Lineær uavhengighet

I denne øvingen skal vi bli kjent med et av de viktigste begrepene i lineæralgebra.

Vi sier at vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

impliserer at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Standardoppgaver

$\boxed{\text{S1}}$ Forklar hvorfor

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

beskriver de samme likningene.

Vi har så vidt sett at dersom systemet ikke er kvadratisk, kan man ikke avgjøre spørsmålet om entydighet ved å beregne determinant.

$\boxed{\text{S2}}$ Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{S3}}$ Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Dersom man skal skjønne forskjellen på de to systemene over, er lineær uavhengighet det riktige rammeverket å bruke. Dette er mer anvendelig konsept enn determinanter, og vi skal få bruk for det mange ganger dette studieåret.

$\boxed{\text{S4}}$ Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{S5}}$ Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 & 0 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Viderekomne oppgaver

$\boxed{\text{V1}}$ Kan en lineært uavhengig vektormengde inneholde nullvektoren?

$\boxed{\text{V2}}$ La

$$\begin{aligned} p(x) &= 8x^3 - 8x^2 - 4x - 6 \\ q(x) &= -7x^3 - 7x^2 + 5x + 6 \\ r(x) &= 3x^2 - 8x - 4 \end{aligned}$$

Finnes det konstanter a, b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^3 - 7x^2 - 3x?$$

$\boxed{\text{V3}}$ La

$$\begin{aligned} p(x) &= -6x^3 - 4x^2 - 8x + 8 \\ q(x) &= 6x^3 + 5x^2 - 7x - 7 \\ r(x) &= -4x^3 - 8x^2 + 3x \end{aligned}$$

Finnes det konstanter a, b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^2 - 7x - 3?$$