

## Fouriertransform

I de første ukene så vi på Laplace- og Fouriertransformen, disse så ut som følger:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Disse var ærlig talt ganske mystiske. Denne uken skal vi fokusere på Fouriertransformen siden den er megaviktig for mange elektroformål. Håpet er at vi i løpet av uken skal besvare spørsmål som ”hvor kommer dette integralet fra?” og ”hva forteller Fouriertransformen oss egentlig?” og ”hvorfor skal jeg bry meg om Joseph Fourier?”.



Figur 1: Joseph Fourier. Avdød matematiker.

## Oppgaver

I TMA4106 så vi på Fourierrekken til funksjoner, de kunne skrives på denne formen:

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi t}{L}} \quad (1)$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-j \frac{n\pi t}{L}} dt \quad (2)$$

Dette var noe vi kunne gjøre for mange forskjellige valg av  $f$ . Koeffisienten  $c_n$  endte opp med å bli et tall (gjerne avhengig  $n$ ) som sa noe om "hvor mye" av  $\cos(\frac{n\pi}{L}t)$  og  $\sin(\frac{n\pi}{L}t)$  input-funksjonen vår  $f$  "inneholder". Om denne siste setningen ikke ga mening er det viktig at du fordøyer formel (1), for å prøve å overbevise deg selv om at dette stemmer (husk Eulers formel:  $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$ ).

1 Vi velger halv-perioden  $L = \pi$ , beregn så  $c_n$  til

a)  $f_1(t) = \cos(t)$

b)  $f_2(t) = 0.5 \cos(2t)$

c)  $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Hint: Se i notisene fra TMA4106 og husk regelen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} \pi, & \text{for } m = n \\ 0, & \text{for } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0, \quad \forall m, n$$

—Intermanus—

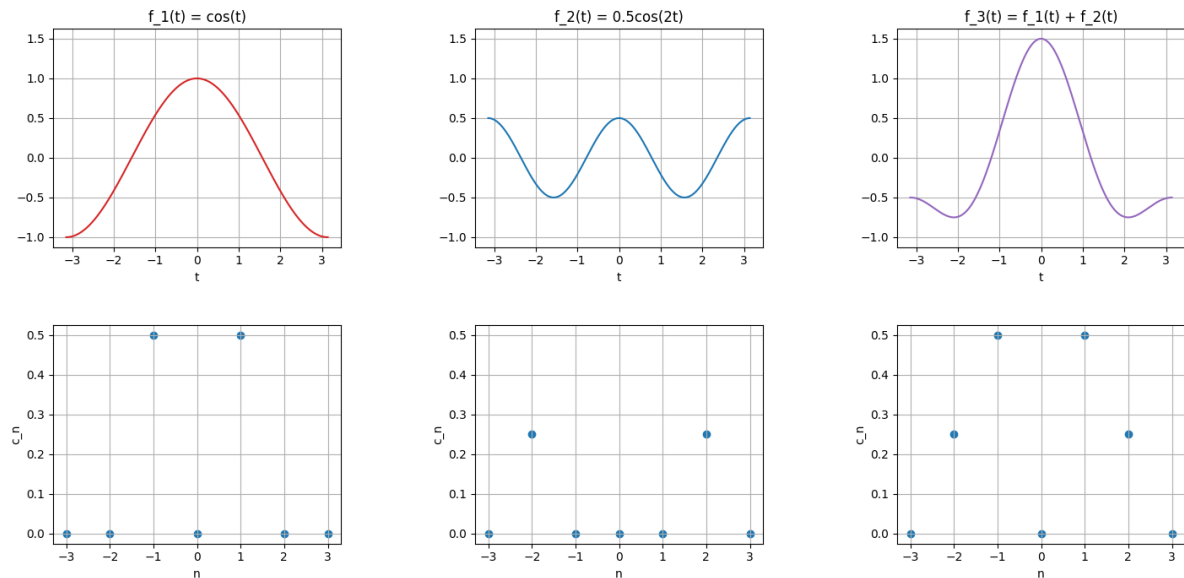
**OPPGAVETID:** 10 minutter

Pass på at man får negative koeffisienter gjennom  $\cos(-t) = \cos(t)$ . Kan vises helt eksplisitt hvorfor det man får gir mening  $\cos(t) = 0.5\cos(t) + 0.5\cos(-t) = c_1\cos(1t) + c_{-1}\cos(-1t)$

**FASIT:**

Fasit

Koeffisientene vi nettopp beregnet kan tegnes på følgende måte:



Figur 2: Fourierkoeffisientene til rene cosinus-signaler. Bemerk hvordan frekvensen til cosinus-signalet gir punktet  $n$  hvor koeffisienten dukker opp, og at amplituden til cosinusenes vises i amplituden til koeffisienten.

Forhåpentligvis illustrerer dette hvordan Fourierkoeffisientene  $c_n$  sier oss noe om hvor mye funksjonen vår "inneholder" deler av cosinuser med forskjellige frekvenser.

Hva har nå dette med Fouriertransformen å gjøre?

2 Nistirr på følgende formler:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-j \frac{n\pi t}{L}} dt$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Forsøk å gi en uformell forklaring av sammenhengen mellom disse to formelene. Tenk spesielt på

- Hvis  $c_n$  sier noe om hvor mye av den diskrete frekvensen  $n$  som  $f(t)$  inneholder, hva sier da  $F(\omega)$ ?
- Når  $c_n$  beregnes tar vi integralet over perioden til et periodisk signal. Hva må skje med  $L$  for å få Fouriertransformen? Hvor blir det av perioden  $L$ ?

—Intermanus—

**OPPGAVETID:** x minutter

Her trenger vi nok ikke gå inn i mer detalj/gi noe fasitsvar, dette er Mortens jobb på onsdag.

**FASIT:**

Fasit

Dersom man klarer å overbevise seg selv om at Fouriertransformasjonen til en funksjon  $f(t)$  sier *hvor mye* av hver mulige frekvens som er inneholdt i den funksjonen kan man begynne å gjøre morsomme greier.

3 Gi en uformell forklaring på hvordan du forventer at  $\mathcal{F}\{f\}(\omega)$  ser ut dersom

a)  $f_1(t) = \cos(t)$

b)  $f_2(t) = 0.5 \cos(2t)$

c)  $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Bruk så en Fourier-kalkulator, f.eks. Wolfram Alpha sin (link), for å bekrefte intuisjonen din. Du kan også regne for hånd, men dette kan bli vanskelig.

—Intermanus—

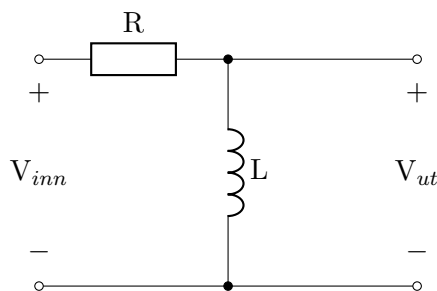
**OPPGAVETID:** x minutter

Kommentarer til oppgaver, viktige momenter å få med, tips, etc.

**FASIT:**

Fasit

I forrige uke betraktet vi kretsen gjengitt under.



Da fant vi ut at det i s-planet var følgende forhold mellom spenningen vi sender inn og den vi får ut:

$$V_{ut}(s) = \frac{s}{\frac{R}{L} + s} \cdot V_{inn}(s)$$

Laplace-transformasjonen har gitt oss et bilde av hvordan kretsen vår oppfører seg når vi varierer på verdien  $s = \sigma + j\omega$ . Men den fysiske meningen bak  $s$  kan være vanskelig å tolke, så vi gjør det lettere ved å betrakte et spesialtilfelle. Dette spesialtilfellet er nemlig Fouriertransformen!

4 Anta at  $R = L = 1$ .

a) Sett inn  $s = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ) i formelen til kretsen, hvor  $j = \sqrt{-1}$  og finn et uttrykk for  $V_{ut}(j\omega)$ .

b) Finn et uttrykk for størrelsen  $|V_{ut}(j\omega)|$ , la  $|V_{inn}(j\omega)|$  fortsatt være ukjent (hint:  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ).

—Intermanus—

**OPPGAVETID:** 3 minutter

Kommentarer til oppgaver, viktige momenter å få med, tips, etc.

**FASIT:**

Fasit

Det vi beveger oss inn på nå er frekvensrespons til kretsen, og en kan se hvordan denne henger naturlig sammen med Laplacetransformen til diff. ligningen til kretsen, impedans-ekvivalentene av alle komponentene og viktigs av alt: Fouriertransformen. Det siste steget er å se hvordan kretsen ”inneholder” forskjellige mengder av forskjellige frekvenser.

5] Anta at vi påtrykker kretsen vår med en periodisk spenning som alltid har amplitude 1 ( $|V_{inn}(j\omega)| = 1$ ). Hva blir amplituden på ut-spenningen,  $|V_{ut}(j\omega)|$ , dersom frekvensen er

a)  $\omega = 0.001$  [rad/ s]

b)  $\omega = 1$  [rad/s]

c)  $\omega = 1000$  [rad/s]

Hvis du skulle gitt denne oppførselen et navn, hva ville du kalt det? Har du kanskje vært borte i noe slik som dette fra før?

—Intermanus—

**OPPGAVETID:** 3 minutter

Kommentarer til oppgaver, viktige momenter å få med, tips, etc.

**FASIT:**

Lave frekvenser får amplitude 0, dette er et høypassfilter