Гиперграфы. Некоторые определения и свойства

Гиперграф – это такое обобщение простого графа, когда ребрами могут быть не только двухвершинные и одновершинные, но и произвольные подмножества заданного множества вершин. Подобные объекты в математике известны давно, однако введение термина «гиперграф» связано с успешным распространением на них ряда важных понятий и методов теории графов. Существуют понятия, близкие понятию «гиперграф»: матроиды, как специальный класс гиперграфов, а также сети и блок-схемы, и ряд идей этих понятий нашли свое отражение в теории гиперграфов.

Отметим, что все недостающие термины и определения понятий теории графов достаточно полно изложены в монографиях [1,2]. Однако, в отличие от графов, в научной и учебной литературе на русском языке очень мало публикации, которые представляли бы основы теории гиперграфов [3]. Учитывая это обстоятельство, приведем определения используемых в настоящей работе терминов и понятий, относящихся к гиперграфам. При этом будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [1].

Пусть V – конечное непустое множество, E – некоторое семейство непустых подмножеств множества V. Пара (V, E) называется гиперграфом $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{v\}$ и множеством ребер $E = \{e\}$.

Число $|V|$ вершин гиперграфа G называется порядком или размерностью этого гиперграфа. Если $|V| = n$ и $|E| = m$ (с учетом кратности ребер), то G называется (n, m)-гиперграфом.

Если вершина $v \in V$ принадлежит ребру $e \in E$, то будем говорить, что они инцидентны. Каждой вершине $v \in V$ гиперграфа G сопоставим множество $E(v)$ всех инцидентных ей ребер. Число $\deg(v) = |E(v)|$ называется степенью вершины v, а число вершин в ребре $\deg(e) = |e|$ – степенью ребра e. Поскольку ребрами гиперграфа могут быть лишь непустые подмножества вершин, то степень любого ребра не меньше единицы, т.е. $\deg(e) \geq 1$.

Если в гиперграфе $G=(V,E)$ имеются пары ребер $e',e''\in E$, представляющие собой равные подмножества вершин, то ребра e',e'' будем называть кратными, а сам гиперграф G, содержащий хотя бы одну пару кратных ребер, – мультигиперграфом.

Вершина гиперграфа, не инцидентная никакому ребру, называется изолированной. Две вершины v' и v'' гиперграфа G называются смежными, если существует ребро $e\in E$, содержащее обе эти вершины, и несмежными – в противном случае. Два некратных ребра e' и e'' гиперграфа G назовем смежными, если $e'\cap e''\neq\varnothing$. Петлей назовем ребро, инцидентное только одной вершине. Гиперграф G называется простым, если он не содержит петель и кратных ребер.

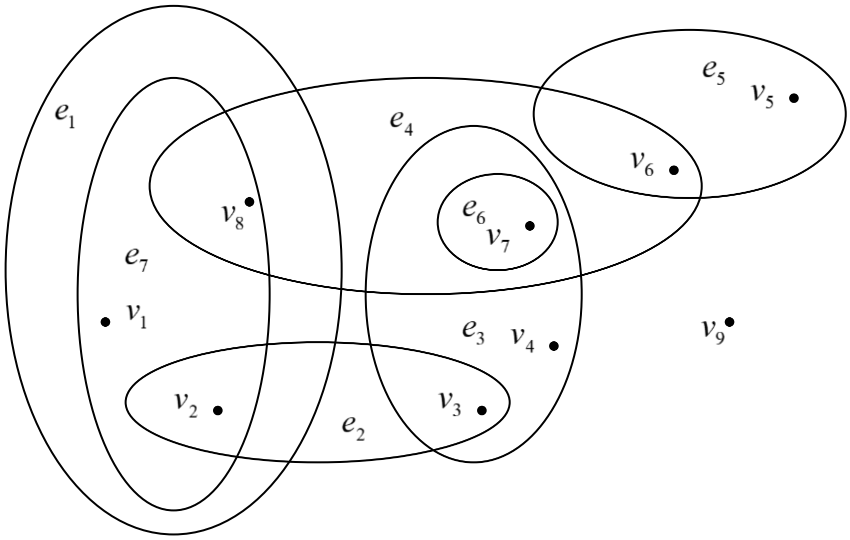

Рис.1.1. Гиперграф $G=(V,E)$

На рис. 1.1 изображен гиперграф $G=(V,E)$ с множеством вершин $V=\{v_1,v_2,...,v_9\}$, $n=9$, и множеством ребер $E=\{e_1,e_2,...,e_7\}$, где $e_1=\{v_1,v_2,v_8)$, $e_2=(v_2,v_3)$, $e_3=(v_3,v_4,v_7)$, $e_4=(v_6,v_7,v_8)$, $e_5=(v_5,v_6)$, $e_6=(v_7)$, $e_7=(v_1,v_2,v_8)$. В гиперграфе G вершина v_9 является изолированной, а ребра e_1 и e_7 кратными. Ребра нарисованы в виде эллипсов, охватывающих инцидентные им вершины. Заметим, что ребра степени 2 можно изображать вместо эллипсов простыми линиями, как в случае обычных графов.

Гиперграфы $G=(V,E)$ и $G'=(V',E')$ называются изоморфными, если существует сохраняющее отношение инцидентности взаимно однозначное соответствие между множествами вершин V, V' и множествами ребер E, E' .

Гиперграф $G'=(V',E')$ называется частью гиперграфа $G=(V,E)$, если $V'\subseteq V$ и $E'\subseteq E$. Часть $G'=(V',E')$ гиперграфа $G=(V,E)$ называется его подгиперграфом, если он образуется из исходного гиперграфа G путем удаления некоторых его вершин вместе с инцидентными им ребрами. Часть $G'=(V',E')$ гиперграфа $G=(V,E)$ назовем реберным подгиперграфом, если из G удаляются только ребра.

Сочетанием в гиперграфе G называется такое подмножество $E'\subseteq E$, для любых двух различных ребер e' и e'' которого их пересечение $e'\cap e''=\varnothing$, т.е. любые два ребра из E' не смежные. Это сочетание называется максимальным, если оно содержит максимальное число несмежных ребер. Сочетание назовем совершенным, если его ребра покрывают все вершины гиперграфа G, и каждая вершина $v\in V$ инцидентна в точности одному ребру этого сочетания. Среди всех совершенных сочетаний выделяем такое, у которого число сочетания $\pi(G)=|E'|$ является минимальным, и называем его минимальным совершенным сочетанием данного гиперграфа G.

Если в гиперграфе G нет кратных ребер и степень всякого ребра $e\in E$ равна ℓ $(|e|=\ell)$, то такой гиперграф называют ℓ-однородным. Из этого определения следует, что у n-вершинного ℓ-однородного гиперграфа G каждое сочетание является минимальным совершенным сочетанием, и число этого сочетания равно n/ℓ. Ясно, что всякий 2-однородный гиперграф является графом. При $\ell=3$ гиперграф G будем называть 3-однородным.

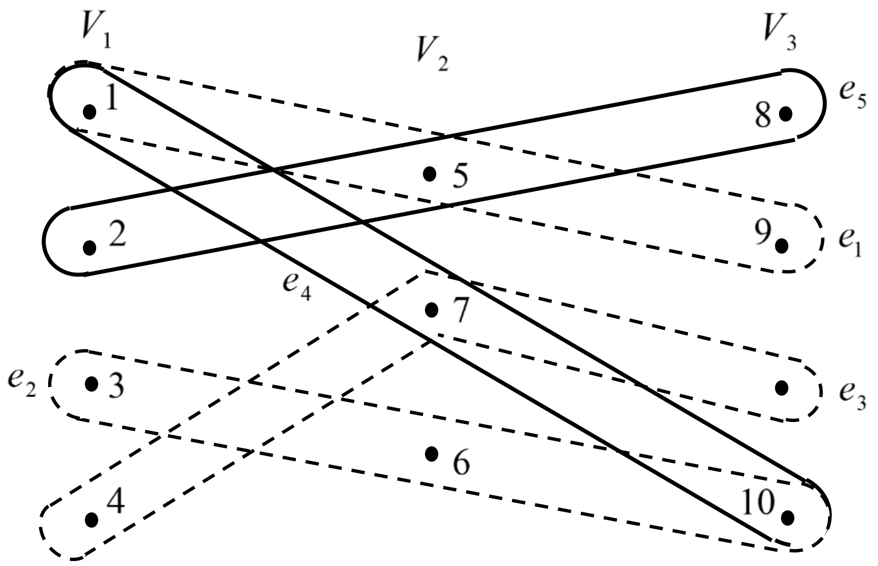

Рис. 1.2. 11-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G=(V_1,V_2,V_3,E)$

Гиперграф $G=(V,E)$ называется ℓ-дольным, если множество V его вершин разбито на доли (подмножества) V_s, $s=\overline{1,\ell}$ так, что выполняются два условия:

1) всякая пара вершин из одной доли является не смежной;

2) у всякого ребра $e\in E$ каждая пара вершин $v',v''\in e$ принадлежит различным долям.

Гиперграф G называется 3-дольным 3-однородным, если множество вершин V разбито на три подмножества V_s, $s=\overline{1,3}$ так, что в каждом ребре $e=(v_1,v_2,v_3)\in E$ его вершины принадлежат различным долям, т.е. $v_S\in V_S$, $s=\overline{1,3}$. В этом случаем гиперграф G будем обозначать через $G=(V_1,V_2,V_3,E)$.

Рассмотрим гиперграф $G=(V_1,V_2,V_3,E)$, $V_1=\{1,2,3,4\}$, $V_2=\{5,6,7\}$, $V_3=\{8,9,10,11\}$, $E=\{e_1,e_2,...,e_5\}$, где $e_1=(1,5,9)$, $e_2=(3,6,10)$, $e_3=(4,7,11)$, $e_4=(1,7,10)$, $e_5=(2,5,8)$, представленный на рис. 1.2. Нетрудно увидеть, что в рассматриваемом гиперграфе имеются три тупиковых сочетания $E_1=\{e_1,e_2,e_3\}$, $E_2=\{e_2,e_3,e_5\}$, $E_3=\{e_4,e_5\}$, $E_i\subset E$, $i=\overline{1,3}$. Сочетание $E_0\subset E$

называется тупиковым, если любое ребро $e \in (E \setminus E_0)$ пересекается хотя бы с одним ребром из E_0. Отметим, что максимальное (совершенное) сочетание, согласно этого определения, также является тупиковым. Гиперграф, изображенный на рис. 1.2, содержит два максимальных сочетания E_1 и E_2.

На рис.1.3 представлен 9-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G = (V_1, V_2, V_3, E)$ с множеством ребер $E = \{e\}$, где $e_1 = (1,4,7)$, $e_2 = (2,5,8)$, $e_3 = (3,6,9)$, $e_4 = (1,5,8)$, $e_5 = (2,4,7)$, $e_6 = (3,5,8)$.

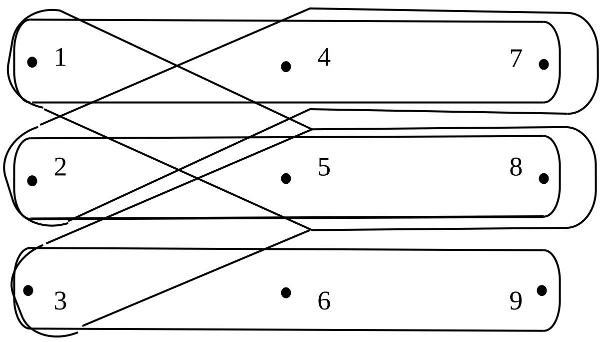

Рис.1.3. 9-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G = (V_1, V_2, V_3, E)$

На рис.1.4 и рис.1.5 для гиперграфа $G = (V_1, V_2, V_3, E)$ представлены его совершенные сочетания $x_1 = (V, E_{x_1})$ и $x_2 = (V, E_{x_2})$, в которых $E_{x_1} = \{e_1, e_2, e_3)$ и $E_{x_2} = \{e_3, e_4, e_5)$.

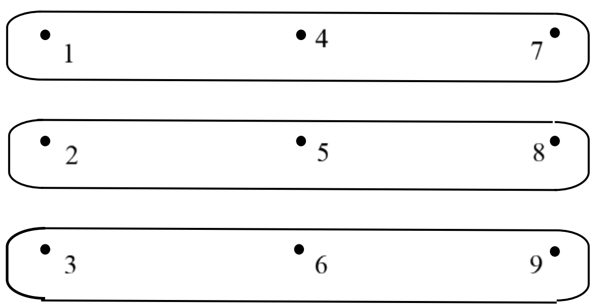

Рис.1.4. Совершенное сочетание $x_1 = (V, E_{x_1})$

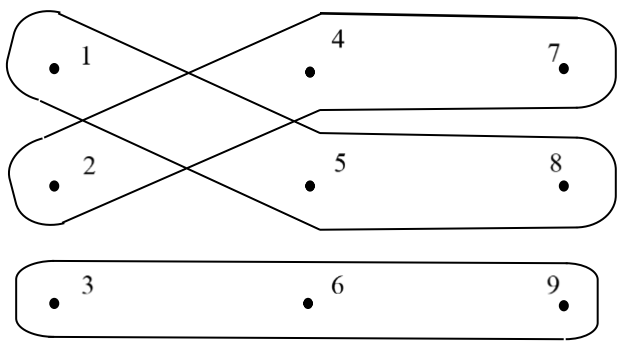

Рис.1.5. Совершенное сочетание $x_2 = (V, E_{x_2})$ $G = (V_1, V_2, V_3, E)$

В гиперграфе $G = (V_1, V_2, V_3, E)$ звездой называется такая его часть $z = (V_1^Z, V_2^Z, V_3^Z, E_Z)$, $V_S^Z \subseteq V_S, s = \overline{1,3}$, в которой любые ребра $e', e'' \in E_Z$ пересекаются в одной и той же вершине $v \in V_1^Z$, т.е. мощность $|V_1^Z| = 1$, и не пересекаются ни в какой вершине $v \in V_3^Z$. Звезда называется простой, если всякая пара ребер $e', e'' \in E_Z$ пересекается только в одной вершине $v \in V_1^Z$. Степенью звезды r называют число рёбер в ней.

Если в подгиперграфе $G' = (V', E')$ гиперграфа $G = (V, E)$ каждая компонента связности является звездой с центром в некоторой вершине $v \in V_1$, то G' называем покрытием гиперграфа звездами. Допустимым является такое покрытие гиперграфа G простыми звёздами, степени которых равны $r(v)$, и каждая вершина $v \in V_3$ инцидентна только одному ребру некоторой звезды с центром $v \in V_1$.

На рис.1.6 представлен 14-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G = (V_1, V_2, V_3, E)$ с множеством ребер $E = \{e\}$, где $e_1 = (1,3,9)$, $e_2 = (1,5,10)$, $e_3 = (1,6,11)$, $e_4 = (2,4,12)$, $e_5 = (2,7,13)$, $e_6 = (2,8,14)$, $e_7 = (1,4,9)$, $e_8 = (2,6,13)$. По своему определению допустимое покрытие 3-дольного гиперграфа $G = (V, E) = (V_1, V_2, V_3, E)$ звездами представляет собой такой его подгиперграф $x = (V_x, E_x)$, $V_x \subseteq V$, $E_x \subseteq E$, в котором каждая компонента связности является звездой с центром в определенной вершине $v \in V_1$, причем ее степень равна $r(v)$. На рис.1.7 показано допустимое покрытие звездами с вектором степеней $r = (r_1, r_2) = (3,3)$ гиперграфа, изображенного на рис.1.6.

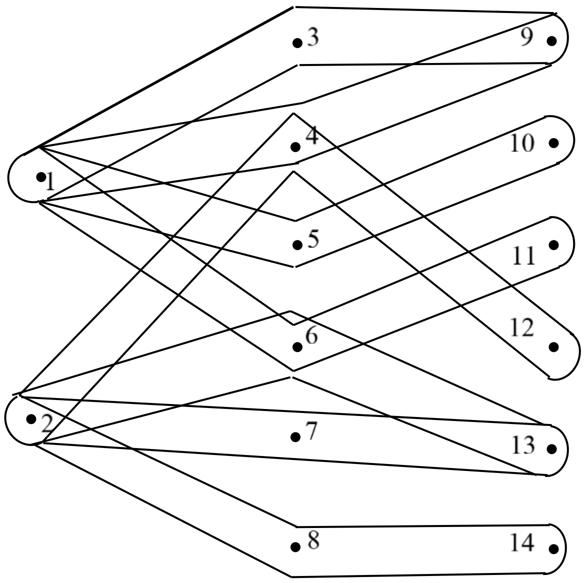

Рис.1.6. 14-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф

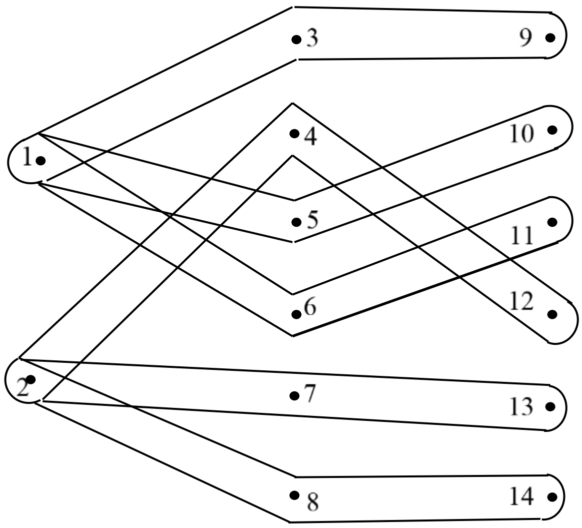

Рис 1.7. Допустимое покрытие гиперграфа звездами

Ребро $e \in E$ гиперграфа G называется взвешенным (N-взвешенным), если ему поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число $w(e) \geq 0$ (последовательность чисел $w_\nu(e) \geq 0,\ \nu = 1,2,\ldots,N$). Гиперграф называется взвешенным (N-взвешенным), если каждое его ребро является взвешенным (N-взвешенным).