Мухамедияр Адиль Группа НКНбд-01-20.

Домашняя работа № 4.

№2. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min$

$$g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0$$

1) Проверка на регулярность

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

Условие Лагранжа выполняется для допустимых $x \Rightarrow \lambda_0 = 1$.

2) Составляем ф-цию Лагранжа

$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 (x_1^2 + 2x_2^2 - 8)$$

3) Выполняем необходимое условие

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 + 4\lambda_1 x_2 = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \lambda_1 = -1. \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \lambda_1 = -0{,}5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Условие допустимости

$g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0$ $\Rightarrow \lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \forall \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ нет решения, т.к. это противоречия $g(x)$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm 2 \Rightarrow x^* = (0;2), (0;-2)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$ Не подходит.

$\lambda_1 = -0{,}5$

из (2) ур. $\Rightarrow x_2 \in \forall$

из (1) $\Rightarrow x_1 = 0$

противоречия $g(x) \Rightarrow$ нет решения

4) Проверяем достаточное условие

$$d^2\mathcal{L} = \cancel{(2+2\lambda_1)dx_1^2 + (2+4\lambda_1)dx_2^2} \; (2+2\lambda_1)\,dx_1^2 + (2+4\lambda_1)\,dx_2^2$$

$\cancel{x^* = (0;2) \Rightarrow}$

т. $(0;2)$: $d^2\mathcal{L} > 0 \Rightarrow$ т. рег. лок. усл. min

т. $(0;-2)$: $d^2\mathcal{L} < 0 \Rightarrow$ т. рег. лок. усл. max.

№1. Проверить т. $x^* = (-2;2)^T$ на решение задачи

$$\begin{cases} f(x) = x_1 \cdot x_2 \to \min \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

1) Проверка на регулярность

$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ Условие Лагранжа выполняется для допустимых $x \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1.$

2) Ф-ция Лагранжа

$$\mathcal{L} = x_1 \cdot x_2 + \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 8)$$

3) Выполняем необходимое условие

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \ (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = x_1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \text{Подставим } x_1 = -2;\ x_2 = 2$$

$(1) \Rightarrow \lambda_1 = 0,5$

$(2) \Rightarrow \lambda_1 = 0,5$

Условие допустимости.

$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0 \Rightarrow 4 + 4 - 8 = 0 \Rightarrow$ верно.

4) Проверяем достаточное условие

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda_1 dx_1^2 + 2\lambda_1 dx_2^2 = 4\lambda_1 dx_2^2$

$dx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow dx_1 = -dx_2$

т. $(-2;2)$: $d^2\mathcal{L} > 0 \Rightarrow$ т. рег. лок. усл. min

№4. $\begin{cases} f(x) = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3 \to extr. \\ g_1(x) = x_1 + x_2 + 6 = 0 \end{cases}$

1) Проверка на регулярность

$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$ - услов. $\Rightarrow$ регулярность выполнена $\Rightarrow \lambda_0 = 1$.

2) Ф-ция Лагранжа

$$\mathcal{L} = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 + 6)$$

3) Выполняем необх. усл.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 4x_1 - 4 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 - 8 + \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-\lambda_1 + 4}{4} \\ x_2 = \frac{-\lambda_1 + 8}{2} \end{cases}$$

Усл. допустимости

$g_1(x) = x_1 + x_2 + 6 = 0 \Rightarrow \frac{4-\lambda_1}{4} + \frac{8-\lambda_1}{2} + 6 = 0 \Rightarrow 4 - \lambda_1 + 16 - 2\lambda_1 +$

$+ 24 = 0$

$$3\lambda_1 = 44 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{44}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{8}{3} \\ x_2 = -18 \end{cases}$$

4) Проверяем достаточное условие

$d^2\mathcal{L} = 4dx_1^2 + 2dx_2^2 \Rightarrow d^2\mathcal{L} > 0. \Rightarrow$ т. $(-\frac{8}{3}; -18)$ – т. рег. лок. усл. min.

№3. Проверить т. $x^* = (0;2)^T$ на решение задачи

$$\begin{cases} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min \\ g_1(x) = x_2 - x_1^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Также сделать графическую иллюстрацию.

1) $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

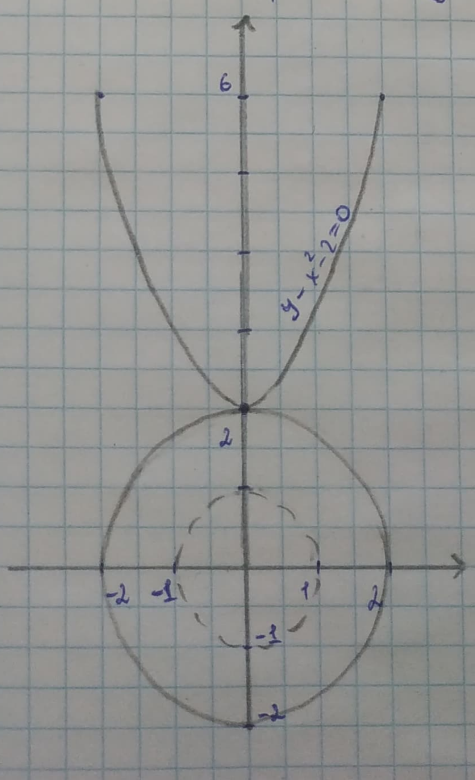
2) $\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 (x_2 - x_1^2 - 2)$

3) $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Подставим $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_1 = -4 \end{cases}$ ✓

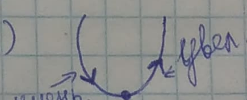
$g_1(x) = x_2 - x_1^2 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ верно

4) $d^2\mathcal{L} = (2 - 2\lambda_1) dx_1^2 + 2dx_2^2 = 10dx_1^2 + 2dx_2^2$

т. $(0;2)$: $d^2\mathcal{L} > 0 \Rightarrow$ т. рег. лок. усл. min.



$f(x)$ и $g(x)$ касаются в точке $(0;2)$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. $(0;2)$ – т. рег. лок. усл. min.