Øving 8 - Integralet

Obligatoriske oppgaver

E1 Funksjonen $f(x) = \exp -x^2$ er riemannintegrerbar, men har ingen antiderivert som kan skrives ved et endelig antall elementære funksjoner. Lag et pythonscript som beregner en tilnærming til

$$\int_0^1 \exp\left(-x^2\right)\, dx = 0.7468241328\ldots$$

ved

a) riemannsummer.

b) trapesmetoden.

Hvor mange riktige desimaler klarer du å få til med hver metode?

E2 Regn ut for alle $r \in \mathbb{R}$

a) $\displaystyle\int_0^1 x^{-r}\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-r}\, dx.$

Anbefalte oppgaver

B1 Finn en funksjon f slik at

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}$$

er en Riemannsum for f på intervallet $[0, 1]$. Bruke dette til å bestemme grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-\frac{k^2}{n^2}}.$$

D2 Finn gjennomsnittsverdien av funksjonen $f(x) = |x+1|(u(x) - u(-x))$, på intervallet $[-2, 2]$, der u er heavisidefunksjonen.

C3 La

$$F(t) = \int_0^t \cos(x^2)\, dx,$$

og finn $\frac{d}{dx}F(\sqrt{x})$.

A4 Regn ut integralene

$$(i)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx \qquad\qquad (ii)\quad \int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\,dx.$$

(Hint: $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.)

B5 Finn området avgrenset av den lukkede kurven $y^2 = x^4(2+x)$ til venstre for y-aksen.

C6 Regn ut

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2}.$$

A7 Oppgave 5.3.8 fra Adams.
La P_n være en uniform partisjon av intervallet $[0,2]$ hvor inkrementene har lengde $2/n$. Regn ut $L(f,P_n)$ og $U(f,P_n)$ for funksjonen $f(x) = 1-x$ på intervallet $[0,2]$. Deretter vis at

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

E8 Finn gjennomsnittsverdien til $f(x) = e^{3x}$ på intervallet $[-2,2]$.

A9 Regn ut

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,dx.$$

C10 Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2+16)$, $y=0$, $x=0$ og $x=2$.

C11 Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y=1$ avgrenser et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av ett av disse.

D12 Regn ut

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx.$$

(H14)

B13 Regn ut

$$\int_0^1 e^{\arcsin x}\,dx.$$