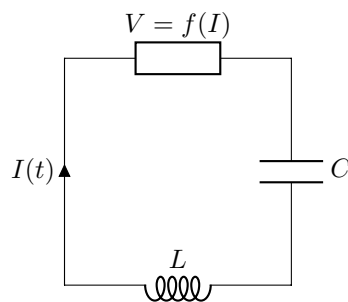
$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0.$$

Siden det er friksjon i systemet dør svingningen ut til slutt. La oss nå tenke oss at vi begynner å gi loddet litt fart i hver svingning. Det at vi dytter på loddet kan vi modellere med negativ friksjon; vi tilfører systemet energi. Nå kan svingningen holdes i gang så lenge vi orker å dytte på loddet. Men systemet er ikke lenger lineært, siden friksjonen ikke er proporsjonal med hastigheten. Vi kan sette opp ligningen

$$m\ddot{x} + \gamma(x)\dot{x} + kx = 0, \quad (3)$$

der  $\gamma(x)$  gir friksjon som funksjon av posisjonen til partikkelen.

**Eksempel 6.** Betrakt følgende krets.



Her har vi satt inn en ikkelineær motstand som oppfører seg i henhold til  $V = f(I)$ , der  $f$  er en funksjon. Balanserer vi spenningsøket over kretsen finner vi da at

$$L\dot{I} + f(I) + \frac{1}{C} \int I dt = 0,$$

og derivasjon gir

$$L\ddot{I} + \frac{df}{dI}\dot{I} + \frac{I}{C} = 0.$$

Dette systemet er ikkelineært dersom funksjonen  $f$  ikke er lineær i  $I$ .

I begge eksemplene over kan det oppstå svingninger som opprettholdes av seg selv og ikke dør ut (i fjæren fordi vi dytter på den, og i kretsen fordi den ikkelineære motstanden nå også har lov til å tilføre systemet energi). Dette skal vi kalle grensesykluser. En grensesyklus er en lukket og isolert bane i et fasediagram. Systemer som inneholder grensesykluser finner vi overalt rundt oss. Noen eksempler er kretsen i en digital klokke, et hjerte som slår, eller balansen mellom rovdyr og byttedyr.

**Eksempel 7.** Dersom vi bruker polarkoordinater er det ikke vanskelig å konstruere systemer som har grensesykluser. La oss se på systemet

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - r^2) \\ 1 \end{pmatrix},$$

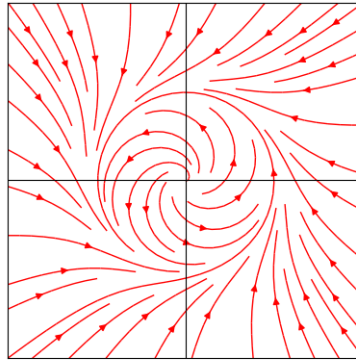
der

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta),$$

og relasjonen til kartesiske koordinater er dermed

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}.$$

Siden  $r(1 - r^2)$  har nullpunkt i  $r = 1$  har vi en grensesyklus i  $r = 1$ . Dette kan vi også se i faseagrammet for ligningen, slik som vist under.



Denne grensesyklusen er stabil, siden pilene i nærheten av syklusen peker inn mot syklusen.

En ganske generell familie av ikkelineære ligninger er Lienard-ligningen, gitt ved

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (4)$$

Vi skal nå se på et resultat som lar oss bestemme når systemer beskrevet av denne ligningen har en gresesyklus.

**Teorem 8** (Lienard's teorem). *Anta at funksjonene  $f$  og  $g$  tilfredsstiller følgende kriterier.*

- (i)  $f$  og  $g$  er kontinuerlig deriverbare.
- (ii)  $g$  er en odde funksjon.
- (iii)  $g(x) > 0$  for  $x > 0$ .
- (iv)  $f$  er en jevn funksjon.
- (v) Funksjonen  $F(x) = \int_0^x f(u) du$  har nøyaktig ett nullpunkt  $x = a$  for  $x > 0$ . Videre er  $F(x) < 0$  på  $0 < x < a$  og  $F(x) > 0$ ,  $F'(x) \geq 0$  på  $x > a$ , med  $F(x) \rightarrow \infty$  når  $x \rightarrow \infty$ .

*Da har Lienards ligning en unik stabil grensesyklus rundt origo.*

**Eksempel 9.** Vi sjekker betingelsene for Van der Pol-ligningen

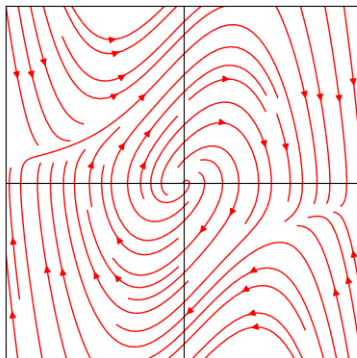
$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

med  $\mu > 0$ . Funksjonen  $f(x) = -\mu(1 - x^2)$  er jevn og kontinuerlig deriverbar, mens funksjonen  $g(x) = x$  er odde, større enn null for positive  $x$ , og kontinuerlig deriverbar. Vi har altså oppfylt

kravene (i)-(iv) fra Teorem 8. Videre har funksjonen

$$F(x) = \int_0^x -\mu(1-u^2) du = \mu \frac{1}{3} x(x^2 - 3)$$

nøyaktig ett positivt nullpunkt i  $a = \sqrt{3}$  for positive  $x$ , og vi har også at  $F(x) > 0$ ,  $F'(x) \geq 0$  for  $x > \sqrt{3}$ . Vi konkluderer med at ligningen har en stabil grensesyklus om origo. Dette kan vi også se ved å plotte fasediagrammet for systemet, slik som vist under.



## Numerisk analyse

Vi kan fint løse ikkelineære systemer med de samme numeriske metodene som vi har sett for lineære systemer.

**Eksempel 10.** Van der Pol-ligningen

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

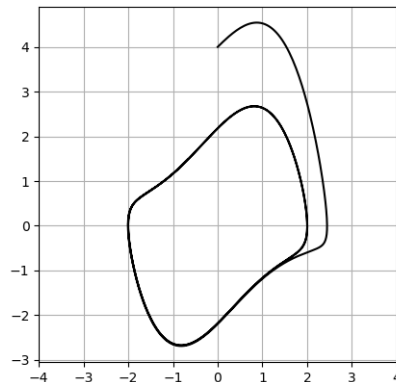
kan skrives om til systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases}$$

Implisitt Euler med steglengde  $h$  for dette systemet blir

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hy_i, \\ y_{i+1} &= \mu(1 - x_{i+1}^2)y_i - x_{i+1}. \end{aligned}$$

Under vises et plot av den numeriske løsningen. Dette er altså én realisasjon av de banene man kan se i fasediagrammet for ligningen ovenfor, for gitte initialbetingelser.



## Oppgaver

1. Skisser fasediagrammet til følgende lineære system.

(a)  $\dot{x} = x - 5y, \quad \dot{y} = x - y.$

(b)  $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = x - 2y.$

(c)  $\dot{x} = 4x - 2y, \quad \dot{y} = 3x - y.$

(d)  $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0.$

(d)  $\ddot{x} - 4\dot{x} + 40x = 0.$

Hint: Se på egenverdiene og egenvektorene til matrisen som er assosiert med systemet. Dersom du er usikker kan fasediagrammet plottes ved hjelp av streamplot-funksjonen i python.

```
% Lag et grid
X, Y = np.meshgrid(
    np.linspace(-1.0, 1.0, 30), np.linspace(-1.0, 1.0, 30)
)

% Spesifiser hastighetene
U = Y
V = -5 * X - 2 * Y

% Plot fasediagram
plt.streamplot(
    X, Y, U, V, color="r", linewidth=1, density=1, minlength=0.25
)

% Valgfrie argumenter for et ryddig plot
plt.axis("square")
plt.xticks([], [])
plt.yticks([], [])
plt.axhline(color="black", lw=0.8)
```



```
plt.axvline(color="black", lw=0.8)
plt.show()
```

2. Uttrykk systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)x + y, \\ \dot{y} = (x^2 + y^2 - 1)y - x, \end{cases}$$

ved hjelp av polarkoordinater, og bruk dette til å argumentere for at systemet har en grensesyklus.

3. Se på ligningen

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + \tanh(x) = 0$$

(a) Vis at den har en unik grensesyklus.

(b) Plot fasediagrammet til ligningen.

(c) Løs ligningen numerisk ved hjelp av symplektisk Euler.

4. Se på ligningen

$$\ddot{x} + \mu(x^4 - 1)\dot{x} + x = 0$$

(a) Vis at den har en unik grensesyklus dersom  $\mu > 0$ .

(b) Plot fasediagrammet til ligningen for  $\mu = 1$ .

(c) Løs ligningen numerisk ved hjelp av trapesmetoden.