1A: Tallfølger

Tallfølger

Tilfeldig tallfølge

$$\{3,\ -1,\ 7,\ 7,\ 2\}$$

Endelig tallfølge av partall

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$$

Uendelig følge av oddetall

$$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\}$$

Formler for partall og oddetall

$$a_n = 2n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 2n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Eksempler:

$$\{a_n\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots\}$$

$$\{b_n\} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\}$$

1A: To måter å skrive en tallfølge på

Tallfølger kan beskrives på to måter:

- Ved å **skrive opp leddene** i rekkefølge, f.eks.

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

- Ved å **angi en formel** for det n-te leddet, f.eks.

$$a_n = 2n$$

Begge metodene beskriver samme tallfølge, men en formel gir oss en **generell oppskrift** slik at vi kan finne hvilket som helst ledd uten å måtte skrive opp alle de foregående.

1A: To typer formler for tallfølger

Eksplisitt formel

En eksplisitt formel gir en direkte oppskrift på det n-te leddet:

$$a_n = 2n \quad \Rightarrow \quad \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Her kan vi finne a_{100} rett fra formelen: $a_{100} = 200$.

Rekursiv formel

En rekursiv formel beskriver hvert ledd ut fra det forrige:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + 2$$

Her må vi starte med første ledd, og bygge videre trinn for trinn.

1A: Fibonacci-følgen

Definisjon

Fibonacci-følgen er definert rekursivt ved

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{for } n \geq 1$$

Eksempel

De første leddene blir

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Her ser vi at hvert ledd er summen av de to foregående.

Eksempel i Python

```python
# Neste tall i følgen er summen av de to foregående tallene
# Husk at indeksene i en liste starter på 0

fib_liste = [1, 1]

for n in range(0, 5):
    a_n = fib_liste[n+1] + fib_liste[n]
    fib_liste.append(a_n)

print(fib_liste)
# Output: [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13]
```

Definisjon

En **rekke** er summen av leddene i en tallfølge. Hvis vi har en tallfølge

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

så danner vi en rekke ved å summere leddene:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Eksempel

En endelig rekke av partall:

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

Her er summen 20 den verdien rekken får.

Definisjon

Summasjonsnotasjon bruker symbolet $\sum$ for å skrive summen av mange ledd på en kompakt form:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Eksempel

$$\sum_{i=1}^{4} 3i = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$$

Eksempel med parenteser

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}(2i+3) &= (2\cdot 1+3)+(2\cdot 2+3)+(2\cdot 3+3)+(2\cdot 4+3) \\
&= 5+7+9+11 \\
&= 32
\end{aligned}
$$

1A: Viktig med parenteser (II)

Eksempel uten parenteser

$$\sum_{i=1}^{4} 2i + 3 = (2 + 4 + 6 + 8) + 3$$
$$= 20 + 3$$
$$= 23$$

Merk: Parentesene avgjør hva som er med i selve summeringen.

1A: Summen av de hundre første heltall

Viktig eksempel

Vi ønsker å regne ut summen

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$$

Formelen for summen av de hundre første naturlige tallene er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} i &= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 \\ &= \frac{100 \cdot 101}{2} \\ &= 5050\end{aligned}$$

```python
# Eksempel med for-løkke
minListe = []

for n in range(1,6):
  minListe.append(n)

print(minListe) # Output:  [1, 2, 3, 4, 5]

# Samme eksempel med List Comprehension (kommer ikke på prøver)
minListe = [n for n in range(1, 6)]

print(minListe) # Output:  [1, 2, 3, 4, 5]
```

1A: Tallfølger og rekker i Python

```
# De 10 første partallene og summen

# Eksempel med for-løkke
minListe = []

for n in range(1,10+1):
  minListe.append(2*n)

print(minListe)       # Output:  [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]
print(sum(minListe)) # Output: 110

# Samme eksempel med List Comprehension (kommer ikke på prøver)
minListe = [2*n for n in range(1, 10+1)]

print(minListe)       # Output:  [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]
print(sum(minListe)) # Output: 110
```

1B: Implikasjonspilen

Definisjon

Implikasjonspilen

$$\Rightarrow$$

brukes i logikk og matematikk for å uttrykke at en påstand medfører en annen.

Hvis P er en påstand og Q er en påstand, så betyr

$$P \Rightarrow Q$$

at *hvis P er sann, så er også Q sann*.

1B: Eksempel

Vi har to påstander.

P: «Du er i Harstad»

Q: «Du er i Troms fylke»

Da kan vi skrive

$$P \Rightarrow Q$$

Dette er en sann implikasjon, fordi det å være i Harstad innebærer å være i Troms fylke.

Det motsatte er ikke nødvendigvis sant

$P \Rightarrow Q$ betyr ikke nødvendigvis at $Q \Rightarrow P$.

1B: Direkte bevis

La P: «n er et partall» og Q: «n^2 er et partall».

Vi skal bevise implikasjonen

$$P \Rightarrow Q$$

Anta at P er sann, dvs. at n er et partall. Da kan vi skrive

$$n = 2k \quad \text{for et heltall } k.$$

Da blir

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\,(2k^2).$$

Siden n^2 kan skrives som $2\cdot$ (et heltall), følger det at Q er sann. ■

Definisjon

Hvis implikasjonen

$$P \Rightarrow Q$$

er sann, da er også

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

sann.

Dette kaller vi det **kontraposive** av en påstand.

1B: Eksempel (I)

La P: «Du er i Harstad» og Q: «Du er i Troms fylke».

Vi har implikasjonen

$$P \Rightarrow Q$$

Det kontrapositive blir

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

Altså: «Hvis du *ikke* er i Troms fylke, så er du *ikke* i Harstad.» Dette er en sann påstand.

1B: Eksempel (II)

Vi har to påstander, P og Q.

P: n^2 er partall

Q: n er partall.

Vi skal vise $P \Rightarrow Q$ ved å bevise kontrapositive: $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Anta $\neg Q$, dvs. n er oddetall. Da er $n = 2k + 1$ for et heltall k.

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

som er oddetall, altså $\neg P$.

Dermed har vi vist $\neg Q \Rightarrow \neg P$, og dermed $P \Rightarrow Q$. $\blacksquare$

1B: Induksjonsbevis

Oppskrift på induksjon

For å bevise en påstand $P(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$:

1. **Induksjonsbasis:** Vis at påstanden stemmer for $n = 1$.
2. **Induksjonshypotese:** Anta at påstanden stemmer for $n = k$.
3. **Induksjonstrinn:** Bruk antakelsen til å vise at påstanden også stemmer for $n = k + 1$.
4. **Konklusjon:** Dermed gjelder påstanden for alle $n \in \mathbb{N}$.

1B: Induksjonsbevis (I)

Påstand:
For alle $n \in \mathbb{N}$ gjelder

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induksjonsbasis:
Vi viser at påstanden er sann for $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Dermed er basistilfellet oppfylt.

Anta at påstanden gjelder for $n = k$, altså

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Vi viser at den da gjelder for $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Dette er akkurat formelen med $n = k + 1$. Dermed gjelder påstanden for alle $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Følgen $\{a_n\}$ er gitt ved

$$a_1 = -3, \qquad a_{n+1} = a_n + 2n - 3.$$

Vis ved induksjon at

$$a_n = n(n-4), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Påstand:
For alle $n \in \mathbb{N}$ gjelder $a_n = n(n-4)$.

Induksjonsbasis:
Starter med å sjekke om formelen stemmer for basistilfellet $n = 1$:

$$a_1 = -3, \qquad 1(1-4) = -3.$$

1B: Induksjonsbevis for en rekursiv sammenheng (II)

Antar at $a_n = n(n-4)$ gir oss det n'te leddet i følgen

$$a_1 = -3 \quad \wedge \quad a_{n+1} = a_n + 2n - 3$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2k - 3 \\ &= k(k-4) + 2k - 3 \\ &= k^2 - 2k - 3 \\ &= (k+1)(k-3) \\ &= (k+1)\big((k+1) - 4\big). \end{aligned}$$

Dette er formelen for det n'te leddet i følgen for $n = k + 1$.

$\blacksquare$

1C: Aritmetisk rekke

Definisjon

En **aritmetisk rekke** er en rekke der differansen mellom påfølgende ledd er konstant d:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{for } n \geq 1.$$

Tallet d kalles *differansen*.

Oppgave

Hvordan kan vi undersøke om en følge er aritmetisk?

Regel

Det n-te leddet i en aritmetisk rekke med differanse d er gitt ved

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

(Bevist med induksjon i oppgave 1.66.)

1C: Eksempel (I)

I en aritmetisk rekke er

$$a_{10} = 37 \quad \wedge \quad a_{16} = 61$$

Finn en formel for det n-te leddet i rekka.

Siden rekka er aritmetisk, får vi ledd nr. 16 ved å legge til 6 differanser til ledd nr. 10:

$$a_{16} = a_{10} + 6d.$$

Vi setter inn verdiene:

$$61 = 37 + 6d \quad \Rightarrow \quad d = 4.$$

1C: Eksempel (II)

Vi har nå funnet at $d = 4$. Vi må nå finne en verdi for a_1.

Generell formel for et ledd i en aritmetisk rekke er

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Fra $a_{10} = 37 = a_1 + (10-1) \cdot d$ får vi

$$\begin{aligned} a_1 &= 37 - (10-1) \cdot 4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Altså er formelen for rekka

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 4n - 3 \end{aligned}$$

1C: Summen til en aritmetisk rekke

Regel

Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke er

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$$

Beviset står på side 48.

En nyttig formel for summen som ikke bruker siste ledd i rekken

Ved å sette inn $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ får vi formelen:

$$s_n = \frac{n}{2}\Big(2a_1 + (n-1) \cdot d\Big)$$

Definisjon

En **geometrisk rekke** er en rekke der forholdet mellom påfølgende ledd er konstant:

$$a_{n+1} = a_n \cdot k \quad \text{for } n \geq 1$$

Tallet k kalles *kvotienten* til rekka.

Oppgave

Hvordan kan vi undersøke om en følge er geometrisk?

1C: Geometrisk rekke

Regel

Det n-te leddet i en geometrisk følge med kvotient k er gitt ved

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

(Bevis kan gjøres ved induksjon. Se side 52)

Oppgave

Finn en formel for det n-te leddet i rekka

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots$$

- Startledd:
- Finn kvotienten:
- Bruk formelen $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

I en geometrisk rekke er

$$a_6 = 405 \quad \wedge \quad a_{10} = 32\,805$$

Finn en formel for det n-te leddet.

1 $a(n) := a_1 \cdot k^{n-1};$

2 $\text{løs}(\{a(6) = 405,\ a(10) = 32805\}, \{a_1, k\})$

$$\rightarrow \left\{ \left\{ a_1 = \frac{-5}{3}, k = -3 \right\}, \left\{ a_1 = \frac{5}{3}, k = 3 \right\} \right\}$$

Vi får to mulige formler

$$a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} \quad \wedge \quad a_n = -\frac{5}{2} \cdot (-3)^{n-1}$$

1C: Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke

Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke med

- startledd a_1
- og kvotient $k \neq 1$

er gitt ved

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Hvis $k = 1$, er alle leddene like, og vi får

$$S_n = n \cdot a_1.$$

(Bevis står på side 52)

1C: Eksempel (I)

Finn summen av de ti første leddene i den geometriske rekka

$$729 + 810 + 900 + 1000 + \dots$$

Finner kvotienten

$$\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$$

Summen av de n første leddene er gitt ved

$$S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

For $n = 10$:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 729 \cdot \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{10} - 1}{\frac{10}{9} - 1} \\ &= 12\,266,76 \end{aligned}$$

```
sum(a(n),n,1,10)
```

1	$a(n) := a_1\, k^{n-1}$
2	$a_1 := 729$
3	$k := \frac{10}{9}$
4	$\sum_{n=1}^{10} a(n)$
	$\approx$ **12255.7642**

1C: Eksempel (III)

```python
a1 = 729            # Første ledd i den geometriske rekken
k = 10/9            # Kvotienten (hvor mye vi ganger med fra ett ledd til det neste)

minliste = []       # Vi starter med en tom liste

# Vi vil finne de 10 første leddene i rekken
for n in range(1, 11):                      # n går fra 1 til 10
    ledd = round(a1 * k**(n-1), 2)          # regner ut n-te ledd, avrundet til 2 desimaler
    minliste.append(ledd)                   # legger leddet inn i listen

print(minliste)
# Output:
# [729.0, 810.0, 900.0, 1000.0, 1111.11, 1234.57,
#  1371.74, 1524.16, 1693.51, 1881.68]

# Beregner summen av alle leddene
summen = sum(minliste)
print(summen)
# Output: 12255.77
```

1D: En uendelig rekke

a) Hva slags rekke er dette?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

1D: En uendelig rekke

a) Hva slags rekke er dette?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Geometrisk rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 k^{n-1}$$

med startledd $a_1 = \frac{1}{2}$ og kvotient $k = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

b) Finn et uttrykk for den n-te delsummen s_n, det vil si summen av de n første leddene.

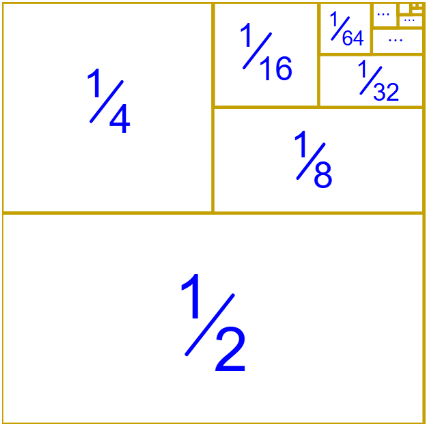
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

b) Finn et uttrykk for den n-te delsummen s_n, det vil si summen av de n første leddene.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \\
&= a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

c) Finnes det en grense for hvor stor delsummene kan bli?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

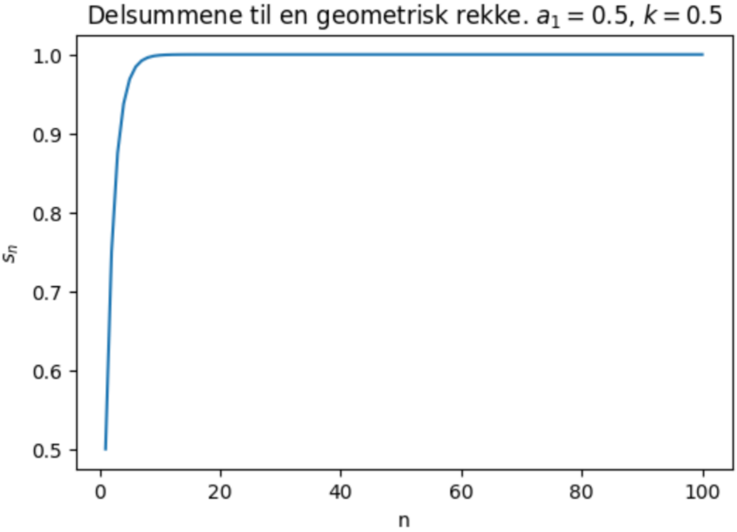


d) Lag et program du kan bruke til å regne ut s_n for større og større n.

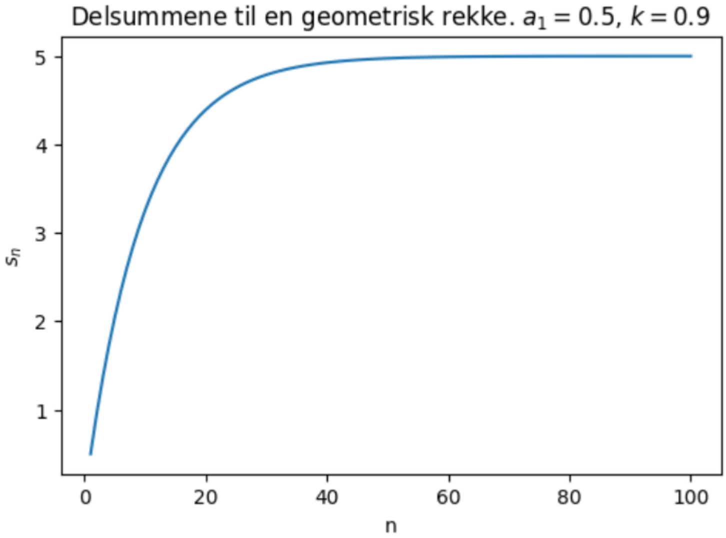
1D: En uendelig rekke. (Bruker vanlig for-løkke)

```
a1 = 0.5
k  = 0.5

liste_med_verdier_for_n = [1, 5, 10, 25, 50, 60]

minliste = [] # Tom liste som vi fyller med beregnede verdier

# Beregn verdiene én og én i en vanlig løkke
for n in liste_med_verdier_for_n:
    verdi = a1 * (k**n - 1) / (k - 1)
    minliste.append(verdi)

print(minliste)

# Skriv ut resultatene med tilhørende n
for i in range(len(minliste)):
    n = liste_med_verdier_for_n[i]
    verdi = minliste[i]
    print(f"s_{n} = {verdi}")
```

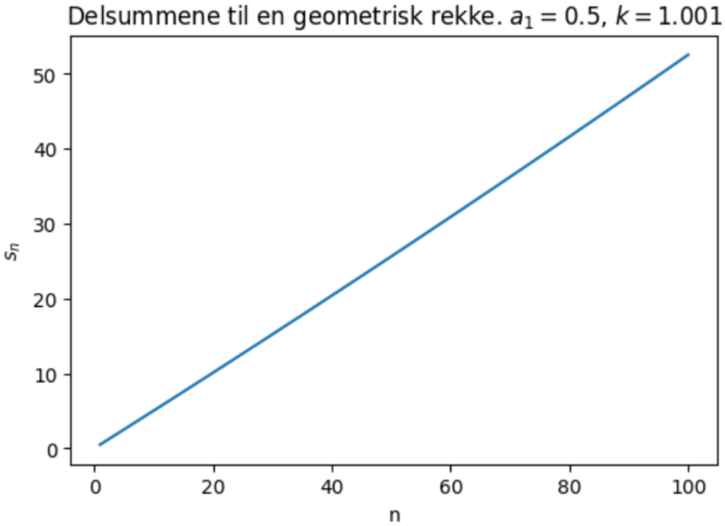
1D: Grafen til s_n som funksjon av n



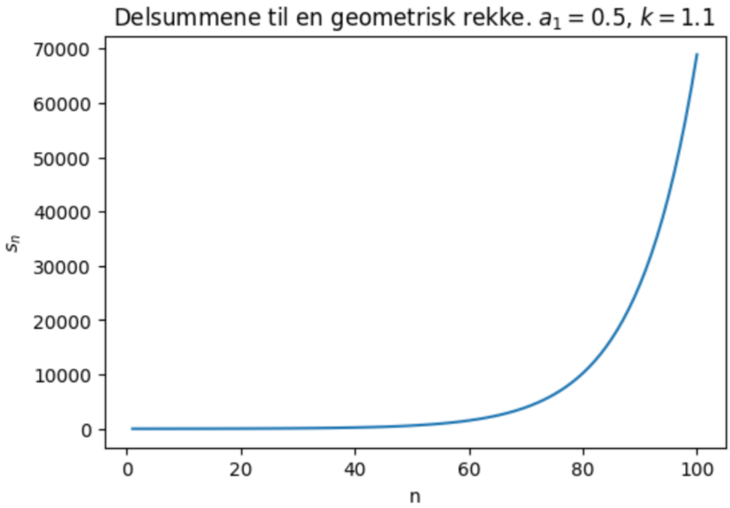
1D: Grafen til s_n som funksjon av n



1D: Grafen til s_n som funksjon av n



1D: Grafen til s_n som funksjon av n



1D: Konvergent rekke

Definisjon

La s_n være summen av de n første leddene i en uendelig rekke.

Vi sier at den uendelige rekka **konvergerer** (er *konvergent*) hvis uttrykket for s_n har en grenseverdi s når $n \to \infty$.

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

Tallet s kalles *summen* av den uendelige rekka.

Merk: s er en *grenseverdi*, ikke en vanlig endelig sum slik som s_n.

Ordet *konvergere* betyr å «nærme seg».

1D: Divergent rekke

Definisjon

Hvis en rekke ikke konvergerer, sier vi at den **divergerer** (er *divergent*).

Ordet *divergere* betyr å «fjerne seg».

Eksempel: Rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots$$

er divergent, siden $s_n \to \infty$ når $n \to \infty$.

1D: Konvergens av geometrisk rekke

En uendelig geometrisk rekke med kvotient k konvergerer når

$$|k| < 1.$$

Summen av den konvergente rekka er

$$s = \frac{a_1}{1-k},$$

der a_1 er det første leddet i rekka.

(Beviset står på side 60 i læreboka)

1D: Eksempel

Vi ser på den uendelige geometriske rekka med

$$a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad k = \tfrac{1}{2}.$$

Rekka blir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Siden $|k| = \frac{1}{2} < 1$, konvergerer rekka.

Summen er

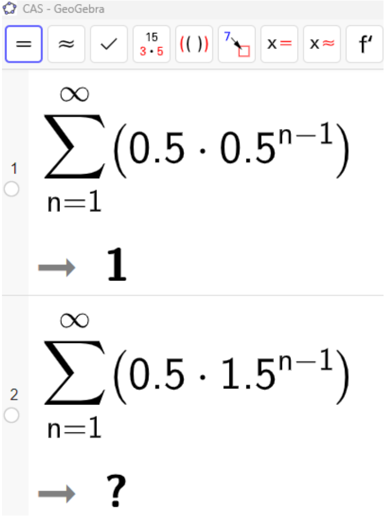
$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

1D: Sum av rekker i GeoGebra

I GeoGebra er kommandoene slik:

```
Sum(0.5*0.5^(n-1),n,1,inf)
```

```
Sum(0.5*1.5^(n-1),n,1,inf)
```



1D: Sum av rekker i Python med vanlig for-løkke

```python
# Vi lager en tom liste som vi skal fylle med de 5 første partallene
minListe = []

# For-løkke: n går fra 1 til 5
for n in range(1, 6):
    tall = 2 * n          # regner ut partallet
    minListe.append(tall)     # legger tallet til i listen

print(minListe) # Output: [2, 4, 6, 8, 10]

# Regner ut summen av alle tallene i listen
summen = sum(minListe)
print(summen) # Output: 30
```

1D: Sum av rekker i Python med *list comprehension*

⚠ **Ikke pensum**

```
# Lager følgen av de 5 første partallene
f = [2*n for n in range(1,6)]
print(f)
# Output: [2, 4, 6, 8, 10]

# Regner ut summen av rekken
s = sum(f)
print(s)
# Output: 30
```

1D: Geometrisk rekke med kvotient $k(x)$

Når kvotienten til rekka er en funksjon av x, skriver vi $k(x)$ for kvotienten.

Summen av rekka vil da også variere med x, og vi skriver $s(x)$ for summen.

En uendelig geometrisk rekke

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot k(x)^i \;=\; a + a \cdot k(x) + a \cdot k(x)^2 + a \cdot k(x)^3 + \cdots$$

konvergerer når

$$-1 < k(x) < 1.$$

Summen av den konvergente rekka er gitt ved

$$s(x) = \frac{a}{1 - k(x)}.$$

For å finne **konvergensområdet** løser vi ulikheten

$$-1 < k(x) < 1.$$

1D: Eksempel (a)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 3 + 3(2x-1) + 3(2x-1)^2 + 3(2x-1)^3 + \cdots$$

a) Bestem konvergensområdet til rekka.

Kvotienten er

$$k(x) = 2x - 1.$$

Vi løser

$$-1 < k(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 < 2x - 1 < 1.$$

$$0 < x < 1.$$

Konvergensområdet er $0 < x < 1.$

1D: Eksempel (b)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 3 + 3(2x-1) + 3(2x-1)^2 + 3(2x-1)^3 + \cdots$$

b) Bestem x slik at $s(x) = 3$. Summen er

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k(x)} = \frac{3}{1-(2x-1)} = \frac{3}{2-2x}.$$

Vi setter $s(x) = 3$:

$$\frac{3}{2-2x} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2-2x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

Svar: $x = \frac{1}{2}$, som ligger i konvergensområdet $0 < x < 1$.

1D: Eksempel (c)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$s(x) = 3 + 3(2x - 1) + 3(2x - 1)^2 + 3(2x - 1)^3 + \cdots$$

c) Løs likningen $s(x) = 1$.

Vi setter $s(x) = 1$:

$$\frac{3}{2 - 2x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2 - 2x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

Men $x = -\frac{1}{2}$ ligger **utenfor konvergensområdet** $0 < x < 1$.

Svar: Likningen $s(x) = 1$ har ingen løsning.

1D: Den harmoniske rekka

Den harmoniske rekka divergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \cdots$$

Sammenlign leddene med en annen rekke som åpenbart divergerer:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \ldots \geq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \ldots$$

Konklusjon: Den harmoniske rekka er et eksempel på at det ikke er nok at leddene blir små for at rekka skal konvergere.

1D: Alternerende rekker

Hvis vi lar leddene i en rekke veksle mellom å ha positivt og negativt fortegn, har vi en *alternerende* rekke.

Eksempel: Alternerende harmonisk rekke

Hvis vi veksler på fortegnene til den harmoniske rekka, vil vi få en konvergent rekke som har en sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

(Se side 67)

1D: Eulerkonstanten

Lag et program som regner ut

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n).$$

Skriv ut tallene E_n for $n = 1, 2, \ldots, 100$. Hva ser du?

1D: Eulerkonstanten med vanlig for-løkke

```python
from pylab import *  # Importerer blant annet log (ln)

# Vi setter et stort tall som "øverste grense" for summen
n_maks = 1_000_000

# Vi lager en tom liste som skal inneholde leddene i den harmoniske rekken
harmonisk_følge = []

# Vi fyller listen med 1/n for n = 1, 2, ..., n_maks
for n in range(1, n_maks+1):
    harmonisk_følge.append(1/n)

# Vi regner ut summen av de n_maks første leddene i den harmoniske rekken
# og trekker fra ln(n_maks). Dette nærmer seg Eulers konstant

s_n_maks = sum(harmonisk_følge) - log(n_maks)

# Vi skriver ut resultatet (en tilnærming til Eulers konstant)
print(s_n_maks) # Output: 0.5772161649014613
```

1D: Euler-konstanten

$$E_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n).$$

Følgen $\{E_n\}$ har en grenseverdi når $n \to \infty$.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

- $\gamma \approx 0.57721\ldots$
- Må ikke forveksles med tallet $e \approx 2.718\ldots$
- Det er ukjent om γ er rasjonalt eller irrasjonalt.

1D: Potensrekker

Definisjon

En **potensrekke** er en uendelig rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

der a_n er koeffisienter og c er sentrum for rekka.

Eksempel: Rekka for eksponentialfunksjonen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nåverdier og sluttverdier

I praktiske problemer fører vi ulike beløp/tallverdier fram eller tilbake i tid for å kunne sammenlikne dem på det samme tidspunktet.

Målet er å lage en rekke vi kan regne på.

I en rekke av nåverdier er leddene i rekka beløpenes verdi ved starttidspunktet.

I en rekke av slutt er leddene i rekka beløpenes verdi ved ved slutt-tidspuntet.

Eksempel: Årlig spareavtale

Vi setter inn et fast beløp på en sparekonto en gang per år:

- Start: 1. januar 2015
- Siste innskudd: 1. januar 2019
- Beløp pr. år: $B = 15\,000$ kr
- Rente: $p = 3{,}4\%$ pr. år

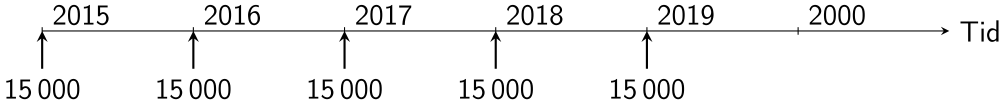
a) Hvor mye står på kontoen like etter siste innskudd 1. januar 2019?

b) Hvor mye står på kontoen 31. desember 2019?

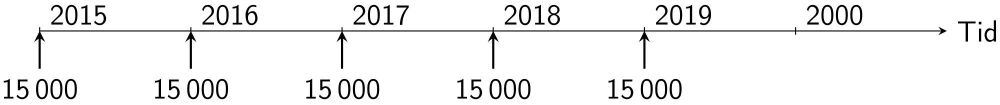
Første steg: Bestem hvor mange innskudd som settes inn i alt.

Tips: Tegn figur.

Eksempel: Første innskudd 1. januar 2015. Siste innskudd: 1. januar 2019



Eksempel: Hvor mye står på kontoen like etter siste innskudd



$$15\,000 \cdot 1,034^0$$

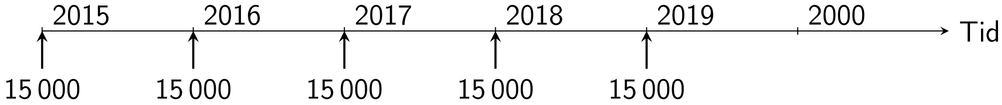
$$15\,000 \cdot 1,034^1$$

$$15\,000 \cdot 1,034^2$$

$$15\,000 \cdot 1,034^3$$

$$15\,000 \cdot 1,034^4$$

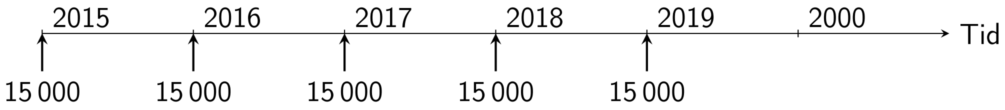
Eksempel: Hvor mye står på kontoen like etter siste innskudd



$$15\,000 \cdot 1,034^0$$
$$15\,000 \cdot 1,034^1$$
$$15\,000 \cdot 1,034^2$$
$$15\,000 \cdot 1,034^3$$
$$15\,000 \cdot 1,034^4$$

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{5} 15\ 000 \cdot 1.034^{5-1} \\ &= 15\ 000 \cdot \frac{1,034^5 - 1}{1,034 - 1} \\ &= 80\ 276,37 \end{aligned}$$

Eksempel: Hvor mye står på kontoen 31. desember 2019?



$$15\,000 \cdot 1,034^1$$

$$15\,000 \cdot 1,034^2$$

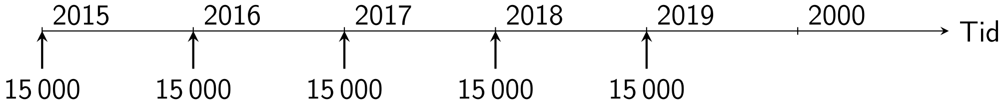
$$15\,000 \cdot 1,034^3$$

$$15\,000 \cdot 1,034^4$$

$$15\,000 \cdot 1,034^5$$

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{5} 15\ 000 \cdot 1.034 \cdot 1.034^{5-1} \\ &= 15\ 000 \cdot 1,034 \cdot \frac{1,034^5 - 1}{1,034 - 1} \\ &= 83\ 005,76 \end{aligned}$$

Eksempel: Hvor mye står på kontoen like etter siste innskudd?



$15\,000/1,034^0$

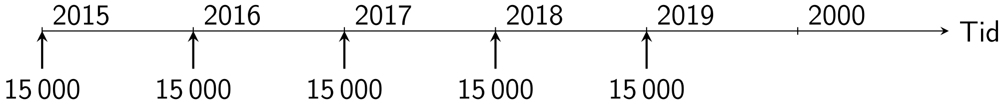
$15\,000/1,034^1$

$15\,000/1,034^2$

$15\,000/1,034^3$

$15\,000/1,034^4$

Eksempel: Hvor mye står på kontoen like etter siste innskudd?



$15\,000/1,034^0$

$15\,000/1,034^1$

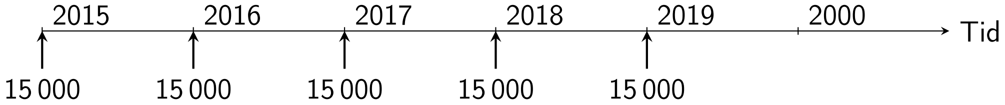
$15\,000/1,034^2$

$15\,000/1,034^3$

$15\,000/1,034^4$

$$\begin{aligned}
S_{2015} &= \sum_{n=1}^{5} 15\ 000 \cdot \left(\frac{1}{1.034}\right)^{5-1} \\
&= 15\ 000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.034}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1.034} - 1} \\
&= 70\ 227,23 \\
S_{2019} &= 70\ 227,23 \cdot 1.034^4 \\
&= 80\ 276,37
\end{aligned}$$

Eksempel: Hvor mye står på kontoen 31. desember 2019?



$15\,000/1,034^0$

$15\,000/1,034^1$

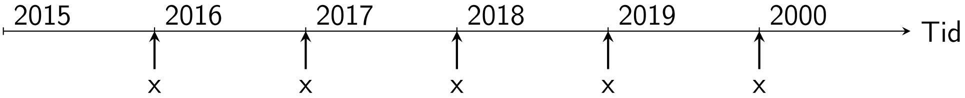
$15\,000/1,034^2$

$15\,000/1,034^3$

$15\,000/1,034^4$

$$\begin{aligned}
S_{2015} &= \sum_{n=1}^{5} 15\ 000 \cdot \left(\frac{1}{1.034}\right)^{5-1} \\
&= 15\ 000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.034}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1.034} - 1} \\
&= 70\ 227,23 \\
S_{2019} &= 70\ 227,23 \cdot 1.034^5 \\
&= 83\ 005,76
\end{aligned}$$

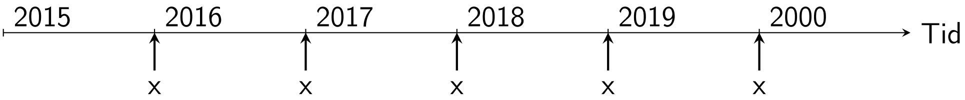
Eksempel: Annuitetslån



- Lånebeløp: $L = 20\,000$ i januar 2015.
- Siste terminbeløp betales inn 31. desember 2019.
- Årlig rente: 7,4 %. Vi setter $p = 1,074$.
- Årlig terminbeløp $= x$.
- Antall terminbeløp: 5.

Oppgave: Finn størrelsen på det årlige terminbeløpet, x.

Eksempel: Annuitetslån med sluttverdier

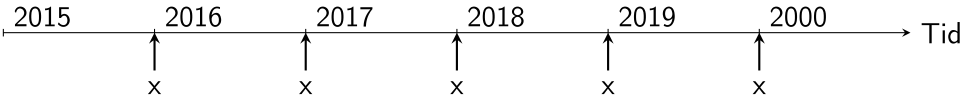


$$\sum_{n=1}^{5} x \cdot 1,074^{n-1} = 20\,000 \cdot 1.074^5$$

$$x \cdot \frac{1,074^5 - 1}{1,074 - 1} = 20\,000 \cdot 1.074^5$$

$$\begin{aligned} & x \cdot 1,074^0 \\ + & x \cdot 1,074^1 \\ + & x \cdot 1,074^2 \\ + & x \cdot 1,074^3 \\ + & x \cdot 1,074^4 \\ = & 20\,000 \cdot 1.074^5 \end{aligned}$$

Eksempel: Annuitetslån med sluttverdier



1 $$\text{Løs}\left(\sum_{n=1}^{5}\left(x \cdot 1.074^{n-1}\right) = 20000 \cdot 1.074^{5},\ x\right)$$

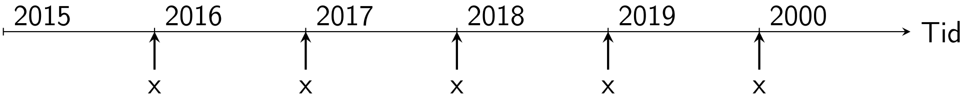
$$\approx \{\mathbf{x = 4930.1698}\}$$

2 $$\text{løs}\left(x \cdot \frac{1.074^{5} - 1}{1.074 - 1} = 20000 \cdot 1.074^{5}\right)$$

$$\approx \{\mathbf{x = 4930.1698}\}$$

$$\begin{aligned} & x \cdot 1,074^{0} \\ + & x \cdot 1,074^{1} \\ + & x \cdot 1,074^{2} \\ + & x \cdot 1,074^{3} \\ + & x \cdot 1,074^{4} \\ = & 20\,000 \cdot 1.074^{5} \end{aligned}$$

Eksempel: Annuitetslån med nåverdier

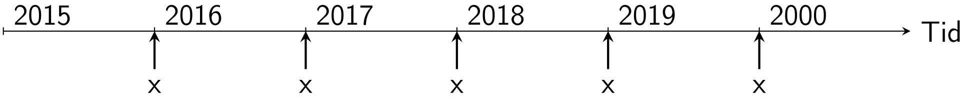


$$
\begin{aligned}
& x/1,074^1 \\
+ & x/1,074^2 \\
+ & x/1,074^3 \\
+ & x/1,074^4 \\
+ & x/1,074^5 \\
= & 20\,000
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{x}{1,074} \cdot \left(\frac{1}{1,074}\right)^{n-1} = 20\,000$$

$$x \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}074}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}074} - 1} = 20\,000$$

Eksempel: Annuitetslån med nåverdier



$$
\begin{aligned}
& x/1,074^1 \\
+\ & x/1,074^2 \\
+\ & x/1,074^3 \\
+\ & x/1,074^4 \\
+\ & x/1,074^5 \\
=\ & 20\,000
\end{aligned}
$$

3 $\text{Løs}\left(\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{x}{1.074}\left(\frac{1}{1.074}\right)^{n-1}\right) = 20000,\ x\right)$

$\approx \{\mathbf{x = 4930.1698}\}$

4 $\text{Løs}\left(\frac{x}{1.074}\cdot\frac{\left(\frac{1}{1.074}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1.074} - 1} = 20000,\ x\right)$

$\approx \{\mathbf{x = 4930.1698}\}$