Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekomunikasjon

TFE4101 Krets- og Digitalteknikk Høst 2015

Løsningsforslag — Øving 5

1 Boolske funksjoner, algebraisk forenkling av uttrykk, og tegning av kretsskjema

a) Alternativ a2 gjengir ikke en av DeMorgans teoremer. Det som vises er en forenkling ved hjelp av aksiomene om distributivitet og identitet.

b) Både (1) og (2) er korrekte. I Boolsk algebra er + distributiv over · og motsatt.

c) Utfører De Morgan på hele F og deretter på hvert sub-ledd og får c1.

$$\begin{aligned}\bar{F}(A,B,C,D) &= \overline{(A\bar{B}C + AD + AB\bar{C}\bar{D})}\\ &= \overline{(A\bar{B}C)} \cdot \overline{(AD)} \cdot \overline{(AB\bar{C}\bar{D})}\\ &= (\bar{A} + B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + D)\end{aligned}$$

Trekker deretter ut $\bar{A}$ (lovlig siden + er distributiv over ·) og bytter rekkefølgen på de to første summeleddene for å få c2.

$$\begin{aligned}\bar{F}(A,B,C,D) &= \bar{A} + ((B + \bar{C}) \cdot \bar{D} \cdot (\bar{B} + C + D))\\ &= \bar{A} + \bar{D} \cdot (B + \bar{C}) \cdot (\bar{B} + C + D)\end{aligned}$$

I c3 er det bare foretatt invertering av hvert enkelt produktledd. Dette er opplagt feil.

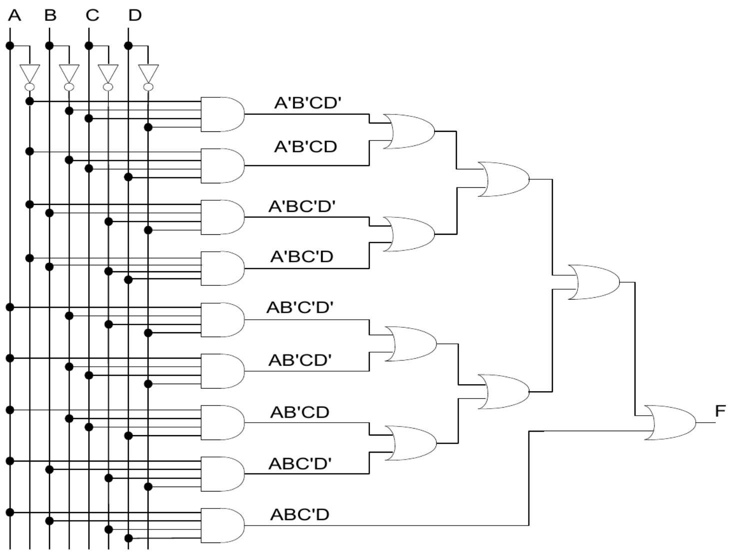
d) En minterm er et produkt, der alle tilgjengelige literaler inngår. (I dette tilfellet A, B, C og D) Når vi skal uttrykke funksjonen som sum av mintermer, finner vi først fra sannhetstabellen hvilke kombinasjoner av literaler som gir funksjonsverdi 1. Hver av disse kombinasjonene assosieres så med en minterm. For eksempel minterm 2: $(\bar{A}\bar{B}C\bar{D})$. Man summerer så disse mintermene:

$$\begin{aligned}F =&\bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD +\\ &AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D =\\ &\Sigma(2,3,4,5,8,10,11,12,13)\end{aligned}$$

En maxterm er en sum, hvor alle tilgjengelige literaler inngår. Produkt av maxtermer finnes ved å velge kombinasjonene av literaler som gir funksjonsverdi 0. Hver av disse kombinasjonene av literaler assosierer man så med en maxterm. Man bruker her omvendt logikk. Derfor blir for eksempel maxterm 0: $(A + B + C + D)$. Deretter tar man produktet av disse maxtermene:

$$\begin{aligned} F =&(A+B+C+D)(A+B+C+\bar{D})(A+\bar{B}+\bar{C}+D)(A+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}) \\ &(\bar{A}+B+C+\bar{D})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}) = \\ &\Pi(0,1,6,7,9,14,15) \end{aligned}$$

e) Se Figur 1.



Figur 1: AND-OR implementasjon

f)

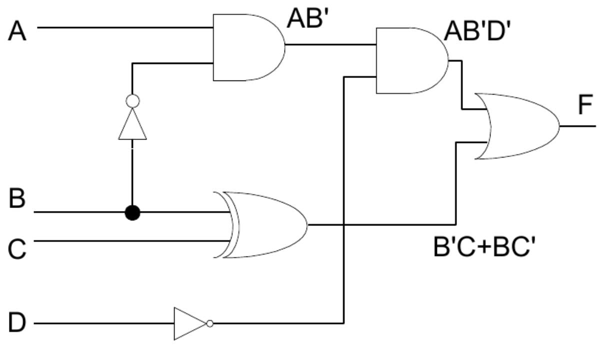
$$\begin{aligned} F &= \bar{A}\bar{B}(C\bar{D}+CD) + \bar{A}B(\bar{C}\bar{D}+\bar{C}D) + A\bar{B}(\bar{C}\bar{D}+CD+C\bar{D}) + AB(\bar{C}D+\bar{C}\bar{D}) \\ &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}(\bar{C}\bar{D}+C) + AB\bar{C} \\ &= \bar{A}(\bar{B}C+B\bar{C}) + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A(\bar{B}C+B\bar{C}) \\ &= B\bar{C}+\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \\ &= B\bar{C}+\bar{B}(C+A\bar{C}\bar{D})^1 \\ &= B\bar{C}+\bar{B}(C+A\bar{D})(C+\bar{C}) \\ &= B\bar{C}+\bar{B}C+A\bar{B}\bar{D} \end{aligned}$$

g) Før vi tegner denne kretsen merker vi oss at svaret fra **f)** kan skrives på følgende måte:

$$B\bar{C}+\bar{B}C+A\bar{B}\bar{D} = (B \oplus C) + A\bar{B}\bar{D}$$

Implementasjonen blir som vist i Figur 2.

[1] Her benyttes det at uttrykk i boolsk algebra er distributive med hensyn på + operatoren. $X+YZ = (X+Y)(X+Z)$. I vårt eksempel er $X = C, Y = A\bar{D}$ og $Z = \bar{C}$.



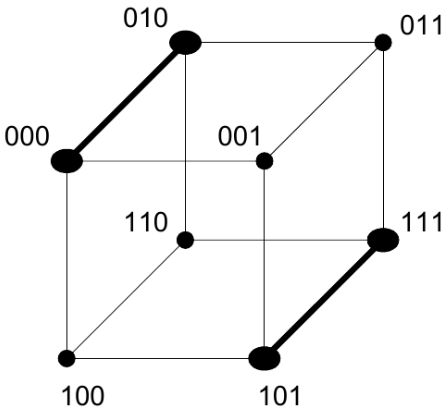
Figur 2: Implementasjon av forenklet funksjon

2 Kube og Karnaughdiagram

a) Vi summerer (i betydningen eller-operasjon) mintermene og får:

$$T = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

Vi kaller våre mintermer (hjørnene: 000, 010, 101, og 111) for 0-kuber, og sidekantene 0-0 og 1-1 for 1-kuber ('-' betyr «don't care», eller vilkårlig 1 eller 0). Vi sier også at 0-0 dekker 000 og 010, og at 1-1 dekker 101 og 111. Generelt: en kube som har '-' i n posisjoner er en n-kube. Dette gir oss en tredimensjonal kube som vist i Figur 3.



Figur 3: Tredimensjonal kube

Mintermene er merket med store sirkler på kuben over. Vi ser at mintermene danner nabohjørner på kuben. Det vil si at det bare er ett bit som forandres mellom dem. Dermed kan de grupperes, og det boolske vil bli forenklet. Gruppering utføres ved å beholde de bit som er felles for nabo-mintermer. For mintermene på øverste venstre kant av kuben ser vi at MSB og LSB er felles, og at begge er 0. Det vil si at vi kan erstatte disse mintermene med primleddet $\bar{A}\bar{C}$, som er merket med en tykk strek mellom mintermene. Dette kan også skrives som 0-0. Tilsvarende for mintermene på nederste høyre kant, hvor vi finner at disse kan erstattes med primleddet AC , eller 1-1.

Ved å kombinere disse to leddene, får vi det forenklede uttrykket:

$$T = \bar{A}\bar{C} + AC = \overline{A \oplus C}$$

b) Karnaughdiagram for funksjonen T:

A \ BC	00	01	11	10
0	$_{0}$1	$_{1}$0	$_{3}$0	$_{2}$1
1	$_{4}$0	$_{5}$1	$_{7}$1	$_{6}$0

$\bar{A}\bar{C}$

AC

Ved å gruppere mintermene 000 og 010, finner vi at fellesfaktoren er $\bar{A}\bar{C}$ (eller 0-0). Ved å gruppere mintermene 111 og 101 finner vi at fellesfaktoren er AC (eller 1-1). Siden Karnaughdiagrammet gir resultatet på SOP-form skriver vi:

$$T = \bar{A}\bar{C} + AC$$

c) Begge metoder baseres på at det bare er ett bit som forandres mellom nabo-celler. Ved hjelp av fig 4.3 i Gajski, ser vi at Karnaughdiagrammet bare er en todimensjonal representasjon av kuben fra oppgave a).

d) $\mathbf{T_1}$: Her brukes samme fremgangsmåte som i oppgave b), men her kan man se etter grupper på 2, 4, 8, og 16 mintermer.

Karnaughdiagram for funksjonen T_1:

AB \ CD	00	01	11	10
00	$_{0}$	$_{1}$	$_{3}$	$_{2}$
01	$_{4}$	$_{5}$	$_{7}$1	$_{6}$1
11	$_{12}$	$_{13}$1	$_{15}$1	$_{14}$1
10	$_{8}$	$_{9}$1	$_{11}$1	$_{10}$

BC

AD

$T_1 = AD + BC$

$\mathbf{T_2}$: Når det gjelder funksjonen T_2, kan vi gå frem på to forskjellige måter:

1. Ved å utvikle etter 1-ere får vi følgende Karnaughdiagram (merk at vi kunne valgt andre primimplikanter enn de vi har tatt med her):

AB \ CD	00	01	11	10
00	$_{0}$0	$_{1}$1	$_{3}$1	$_{2}$0
01	$_{4}$1	$_{5}$1	$_{7}$1	$_{6}$1
11	$_{12}$0	$_{13}$0	$_{15}$1	$_{14}$1
10	$_{8}$1	$_{9}$1	$_{11}$1	$_{10}$1

$\bar{A}D$

$\bar{A}B$

BC

$A\bar{B}$

$T_2 = \bar{A}D + \bar{A}B + BC + A\bar{B}$

2. Ved å utvikle etter 0-ere i Karnaughdiagrammet, får vi et forenklet uttrykk for $\overline{T_2}$. Dette omformes til uttrykk for T_2 ved å invertere.

AB \ CD	00	01	11	10
00	$_{0}0$	$_{1}1$	$_{3}1$	$_{2}0$
01	$_{4}1$	$_{5}1$	$_{7}1$	$_{6}1$
11	$_{12}0$	$_{13}0$	$_{15}1$	$_{14}1$
10	$_{8}1$	$_{9}1$	$_{11}1$	$_{10}1$

$\boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{D}}$

$\boxed{AB\bar{C}}$

$$\overline{T_2} = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + AB\bar{C}$$
$$\Downarrow$$
$$T_2 = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{D} + AB\bar{C}} = (A + B + D)(\bar{A} + \bar{B} + C)$$

I siste overgang brukes DeMorgans teorem. Merk at vi får en løsning med færre literaler og dermed færre porter. Merk at vi også kunne ha funnet T_2 direkte ved å utvikle 0-erne med hensyn på makstermer istedenfor mintermer.

T_3: $T_3(A, B, C, D) = \Sigma(2, 4, 8, 11) + \Sigma_{\phi}(0, 1, 10)$

hvor Σ_{ϕ} er «don't care»-settet. Denne funksjonen kan altså oppfattes som sammensatt av to deler. Den første delen inneholder en liste over hvilke mintermer som funksjonen ***skal*** inneholde, mens den andre delen er en liste over de mintermer som funksjonen ***kan*** inneholde.

SOP-løsningen:

AB \ CD	00	01	11	10
00	$_{0}$X	$_{1}$X	$_{3}0$	$_{2}1$
01	$_{4}1$	$_{5}0$	$_{7}0$	$_{6}0$
11	$_{12}0$	$_{13}0$	$_{15}0$	$_{14}0$
10	$_{8}1$	$_{9}0$	$_{11}1$	$_{10}$X

$\boxed{\bar{B}\bar{D}}$

$\boxed{\bar{A}\bar{C}\bar{D}}$

$\boxed{A\bar{B}C}$

$T_3 = \bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C$

POS-løsningen (ikke etterspurt i øvingen):

AB \ CD	00	01	11	10
00	$_{0}$X	$_{1}$X	$_{3}0$	$_{2}1$
01	$_{4}1$	$_{5}0$	$_{7}0$	$_{6}0$
11	$_{12}0$	$_{13}0$	$_{15}0$	$_{14}0$
10	$_{8}1$	$_{9}0$	$_{11}1$	$_{10}$X

$\boxed{\bar{A}D}$

$\boxed{\bar{C}D}$

$\boxed{BC}$

$\boxed{AB}$

Her utvikler vi etter 0-ere for å få løsningen på POS-form.

Gruppe	Minterm	X	Y	Z	W	Dekket
G0	(0)	0	0	0	0	Ja
G1	(1)	0	0	0	1	Ja
	(2)	0	0	1	0	Ja
G2	(9)	1	0	0	1	Ja
	(10)	1	0	1	0	Ja
G3	(7)	0	1	1	1	Ja
	(11)	1	0	1	1	Ja
	(14)	1	1	1	0	Ja
G4	(15)	1	1	1	1	Ja
G0	(0,1)	0	0	0	-	
	(0,2)	0	0	-	0	
G1	(1,9)	-	0	0	1	
	(2,10)	-	0	1	0	
G2	(9,11)	1	0	-	1	
	(10,11)	1	0	1	-	Ja
	(10,14)	1	-	1	0	Ja
G3	(7,15)	-	1	1	1	
	(11,15)	1	-	1	1	Ja
	(14,15)	1	1	1	-	Ja
G2	(10,11,14,15)	1	-	1	-	Nei

Tabell 1: Søk etter primledd for funksjonen F

$\overline{T_3} = AB + \bar{C}D + BC + \bar{A}D$
Ved invertering av funksjonen får vi:
$T_3 = (\overline{AB})(\overline{\bar{C}D})(\overline{BC})(\overline{\bar{A}D}) = (\bar{A} + \bar{B})(C + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C})(A + \bar{D})$
Her kunne vi også funnet POS-formen direkte ved å utvikle 0-erne med hensyn på makstermer.

3 Tabellmetoden

a) I Tabell 1 sammenlikner vi mintermer i nabogrupper og finner alle primleddene til funksjonen F (produktleddene som ikke har Ja i kolonnen for Dekket). Disse kalles P_1 ...P_7 i Tabell 1, og vi vil her finne en irredundant dekning for funksjonen F basert på et subsett av primleddene slik det er vist i Tabell 2.

Essensielle primledd er primledd som må være med for å dekke de distingverte mintermene $\mathbf{m_7}$ og $\mathbf{m_{14}}$, dvs. de mintermer som ikke er dekket av andre primledd. De essensielle primleddene dekker også mintermene $\mathbf{m_{10}}$, $\mathbf{m_{11}}$ og $\mathbf{m_{15}}$. For å få komplett dekning må vi også ta med ikke-essensielle primledd. $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, og $\mathbf{P_3}$ har alle to udekkede mintermer, mens $\mathbf{P_4}$ og $\mathbf{P_5}$ bare dekker en udekket minterm. Vi starter derfor med en av de første. Hvis vi velger $\mathbf{P_3}$ får vi dekket $\mathbf{m_1}$ og $\mathbf{m_9}$. $\mathbf{P_1}$ har nå bare en udekket minterm og vi velger derfor $\mathbf{P_2}$ som dekker de resterende $\mathbf{m_0}$ og $\mathbf{m_2}$.

b) Primleddene er gitt av P_1...P_7 i Tabell 2:

$$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}, \bar{X}\bar{Y}\bar{W}, \bar{Y}\bar{Z}W, \bar{Y}Z\bar{W}, X\bar{Y}W, YZW, XZ$$

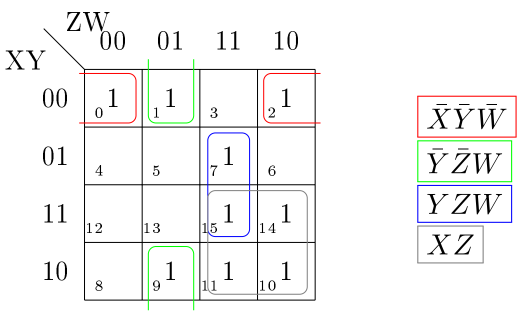
			0	1	2	7	9	10	11	14	15	E.P.
P_1	0,1	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	x	x								
P_2	0,2	$\bar{X}\bar{Y}\bar{W}$	x		x							
P_3	1,9	$\bar{Y}\bar{Z}W$		x			x					
P_4	2,10	$\bar{Y}Z\bar{W}$			x			x				
P_5	9,11	$X\bar{Y}W$					x		x			
P_6	7,15	YZW				$\boxed{x}$					x	✓
P_7	10,11,14,15	XZ						x	x	$\boxed{x}$	x	✓
	Distingverte mintermer					7				14		
	Dekket av essensielle primledd					7		10	11	14	15	
	Dekket av P3			1			9					
	Dekket av P2		0		2							

Tabell 2: Valg av irredundant dekning for funksjonen F

c) De essensielle primleddene er: YZW og XZ

d) $F = YZW + XZ + \bar{Y}\bar{Z}W + \bar{X}\bar{Y}\bar{W}$

NB: andre irredundante løsninger er mulig her, hvis man istedenfor P_3, velger P_1 først. Denne løsningen ville imidlertid krevd fem primledd. Under er Karnaugh-diagrammet tegnet opp, og dette viser at vi har funnet en irredundant dekning av primledd:



4 Teknologi-mapping

a) Siden funksjonen T er på SOP-form, kan vi lage kretsen basert på NOR-porter hvis vi tar utgangspunkt i den inverterte til $\bar{T}$. Siste nivå i funksjonen T kan da realiseres som en 3-inngangs NOR-port (som kan splittes opp i to 2-inngangs porter):

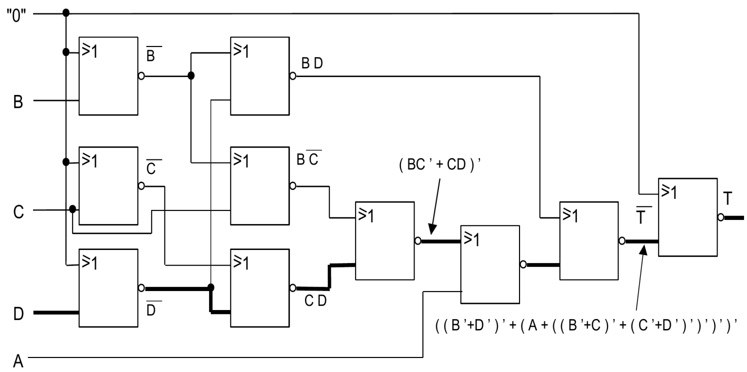
$$\bar{T} = \overline{BD + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}CD}$$

Deretter fortsetter vi å jobbe med underliggende nivåer som er produkter av inngangsvariabler. Ved å bruke DeMorgans teorem kan disse realiseres som NOR-porter. Legg merke til at to siste leddene er faktorisert i uttrykket nedenfor for lettere å kunne realisere funksjonen med 2-inngangs porter:

$$\bar{T} = \overline{\overline{BD}} + \overline{\overline{\bar{A}(B\bar{C} + CD)}} = \overline{\overline{\bar{B} + \bar{D}} + (\overline{A + (\overline{B\bar{C} + CD}}))}$$

Dette utføres rekursivt med alle nivåer inntil vi får en krets realisert fullstendig med 2-inngangs NOR-porter (legg merke til at dobbeltinvertering ikke er nødvendig, men er tatt med her for å vise overgangen mellom f.eks. BD og $\overline{\bar{B} + \bar{D}}$, som er identiske uttrykk):

$$\bar{T} = \overline{\overline{\bar{B} + \bar{D}} + (\overline{A + (\overline{\overline{\overline{B\bar{C}}}} + \overline{\overline{CD}}})))} = \overline{\overline{\bar{B} + \bar{D}} + \overline{A + \overline{\overline{\overline{\bar{B} + C} + \overline{\bar{C} + \bar{D}}}}}}$$



Figur 4: Realisering av funksjonen T med NOR porter

Realiseringen av T er vist i Figur 4. Legg merke til hvordan NOR-porter er brukt som invertere. Et alternativ er å forbinde begge inngangene til samme signal for invertering, da ville vi ha spart det eksplisitte «0»-signalet. **Kommentar**: I denne figuren ble europeiske IEC-symboler brukt.

b) Vi har benyttet ti NOR-porter. Hver av disse krever fire transistorer. Løsningens kostnad er følgelig 40 transistorer.

c) Kritisk sti gjennom kretsen er markert med tykk strek i Figur 4. Denne går gjennom seks NOR-kretser. Hver av disse har en portforsinkelse på 1,4 ns. Total forsinkelsen er følgelig 8,4 ns.