

Øving 13 - Anvendelser av Taylors teorem og Taylorrekker

Obligatoriske oppgaver

- 1 Funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sin x$ skjærer hverandre i et punkt i intervallet $[0.5, 1]$. Dersom man ønsker å finne denne ved fikspunktiterasjon, har man valget mellom å skrive likningen om til

$$x = \sqrt{\sin x}$$

eller

$$x = \arcsin(x^2)$$

Den ene av disse gjør jobben, og den andre gjør det ikke. Avgjør hvilken av dem som funker.

- 2 Vi skal tilnærme den deriverte til funksjonen $\sin x$ i punktet $x = 1$ med formelen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Bruk formelen for $h = 0.1$, $h = 0.01$, $h = 0.001$ osv. Hvor høy presisjon klarer du å oppnå med denne strategien, og hva er den minste h som er vits i å bruke? Kan du forklare hva som skjer?

Anbefalte oppgaver

- 1 Finn en approksimasjon til $f'(x)$ basert på punktene x , $x-h$ og $x+2h$. Approksimasjonen skal ha så høy orden som mulig.

- 2 Vis at sentraldifferansen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

har orden h^2 .

- 3 Hvilken derivert er

$$\frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2}$$

en tilnærming til, og hva er ordenen?

- 4 Vi skal tilnærme den deriverte til funksjonen $\sin x$ i punktet $x = 1$ med formelen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Men nå skal vi bruke Richardson-ekstrapolasjon. Hvor høy presisjon klarer du å oppnå?

- 5 Lag et script som løser likningen $x = \cos x$ til maskinpresisjon med den vanlige fikspunktiterasjonen $x_{n+1} = \cos(x_n)$. Hvor mange iterasjoner trengs med startverdi $x = 1$?

- 6 Lag et script som løser likningen $x = \cos x$ til maksinpresisjon med Newtons metode. Hvor mange iterasjoner trengs med startverdi $x_0 = 1$?
- 7 Bruk Newtons metode til å finne $\sqrt[3]{7}$ til maskinpresisjon.
- 8 Løs likningen $x \ln x = 1$ til maskinpresisjon med den klassiske fikspunktiterasjonen. Merk at likningen kan skrives om til $x = g(x)$ på flere måter.
- 9 Løs likningen $x \ln x = 1$ til maskinpresisjon med Newtons metode.
- 10 Løs likningen $x^3 - x^2 + x + 2$ til maksinpresisjon med Newtons metode og startverdi $x = -1$. Gi et a priori estimat for hvor mange iterasjoner som trengs.