# Funksjoner av to variabler

Nå beveger vi oss over i hovedtemaet i TMA4111, nemlig funksjoner av flere variabler og hvordan vi kan jobbe med disse. Vi er allerede kjent med funksjoner av én variabel, $f(x)$. Med sånne funksjoner kan vi gjøre praktiske operasjoner, som å grafe eller bruke regneregler for å derivere eller integrere.
Nå skal vi se hvordan vi kan gjøre disse samme operasjonene på funksjoner med flere variabler enn bare én. Men først: Hvorfor ønsker vi funksjoner med flere inputs?

## Standardoppgaver

$\boxed{\text{S1}}$ La $x$ betegne lengden på en firkant og la $y$ betegne bredden på samme firkant. Definér funksjonen $f(x, y)$ som beregner arealet til nevnte firkant.

Nå har vi sett et spesifikt eksempel på hvorfor vi trenger funksjoner som kan ta inn flere variabler enn bare én. Selv om dette eksempelet kanskje virker noe banalt.
Fra funksjoner med én variabel er vi kjente med at vi kan fremstille dem grafisk ved å tegne $y = f(x)$ over mange forskjellige verdier av $x$ og dermed få en graf. Når vi nå skal grafe $f(x, y)$ gjør vi dette ved å tegne $z = f(x, y)$ for mange ulike verdier av $x$ og $y$.

$\boxed{\text{S2}}$ Bruk valgfritt digitalt verktøy, f.eks. `https://www.geogebra.org/3d`, eller MatplotLib (link) til å tegne grafen til funksjonen

$$f(x, y) = x + x^2 - y + y^3$$

(Ta vare på grafen til en senere oppgave)

Når vi skal bevege oss langs en graf til en funksjon av én variabel har vi kun ett valg: gå til venstre eller til høyre. Hvis vi skal bevege oss langs grafen til en funksjon av to variabler får vi plutselig mange flere retninger å bevege oss i. Det er derfor enklest å betrakte grafen når vi beveger oss *kun* langs x-aksen eller *kun* langs y-aksen.

$\boxed{\text{S3}}$ Sett inn $x = 0$ i funksjonen fra oppgave S2 og tegn grafen til funksjonen av én variabel du ender opp med (kan være enklest å tegne for hånd). Pass på å gi aksene riktige navn.

Gjør det samme med $y = 0$.

Forsøk å finne de to nye grafene i grafen fra oppgave S2. Ta vare på grafene du ender opp med.

I tillegg til å bevege seg langs aksene går det også an å bestemme spesifikke stier i planet som vi kan analysere funksjonen langs. Dette gjøres ved å definere stien som en funksjon mellom $x$ og $y$.

$\boxed{\text{S4}}$ Tegn grafen til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

med valgfritt verktøy.

Finn ut ved regning hva som skjer med funksjonen langs den rette linjen $y = x$ i planet. Verifisér funnene dine ved å betrakte grafen til $f$.

Som repitisjon så sies det at en funksjon av én variabel, $f(x)$, er *kontinuerlig* hvis den har samme verdi uavhengig om vi sitter i et punkt eller nærmer oss et punkt fra hvilken som helst retning (grenseverdiene er alle like). Som dere skal se senere så er definisjonen helt lik for funksjoner av flere variabler.

$\boxed{\text{T}}$ egn grafen til funksjonen

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^(2) + y^(2)}$$

med valgfritt verktøy.

Ved hjelp av egen forståelse og definisjonen av kontinuitet for funksjoner av én variabel, forklar løst hvorfor $f(x, y)$ *ikke* er kontinuerlig.

Fra analyse av funksjoner med én variabel vet vi det er praktisk å vite noe om hvordan funksjoner stiger eller synker, den deriverte, bl.a. for å finne bunnpunkt. Dette ønsker vi å kunne gjøre for funksjoner av to variabler.
Det kan være vanskelig å si noe om hvordan en funksjon av to variabler oppfører seg, så vi har sett man kan forenkle dette ved å se på kun hvordan den oppfører seg langs en av aksene. På samme måte er det vanskelig å si noe om hvordan en slik funksjon vokser eller synker for en vilkårlig sti i planet, men vi kan forenkle dette ved å kun se på endringene langs én av aksene. Dette kalles de *partiellderiverte* av funksjonen.

$\boxed{\text{S5}}$ Beregn den *partiellderiverte med hensyn på* $x$ av funksjonen $f(x, y)$ som definert i oppgave S2, og evaluer deretter resultatet $\frac{\partial f}{\partial x}$ i punktet $(x, y) = (0, 0)$.

Gjør det samme *med hensyn på y.*

Sammenlign resultatene du får med den "vanlige deriverte"av funksjonene i oppgave S3.

Partiellderivering kan være litt vanskelig, så her gjelder det å repetere.

$\boxed{\text{S6}}$ Hva er $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ for

i) $f(x, y) = 2x + x \cdot y + 2y$
ii) $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$
iii) $f(x, y, z) =$

Vi har dermed sett på hvordan vi gjør de samme kjente operasjonen på funksjoner hvis vi har mer enn én. Reflektér kort over om du kan se for deg et bruksområde for hvor man trenger 100 input-variabler.

## Viderekomne oppgaver

$\boxed{\text{V1}}$

$z = ((2xy)/(x^(2)+y^(2)))$ har ikke samme deriverte når man går mot 0 enten fra x eller y. (samme for alle brøker av homogene polynomer av samme orden)

## 1 Dagens fun-fact