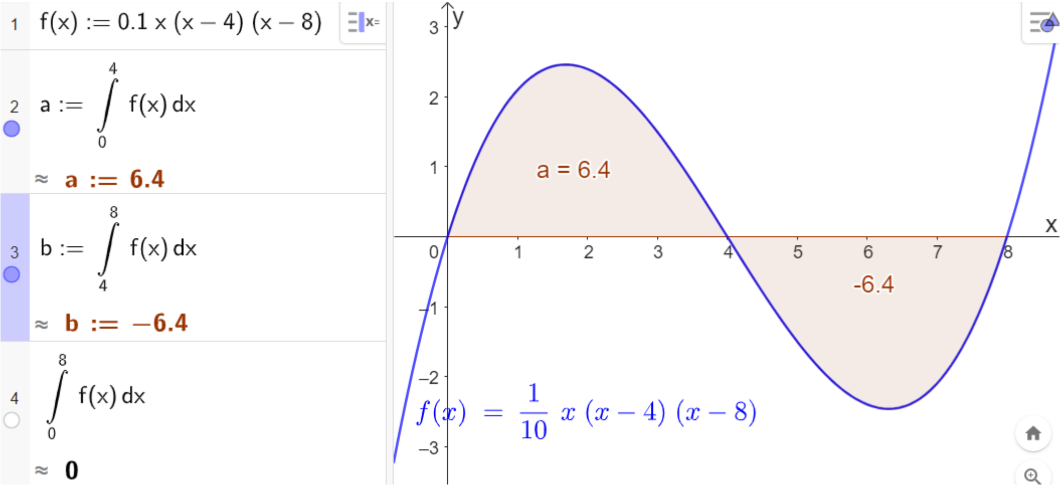
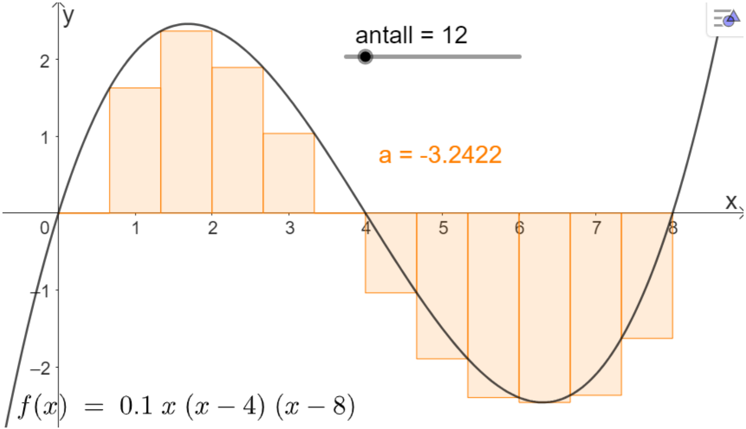
2A: Det bestemte integralet. `integral(funksjon, start, slutt)`

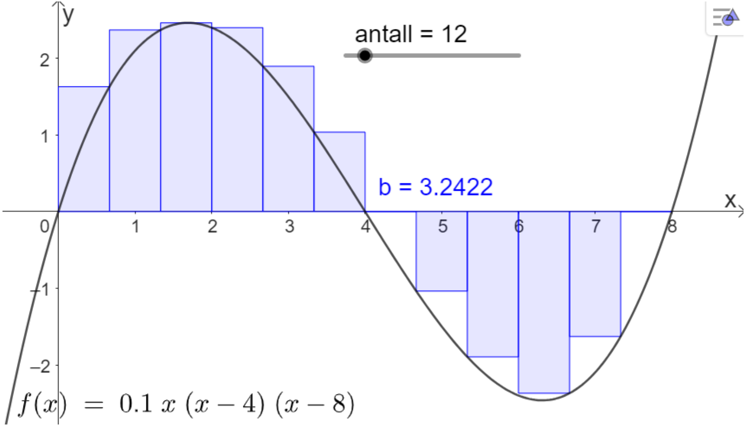


2A: Nedre trappesum, N



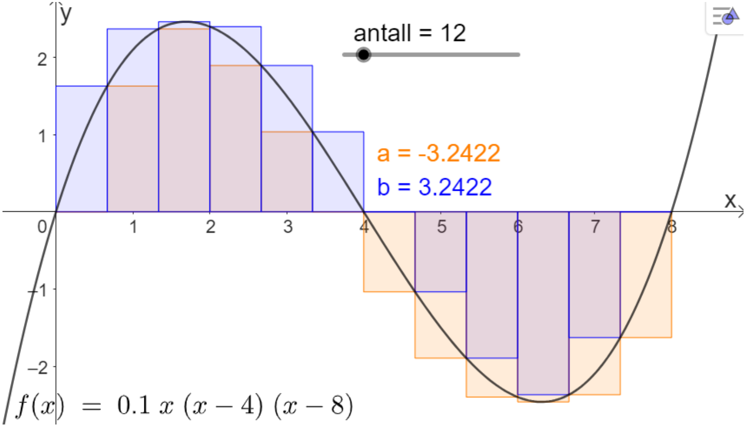
Link til GeoGerba-fil

2A: Øvre trappesum, Ø



Link til GeoGerba-fil

2A: Arealet må ligge mellom nedre og øvre trappesum. $N \leq A \leq \varnothing$



Link til GeoGerba-fil

La $\{N_n\}$ være tallfølgen av nedre trappesummer.

La $\{\O_n\}$ være tallfølgen av nedre trappesummer .

Ideen bak definisjonen av det bestemte integralet, er at trappesummene blir bedre og bedre tilnærminger for arealet når antall rektangler går mot uendelig.

Definisjonen av det bestemte integralet

Det bestemte integralet som en grenseverdi til en følge av summer

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} \O_n = \int_a^b f(x)\, dx$$

Dersom grenseverdiene er forskjellige, er f ikke integrerbar.

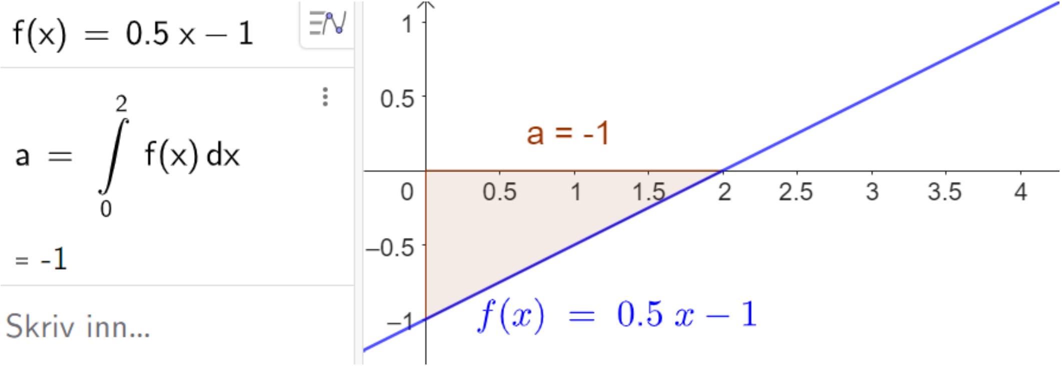
2A: Integrerbare funksjoner

Hvis f er en **kontinuerlig funksjon** på et intervall $[a, b]$ på x-aksen, så kan vi alltid regne ut **integralet** av f på dette intervallet.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

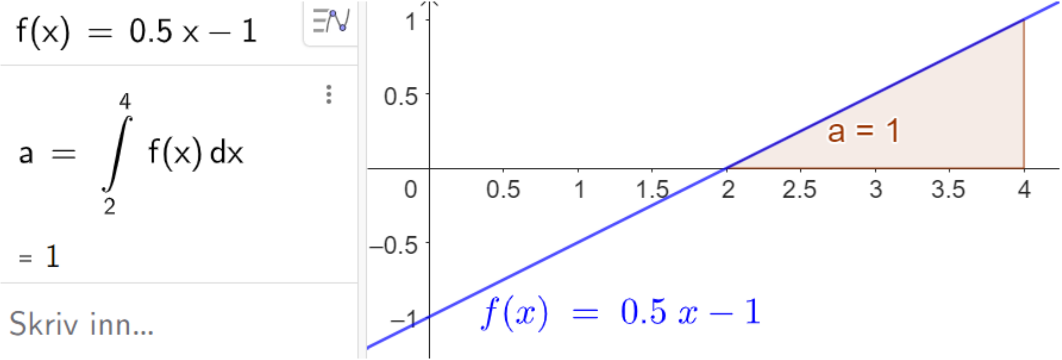
- Integral = "arealet" mellom grafen til f og x-aksen i intervallet fra $x = a$ til $x = b$.
- "Areal" over x-aksen er positivt, og "arealet" under x-aksen er negativt.

2A: Integraler i GeoGebra: `integral(funksjon, start, slutt)`

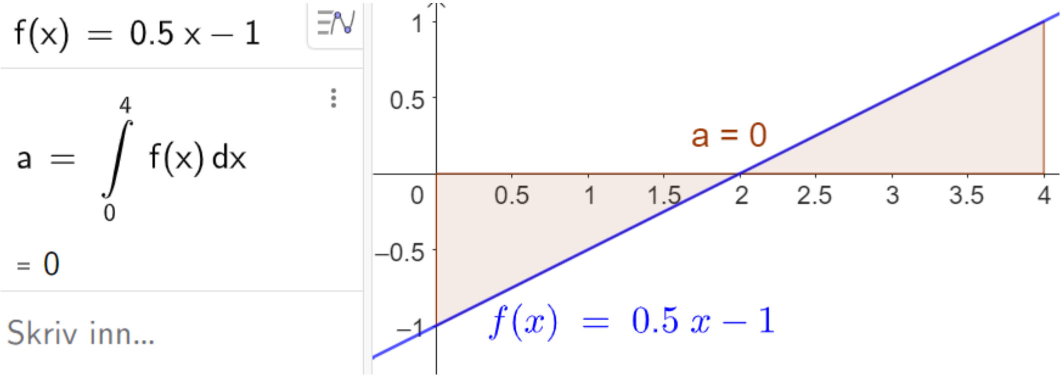


Figur: `integral(0.5x-1, 0, 2)`

2A: Integraler i GeoGebra: `integral(funksjon, start, slutt)`



Figur: `integral(0.5x-1, 2, 4)`



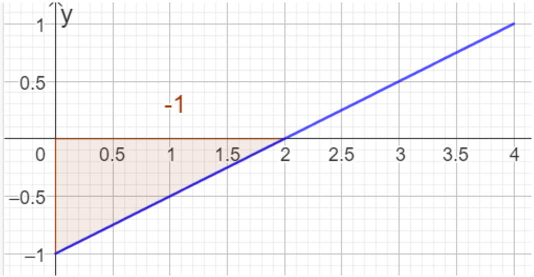
Figur: `integral(0.5x-1, 0, 4)`

$f(x) := \text{Dersom}(0 \leq x \leq 4,\ 0.5\,x - 1)$

$\rightarrow\ \mathbf{f(x) := \text{Dersom}\left(0 \leq x \leq 4,\ \frac{1}{2}\,x - 1\right)}$

$a := \int_0^2 \text{Dersom}(0 \leq x \leq 4, 0.5\,x - 1)\,dx$

$\rightarrow\ \mathbf{a := -1}$



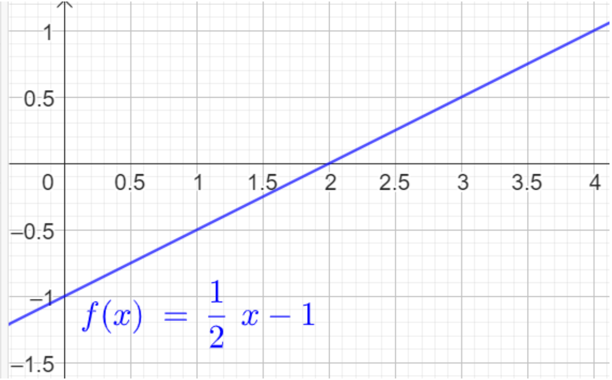
2A: Integraler i kombinasjon med *Løs* i CAS

$$\text{Løs}\left(\int_a^4 0.5\,x - 1\,dx = 1,\ a\right)$$

$$\rightarrow\ \{\mathbf{a = 2}\}$$

$$\text{Løs}\left(\int_0^b 0.5\,x - 1\,dx = -1,\ b\right)$$

$$\rightarrow\ \{\mathbf{b = 2}\}$$



⚠ **Ikke pensum**

```python
from pylab import *
x = linspace(0,2,num=300)
print(trapezoid(0.5*x-1,x))
```

-1.0

```python
import sympy as sp
x = sp.symbols("x")
f = 0.5*x-1
sp.integrate(f, (x,0,2))
```

-1.0

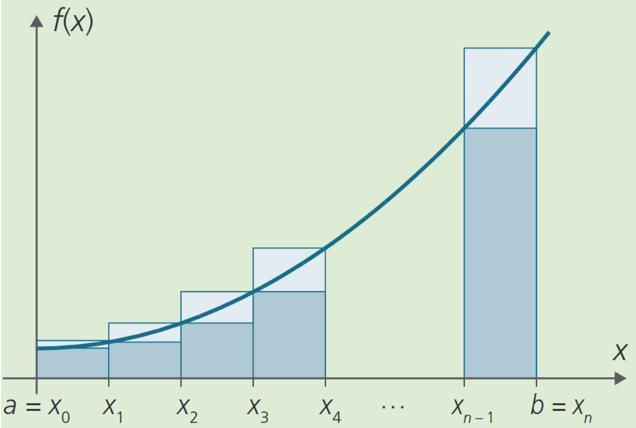
2A: Nedre trappesum, N_n, for en strengt voksende funksjon

Bredden av rektanglene på figuren er

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Høyden i rektanglene er

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1}).$$



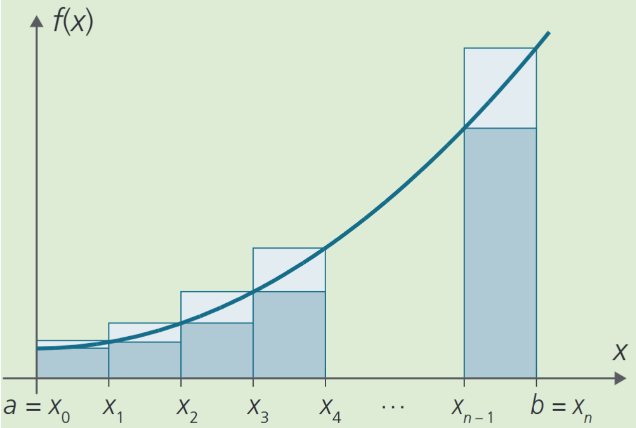
$$N_n = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x \cdots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\Delta x$$

Bredden av rektanglene på figuren er

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Høyden i rektanglene er

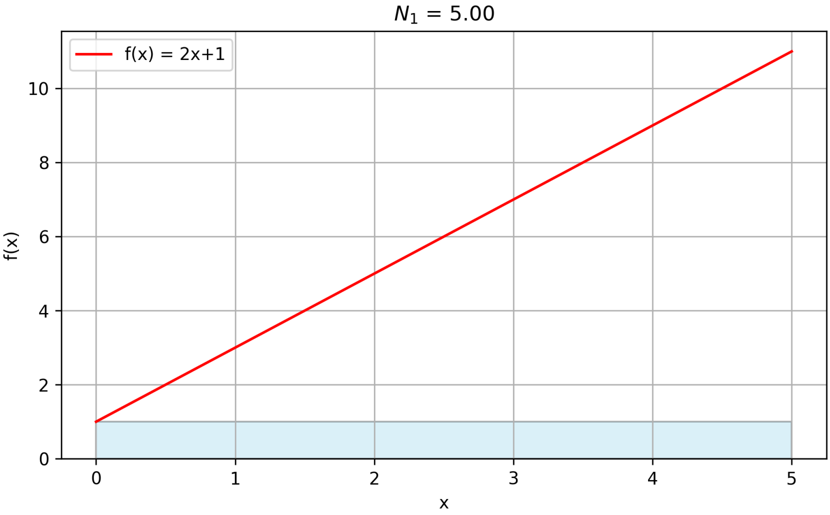
$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n).$$



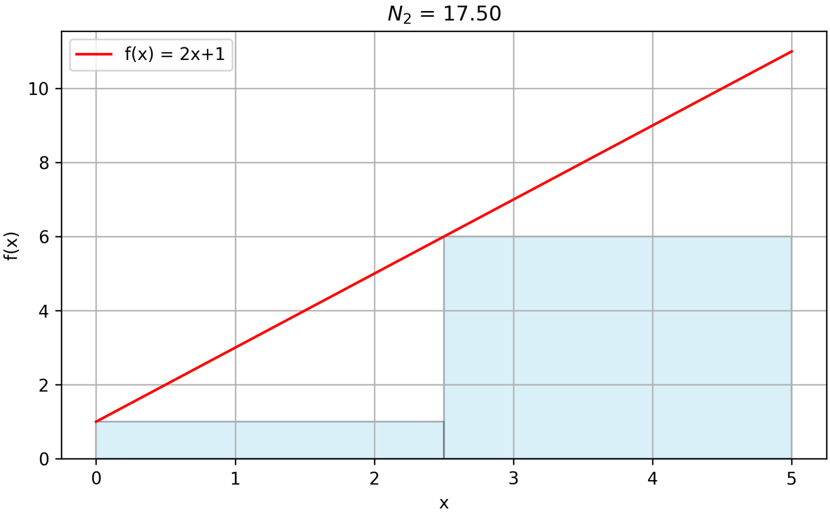
$$\begin{aligned} Ø_n &= f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \end{aligned}$$

2A: Oppgave 2.1

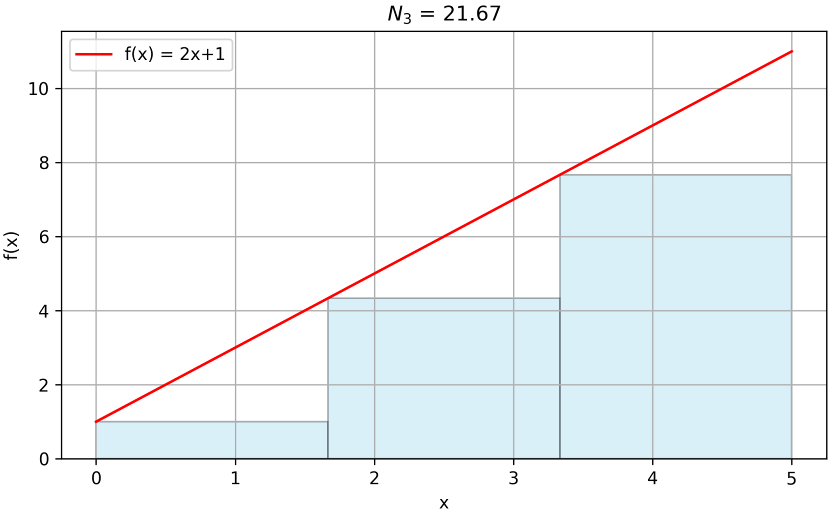
```
n = 5
a = 0   # Nedre itegrasjons-x-verdi
b = 5   # Øvre integrasjons-x-verdi

def f(x):
    return 2*x+1

areal = 0     # Variabel for "areal-summen" (integralet)
dx = (b-a)/n # Dette er bredden til rektanglet

for i in range(n):  # n = 0, 1, 2, ... ,n-1
    høyde = f(a + i*dx)
    areal = areal + høyde * dx

print(f"Integralet av f fra {a} til {b} er {areal}")
# Output: Integralet av f fra 0 til 5 er 25.0
```


N_1 = 5.00
f(x) = 2x+1
f(x)
x
0
2
4
6
8
10
0
1
2
3
4
5

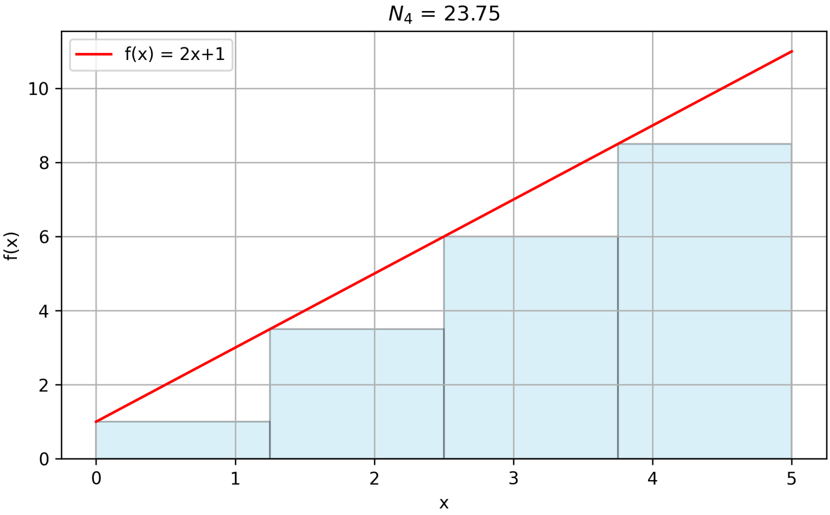
2A: Oppgave 2.1



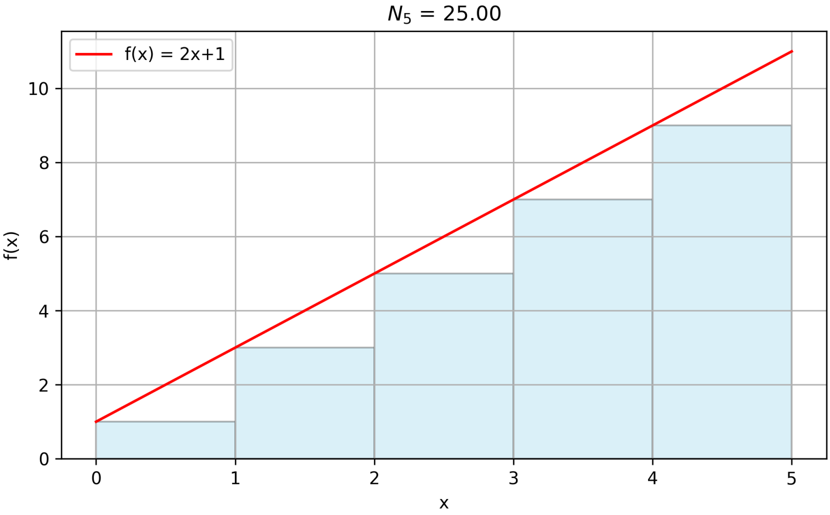
2A: Oppgave 2.1



2A: Oppgave 2.1



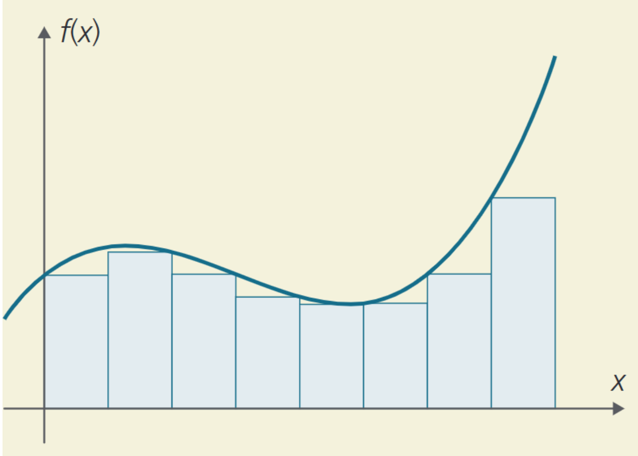
2A: Oppgave 2.1



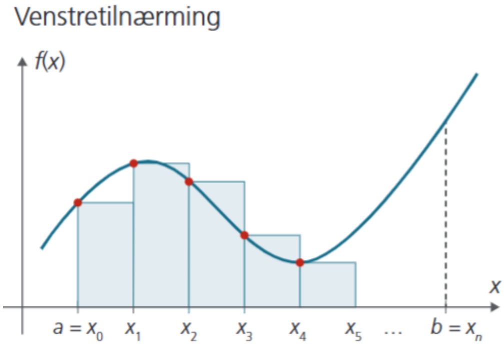
2B: Nedre trappesum til en ikke er strengt voksende funksjon

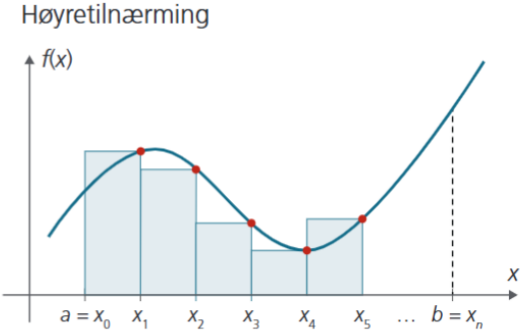
Merk at generelt tar

- nedre trappesum utgangspunkt i den minste høyden til rektanglet.
- og øvre trappesum tar utgangspunkt i den største høyden til rektanglet.



2B: Venstre- og høyre-tilnærming





2B: Riemannsummer. Velger en vilkårlig x-verdi, $x^* \in [x_{i-1}, x_i]$

Venstretilnærming:

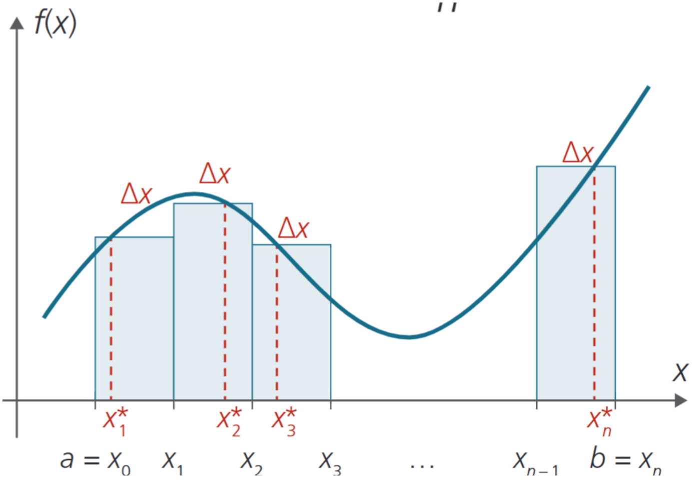
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$$

Høyretilnærming:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Riemansum:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$



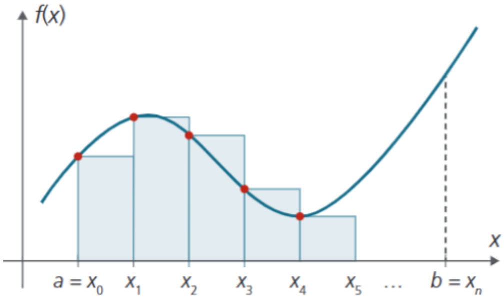
2B: Det bestemte integralet

Det bestemte integralet kan uttrykkes som en grenseverdi til en følge av riemannsummer.

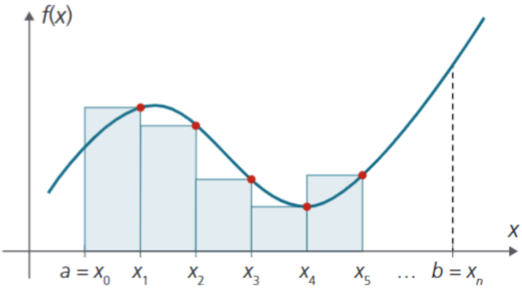
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot \Delta x, \quad \text{der} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x, \quad \text{der} \quad x_{i-1} = a + (i-1)\cdot \Delta x$$

Venstretilnærming

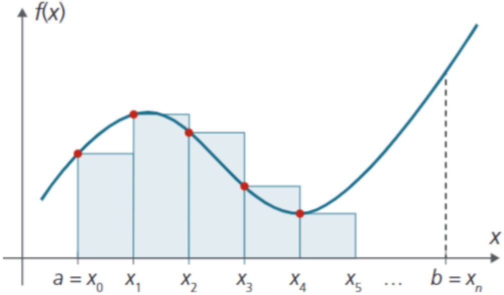


Høyretilnærming

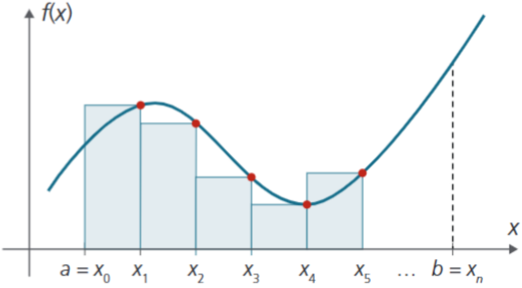


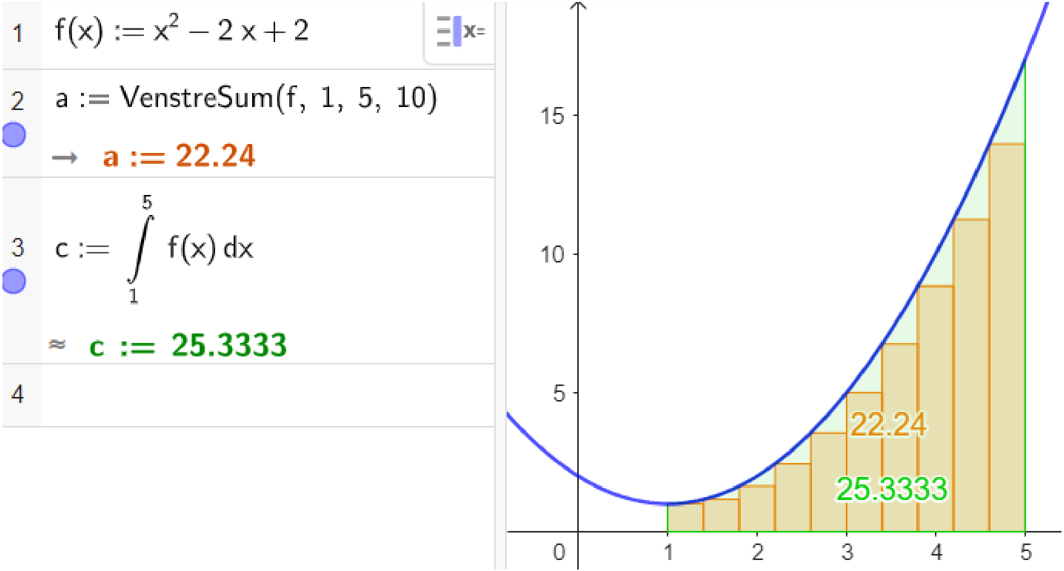
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x, \quad \text{der} \quad x_i = a + i\cdot \Delta x$$

Venstretilnærming



Høyretilnærming




1 $f(x) := x^2 - 2x + 2$
2 a := VenstreSum(f, 1, 5, 10)
→ a := 22.24
3 $c := \int_1^5 f(x)\,dx$
≈ c := 25.3333
4
15
10
5
0
1
2
3
4
5
22.24
25.3333

2B: Eksempel 5 side 106: Venstretilnærming og høyretilnærming i python

```
a, b = 1, 5                 # Nedre og øvre grense i intervallet [a, b]
n = 10                      # Antall rektangler

def f(x):
  return x**2 - 2*x + 2

venstre_sum = 0             # Summen av arealene til venstre-tilnærming-rektangler
høyre_sum   = 0             # Summen av arealene til høyre-tilnærming-rektangler
delta_x = (b-a)/n           # Rektangelbredden

for i in range(1, n+1):
  venstre_sum = venstre_sum + f(a+(i-1)*delta_x)*delta_x
  høyre_sum = høyre_sum + f(a+i*delta_x)*delta_x

print(f"Venstresummen: {round(venstre_sum,2)}")      # Venstresummen: 22.24
print(f"Høyresummen: {round(høyre_sum,2)}")          # Høyresummen: 28.64
print(f"Gjennomsnitt: {(venstre_sum+høyre_sum)/2}") # Gjennomsnitt: 25.44
```

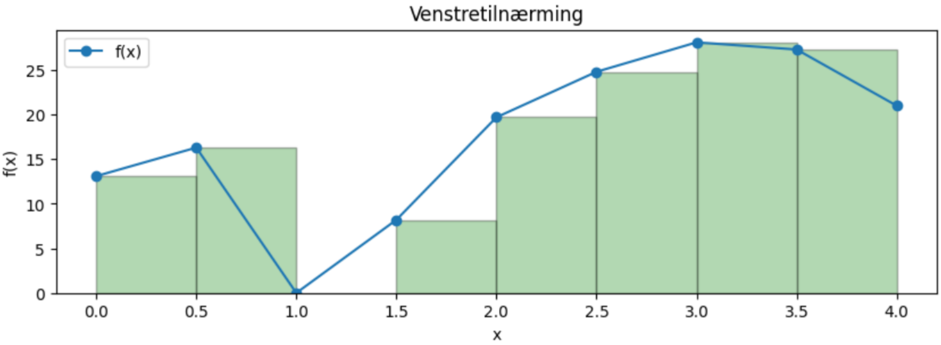
2B: Eksempel 6 side 108: Venstretilnærming

Funksjonen f har verditabellen

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	13,1	16,3	0	8,2	19,7	24,8	28,1	27,3	21,0

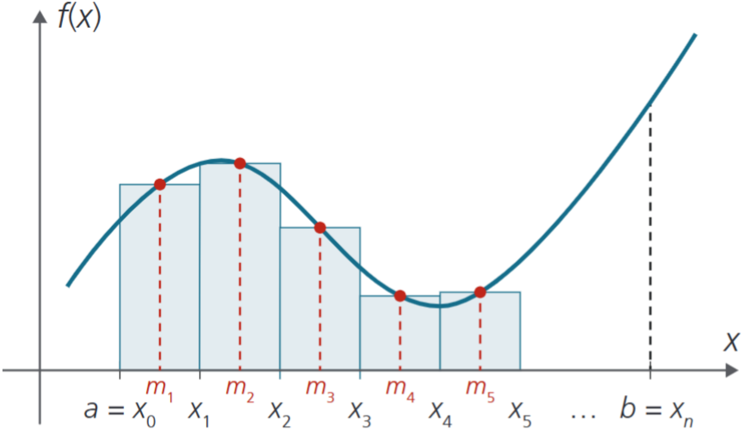
Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for $\int_0^4 f(x)\,dx$ med en venstretilnærming.

```
Venstretilnærming: 68.8
```



```python
# lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]
f = [13.1, 16.3, 0, 8.2, 19.7, 24.8, 28.1, 27.3, 21.0]

delta_x = x[1] - x[0]       # rektangelbredde
n = len(x)                  # antall x-verdier i lista
summen = 0

# Legg merke til at n = len(x) = 9, og siden "i" i for-løkken
# starter på 0, må "i" gå til n-1=8, og at maks verdi for "i" er 7.

for i in range(n-1):
  summen = summen + f[i] * delta_x

print(round(summen, 1)) # Output: 68.8

# Legg merke til at det står f[i], og ikke f[i-1], selv om dette er en
# venstretilnærming. Det er fordi "i" i for-løkken starter på null.
```

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\cdot\Delta x, \quad \text{der} \quad m_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\cdot \Delta x$$



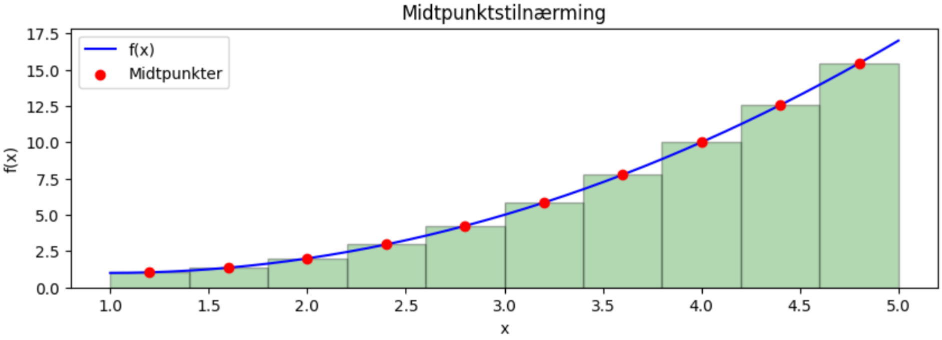
2B: Eksempel 5 side 105: Midtpunkttilnærming. Fasit: 25,33

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for integralet ved å bruke midtpunkttilnærming med 10 kvadrater.

$$\int_1^5 f(x)\,dx$$

.

```
Summen: 25.28
```



2B: Eksempel 5 side 105: Midtpunkttilnærming. Fasit: 25,33

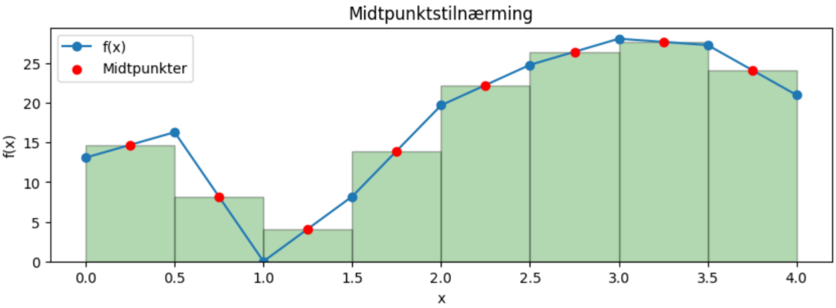
```python
a, b = 1, 5        # Nedre og øvre grense i intervallet [a, b]
n = 10             # Antall rektangler

def f(x):
    return x**2 - 2*x + 2

delta_x = (b - a) / n
summen = 0.0

for i in range(n):
    x_midt = a + (i + 0.5) * delta_x
    summen = summen + f(x_midt) * delta_x

print(f"Midtpunktsummen: {round(summen, 2)}") # Output: 25.28
```

Funksjonen f har verditabellen

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	13,1	16,3	0	8,2	19,7	24,8	28,1	27,3	21,0

Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for $\int_0^4 f(x)\,dx$ med en midtpunkttilnærming.

```
Midtpunktmetoden: 70.7
```



2B: Eksempel 6 side 108: Midtpunkttilnærming

```python
# To lister med x-verdier og funksjonsverdier
x = [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]
f = [13.1, 16.3, 0, 8.2, 19.7, 24.8, 28.1, 27.3, 21.0]

delta_x = x[1] - x[0]  # rektangelbredde
n = len(x)  # antall x-verdier i lista
summen = 0

# Midtpunktstilnærming
for i in range(n-1):
    # Bruk gjennomsnittet som approksimasjon av funksjonsverdi i midten
    midt_f = (f[i] + f[i+1]) / 2
    summen = summen + midt_f * delta_x

print(round(summen, 1))
```

2B: Arealformelen til et trapes

$$A = \frac{h}{2}(a + b)$$

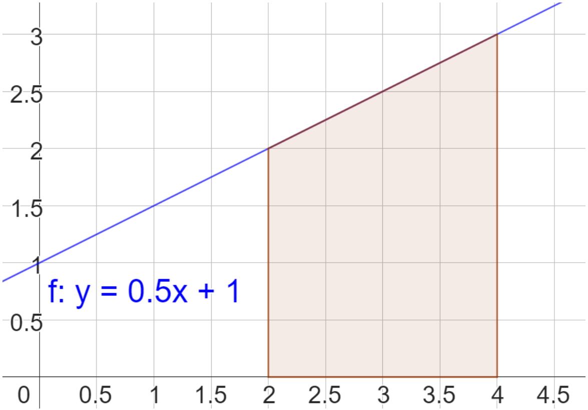
- $a, b =$ parallelle sider
- $h =$ høyden

Men i vårt tilfelle er det bedre å skrive arealformelen slik:

$$A = \frac{4-2}{2}\left(f(2) + f(4)\right)$$

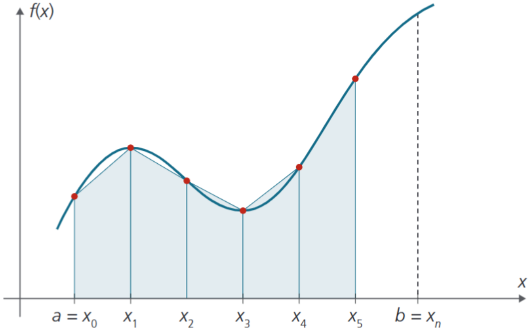
Generelt får vi (hvis i starter på 1):

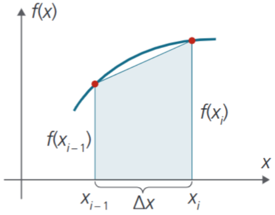
$$A = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$



2B: Trapesetoden

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right), \quad \texttt{der} \quad x_i = a + i\cdot\Delta x$$





(Beviset står på side 110)

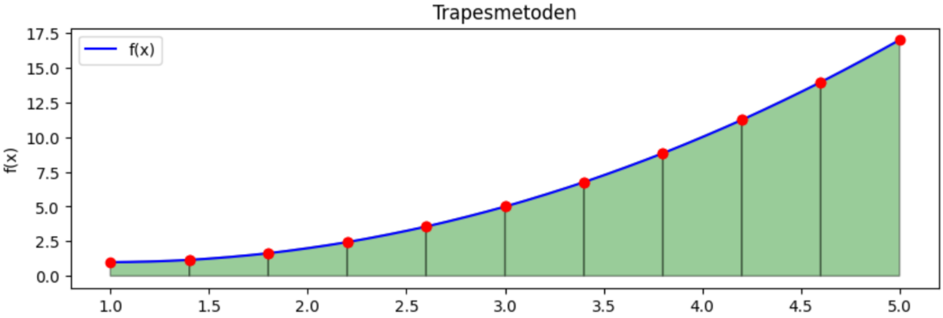
2B: Eksempel 5 side 105: Trapesmetoden. Fasit: 25,33

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for integralet ved å bruke trapesmetoden med 10 kvadrater.

$$\int_1^5 f(x)\,dx$$

.

```
Trapesmetoden: 25.44
```



2B: Eksempel 5 side 105: Trapesmetoden. Fasit: 25,33

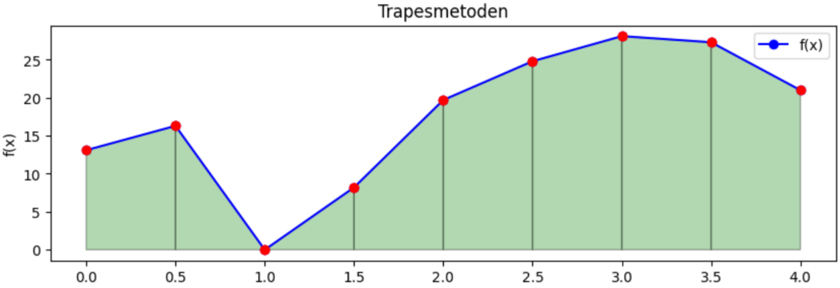
```python
a, b = 1, 5    # Intervallet [a, b]
n = 10         # Antall delintervaller
delta_x = (b - a) / n
summen = 0.0

def f(x):
    return x**2 - 2*x + 2

# Bruker List comprehension til å lage lister med x- og y-verdier.
x_liste = [a + i*delta_x for i in range(n+1)]
y_liste = [f(x) for x in x_liste]

# Trapesmetoden. Utfordring: Forklar at denne koden
# stemmer med trapes-metode-formelen.
for i in range(n):
    summen = summen + (y_liste[i] + y_liste[i+1]) * delta_x / 2

print(f"Trapesmetoden: {round(summen, 2)}") # Output: 25.44
```

Funksjonen f har verditabellen

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	13,1	16,3	0	8,2	19,7	24,8	28,1	27,3	21,0

Lag et program som finner en tilnærmingsverdi for $\int_0^4 f(x)\,dx$ med en trapesmetoden.

```
Trapesmetoden: 70.73
```



2B: Eksempel 6 side 108: Trapesmetoden

```python
# Dataene fra tabellen
x = [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4]
f = [13.1, 16.3, 0, 8.2, 19.7, 24.8, 28.1, 27.3, 21.0]

delta_x = x[1] - x[0]  # bredde
n = len(x) - 1         # antall delintervaller
summen = 0

# Trapesmetoden
for i in range(n):
    summen += (f[i] + f[i+1]) * delta_x / 2

print(f"Trapesmetoden: {round(summen, 2)}") # Output: 70.73
```

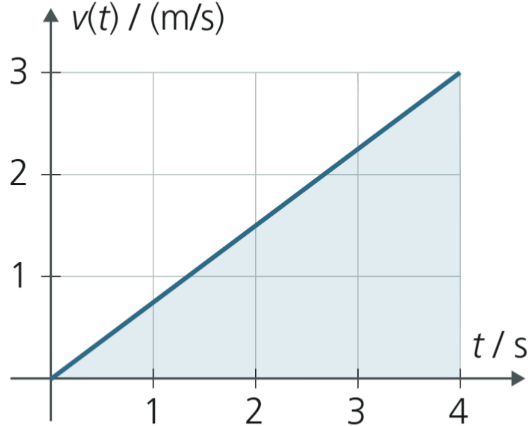
2B: Generell pythonkode for å regne ut nedre trappesum (Utfordring)

```
def f(x):
    return 0.1*x*(x-4)*(x-8)  # Funksjonen vi skal integrere tilnærmet

start, slutt = 0, 8           # Integrasjonsintervall [0, 8]
bredde = 0.1                  # Bredde på hvert rektangel
antall = round((slutt-start)/bredde)  # Antall rektangler i intervallet
N, Ø = 0, 0  # Startverdier for nedre og øvre trappesum

for i in range(antall):
    x_venstre = start + i*bredde      # Venstre endepunkt for intervallet
    x_høyre = x_venstre + bredde      # Høyre endepunkt for intervallet
    f_venstre = f(x_venstre)          # Funksjonsverdi i venstre endepunkt
    f_høyre = f(x_høyre)              # Funksjonsverdi i høyre endepunkt
    N = N + bredde * min(f_venstre, f_høyre)  # Areal med minste funksjonsverdi

print(f"Antall rektangler: {antall}")
print(f"Rektangelbredde: {bredde}")
print(f"Nedre trappesum: {N}")
```

```
def f(x):
    return 0.1*x*(x-4)*(x-8)  # Funksjonen vi skal integrere tilnærmet

start, slutt = 0, 8           # Integrasjonsintervall [0, 8]
bredde = 0.1                  # Bredde på hvert rektangel
antall = round((slutt-start)/bredde)  # Antall rektangler i intervallet
N, Ø = 0, 0  # Startverdier for nedre og øvre trappesum

for i in range(antall):
    x_venstre = start + i*bredde      # Venstre endepunkt for intervallet
    x_høyre = x_venstre + bredde      # Høyre endepunkt for intervallet
    f_venstre = f(x_venstre)          # Funksjonsverdi i venstre endepunkt
    f_høyre = f(x_høyre)              # Funksjonsverdi i høyre endepunkt
    Ø = Ø + bredde * max(f_venstre, f_høyre)  # Areal med største funksjonsverdi

print(f"Antall rektangler: {antall}")
print(f"Rektangelbredde: {bredde}")
print(f"Øvre trappesum: {Ø}")
```

2C: Tolkning av integralet

Arealet av området mellom en graf og førsteaksen har samme enhet som produktet av enhetene på aksene



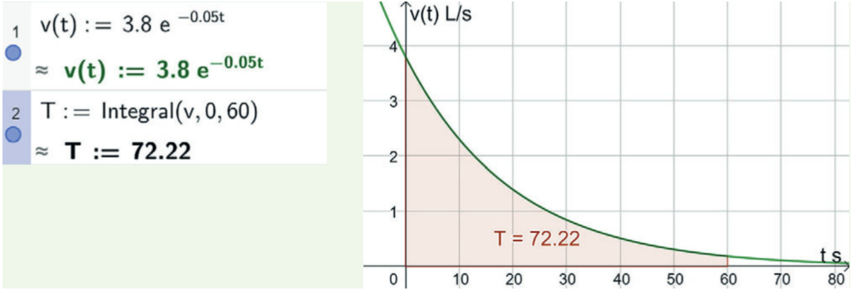
2C: Eksempel 7 side 114

Modellen beskriver hvor mange liter vann som renner ut av et akvarium per sekund.

$$V(t) = 3,8 \cdot e^{-0.05t}$$

Arealet under grafen har enheten liter.

Hvor mye vann renner ut i løpet av det første minuttet?



2C: Arealet under førsteaksen

La A være arealet av området avgrenset av grafen til den kontinuerlige funksjonen f, x-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$.

$$\text{Arealet } A = \int_a^b f(x)\,dx \text{ hvis området ligger over x-aksen.}$$

$$\text{Arealet } A = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ hvis området ligger under x-aksen.}$$

Hvis området ligger delvis over og delvis under x-aksen, må vi dele det opp i flere deler og summere delarealene.

1. $f(x) := 1 - \ln(x)$

   $\rightarrow \; f(x) := -\ln(x) + 1$

2. $N := \text{NullpunktIntervall}(f, 1, 7)$

   $\approx \; N := (2.72, 0)$

3. $A_1 := \displaystyle\int_1^{x(N)} f \, dx$

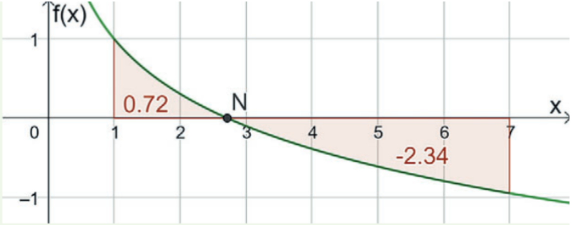
   $\approx \; A_1 := 0.72$

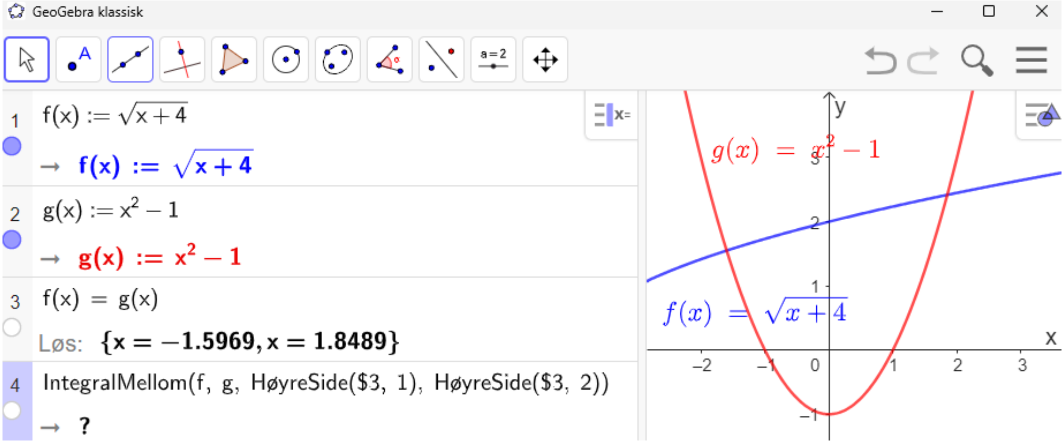
4. $A_2 := \left| \displaystyle\int_{x(N)}^{7} f \, dx \right|$

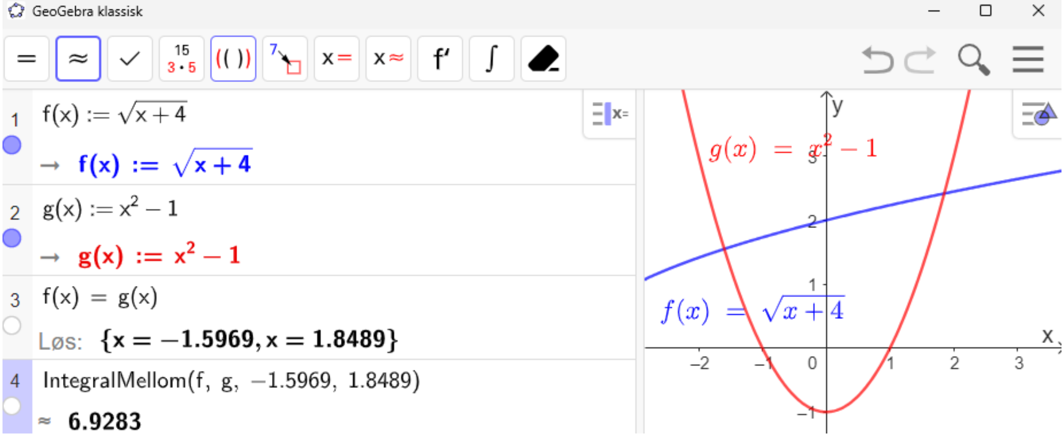
   $\approx \; A_2 := 2.34$

5. $A = A_1 + A_2$

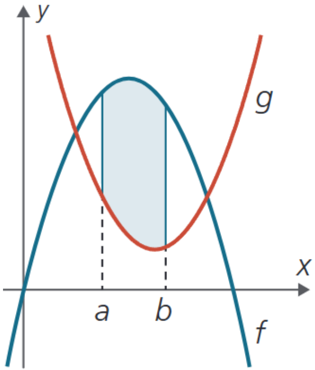
   $\approx \; A = 3.06$




GeoGebra klassisk
1 f(x) := √x + 4
→ f(x) := √x + 4
2 g(x) := x² − 1
→ g(x) := x² − 1
3 f(x) = g(x)
Løs: {x = −1.5969, x = 1.8489}
4 IntegralMellom(f, g, HøyreSide($3, 1), HøyreSide($3, 2))
→ ?
g(x) = x² − 1
f(x) = √x + 4
y
x


GeoGebra klassisk
1 f(x) := √x + 4
→ f(x) := √x + 4
2 g(x) := x² − 1
→ g(x) := x² − 1
3 f(x) = g(x)
Løs: {x = −1.5969, x = 1.8489}
4 IntegralMellom(f, g, −1.5969, 1.8489)
≈ 6.9283
g(x) = x² − 1
f(x) = √x + 4
y
x

2C: Arealet mellom to grafer



Hvis $f(x) \geq g(x)$ for alle x i $[a, b]$, er arealet av området mellom grafene til f og g, og linjene $x = a$ og $x = b$ gitt ved

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$f(x) := \sqrt{x+4}$

$\rightarrow \mathbf{f(x) := \sqrt{x+4}}$

$g(x) := x^2 - 1$

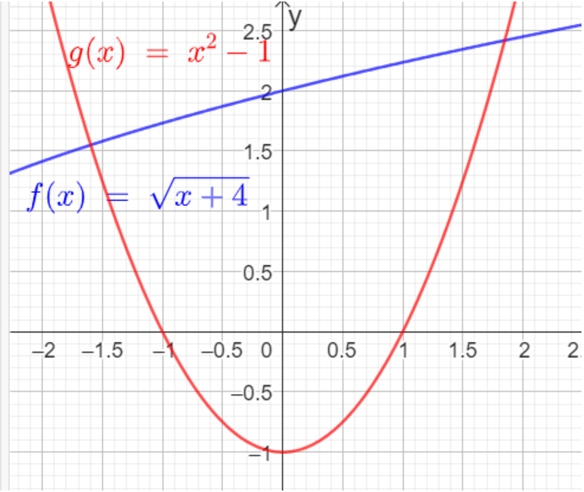
$\rightarrow \mathbf{g(x) := x^2 - 1}$

$f(x) = g(x)$

Løs: $\{x = -1.5969, x = 1.8489\}$

$$\int_{-1.5969}^{1.8489} f - g \, dx$$

$\approx$ **6.9283**



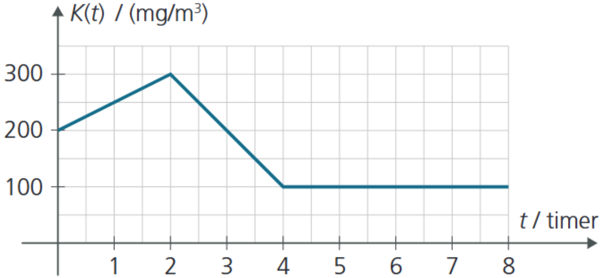
2C: Areal mellom funksjonene f og g i python (hvis dere vil)

```
from pylab import *

def f(x):
  return (x+4)**0.5       # f(x) = kvadratroten av (x+4)

def g(x):
  return x**2 - 1         # g(x) = x^2 - 1

# Skjæringspunktene mellom f og g (løst på forhånd)
a = -1.5969  # Nedre grense
b =  1.8489  # Øvre grense

# Lager en liste med 100 jevnt fordelte x-verdier mellom a og b
x = linspace(a, b, 100)

# Arealet mellom f og g finner vi ved å integrere (f(x) - g(x))
# Her bruker vi trapesmetoden (numerisk tilnærming)
svar = trapezoid(f(x) - g(x), x)
print(svar) # Oputput: 6.927568467295032
```

2C: Gjennomsnittsverdiern til en funksjon i intervallet $[a, b]$

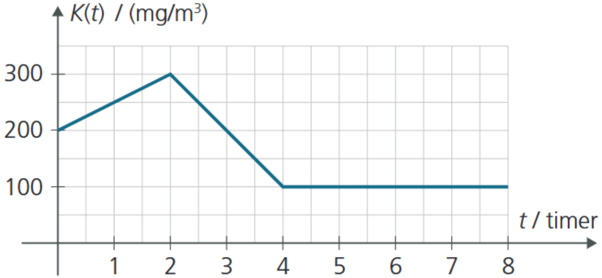
Gjennomsnittsverdien til en kontinuerlig funksjon f i intervallet $[a, b]$ er gitt ved

$$\text{Gjennomsnittsverdi} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$



2C: Oppgave 2.51 side 126

På en fabrikk der det skilles ut et skadelig stoff, ble konsentrasjonen av stoffet målt gjennom en hel arbeidsdag. $K(t)$ er konsentrasjonen ved tidspunktet t. Arbeidsmiljøloven krever at den gjennomsnittlige konsentrasjonen i løpet av arbeidsdagen ikke overstiger $140\,\mathrm{mg/m^3}$. Var kravet i arbeidsmiljøloven oppfylt denne dagen?

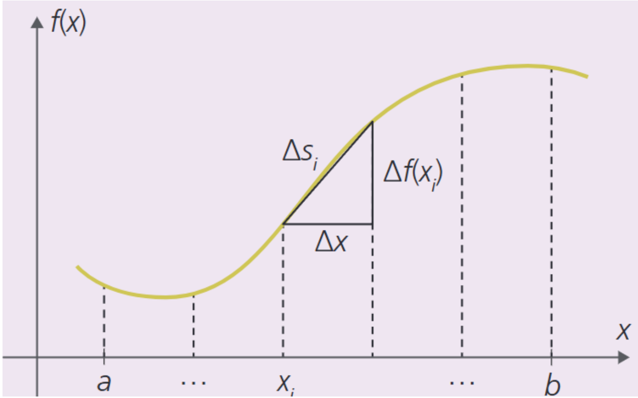


Lengden av grafen til f i intervallet $[a, b]$ kan tilnærmes ved å summere små linjestykker:

$$s_i \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

Den eksakte buelengden er gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



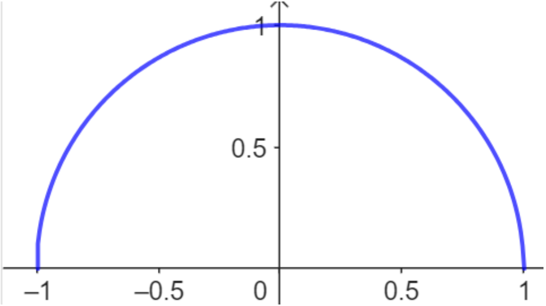
2C: Buelengden til en halvsirkel

$f(x) := \sqrt{1 - x^2}$

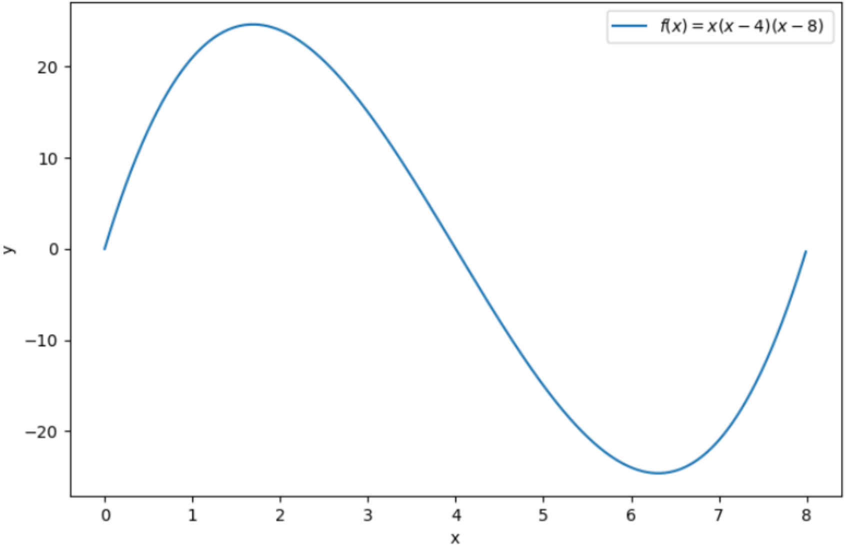
$\rightarrow \; \mathbf{f(x) := \sqrt{-x^2 + 1}}$

$\text{integral}\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}, x, -1, 1\right)$

$\rightarrow \; \pi$



2D: Snille funksjoner kan stykkevis tilnærmes med rette linjer



2D: Ideen som forbinder integralet med den deriverte

La $A(x)$ være arealet mellom grafen til f og x-aksen fra 0 til x:

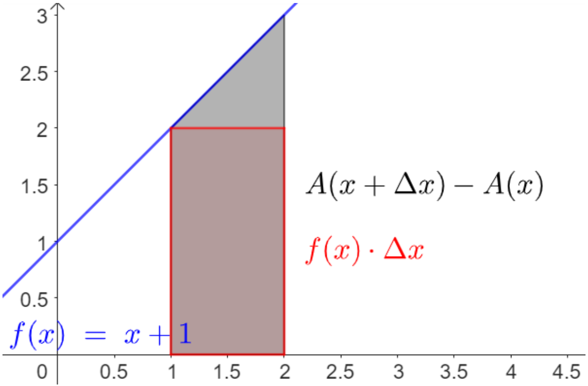
$$A(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

For en liten økning Δx er arealet fra x til $x + \Delta x$ omtrent lik $f(x) \cdot \Delta x$

$$A(x + \Delta x) - A(x) \approx f(x)\, \Delta x$$

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

$$A'(x) \approx f(x)$$



2D: Sammenhengen mellom posisjon og fart

$$s(t+\Delta t) - s(t) \approx v(t)\,\Delta t$$

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \approx v(t)$$

$$s'(t) \approx v(t)$$