7. Лабораторная работа №7

7.1. Цель лабораторной работы

Освоить использование кубических сплайны.

7.1.1. Задание №1

1. Нарисовать 3 сегмента сплайна Эрмита по заданным точкам и известным касательным векторам (см. рисунок 12).
2. Используйте равномерный опорный вектор $\mathbf{t} = \{0, 1, 2, 3\}$.
3. Постройте те же сегменты, используя уже аппроксимированные касательные векторы, найденные с помощью тройных конечных разностей.
4. Проверьте правильность работы вашей программы сверив с рисунком 12.

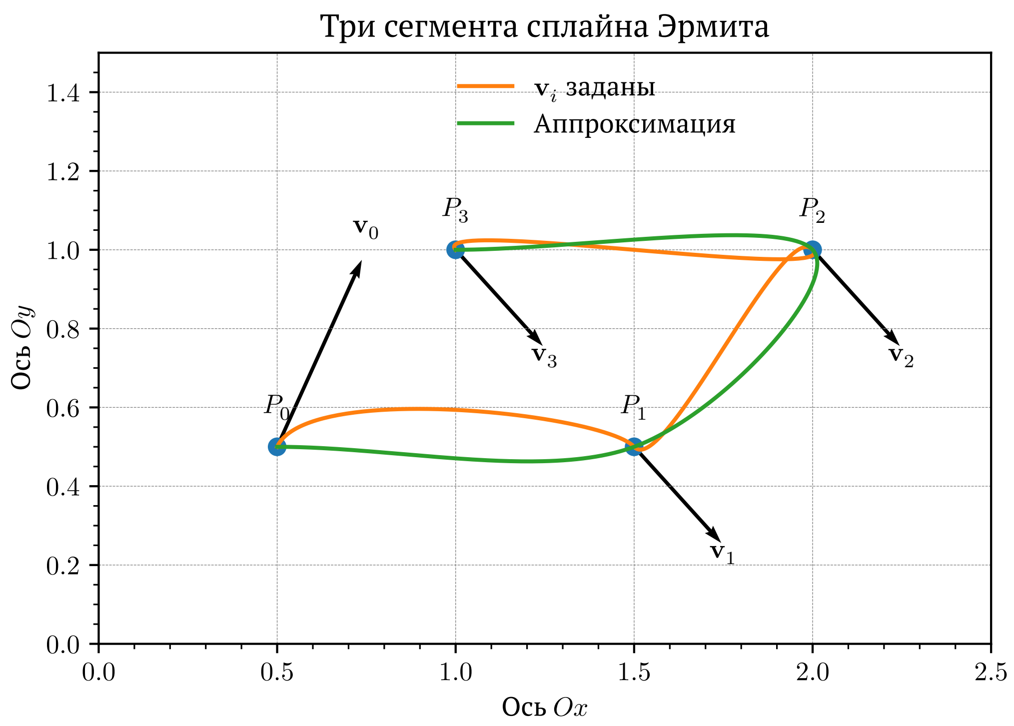

Рис. 12: Изображены точки с радиус-векторами: $\mathbf{p}_0 = (0.5, 0.5), \mathbf{p}_1 = (1.5, 0.5), \mathbf{p}_2 = (2.0, 1.0), \mathbf{p}_3 = (1.0, 1.0)$ и касательные векторы: $\mathbf{v}_0 = (0.25, 0.5), \mathbf{v}_1 = (0.25, -0.25), \mathbf{v}_2 = (0.25, -0.25), \mathbf{v}_3 = (0.25, -0.25)$

Для лучшего понимания рассмотрим формулы, которые получаются при использовании равномерного опорного вектора $\mathbf{t}$ для построения трех сегментов сплайна (см. рис. 12). Сетка значений параметра t в общем случае для трех сегментов задается следующим образом:

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3.$$

Фрагменты сплайна соединяют последовательно четыре точки: P_0 с P_1, P_1 с P_2 и P_2 с P_3. Каждый из трех фрагментов задается параметрическим кубическим полиномом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(\tau) &= h_{00}(\tau)\mathbf{p}_0 + h_{10}(\tau)(t_1 - t_0)\mathbf{v}_0 + h_{01}(\tau)\mathbf{p}_1 + h_{11}(\tau)(t_1 - t_0)\mathbf{v}_1,\\
\mathbf{r}_2(\tau) &= h_{00}(\tau)\mathbf{p}_1 + h_{10}(\tau)(t_2 - t_1)\mathbf{v}_1 + h_{01}(\tau)\mathbf{p}_2 + h_{11}(\tau)(t_2 - t_1)\mathbf{v}_2,\\
\mathbf{r}_3(\tau) &= h_{00}(\tau)\mathbf{p}_2 + h_{10}(\tau)(t_3 - t_2)\mathbf{v}_2 + h_{01}(\tau)\mathbf{p}_3 + h_{11}(\tau)(t_3 - t_2)\mathbf{v}_3,
\end{aligned}$$

где параметр τ нормирован и вычисляется по формуле:

$$\tau = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \ t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \ i = 0, 1, 2.$$

Для каждого сегмента τ меняется одинаково от 0 до 1, поэтому от опорного вектора $\mathbf{t}$ вычисление базисных полиномов $h_{00}(\tau)$, $h_{10}(\tau)$, $h_{01}(\tau)$, $h_{11}(\tau)$ не зависит. Значения t_i и t_{i+1} фигурируют только в основной формуле для $\mathbf{r}_i$.

При равномерном опорном векторе, в частности при $\mathbf{t} = \{0, 1, 2, 3\}$ или иначе $t_i = i, \ i = 0, 1, 2, 3$ разности $t_{i+1} - t_i$ становятся константными: $t_{i+1} - t_i = i + 1 - i = 1$.

7.1.2. Задание №2

1. Реализовать сплайн Эрмита с аппроксимацией тройными конечными разностями 13.
2. Реализовать кардинальный сплайн с возможностью изменения параметра c.
3. Повторить рисунки с 13 по 18. Точки имеют целочисленные координаты, поэтому их можно определить из рисунков.
4. На что влияет параметр c?

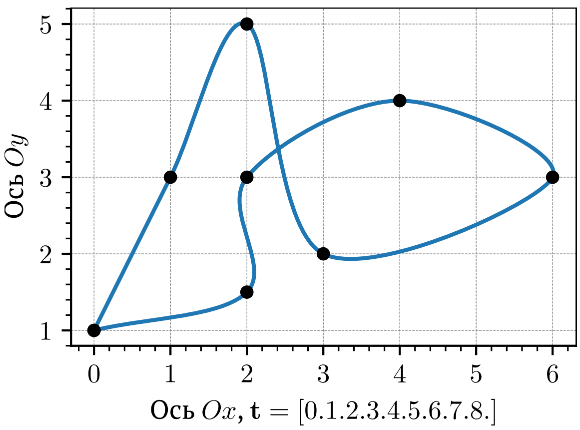

Рис. 13: Аппрокс. конечными разностями

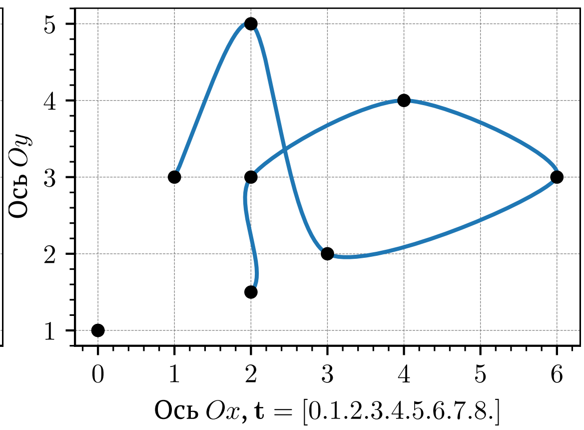

Рис. 14: Кардинальный сплайн, $c = 0.2$

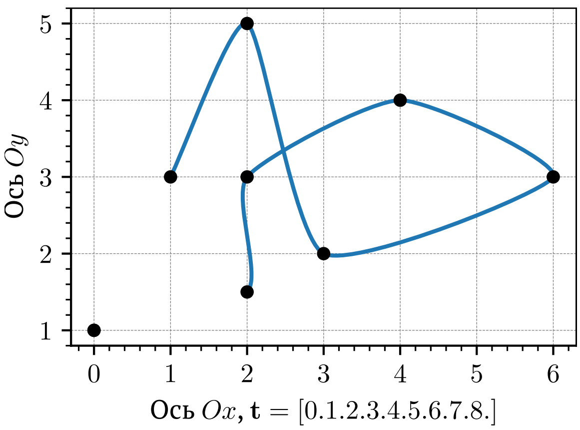

Рис. 15: Кардинальный сплайн, $c = 0.4$

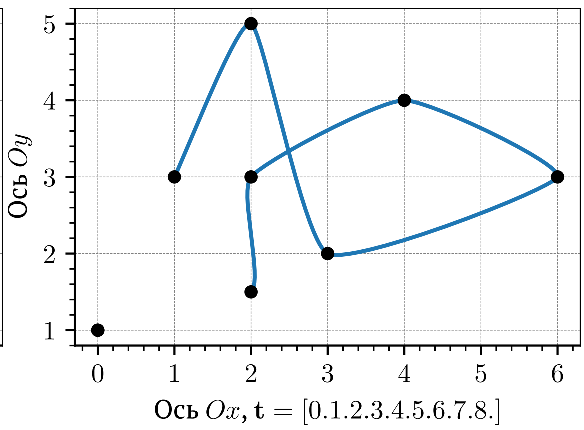

Рис. 16: Кардинальный сплайн, $c = 0.5$

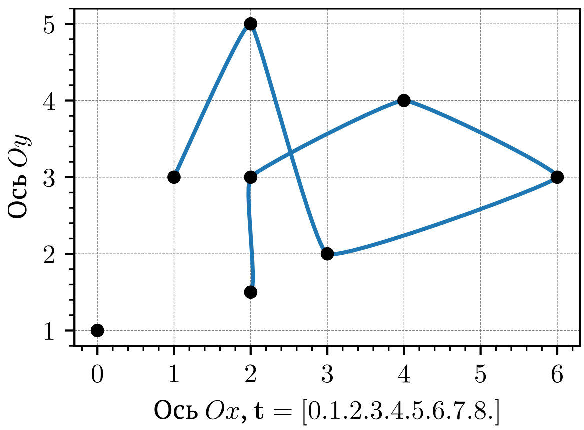

Рис. 17: Кардинальный сплайн, $c = 0.7$

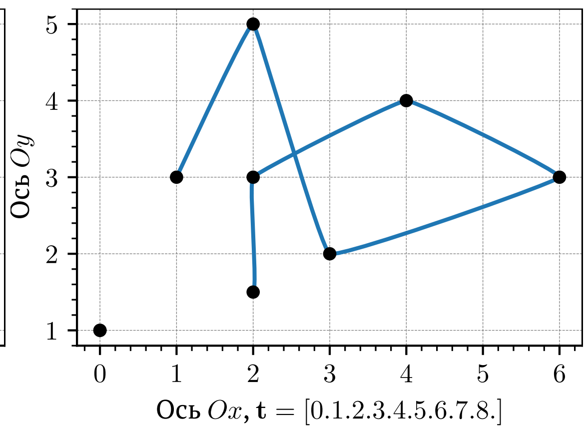

Рис. 18: Кардинальный сплайн, $c = 0.8$

7.1.3. Задание №3

Соединить следующие группы точек кубическим сплайном. Используйте сперва хордовую интерполяцию, а затем нормальную.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 13 & 23 \\ 15 & 23 \\ 16 & 24 \\ 16 & 26 \\ 15 & 27 \\ 13 & 27 \\ 12 & 26 \\ 12 & 24 \\ 13 & 23 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 15 \\ 11 & 17 \\ 23 & 17 \\ 25 & 15 \\ 25 & 9 \end{pmatrix} P_3 = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 4 & 23 \\ 3 & 23 \\ 1 & 21 \\ 1 & 20 \\ 2 & 19 \\ 1 & 18 \\ 1 & 16 \\ 3 & 15 \\ 4 & 15 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} P_4 = \begin{pmatrix} 29 & 16 \\ 30 & 15 \\ 31 & 15 \\ 33 & 17 \\ 33 & 18 \\ 32 & 19 \\ 33 & 20 \\ 33 & 22 \\ 31 & 23 \\ 30 & 23 \\ 29 & 22 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 19 & 22 \\ 24 & 22 \\ 26 & 24 \\ 26 & 29 \\ 24 & 31 \\ 19 & 31 \\ 17 & 29 \\ 17 & 24 \end{pmatrix} P_6 = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 11 & 7 \\ 9 & 6 \\ 9 & 5 \\ 11 & 6 \\ 11 & 4 \\ 12 & 4 \\ 12 & 6 \\ 14 & 5 \\ 14 & 6 \\ 12 & 7 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} P_7 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 15 & 31 \\ 10 & 31 \\ 8 & 29 \\ 8 & 24 \\ 10 & 22 \\ 15 & 22 \\ 17 & 24 \end{pmatrix} P_8 = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 17 & 18 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$P_9 = \begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 22 & 7 \\ 20 & 6 \\ 20 & 5 \\ 22 & 6 \\ 22 & 4 \\ 23 & 4 \\ 23 & 6 \\ 25 & 5 \\ 25 & 6 \\ 23 & 7 \\ 23 & 9 \end{pmatrix} P_{10} = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ 21 & 27 \\ 22 & 26 \\ 22 & 24 \\ 21 & 23 \\ 19 & 23 \\ 18 & 24 \\ 18 & 26 \\ 19 & 27 \end{pmatrix} P_{11} = \begin{pmatrix} 29 & 10 \\ 29 & 9 \\ 5 & 9 \\ 5 & 36 \\ 9 & 33 \\ 25 & 33 \\ 29 & 36 \\ 29 & 10 \end{pmatrix}$$

```
// Те же точки в виде, удобном для копирования в программу
pair[] P1 = {(13, 23.), (15, 23.), (16, 24.), (16, 26.), (15, 27.), (13, 27.), (12, 26.), (12, 24.), (13, 23.)};
pair[] P2 = {( 9,  9.), (9, 15.), (11, 17.), (23, 17.), (25, 15.), (25,  9.)};
pair[] P3 = {( 5, 22.), (4, 23.), (3, 23.), (1, 21.), (1, 20.), (2, 19.), (1, 18.), (1, 16.), (3, 15.), (4, 15.), (5, 16.)};
pair[] P4 = {(29, 16.), (30, 15.), (31, 15.), (33, 17.), (33, 18.), (32, 19.), (33, 20.), (33, 22.), (31, 23.), (30, 23.), (29, 22.)};
pair[] P5 = {(17, 24.), (19, 22.), (24, 22.), (26, 24.), (26, 29.), (24, 31.), (19, 31.), (17, 29.), (17, 24.)};
pair[] P6 = {(11,  9.), (11,  7.), (9,  6.), (9,  5.), (11,  6.), (11,  4.), (12,  4.), (12,  6.), (14,  5.), (14,  6.), (12,  7.), (12,  9.)};
pair[] P7 = {(17, 29.), (15, 31.), (10, 31.), (8, 29.), (8, 24.), (10, 22.), (15, 22.), (17, 24.)};
pair[] P8 = {(19, 22.), (17, 18.), (15, 22.)};
pair[] P9 = {(22,  9.), (22,  7.), (20,  6.), (20,  5.), (22,  6.), (22,  4.), (23,  4.), (23,  6.), (25,  5.), (25,  6.), (23,  7.), (23,  9.)};
pair[] P10 = {(19, 27.), (21, 27.), (22, 26.), (22, 24.), (21, 23.), (19, 23.), (18, 24.), (18, 26.), (19, 27.)};
pair[] P11 = {(29, 10.), (29,  9.), (5,  9.), (5, 36.), (9, 33.), (25, 33.), (29, 36.), (29, 10.)};
```