Institutt for matematiske fag

Oppgave 1 (Oppgaven gir 7 poeng)

Gitt funksjonen $f(x) = x - \sin(2x)$ for $x \in [-\pi, \pi]$.

a) Hvilket alternativ sant er om funksjonen f:

- f er jevn (like).
- f **er odde.**
- f er hverken odde eller jevn.

Løsning:
Funksjonen f er odde. Grunnen er at både x og $\sin(2x)$ er odde, og dermed er kombinasjonen også odde.

b) Hva er perioden L til den periodiske utvidingen av f?

- $L = 1$
- $L = 2$
- $L = \pi$
- $L = \frac{\pi}{2}$
- $L = 2\pi$
- $L = \frac{1}{2}$
- $L = 0$

Løsning:
Siden funksjonen f er definert på et intervall med lengde 2π, vil den periodiske utvidinga ha periode $L = 2\pi$.

c) Hva er fourierkoeffisientene a_0, a_1 og b_1 til den periodiske utvidelsen?

- $a_0 = 0$
- $a_0 = \frac{\pi}{2}$
- $a_0 = \frac{\pi^2}{2}$
- $a_0 = \pi$
- $a_0 = -1$
- $a_0 = 1$
- $a_0 = -\frac{\pi}{2}$

- $a_1 = 0$
- $a_1 = \frac{5}{3\pi}$
- $a_1 = \frac{10}{3\pi}$
- $a_1 = \frac{10}{3}$
- $a_1 = -\frac{5}{3\pi}$
- $a_1 = -\frac{10}{3\pi}$
- $a_1 = -\frac{10}{3}$

- $b_1 = -2\pi$
- $b_1 = 1$
- $b_1 = 2\pi$
- $b_1 = \pi$
- $b_1 = -\pi$
- $b_1 = -1$
- $b_1 = 0$
- $b_1 = 2$

Løsning:
Siden funksjonen er odde, vet vi at alle a_n leddene er null. Derfor er $a_0 = a_1 = 0$. For b_1 må vi regne ut

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x - \sin(2x))\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}(\sin(x) - x\cos(x)|_{-\pi}^{\pi}) - 0 = 2. \end{aligned}$$

Oppgave 2 (Oppgaven gir 7 poeng)
La $f(x,t)$ være løsningen på varmeligningen i en stang hvor temperaturen er målt i celsius

$$\begin{cases} f_{xx}(x,t) - f_t(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < t, \\ f(0,t) = f(1,t) = 0, & 0 < t, \\ f(x,0) = 20\sin(\pi x) - 10\sin(2\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) Hva er koeffisientene b_1 og b_2 i løsningen $f(x,t)$?

Løsning:
Leser vi av verdiene fra initialbetingelsen $f(x,0) = 20\sin(\pi x) - 10\sin(2\pi x)$ får vi at $b_1 = 20$ og $b_2 = -10$.

b) I hvilket tidspunkt T er temperaturen i midten av stangen 0.1 celsius? Avrund svaret til to desimalers nøyaktighet.

Løsning:
Midten av stangen har posisjon $x = 0.5$. Dermed må vi finne tidspunktet hvor $f(0.5, T) = 0.1$. Den generelle løsningen er

$$f(x,t) = 20\sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} - 10\sin(2\pi x)e^{-4\pi^2 t}.$$

Setter vi inn $x = 0.5$ får vi

$$f(0.5, T) = 20e^{-\pi^2 T} = 0.1.$$

Løser vi for T får vi

$$\begin{aligned} 20e^{-\pi^2 T} &= 0.1 \\ e^{-\pi^2 T} &= \frac{1}{200} \\ -\pi^2 T &= \ln(\frac{1}{200}) \\ T &= \frac{\ln(200)}{\pi^2} \approx 0.54. \end{aligned}$$

Oppgave 3 (Oppgaven gir 8 poeng)

a) La funksjonen f være definert for alle $t \in \mathbb{R}$ og være gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{for} \quad -1 < t < 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

La $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$ være Fouriertransformasjonen til f.

Hva er $F(\pi) = a + jb$?

Løsning:
Vi bruker definisjonen av fouriertransformasjonen og beregner

$$\begin{aligned}F(\pi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\pi t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} 2e^{-j\pi t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{-j\pi}e^{-j\pi t}\bigg|_{-1}^{0} = \frac{2}{-j\pi}e^{-j\pi 0} - \frac{2}{-j\pi}e^{j\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}j + \frac{2}{\pi}j = \frac{4}{\pi}j \approx 1.27j\end{aligned}$$

b) Fouriertransformasjonen til funksjonen $g(t)$ er

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{1+j\omega}.$$

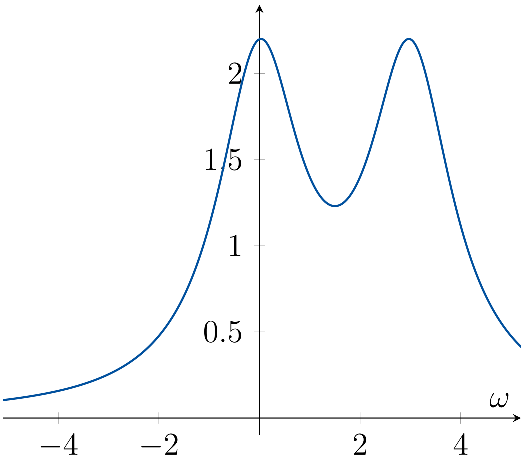
Hva er $g(2)$?

Løsning:
Vi begynner med å finne funksjonen g:

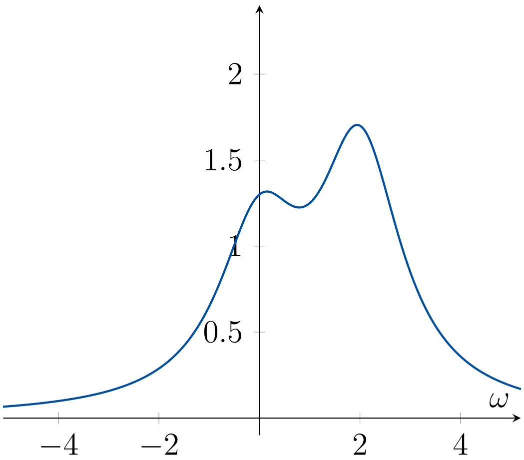
$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-j\omega}}{1+j\omega}\right\}(t) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\}(t-1) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\}(t-1) \\ &= u(t-1)e^{-(t-1)} = u(t-1)e^{-t+1}.\end{aligned}$$

Setter vi inn verdien $t = 2$ får vi $g(2) = e^{-1} \approx 0.37$.

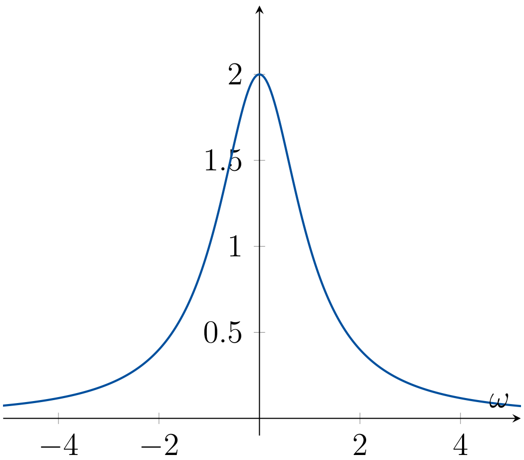
Oppgave 4 (Oppgaven gir 5 poeng)
Spektrogrammet av en funksjon er definert som $|\mathcal{F}\{f(t)\}|(\omega)$ Hvilket av de følgende bildene viser spektrogrammet til funksjonen $f(t) = e^{-|t|} + e^{3jt}e^{-|t|}$?



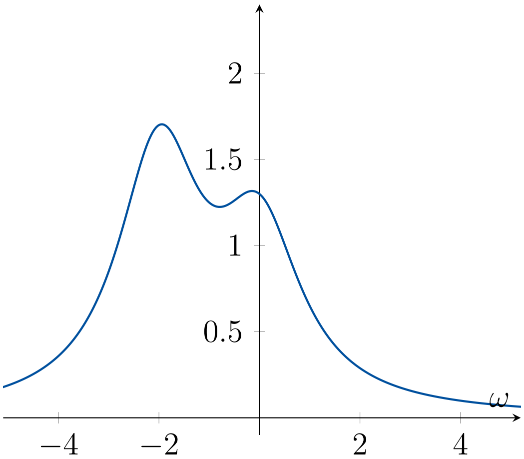
1.

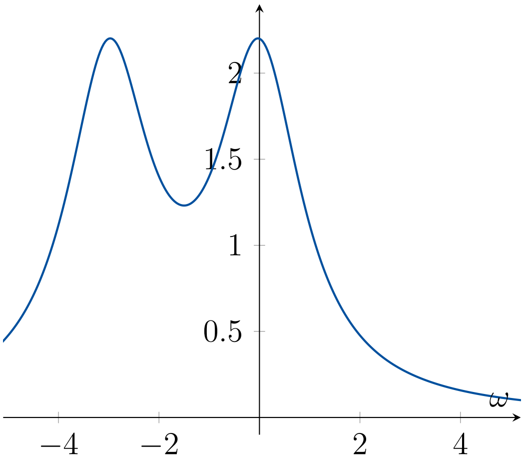


2.



3.

4. 

5. 

Løsning:
Finner vi fouriertransformasjonen av g får vi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) &= \mathcal{F}\{e^{-|t|} + e^{3jt}e^{-|t|}\}(\omega) \\
&= \mathcal{F}\{e^{-|t|}\} + \mathcal{F}\{e^{3jt}e^{-|t|}\}(\omega) \\
&= \frac{2}{1+\omega^2} + \mathcal{F}\{e^{-|t|}\}(\omega - 3) \\
&= \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2}{1+(\omega-3)^2}.
\end{aligned}
$$

Siden fouriertransformasjonen er positiv er $|\mathcal{F}\{f(t)\}|(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{2}{1+(\omega-3)^2}$. For å finne ut hvilken graf som er riktig, kan vi for eksempel regne ut

$$
|\mathcal{F}\{f(t)\}|(0) = 2 + \frac{2}{1+9} = 2.2
$$

og

$$|\mathcal{F}\{f(t)\}|(3) = \frac{2}{1+9} + \frac{2}{1} = 2.2.$$

Dermed er det kun graf nummer 1. som stemmer.

Oppgave 5 (Oppgaven gir 8 poeng)
La

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 1/2 \\ 1 & \text{for } 1/2 < t < 1, \\ 0 & \text{for } 1 \leq t \end{cases}$$

og $g(t) = t^2$.

a) Hva er $f * g(0)$?

Løsning:
Bruker vi definisjonen av konvolusjon får vi at

$$\begin{aligned} f * g(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(0-\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{1/2}^{1} 1 \cdot (-\lambda)^2\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{1/2}^{1} \lambda^2\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{3}\lambda^3 \Big|_{1/2}^{1} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

b) Hva er $f * g(2)$?

Løsning:

Bruker vi definisjonen av konvolusjon får vi at

$$\begin{aligned} f * g(2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(2-\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{1/2}^{1} 1 \cdot (2-\lambda)^2\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{1/2}^{1} 4 - 4\lambda + \lambda^2\, \mathrm{d}\lambda \\ &= 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 \Big|_{1/2}^{1} = \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

Oppgave 6 (Oppgaven gir 9 poeng)
La

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \vec{f}[0] \\ \vec{f}[1] \\ \vec{f}[2] \end{bmatrix}$$

være punktprøvene til signalet og la

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}[0] \\ \vec{F}[1] \\ \vec{F}[2] \end{bmatrix}$$

være den diskret Fouriertransformasjonen (DFT) til $\vec{f}$.

a) Finn 3×3- matrisa A slik at

$$\vec{F} = A\vec{f},$$

der $A\vec{f}$ betyr matrisemultiplikasjon mellom A og søylevektoren $\vec{f}$.

Løsning:
La $N = 3$. Da har vi at $W = e^{-2\pi j/3}$ og matrisa skal ha forma

$$A = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 \\ W^0 & W^2 & W^4 \end{bmatrix}.$$

Rekner vi ut hva som skal stå i matrisa får vi at $W^0 = 1$,

$$W^1 = W = e^{-2\pi j/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j, \qquad W^2 = e^{-2\cdot 2\pi j/3} = e^{-4\pi j/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

og

$$W^4 = e^{-4\cdot 2\pi j/3} = e^{-8\pi j/3} = e^{-2\pi j/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j.$$

Dermed får vi at

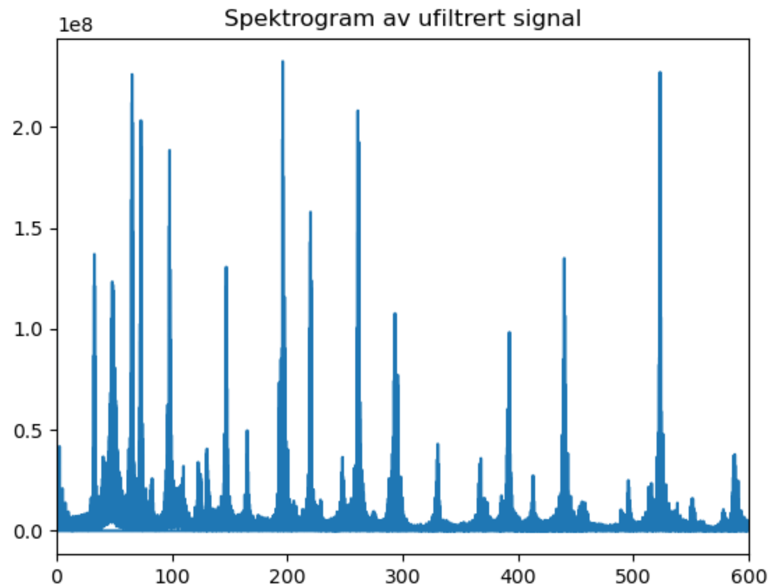
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}.$$

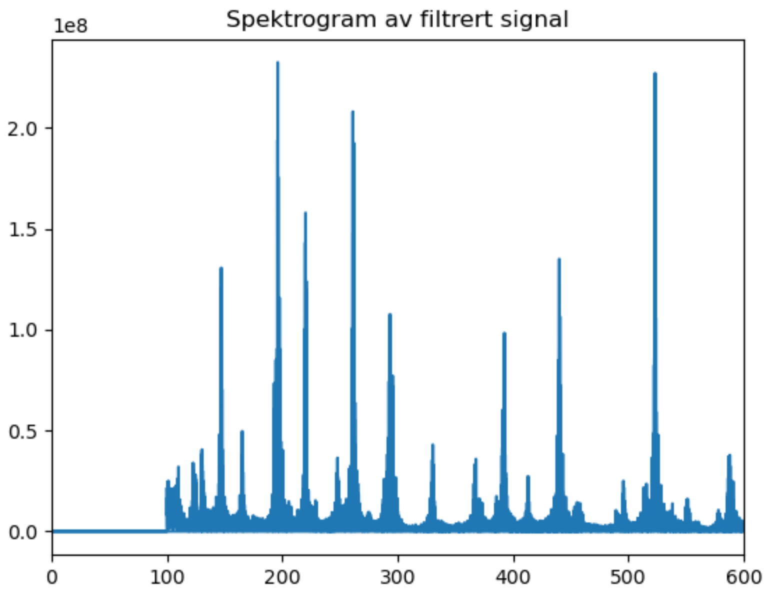
b) Finn vektoren $\vec{F}$ når $\vec{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Løsning:
Skal vi finne DFT av vektoren $\vec{f} = (1, -2, 2)$ kan vi nå bruke matrisa å få at

$$A\vec{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 1 + \sqrt{3}j - 1 + \sqrt{3}j \\ 1 + 1 - \sqrt{3}j - 1 - \sqrt{3}j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 2\sqrt{3}j \\ 1 - 2\sqrt{3}j \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7 (Oppgaven gir 6 poeng)
Bildene under viser spektrogrammet (dvs. absoluttverdien av verdien i frekvensene langs -aksen) før og etter vi har brukt et filter.





a) Utifra figuren, hvilken type filter er brukt?

- Høy-pass filter (high-pass filter)
- Lav-pass filter (low-pass filter)
- Hverken et lav- eller høy-pass filter.

Løsning:
Siden verdien i de høye frekvensene er uendret, og de verdien i de lave er satt til 0, er det et høy-pass filter.

b) Spektrogrammet over tilhører en lydfil. Hvordan vil det du hører sammenlignes før og etter filteret?

- Vi vil bare høre toner (dvs. frekvenser) over 100. Ellers vil lyden høres rimelig lik ut.
- Vi vil bare høre toner (dvs. frekvenser) under 100. Ellers vil lyden høres rimelig lik ut.
- Alle toner (dvs. frekvenser) utenom 100 vil bli lavere. Ellers vil lyden høres rimelig lik ut.
- Tonen (dvs. frekvensen) rundt 100 blir fjernet. Ellers vil lyden høres rimelig lik ut.
- Lyden vil høres identisk ut før og etter filteret.

Løsning:
Utifra figuren blir frekvenser under 100 satt til 0, og verdien i de høyere frekvensene er uendret. Dermed er det alternativet som sier at "Vi vil bare høre toner (dvs. frekvenser) over 100. Ellers vil lyden høres rimelig lik ut.som er det riktige alternativet.

c) Hvilken av følgende kodesnuttene vil utføre filteret beskrevet i oppgaven? Linje 1-5 er som følger i alle svaralternativene:

```
1     import numpy as np
2 from numpy import fft
3
4 sampling_interval = 1/22050
5 sound_file = np.load("sound.npy")
```

1.

```
6  f_dft = fft.fft(sound_file)
7  omega = fft.fftfreq(sound_file.size, sampling_interval)
8
9  f_dft[np.abs(omega) < 100] = 0
10 filtered_sound = fft.ifft(f_dft)
```

2.

```
6  f_dft = fft.fft(sound_file)
7  omega = fft.fftfreq(sound_file.size, sampling_interval)
8
9  f_dft[np.abs(omega) > 100] = 0
10 filtered_sound = fft.ifft(f_dft)
```

3.

```
6  f_dft = fft.ifft(sound_file)
7  omega = fft.fftfreq(sound_file.size, sampling_interval)
8
9  f_dft[np.abs(omega) < 100] = 0
10 filtered_sound = fft.fft(f_dft)
```

4.

```
6  f_dft = fft.ifft(sound_file)
7  omega = fft.fftfreq(sound_file.size, sampling_interval)
8
9  f_dft[np.abs(omega) > 100] = 0
10 filtered_sound = fft.fft(f_dft)
```

Løsning:
Filteret skal gjøre følgende:

1. Ta dft av signalet. Her kan `fft.fft` brukes.
2. Sette verdien i alle frekvenser mindre enn 100 i absoluttverdi lik 0.
3. Gå tilbake med invers dft. Her kan `fft.ifft` brukes.

Det er kun alternativ 1 som gjør nettopp dette.