Материалы к лекциям по математическому анализу для студентов РУДН, обучающихся по направлениям НК и НИ III семестр

Е. И. Галахов

1 Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Определение 1.1. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению вида

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = a_0, \tag{1.1}$$

называется *гиперплоскостью в пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ фиксировано, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Определение 1.2. Будем называть кубы вида

$$Q_{m,k} = \left\{ x \colon \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{10^k} \right\} \tag{1.2}$$

кубами ранга k.

Замечание 1.1. Очевидно, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$ совокупность всех кубов ранга k покрывает все пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} Q_{m,k} = \left\{ x \colon \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i + 1}{10^k} \right\}.$$

Определение 1.3. Определим *меру (n–мерный объем)* куба $Q_{m,k}$ по формуле

$$\mu(Q_{m,k}) = 10^{-kn}, \tag{1.3}$$

а объем любого множества $S = \bigcup\limits_j Q_j$, состоящего из некоторого множества попарно различных кубов ранга k, определим как сумму объемов входящих в него кубов:

$$\mu(S) = \mu\left(\bigcup_j Q_j\right) = \sum_j \mu(Q_j). \tag{1.4}$$

Очевидно, что $\mu(S) \geq 0$ для любого S. Будем считать по определению, что $\mu(\emptyset) = 0$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $s_k(X)$ объединение всех кубов ранга k, целиком содержащихся в X, а через $S_k(X)$ – объединение всех кубов ранга k, пересекающихся с X:

$$s_k = s_k(X) := \bigcup_m \bigcup_{Q_{m,k} \subset X} Q_{m,k}, \quad S_k = S_k(X) := \bigcup_m \bigcup_{Q_{m,k} \cap X \neq \emptyset} Q_{m,k}. \tag{1.5}$$

Из этого определения следует, что множества $s_k(X)$ возрастают с ростом k и содержатся в X, а множества $S_k(X)$ убывают с ростом k и содержат X:

$$s_0 \subset s_1 \subset ... \subset s_k \subset ... \subset X \subset ... \subset S_k \subset ... \subset S_1 \subset S_0,$$

откуда в силу (1.4) следует

$$0 \leq \mu(s_0) \leq \mu(s_1) \leq ... \leq \mu(s_k) \leq ... \leq \mu(S_k) \leq ... \leq \mu(S_1) \leq \mu(S_0) \leq +\infty. \tag{1.6}$$

Таким образом, последовательности $\{\mu(s_k)\}$ и $\{\mu(S_k)\}$ являются монотонными, а следовательно, имеют конечные или бесконечные пределы.

Определение 1.4. Предел $\mu_*(X) := \lim\limits_{k\to\infty} \mu(s_k)$ называется *нижней (внутренней) n–мерной мерой (Жордана)* множества X, а предел $\mu^*(X) := \lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k)$ – *верхней (внешней) n–мерной мерой (Жордана)* множества X.

В силу (1.6) для любого X имеем

$$0 \leq \mu_*(X) \leq \mu^*(X) \leq +\infty.$$

Определение 1.5. Если $\mu_*(X) = \mu^*(X)$ конечны, то множество X называется *измеримым (по Жордану)*, а общее значение $\mu_*(X)$ и $\mu^*(X)$ называется *мерой Жордана* множества X и обозначается через $\mu(X)$.

Пример 1.1. Существуют множества, неизмеримые по Жордану, например, множество $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Легко проверить, что $\mu_*(\mathbb{Q}_0) = 0 < 1 = \mu^*(\mathbb{Q}_0)$.

Лемма 1.1. (Монотонность верхней и нижней мер.) *Если $X_1 \subset X_2$, то*

$$\mu_*(X_1) \leq \mu_*(X_2), \quad \mu^*(X_1) \leq \mu^*(X_2). \tag{1.7}$$

Доказательство. Если $X_1 \subset X_2$, то из определений s_k и S_k следует, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$ $s_k(X_1) \subset s_k(X_2)$, $S_k(X_1) \subset S_k(X_2)$. Поэтому, согласно (1.4),

$$\mu(s_k(X_1)) \leq \mu(s_k(X_2)), \quad \mu(S_k(X_1)) \leq \mu(S_k(X_2)).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем (1.7).

Следствие 1.1. *Если $X_1 \subset X_2$ и $\mu(X_2) = 0$, то $\mu(X_1) = 0$.*

Доказательство. При условиях следствия имеем

$$0 \leq \mu_*(X_1) \leq \mu^*(X_1) \leq \mu^*(X_2) = \mu(X_2) = 0,$$

т. е. $\mu_*(X_1) = \mu^*(X_1) = 0$.

Обозначим

$$\sigma_k = \sigma_k(X) := \bigcup_m \bigcup_{Q_{m,k} \subset (S_k \setminus s_k)} Q_{m,k}.$$

Тогда $S_k = s_k \cup \sigma_k$, причем никакой куб $Q_{m,k}$ не входит одновременно в s_k и σ_k, поэтому согласно определению 1.3 $\mu(S_k) = \mu(s_k) + \mu(\sigma_k)$. Более того,

Лемма 1.2. *Для любого $X \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения $\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \partial X$. Тогда имеем

$$x \in \partial X \subset \overline{X} \subset \overline{S_k(X)} = S_k(X) = s_k(X)_{\text{int}} \cup \sigma_k(X) \tag{1.8}$$

(здесь и далее индекс int означает внутренность соответствующего множества). Но, так как $s_k(X) \subset X$, имеем $s_k(X)_{\text{int}} \subset X_{\text{int}}$, и так как $x \in \partial X$ не может принадлежать X_{int}, то $x \notin s_k(X)_{\text{int}}$. Поэтому из (1.8) следует, что $x \in \sigma_k(X)$, т. е. $\partial X \subset \sigma_k(X)$.

Пусть теперь $x \in \sigma_k(X)$, т.е. существует куб Q ранга k такой, что $x \in Q$ и Q содержится в $\sigma_k(X)$, т.е. $Q \subset S_k(X)$ ($Q \cap X \neq \emptyset$), но $Q \not\subset s_k(X)$ (Q содержит точки, не принадлежащие X). Следовательно, Q содержит точки ∂X, т.е. $x \in Q \subset S_k(\partial X)$.

Теорема 1.1. (Критерий измеримости множеств по Жордану.) *Для того чтобы множество $X \subset \mathbb{R}^n$ было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и чтобы его граница ∂X имела меру $\mu(\partial X) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, оно ограничено (иначе было бы $\mu^*(X) = +\infty$), а $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(s_k(X)) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(X))$ конечны. Поэтому с учетом лемм 1.2 и 1.1 имеем

$$0 \leq \mu^*(\partial X) \leq \mu^*(\sigma_k(X)) = \mu(\sigma_k(X)) = \mu(S_k(X)) - \mu(s_k(X)) \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

т.е. $\mu^*(\partial X) = \mu(\partial X) = 0$.

Достаточность. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и $\mu(\partial X) = 0$. Тогда по определению 1.5 $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(\partial X)) = 0$ и в силу лемм 1.2 и 1.1

$$0 \leq \mu(S_k(X)) - \mu(s_k(X)) = \mu(\sigma_k(X)) \leq \mu(S_k(\partial X)) \to 0 \tag{1.9}$$

при $k \to \infty$.

Из ограниченности множества X вытекает существование конечных пределов

$$\lim_{k\to\infty} \mu(S_k(X)) = \mu^*(X)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \mu(s_k(X)) = \mu_*(X),$$

которые равны между собой в силу (1.9), что и означает измеримость множества X по Жордану.

Из доказанных утверждений вытекают следующие свойства меры Жордана:

1. (Неотрицательность.) *Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ всегда $\mu(X) \geq 0$.*

2. (Монотонность.) *Если $X_1 \subset X_2$ – измеримые множества, то $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$.*

3. (Замкнутость относительно объединения и пересечения.) *Объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами.*

4. (Конечная аддитивность.) *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.*

5. (Инвариантность.) *Мера измеримого множества не меняется при параллельном переносе и ортогональном преобразовании (повороте).*

Примерами множеств нулевой меры Жордана являются графики функций, непрерывных на компакте, и спрямляемые кривые.

2 Понятие кратного интеграла

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

Определение 2.1. Конечная система измеримых множеств $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ называется *разбиением множества X,* если:

1. $\mu(X_i \cap X_j) = 0$ при $j \neq i$;

2. $\bigcup\limits_{j=1}^{j_\tau} X_j = X$.

Определение 2.2. Число

$$|\tau| = \max_{j=1,2,\ldots,j_\tau} \operatorname{diam} X_j$$

называется *мелкостью разбиения* τ.

Лемма 2.1. *Если* $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$, *то* $\mu(X) = \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j)$.

Доказательство. Пусть $X^* = \bigcup\limits_{i\neq j}(X_i \cap X_j)$. Из условия 1 и конечной аддитивности меры Жордана следует, что $\mu(X^*) = 0$ и $\mu(X_j^*) = \mu(X_j)$, где $X_j^* = X_j \setminus X^*$. Множества X_j^* не пересекаются между собой и с X^*, причем $X = \bigcup\limits_{j=1}^{j_\tau} X_j^* \cup X^*$. Поэтому

$$\mu(X) = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j^*) + \mu(X^*) = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j) + \mu(X^*) = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j).$$

Лемма 2.2. *У всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.*

Доказательство. В качестве разбиений $\tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j_k}$ можно выбрать системы множеств $X_j^{(k)} = X \cap Q_j^{(k)}$, где $Q_j^{(k)}$ – все кубы порядка k, имеющие общие точки с X. Действительно, множества $X_j^{(k)}$ измеримы как пересечения измеримых множеств X и $Q_j^{(k)}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{j_k} X_j = X$, а так как при $i \neq j$

$$X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)} \subset Q_i^{(k)} \cap Q_j^{(k)} = \partial Q_i^{(k)} \cap \partial Q_j^{(k)},$$

то

$$\mu(X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}) \leq \mu(\partial Q_i^{(k)} \cap \partial Q_j^{(k)}) \leq \mu(\partial Q_i^{(k)}) = 0.$$

Кроме того,

$$|\tau_k| = \max_{j=1,2,\ldots,j_k} \operatorname{diam} X_j^{(k)} \leq \operatorname{diam} Q_1^{(k)} = \frac{\sqrt{n}}{10^k} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

что и требовалось.

Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ определена функция f, задано разбиение $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ и выбраны точки $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, \ldots, j_\tau$.

Определение 2.3. Всякая сумма вида

$$\sigma_\tau \equiv \sigma_\tau(f) \equiv \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) = \sum_{j=1}^{j_\tau} f(\xi^{(j)})\mu(X_j)$$

называется *интегральной суммой (Римана) функции f, соответствующей разбиению τ.*

Определение 2.4. Функция f называется *интегрируемой (по Риману) на множестве X,* если существует один и тот же конечный предел у любой последовательности интегральных сумм

$$\sigma_{\tau_k} = \sum_{j=1}^{j_k} f(\xi^{(j,k)})\mu(X_j^{(k)}),$$

соответствующих разбиениям $\tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j_k}$ множества X, у которых $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$, а точки $\xi^{(j,k)} \in X_j^{(k)}$ выбраны произвольным образом. Этот предел называется *интегралом Римана от функции f по множеству X* и обозначается $\int\limits_X f(x)\,dx$:

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k}(f; \xi^{(1,k)}, \ldots, \xi^{(j_k,k)}). \tag{2.1}$$

При $n > 1$ интеграл Римана называется *(n)–кратным* (при $n = 2$ – *двойным,* при $n = 3$ – *тройным*).

Замечание 2.1. В этом случае используется также обозначение $\int\limits_X f(x)\,dx = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$.

Замечание 2.2. Можно показать, что при $n = 1$ и $x = [a, b]$ это определение эквивалентно ранее данному определению интеграла Римана (где разбиения состояли только из отрезков, а не из произвольных измеримых множеств).

Определение 2.5. Пусть функция f ограничена на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ – разбиение множества X,

$$m_j = \inf_{x \in X_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in X_j} f(x), \quad j = 1, \ldots, j_\tau.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu(X_j), \quad S_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} M_j \mu(X_j)$$

называют соответственно *нижними и верхними суммами Дарбу.*

Аналогично одномерному случаю формулируется и доказывается следующая

Теорема 2.1. (Критерий интегрируемости Дарбу.) *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для ее сумм Дарбу выполнялось условие*

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Следствие 2.1. *Если функция непрерывна на измеримом компакте, то она интегрируема на нем по Риману.*

Теорема 2.2. (Критерий интегрируемости Лебега.) *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы существовали множества X^* и X^{**} такие, что $X = X^* \cup X^{**}$, $X^* \cap X^{**} = \emptyset$, $\mu(X^*) = 0$ и чтобы f была непрерывна на X^{**}* (т. е. чтобы f была непрерывна на X всюду, кроме, возможно, некоторого множества нулевой меры).

На кратные интегралы от ограниченных функций переносятся все основные свойства интеграла по отрезку:

1. *Если $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, то $\int\limits_X dx = \mu(X)$.*

2. (Линейность интеграла.) *Если функции f_i, $i = 1, \ldots, m$, интегрируемы на множестве X, то для любых чисел λ_i, $i = 1, \ldots, m$, функция $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$ также интегрируема на X и*

$$\int\limits_X \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \, dx = \lambda_i \sum_{i=1}^{m} \int\limits_X f_i \, dx.$$

3. *Если X и Y – измеримые множества, $X \subset Y$, функция f ограничена и интегрируема на множестве Y, то она интегрируема и на множестве X.*

4. (Аддитивность интеграла по множествам.) *Если X – измеримое множество, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ – его разбиение, функция f определена и ограничена на множестве X, то функция f интегрируема на X и*

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{j_\tau} \int\limits_{X_j} f(x)\,dx.$$

5. *Если функции f и g интегрируемы и ограничены на некотором множестве X, то и их произведение fg, а если $\inf\limits_X |g(x)| > 0$, то и отношение f/g интегрируемы на X.*

6. (Интегрирование неравенств.) *Если функции f и g интегрируемы на X и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то*

$$\int\limits_X f(x)\,dx \le \int\limits_X g(x)\,dx.$$

В частности, если X и Y – измеримые множества, $X \subset Y$, функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на Y, то

$$\int\limits_X f(x)\,dx \le \int\limits_Y f(x)\,dx.$$

7. *Если функция f интегрируема и ограничена на множестве X, то и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем*

$$\left|\int\limits_X f(x)\,dx\right| \le \int\limits_X |f(x)|\,dx.$$

8. *Если функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на измеримом открытом множестве G, $x^{(0)} \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$, то*

$$\int\limits_G f(x)\,dx > 0.$$

9. (Полная аддитивность интеграла по открытым множествам.) *Если G, G_m – измеримые открытые множества, $G_m \subset G_{m+1}$ ($m \in \mathbb{N}$), $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m = G$, а функция f интегрируема и ограничена на G, то*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{G_m} f(x)\,dx = \int\limits_{G} f(x)\,dx$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{G} f(x)\,dx = \int\limits_{G_1} f(x)\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{G_{m+1}\setminus G_m} f(x)\,dx.$$

10. (Теоремы о среднем.) *Если функции f и g интегрируемы на X, $m \le f(x) \le M$ ($x \in X$) и функция g не меняет знак на X, то существует такое число $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int\limits_{X} f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_{X} g(x)\,dx.$$

Если при этом $X = G$ – область, а функция f непрерывна и ограничена на ней, то существует такая точка $\xi \in G$, что

$$\int\limits_{G} f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_{G} g(x)\,dx.$$

Доказательства этих утверждений в целом аналогичны одномерному случаю.

3 Сведение кратного интеграла к повторному

Определение 3.1. Пусть функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $\varphi(x) \le \psi(x)$ ($a \le x \le b$) и

$$E = \{(x,y) :\, a \le x \le b,\, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Тогда E называется *стандартной областью относительно x.*

Ясно, что E – измеримый компакт.

Определение 3.2. Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ и $f(x, \cdot)$ при каждом $x \in [a, b]$ интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$. Тогда функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

называется *интегралом, зависящим от параметра x,* а интеграл

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy, \tag{3.1}$$

если он существует, называется *повторным интегралом.*

Лемма 3.1. *Если функция f непрерывна на E, то функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Сделаем в интеграле (3.1) преобразование

$$y = \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t, \quad 0 \le t \le 1,$$

и обозначим

$$g(x, t) = f(x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t)(\psi(x) - \varphi(x)).$$

Тогда получим

$$F(x) = \int\limits_0^1 g(x, t)\, dt,$$

где g – непрерывная функция (как композиция непрерывных функций) на прямоугольнике

$$P = \{(x, t) :\, a \le x \le b,\ 0 \le t \le 1\},$$

а следовательно, равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех Δx, для которых $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|g(x + \Delta x, t) - g(x, t)| < \varepsilon, \quad (x, t) \in P, \quad (x + \Delta x, t) \in P,$$

а следовательно, и неравенство

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int\limits_0^1 g(x + \Delta x, t)\, dt - \int\limits_0^1 g(x, t)\, dt \right| \le \\ &\le \int\limits_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|\, dt < \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. F непрерывна на $[a,b]$.

Теорема 3.1. (Равенство двойного интеграла повторному.) *Если функция f непрерывна на E, то*

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{3.2}$$

Доказательство. Повторный интеграл в правой части (3.2) существует вследствие леммы. Для доказательства равенства (3.2) введем разбиение τ_k множества E на подмножества

$$E_{ij}^{(k)} = \{(x,y):\ x_{i-1,k} \le x \le x_{i,k},\ \varphi_{j-1,k}(x) \le y \le \varphi_{j,k}(x)\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,k$, $j = 1,\dots,k$,

$$x_{i,k} = a + \frac{b-a}{k} i,$$

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k} j \ (x \in [a,b]).$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} &\le \sqrt{|x_{i,k}-x_{i-1,k}|^2 + \max_{x\in[x_{i-1,k},x_{i,k}]} |\varphi_{j,k}(x)-\varphi_{j-1,k}(x)|^2} \le \\
&\le \sqrt{\frac{(b-a)^2}{k^2} + \max_{x\in[a,b]} \frac{|\psi(x)-\varphi(x)|^2}{k^2}} \le \\
&\le \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2 + \max_{x\in[a,b]}(|\psi(x)|+|\varphi(x)|)^2} \le \\
&\le \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2+4c^2} \to 0 \ (k\to\infty),
\end{aligned}$$

откуда и

$$|\tau_k| = \max_{i,j=1,\dots,k} \operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} \to 0 \ (k \to \infty).$$

Положим теперь

$$m_{ij}^{(k)} = \inf_{(x,y)\in E_{ij}^{(k)}} f(x,y), \quad M_{ij}^{(k)} = \sup_{(x,y)\in E_{ij}^{(k)}} f(x,y), \quad i,j = 1,\ldots,k,$$

$$s_k = \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij}^{(k)} \mu(E_{ij}^{(k)}), \qquad S_k = \sum_{i,j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \mu(E_{ij}^{(k)}), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

В силу интегрируемости f как непрерывной функции на измеримом компакте E и стремления $|\tau_k|$ к 0 при $k \to \infty$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} S_k = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy. \tag{3.3}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} [\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j-1,k}(x)]\,dx = \mu(E_{ij}^{(k)}),$$

будем иметь

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi_{j-1,k}(x)}^{\varphi_{j,k}(x)} f(x,y)\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} dx \int\limits_{\varphi_{j-1,k}(x)}^{\varphi_{j,k}(x)} f(x,y)\,dy \le \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} dx \int\limits_{\varphi_{j-1,k}(x)}^{\varphi_{j,k}(x)} dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} [\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j-1,k}(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \mu(E_{ij}^{(k)}) = S_k$$

и аналогично

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \ge s_k.$$

Переходя в двух последних неравенствах к пределу при $k \to \infty$, в силу (3.3) получим

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \le \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \le \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

что доказывает (3.2).

Замечание 3.1. Если E – стандартная область относительно y, т. е.

$$E = \{(x, y) :\ c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\},$$

где α и β – непрерывные функции на $[c, d]$, а f непрерывна на E, то аналогично предыдущему имеем

$$\iint\limits_E f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx.$$

Следовательно, если E – стандартная область как относительно x, так и относительно y, то в повторном интеграле можно менять порядок интегрирования:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx.$$

Замечание 3.2. Теорема обобщается по индукции на кратные интегралы по множествам произвольной размерности. Например, если

$$E = \{(x, y, z) :\ (x, y) \in E_{xy},\ \varphi_1(x, y) \le z \le \psi_1(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

где $E_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ – измеримый компакт и функции φ_1, ψ_1 непрерывны на E_{xy}, а f – на E, то

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{E_{xy}} dx\, dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Если при этом E_{xy} – стандартная область относительно x, имеет место формула

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Если обозначить через $E(x_0)$ сечение множества E плоскостью $x = x_0$, т. е.

$$E(x_0) = E \cap \{(x, y, z) :\ x = x_0\},$$

то в предыдущей формуле можно объединить два внутренних интегрирования:

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a}^{b} dx \iint\limits_{E(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz. \tag{3.4}$$

Например, если $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_{E} dx\,dy\,dz = \mu_3(E), \quad \iint\limits_{E(x)} dx\,dy = \mu_2(E(x)),$$

где μ_n – мера множества в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, и из (3.4) следует, что

$$\mu_3(E) = \int\limits_{a}^{b} \mu_2(E(x))\,dx,$$

т. е. объем равен одномерному интегралу от площадей сечений.

4 Замена переменных в кратных интегралах. Криволинейные координаты

Теорема 4.1. *Если X – измеримое множество, содержащееся вместе со своим замыканием в открытом множестве G: $\overline{X} \subset G$, $F : G \to \mathbb{R}^n_y$ – непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом J_F, не обращающимся в нуль, а функция f непрерывна на множестве $\overline{F(X)}$, то*

$$\int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy = \int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(X)|\,dx. \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. Знаки замыкания в формуле можно опустить, так как интегралы по измеримому множеству и его замыканию существуют одновременно и совпадают.

Условия теоремы о замене переменных в кратном интеграле можно ослабить.

Определение 4.1. Непрерывное отображение f множества G в пространство X называется *непрерывно продолжаемым на* $\overline{G}$, если существует отображение $f^* : \overline{G} \to X$, сужение которого на G совпадает с X.

Теорема 4.2. *Пусть отображение $F : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^n_y$ взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и J_F не обращается в нуль на G. Пусть F и J_F непрерывно* *продолжаемы на $\overline{G}$, а функция f непрерывна на $G^* := F(G)$ и непрерывно продолжаема на $\overline{G^*}$. Тогда*

$$\int\limits_{G^*} f(y)\,dy = \int\limits_{G} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как G^* измеримо, то $\overline{G^*}$ – измеримый компакт, и функция f^* интегрируема на нем в силу непрерывности, а следовательно, и f интегрируема на G^*. Аналогично доказывается интегрируемость $f(F(x))|J_F(x)|$ на G.

Представим G в виде объединения монотонной последовательности измеримых открытых множеств $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$, где $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Применяя теорему из предыдущей лекции к множествам G_k, получим

$$\int\limits_{F(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.3}$$

В силу полной аддитивности интеграла имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx = \int\limits_{G} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.4}$$

Так как множества $F(G_k)$ также открыты и $G^* = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F(G_k)$, $\overline{F(G_k)} \subset F(G_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, то аналогично (4.4) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{F(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G^*} f(y)\,dy. \tag{4.5}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (4.3), получаем (4.2).

Замечание 4.2. В отличие от предыдущей теоремы, продолжение F может не быть взаимно однозначным на ∂G, а продолженный якобиан может обращаться на ∂G в нуль.

Замечание 4.3. (Геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения.) Пусть $\{D\}$ – семейство измеримых областей $D \subset G$, имеющих общую точку $x^{(0)}$. В условиях доказанных теорем в силу теоремы о среднем имеем

$$\mu(F(D)) = \int\limits_{F(D)} dy = \int\limits_{D} |J_F(x)|\,dx = |J_F(\xi)|\,\mu(D),\ \xi \in D.$$

Если семейство $\{D\}$ содержит области сколь угодно малого диаметра, то из неравенства $|\xi - x^{(0)}| \leq \operatorname{diam} D$, $\xi, x^{(0)} \in D$, вытекает

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \xi = x^{(0)}$$

и вследствие непрерывности якобиана

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\mu(F(D))}{\mu(D)} = \lim_{\operatorname{diam} D \to 0} |J_F(\xi)| = |J_F(x^{(0)})|, \tag{4.6}$$

т.е. абсолютная величина якобиана отображения в данной точке равна коэффициенту изменения меры множества в этой точке.

Определение 4.2. Пусть взаимно однозначное отображение $F : G \to \mathbb{R}^n_y$ имеет вид

$$y = F(x) = \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Тогда числа $(y_1, \dots, y_n)$ называют *криволинейными координатами* точки x.

Рассматривая $G^* = F(G)$ как множество наборов криволинейных координат точек $x \in G$, формулу (4.2) записывают в виде

$$\int\limits_G f(y)\,dy = \int\limits_G f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.7}$$

Обратный переход от координат $y_1, \dots, y_n$ к координатам $x_1, \dots, x_n$ осуществляется при помощи обратного отображения

$$x = F^{-1}(y) = \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ x_n = x_n(y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Двумерный случай. Пусть взаимно однозначное отображение открытого множества $G^* \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ на $G \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$ задано формулами

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

а обратное к нему отображение $G \to G^*$ – формулами

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

и пусть выполнены все условия теоремы 6.1. Установим геометрический смысл якобиана $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Зафиксируем $(u_0,v_0)\in G$, $\Delta u>0$, $\Delta v>0$ и рассмотрим образ

$$P=\{(x,y):\, x=x(u,v),\ y=y(u,v);\ u_0<u<u_0+\Delta u,\ v_0<v<v_0+\Delta v\}$$

прямоугольника

$$P^*=\{(u,v):\, u_0<u<u_0+\Delta u,\ v_0<v<v_0+\Delta v\},$$

называемый *координатным параллелограммом.* Обозначим $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$, $M_0=(x_0,y_0)$.

Так как граница ∂P^* является кусочно гладкой, то $\mu(\partial P^*)=0$, а так как ∂P является образом ∂P^* при взаимно однозначном непрерывном отображении, то и $\mu(\partial P)=0$. Следовательно, множество P измеримо, и к нему можно применить формулу (4.7). Согласно интегральной теореме о среднем существует такая точка $M\in P^*$, что

$$\begin{aligned}\mu(P)&=\iint\limits_P dx\,dy=\iint\limits_{P^*}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Big|_M\iint\limits_{P^*}du\,dv=\\&=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Big|_M\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}du\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}dv=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Big|_M\Delta u\Delta v.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Обозначая

$$\varepsilon(M)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Big|_M-\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Big|_{M_0},$$

получим

$$\mu(P)=\left(\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Big|_{M_0}+\varepsilon(M)\right)\Delta u\Delta v,$$

причем в силу непрерывной дифференцируемости отображения $(u,v)\to(x,y)$ имеем

$$\lim_{\Delta u^2+\Delta v^2\to 0}\varepsilon(M)=0.$$

Таким образом, абсолютная величина якобиана $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ равна коэффициенту изменения площади криволинейного координатного параллелограмма P по сравнению с площадью декартова координатного прямоугольника P^* (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Частным случаем криволинейных координат на плоскости являются *полярные координаты*

$$(r, \varphi): \quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{4.9}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки (x, y) до начала координат, а φ – угол между радиус-вектором точки (x, y) и положительной полуосью Ox. Для полярных координат якобиан $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ равен

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r. \tag{4.10}$$

Отметим, что отображение (4.9) является взаимно однозначным на открытом прямоугольнике

$$G = \{(r, \varphi):\ 0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

и непрерывно продолжимо на его замыкание, хотя продолженное отображение на ∂G уже не является взаимно однозначным (например, отрезок $r = 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ отображается в одну точку $(0, 0)$) и его якобиан обращается в нуль при $r = 0$. Формула (4.7) для полярных координат принимает вид

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi. \tag{4.11}$$

Из криволинейных координат в $\mathbb{R}^3$ чаще всего используются *цилиндрические*:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h, \\ r \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty < h < \infty, \end{cases} \tag{4.12}$$

и *сферические координаты:*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \\ r \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2. \end{cases} \tag{4.13}$$

Вычисляя якобиан, получаем для цилиндрических координат $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, h)} = r$, а для сферических – $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = r^2\cos\psi$.

5 Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода

Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть $L = \{M(s) : 0 \le s \le S\}$ – спрямляемая кривая на плоскости или в пространстве, s – длина ее дуги, $M(s) = (x(s), y(s), z(s))$, и пусть в каждой точке этой кривой задана числовая функция $f(x(s), y(s), z(s))$, имеющая, например, физический смысл линейной плотности в точке $(x(s), y(s), z(s))$.

Определение 5.1. Будем называть *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции f по кривой L интеграл

$$\int\limits_L f\,ds := \int\limits_0^S f(x(s), y(s), z(s))\,ds, \tag{5.1}$$

если он существует. Кривая L при этом называется *путем интегрирования.*

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода:

1. Если функция f непрерывна на $[0, S]$, то $\int\limits_L f\,ds$ существует. (Это свойство следует из определения криволинейного интеграла 1-го рода и достаточного условия существования определенного интеграла.)

2. $\int\limits_L f\,ds$ не зависит от выбора направления кривой L.

   Доказательство. Пусть $L = AB$ ($s = 0$ в точке A и $s = S$ в точке B). Обозначим длину дуги, отсчитываемую от точки B, через s^*. Тогда $s^* = S - s$, $ds^* = -ds$, а $M = M(S - s^*) = (x(S - s^*), y(S - s^*), z(S - s^*))$ – представление кривой BA. Поэтому

$$\int\limits_{BA} f(x, y, z)\,ds^* = \int\limits_0^S f(x(S - s^*), y(S - s^*), z(S - s^*))\,ds^* =$$
$$= -\int\limits_S^0 f(x(s), y(s), z(s))\,ds = \int\limits_0^S f(x(s), y(s), z(s))\,ds = \int\limits_{AB} f(x, y, z)\,ds.$$

3. Если кривая задана непрерывно дифференцируемым представлением $x(s) = \varphi(t)$, $y(s) = \psi(t)$, $z(s) = \chi(t)$, $a \le t \le b$, без особых точек ($[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0$,

$t \in [a,b]$), то имеет место формула

$$\int\limits_L f\,ds = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt, \tag{5.2}$$

вытекающая из формулы замены переменных $s = s(t)$ в определенном интеграле, где $s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}$:

$$\int\limits_L f\,ds := \int\limits_0^S f(x(s),y(s),z(s))\,ds = \int\limits_{AB} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

Замечание 5.1. Из формулы (5.2) следует независимость криволинейного интеграла 1-го рода от выбора параметра. Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = g(x)$, $a \le x \le b$, то формула (5.2) принимает вид

$$\int\limits_L f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx. \tag{5.3}$$

Криволинейный интеграл 2-го рода.

Пусть $L = AB$ – гладкая ориентированная кривая, $\mathbf{r}(s) = (x(s),y(s),z(s))$, $0 \le s \le S$ – ее векторное представление ($A = (x(0),y(0),z(0))$, $B = (x(S),y(S),z(S))$). Пусть

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha(s),\cos\beta(s),\cos\gamma(s)) -$$

единичный касательный вектор к кривой L, направление которого соответствует выбранному отсчету длин дуг ($\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ – углы между касательной к кривой L в точке s и осями Ox, Oy, Oz соответственно), а

$$\mathbf{a}(x(s),y(s),z(s)) = (P(x(s),y(s),z(s)),Q(x(s),y(s),z(s)),R(x(s),y(s),z(s))) -$$

векторное поле, заданное на кривой L.

Определение 5.2. Величина

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\,ds = \int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(P(x(s),y(s),z(s))\cos\alpha(s) + Q(x(s),y(s),z(s))\cos\beta(s) + R(x(s),y(s),z(s))\cos\gamma(s)\right) ds \tag{5.4}$$

называется *криволинейным интегралом 2-го рода* от вектор-функции $\mathbf{a}$ по кривой L. Кривая L с учетом направления при этом называется *путем интегрирования*, а $\cos\alpha(s)$, $\cos\beta(s)$, $\cos\gamma(s)$ – ее *направляющими косинусами* в точке s.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода:

1. Если функции P, Q, R непрерывны на AB, то $\int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ существует.

   Доказательство. В силу гладкости кривой L и непрерывности на ней функций P, Q и R подынтегральное выражение в криволинейном интеграле 1-го рода $\int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\,ds$ из определения (5.4) является непрерывным, а следовательно, этот интеграл существует.

2. При изменении ориентации кривой L криволинейный интеграл 2-го рода меняет только знак:

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = -\int\limits_{BA} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \tag{5.5}$$

   Доказательство. Если $s^* = S - s$ – переменная длина дуги, отсчитываемая от точки B кривой L, а τ^* – соответствующий единичный касательный вектор к L, то

$$\tau^* = \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{ds}{ds^*} = -\tau,$$

   откуда

$$\int\limits_{BA} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{BA} \mathbf{a}\tau^*\,ds^* = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau^*\,ds = -\int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\,ds = -\int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}.$$

3. Если $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $a \le t \le b$, – векторное представление гладкой ориентированной кривой L, то

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{a}^{b} \mathbf{a}\mathbf{r}'\,dt. \tag{5.6}$$

Доказательство. Заметив, что

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{s'},$$

где штрихом обозначены производные по t, получим

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\, ds = \int\limits_a^b \mathbf{a}\tau s'\, dt = \int\limits_a^b \mathbf{a}\mathbf{r}'\, dt.$$

Замечание 5.2. Критерий независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования будет доказан ниже.

6 Формула Грина

Определение 6.1. Пусть на плоскости задана правая система координат. Ориентацию простого замкнутого контура, лежащего на этой плоскости, будем называть *положительной,* если она соответствует движению против часовой стрелки (т.е. если при движении в соответствии с этой ориентацией конечная часть плоскости, ограниченная контуром, остается слева), и *отрицательной* в противном случае.

Определение 6.2. Ограниченная область G на плоскости Oxy называется *элементарной* относительно оси y, если существуют такие две непрерывные на некотором отрезке $[a, b]$ функции φ и ψ, $\varphi < \psi$ при $x \in [a, b]$, что

$$G = \{(x, y) :\ a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(y)\}. \tag{6.1}$$

Аналогично определяется область, элементарная относительно оси x.

Лемма 6.1. *Если область G элементарна относительно обеих осей, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то справедлива формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy, \tag{6.2}$$

где ∂G^+ – граница G с положительной ориентацией.

Доказательство. Обозначим $A = (a, \varphi(a))$, $B = (b, \varphi(b))$, $A_1 = (a, \psi(a))$, $B_1 = (b, \psi(b))$. Сведем интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$ к повторному и применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$
$$= \int\limits_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)))\, dx = \int\limits_{A_1 B_1} P\, dx - \int\limits_{AB} P\, dx =$$
$$= -\int\limits_{B_1 A_1} P\, dx - \int\limits_{AB} P\, dx.$$

Отрезки AA_1 и BB_1 являются гладкими кривыми. Они параллельны оси Oy, поэтому их касательные, совпадающие с ними по направлению, образуют с осью x прямой угол $\alpha = \pi/2$ с направляющим косинусом $\cos\alpha = 0$, откуда

$$\int\limits_{A_1 A} P\, dx = \int\limits_{BB_1} P\, dx = 0$$

и

$$\begin{aligned} \iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{B_1 A_1} P\, dx - \int\limits_{A_1 A} P\, dx - \\ - \int\limits_{AB} P\, dx - \int\limits_{BB_1} P\, dx = -\int\limits_{\partial G^+} P\, dx. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = -\int\limits_{\partial G^+} Q\, dx. \tag{6.4}$$

Вычитая (6.4) из (6.3), получим (6.2).

Теорема 6.1. *Если G – ограниченная область, которую можно разбить на конечное множество элементарных по обеим осям областей и граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых контуров, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то справедлива формула (6.2).*

Доказательство. Пусть область G разбита на элементарные области G_i, $i = 1, \dots, m$. По лемме 6.1 имеют место равенства

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{6.5}$$

Суммируя левые части этих равенств и используя аддитивность кратного интеграла, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{6.6}$$

При суммировании правых частей равенств (6.5) остается только криволинейный интеграл по ∂G^+, так как все остальные части границ ∂G_i встречаются в сумме дважды с противоположными ориентациями, в силу чего сумма интегралов по ним равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{6.7}$$

Поскольку в силу (6.5) левые части формул (6.6) и (6.7) равны, то равны и правые, ч.т.д.

Следствие 6.1. *Если в дополнение к условиям теоремы граница ∂G области G кусочно гладкая, то формулу (6.2) можно записать в виде*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} (P \cos\alpha + Q \cos\beta)\, ds, \tag{6.8}$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta)$ *– единичный касательный вектор к границе ∂G области G.*

(Следствие вытекает из теоремы в силу формулы криволинейного интеграла для кусочно гладких кривых.)

Вычисление площадей по формуле Грина. Полагая в формуле (6.2) $P = 0$, $Q = x$ на $\overline{G}$, получим

$$\mu(G) = \iint\limits_{G} dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} x\, dy. \tag{6.9}$$

Аналогично, при $P = -y$, $Q = 0$

$$\mu(G) = \iint\limits_{G} dx\, dy = -\int\limits_{\partial G^+} y\, dx. \tag{6.10}$$

Складывая (6.9) и (6.10) и деля на 2, получаем

$$\mu(G) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx. \tag{6.11}$$

Пример 6.1. По формуле (6.11) площадь S, ограниченная эллипсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

равна

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} ab \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

Замечание 6.1. Пользуясь формулой Грина и ее следствием (6.9), можно доказать формулу замены переменных в двойном интеграле от непрерывной функции f по области G с кусочно гладкой границей, которая является образом области D при взаимно однозначном и дважды непрерывно дифференцируемом отображении $F\colon D \to G$, заданном формулами

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$$

Пусть вначале $f(x) \equiv 1$ в G. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_{\partial G^+} x\,dy = \pm \int\limits_{\partial D^+} x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial u}\,du \right) = \\ &= \pm \iint\limits_D \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - x\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) du\,dv = \\ &\pm \iint\limits_D \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \right) du\,dv = \iint\limits_D |J_F|\,du\,dv \end{aligned} \tag{6.12}$$

(ориентация ∂D выбирается так, чтобы итоговый интеграл был неотрицательным, как и исходный).

Пусть теперь f – произвольная непрерывная функция в G и $\tau_k = \{D_{j,k}\}_{j=1}^{j_k}$ – разбиение области D, а $\{F(D_{j,k})\}_{j=1}^{j_k}$ – соответствующее разбиение области D. Тогда интегральные суммы для $\int\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ имеют вид

$$\sum_{j=1}^{j_k} f(\xi_{j,k}, \eta_{j,k}) \mu(F(D_{j,k})) = \sum_{j=1}^{j_k} f(\xi_{j,k}, \eta_{j,k}) \int\limits_{F(D_{j,k})} dx\,dy,$$

где $(\xi_{j,k}, \eta_{j,k}) \in F(D_{j,k})$. Пользуясь формулой (6.12), перепишем это выражение в виде

$$\sum_{j=1}^{j_k} f(\xi_{j,k}, \eta_{j,k}) \int\limits_{D_{j,k}} |J_F(u,v)|\, du\, dv,$$

что по интегральной теореме о среднем равно

$$\sum_{j=1}^{j_k} f(\xi_{j,k}, \eta_{j,k}) J_F(u_{j,k}, v_{j,k}) \int\limits_{D_{j,k}} du\, dv,$$

где $(u_{j,k}, v_{j,k}) \in D_{j,k}$. Выбирая в качестве $(\xi_{j,k}, \eta_{j,k})$ прообраз $(u_{j,k}, v_{j,k})$ при отображении F и переходя к пределу при $|\tau_k| \to 0$, получаем (6.2).

7 Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода

Определение 7.1. Пусть $(u,v) \in \overline{G}$, где G – область в $\mathbb{R}^2$. Будем называть непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{r} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ *поверхностью,* а множество $S = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) : (u,v) \in \overline{G}\}$ – ее *носителем.* Носитель S также называют поверхностью.

Определение 7.2. Точка $M_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ поверхности S называется *неособой,* если в ней векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ не коллинеарны, и *особой* в противном случае.

Определение 7.3. Плоскость, проходящая через неособую точку $M_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ поверхности параллельно векторам $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0.*

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{r}_u^0, \mathbf{r}_v^0) := \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.1}$$

Если поверхность S является графиком дифференцируемой функции вида $z = f(x,y)$, то

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)), \quad \mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y).$$

В этом случае уравнение (7.1) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x^0 \\ 0 & 1 & f_y^0 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.
$$z - z_0 = (x - x_0) f_x^0 + (y - y_0) f_y^0, \tag{7.2}$$
где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $f_x^0 = f_x(x_0, y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0, y_0)$.

Определение 7.4. Ненулевой вектор, перпендикулярный касательной плоскости в (неособой) точке $M(u_0, v_0)$ поверхности S, называется *нормалью* к поверхности S в этой точке, а прямая, проходящая через точку $M(u_0, v_0)$ в направлении нормали, – *нормальной прямой.*

Очевидно, что нормалью к поверхности S в точке $M(u_0, v_0)$ является, в частности, вектор
$$\nu = \mathbf{r}_u^0 \times \mathbf{r}_v^0 = \left(\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \right).$$

Соответственно уравнение нормальной прямой к поверхности S в точке $M(u_0, v_0)$ имеет вид
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u^0 & x_u^0 \\ z_v^0 & x_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix}}, \tag{7.3}$$
а в случае поверхности, представляющей собой график функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, – вид
$$\frac{x - x_0}{f_x^0} = \frac{y - y_0}{f_y^0} = -(z - z_0), \tag{7.4}$$
где f_x^0, f_y^0 определены выше.

Пусть в каждой точке поверхности $\mathbf{r} = (x, y, z)$ задана функция $f(x, y, z)$, имеющая, например, физический смысл поверхностной плотности в точке (x, y, z). Найдем массу поверхности S.

Для решения этой задачи приблизим область G совокупностью n квадратных подобластей G_k вида $(u, u + h) \times (v, v + h)$, где $h > 0$, а поверхность S – совокупностью четырехугольников S_k с вершинами $\mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}(u + h, v)$, $\mathbf{r}(u, v + h)$, $\mathbf{r}(u + h, v + h)$. По формуле Тейлора первого порядка с остаточным членом в форме Пеано имеем
$$\mathbf{r}(u + h, v) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_u h + o(h),$$
$$\mathbf{r}(u, v + h) - \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_v h + o(h).$$
Поэтому площадь четырехугольника S_k приближенно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}_u h$ и $\mathbf{r}_v h$, т.е. модулю векторного произведения
$$\Delta\sigma_k = |\mathbf{r}_u h \times \mathbf{r}_v h| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| h^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\Big|_{G_k} \mu(G_k). \tag{7.5}$$

Введем обозначения

$$g_{11} = \mathbf{r}_u^2, \quad g_{12} = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad g_{22} = \mathbf{r}_v^2.$$

Тогда

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = \mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2 \cos^2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2 - \mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2 \sin^2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = \mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Это позволяет переписать равенство (7.5) в виде

$$\Delta\sigma_k = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\Big|_{G_k} \mu(G_k). \tag{7.6}$$

Выберем в каждой из подобластей G_k произвольную точку (ξ_k, η_k) и определим значение функции f в точке $\mathbf{r}(\xi_k, \eta_k)$. Масса области S_k будет приближенно равна

$$f(\mathbf{r}(\xi_k, \eta_k))\Delta\sigma_k.$$

Сумма всех таких масс приближенно представляет массу поверхности S:

$$m(S) \approx \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_k, \eta_k))\Delta\sigma_k,$$

причем тем точнее, чем меньше диаметр областей G_k. Поэтому массу поверхности можно выразить формулой

$$m = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_k, \eta_k))\Delta\sigma_k$$

или с учетом (7.6)

$$m = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_k, \eta_k))\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\Big|_{G_k} \mu(G_k). \tag{7.7}$$

Из определения двойного интеграла следует, что

$$m = \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv,$$

если этот интеграл существует.

Аналогичные конструкции возникают и в других задачах. Соответственно вводится следующее

Определение 7.5. *Поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S называется двойной интеграл

$$\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_G f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv. \tag{7.8}$$

В частности, если поверхность S задана функцией $z = g(x, y)$, а $(u, v) = (x, y)$, имеем

$$\mathbf{r} = (x, y, g(x, y)), \quad \mathbf{r}_u = (1, 0, g_x(x, y)), \quad \mathbf{r}_v = (0, 1, g_y(x, y)),$$

откуда

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1 + g_x^2(x, y)g_y^2(x, y)$$

и в силу (7.8)

$$\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_G f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g_x^2(x, y)g_y^2(x, y)}\,dx\,dy. \tag{7.9}$$

Интеграл (7.8) или (7.9) существует, если область G ограничена и квадрируема, функция f (кусочно) непрерывна и функция $\mathbf{r}$ или соответственно g (кусочно) непрерывно дифференцируема в своих областях определения. Его свойства следуют из общих свойств двойного интеграла.

При $f \equiv 1$ поверхностный интеграл (7.8) определяет площадь поверхности S:

$$\mu(S) = \iint\limits_G \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv. \tag{7.10}$$

Пусть теперь в каждой точке поверхности S непрерывным образом задано направление единичной нормали

$$\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Для многих поверхностей это можно сделать двумя способами.

Определение 7.6. Поверхность, для которой выбор направления единичной нормали зафиксирован, называют *ориентированной* и обозначают в зависимости от этого выбора S^+ или S^-.

Пусть

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(u,v)) = (P(\mathbf{r}(u,v)), Q(\mathbf{r}(u,v)), R(\mathbf{r}(u,v)))-$$

непрерывная векторная функция, заданная на S (имеющая, например, физический смысл силы, с которой на точку $\mathbf{r}(u, v)$ действует некоторое поле).

Рассмотрения, аналогичные предыдущим, приводят к следующему определению величины, выражающей поток силы $\mathbf{a}$ через поверхность S^+.

Определение 7.7. *Поверхностным интегралом второго рода* по ориентированной поверхности S^+ называется интеграл

$$\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = \iint\limits_{S} (\mathbf{a}, \nu)\, dS. \tag{7.11}$$

Интеграл (7.11) записывают также в координатном виде

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \tag{7.12}$$

При изменении знака ν и соответственно ориентации поверхности с S^+ на S^- или наоборот знак интеграла (7.11) также меняется:

$$\iint\limits_{S^-} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = \iint\limits_{S} (\mathbf{a}, -\nu)\, dS = -\iint\limits_{S} (\mathbf{a}, \nu)\, dS = -\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS}.$$

В остальном поверхностный интеграл второго рода имеет обычные свойства интеграла.

Обычно через S^+ обозначают поверхность S, ориентированную с помощью вектора

$$\nu = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} &= \iint\limits_{S} (\mathbf{a}, \nu)\, dS = \iint\limits_{G} \mathbf{a} \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv = \\ &= \iint\limits_{G} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\, du\, dv. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Если $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то формулу (7.13) можно переписать в координатном виде:

$$\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\mathbf{dS} = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv. \tag{7.14}$$

Если поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, и $P \equiv Q \equiv 0$ на S, то

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и поэтому для интеграла по верхней стороне S^+ поверхности S будем иметь

$$\iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy = \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy. \tag{7.15}$$

8 Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса

Пусть G – область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Предположим, что на плоскости Oxy существует такая квадрируемая область D, ограниченная спрямляемой кривой, что граница ∂G области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, являющихся графиками непрерывных функций $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$ $(\varphi(x, y) \le \psi(x, y))$ на $\overline{D}$, и, быть может, цилиндрической боковой поверхности S_0, основанием которой служит граница ∂D, а образующая параллельна оси Oz:

$$S = \partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \tag{8.1}$$

В этом случае область G называется *элементарной относительно оси Oz* и имеет вид

$$G = \{(x, y, z) : \, (x, y) \in D, \, \varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)\}. \tag{8.2}$$

Пусть на S задана функция $F(x, y, z)$. Определим поверхностный интеграл второго рода по внешней стороне поверхности S как сумму соответствующих интегралов по верхней стороне S_1, нижней стороне S_2 и интеграла по S_0 (равного 0, т.к. на этой поверхности направляющий косинус $\cos\gamma = 0$):

$$\begin{gathered} \iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy = \\ = \iint\limits_{S_1^+} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2^+} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Аналогично определяется поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{S^-} F(x, y, z)\,dx\,dy$ по внутренней стороне S, а также области G, элементарные относительно осей Ox и Oy, и соответствующие поверхностные интегралы

$$\iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{S^-} F(x,y,z)\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{S^+} F(x,y,z)\,dx\,dz, \quad \iint\limits_{S^-} F(x,y,z)\,dx\,dz.$$

Теорема 8.1. *Если функции P, Q и R непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ в элементарной (относительно всех координатных осей) области G, то имеет место формула (Гаусса–Остроградского)*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy. \tag{8.4}$$

Замечание 8.1. Для кусочно гладкой области формулу (8.4) можно записать в виде

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS \tag{8.5}$$

или, если ввести обозначения $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, $\operatorname{div}\mathbf{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$,

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\nu\,dS. \tag{8.6}$$

Доказательство. Так как область G элементарна относительно Oz, последнее слагаемое в левой части (8.4) можно переписать в виде повторного интеграла и применить формулу Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy = \\
&= \iint\limits_D [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]\,dx\,dy = \\
&= \int\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S^0} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Аналогично доказываются равенства

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz, \quad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} Q\,dx\,dz. \tag{8.8}$$

Складывая (8.7) и (8.8), получаем (8.4).

Пусть теперь поверхность S является графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ на $\overline{G}$:

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in \overline{G},\, z = f(x, y)\},$$

$\Gamma_0 = \partial G$ – кусочно гладкий контур, $\Gamma = f(\Gamma_0)$ – его образ при отображении f (край поверхности S). Зададим положительную ориентацию этих контуров:

$$\Gamma_0^+ = \{x(t), y(t) : a \le t \le b\},$$

$$\Gamma^+ = \{x(t), y(t), f(x(t), y(t)) : a \le t \le b\}.$$

Через $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ обозначим единичную нормаль на S, образующую острый угол с осью Oz.

Теорема 8.2. *Если векторное поле* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ *непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности* S*, то справедлива формула Стокса*

$$\int\limits_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\, dS. \tag{8.9}$$

Доказательство. Выразим криволинейный интеграл от первого слагаемого в левой части (8.9) через интеграл по параметру, а затем применим к полученному интегралу формулу Грина и сведем его к кратному интегралу:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma^+} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_a^b P(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))x'(t)\,dt = \\ = \int\limits_{\Gamma_0^+} P(x, y, f(x, y))\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y}\,dx\,dy = \\ = -\iint\limits_G \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]\,dx\,dy = \\ = -\iint\limits_G \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_G \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy = \\ = -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,dS - \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma\,dS.\end{gathered} \tag{8.10}$$

Так как

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

то $-\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma = \cos\beta$. Подставив это выражение в (8.10), получаем

$$\int\limits_{\Gamma^+} P\,dx = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS. \tag{8.11}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\int\limits_{\Gamma^+} Q\,dy = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS. \tag{8.12}$$

Несколько другой вид имеют преобразования интеграла $\int\limits_{\Gamma^+} R\,dz$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma^+} R(x,y,z)\,dx &= \int\limits_a^b R(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))z'(t)\,dt = \\ &= \int\limits_a^b R(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))\times \\ &\times \left[\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}y'(t)\right] dt = \\ &= \int\limits_{\Gamma_0^+} R(x,y,f(x,y))\left[\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}dy\right] = \\ &= \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dx\,dy = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \iint\limits_G \Bigg[\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \\
-R\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Bigg] \, dx\, dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx\, dy = \\
= \iint\limits_G \left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma \right) dS = \\
= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta \right) dS.
\end{aligned} \tag{8.13}
$$

Складывая равенства (8.11)–(8.13), получаем (8.10).

Замечание 8.2. Формула (8.10) обобщается на кусочно гладкие поверхности аналогично формуле Грина.

9 Скалярные и векторные поля

Определение 9.1. Будем называть функцию с числовыми или векторными значениями, заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ или 3), *скалярным* или *векторным полем.*

Пусть векторная функция $\mathbf{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ дифференцируема в каждой точке. Далее будем обозначать символом ∇ оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Определение 9.2. Величина

$$
\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{9.1}
$$

называется *дивергенцией* поля $\mathbf{a}$, а величина

$$
\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{9.2}
$$

или в координатной записи

$$
\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \tag{9.3}
$$

– *ротором (вихрем)* поля $\mathbf{a}$.

В этих обозначениях формулы Гаусса-Остроградского и Стокса можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \mathbf{a}\,\nu\,ds, \tag{9.4}$$

$$\iint\limits_S \nu\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\,dS = \int\limits_{\Gamma+} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \tag{9.5}$$

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathbf{a}(M)$*– непрерывно дифференцируемое в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *векторное поле,* $M_0 \in G$*,* $\{D\}$ *– семейство ограниченных областей с кусочно гладкими границами* ∂D*, содержащее области сколь угодно малого диаметра и такое, что* $M_0 \in D \subset \overline{D} \subset G$*, а* ν *– внешняя нормаль на границе* ∂D *области* D*. Тогда*

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{\operatorname{diam} D\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\,\nu\,ds}{\mu(D)}. \tag{9.6}$$

Доказательство. Применяя к векторному полю $\mathbf{a}$ в области D формулу Гаусса–Остроградского, а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\,\nu\,ds = \iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\mathbf{a}(M)\,\mu(D),$$

где $M \in D$ и, следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\,\nu\,ds}{\mu(D)}. \tag{9.7}$$

Поскольку M, $M_0 \in D$, то $\lim\limits_{\operatorname{diam} D\to 0} M = M_0$, а в силу непрерывности дивергенции

$$\lim_{\operatorname{diam} D\to 0} \mathbf{a}(M) = \mathbf{a}(M_0).$$

Поэтому, перейдя к пределу при $\operatorname{diam} D \to 0$ в обеих частях равенства (9.7), получим (9.6).

Аналогичная формула имеет место для проекции ротора на произвольный единичный вектор ν. Для ее вывода проведем плоскость π через точку M_0 перпендикулярно ν и возьмем на этой плоскости область G, содержащую точку M_0 и ограниченную кусочно гладким контуром Γ. Контур Γ, ориентированный согласованно с вектором ν (по правилу штопора), обозначим через Γ_+.

Теорема 9.2. *Имеет место формула*

$$\nu \operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{\operatorname{diam} S \to 0} \frac{\iint\limits_{\Gamma_+} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}}{\mu(S)}. \tag{9.8}$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично предыдущей на основе формулы Стокса (9.5), интегральной теоремы о среднем и предельного перехода.

Определение 9.3. Если Γ – кусочно гладкий замкнутый контур, на котором задано векторное поле $\mathbf{a}$, то криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ называют *циркуляцией* векторного поля по этому контуру, а интеграл $\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, \nu\, ds$ – *потоком* векторного поля через контур Γ.

Определение 9.4. Если кусочно гладкая поверхность S, на которой задано векторное поле $\mathbf{a}$, ориентирована с помощью единичной нормали ν, то поверхностный интеграл второго рода

$$\int\limits_{S^+} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \int\limits_{S} \mathbf{a}\, \nu\, ds$$

называют потоком векторного поля через поверхность S.

Определение 9.5. Непрерывное в области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле называют *соленоидальным,* если для любой ограниченной области $D \subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial D \subset G$ его поток через эту границу равен нулю.

Теорема 9.3. *Для того чтобы векторное поле, непрерывно дифференцируемое в некоторой области, было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция в каждой точке этой области равнялась нулю.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $M_0 \in G$. Так как множество G открыто, оно содержит вместе с этой точкой все шары вида $B_\varepsilon(M_0)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, вместе с их границами. В силу соленоидальности поля его поток через поверхность любого такого шара равен 0. Устремляя $\varepsilon \to 0$ и применяя формулу (9.7), получаем $\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = 0$.

Достаточность непосредственно следует из формулы Гаусса–Остроградского.

Определение 9.6. Векторное поле (P, Q, R), для которого существует функция u такая, что в любой точке (x, y, z) области G

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R, \tag{9.9}$$

называется *потенциальным полем,* а функция u – его *потенциальной функцией (потенциалом).*

Теорема 9.4. *Для того чтобы непрерывное векторное поле* $\mathbf{a}$ *в области* G *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция поля* $\mathbf{a}$ *по любому замкнутому кусочно гладкому контуру* $\Gamma \subset G$ *равнялась нулю.*

Приведенный критерий потенциальности можно заменить другим, более удобным для проверки.

Определение 9.7. Множество $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *односвязным*, если для любого кусочно гладкого замкнутого контура, лежащего в G, существует кусочно гладкая ориентируемая поверхность $S \subset G$, краем которой он является.

Пример 9.1. Шар является односвязной областью, а тор – нет.

Теорема 9.5. *Для того чтобы непрерывное векторное поле* $\mathbf{a}$ *в односвязной области* G *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы его ротор в этой области равнялся нулю:*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{9.10}$$

Доказательство. *Необходимость.* Если поле $\mathbf{a}$ имеет потенциальную функцию u, то равенства (9.10) следуют из независимости ее вторых смешанных производных от порядка интегрирования, например,

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Достаточность. Если выполнено условие (9.10) и $\Gamma \subset G$ – кусочно гладкий замкнутый контур, то в силу односвязности G существует кусочно гладкая ориентируемая поверхность $S \subset G$, краем которой Γ является, и по формуле Стокса

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{S} \nu \operatorname{rot} \mathbf{a}\, dS = 0.$$

10 Числовые ряды

Определение 10.1. Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, где $u_n, s_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.1}$$

называется *числовым рядом (бесконечной суммой)* и обозначается $u_1 + \dots + u_n + \dots$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{10.2}$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ называют *членами ряда,* а элементы последовательности $\{s_n\}$ – его *частичными суммами.*

Замечание 10.1. Иногда нумерацию членов ряда начинают не с 1, а с 0 или с другого числа.

Замечание 10.2. Из определения (10.1) следует равенство $s_n = s_{n-1} + u_n$, откуда

$$u_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots. \tag{10.3}$$

Определение 10.2. Если существует конечный предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{10.4}$$

его называют *суммой ряда* (10.2) и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s. \tag{10.5}$$

В этом случае ряд (10.2) называют *сходящимся,* а в противном – *расходящимся.*

Пример 10.1. Примером сходящегося ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$, членами которого являются элементы геометрической прогрессии со знаменателем q таким, что $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

При $|q| \geq 1$ (например, при $q = 1$, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$) этот ряд расходится.

Теорема 10.1. (Необходимое условие сходимости ряда.) *Если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю.*

Доказательство. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то из равенства (10.3) следует

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Теорема 10.2. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся, то для любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{10.6}$$

Доказательство. Положим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_n$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda s_n + \mu \sigma_n.$$

Если существуют конечные пределы $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, то по свойствам пределов существует и конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda s_n + \mu \sigma_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} s_n + \mu \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lambda s + \mu \sigma, \text{ ч. т. д.}$$

Определение 10.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется *n-м остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Если n-й остаток ряда сходится, используется обозначение

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{10.7}$$

Теорема 10.3. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то сходится и сам ряд, причем для любого* $n \in \mathbb{N}$ *в принятых обозначениях имеет место формула*

$$s = s_n + r_n. \tag{10.8}$$

Доказательство. Если s_n и $s_m^{(n)}$ – частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и его n-го остатка соответственно:

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n, \quad s_m^{(n)} = u_{n+1} + \cdots + u_{n+m},$$

то

$$s_{n+m} = s_n + s_m^{(n)}, \tag{10.9}$$

и пределы обеих частей этого выражения существуют или не существуют одновременно. Если они существуют, переход к пределу при $m \to \infty$ в формуле (10.9) приводит к (10.8).

Теорема 10.4. (Критерий Коши сходимости ряда.) *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $n_0 \in \mathbb{N}$*, что для всех* $n > n_0$ *и всех целых* $p \geq 0$ *имеет место неравенство*

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{10.10}$$

Доказательство. Это утверждение следует из критерия Коши существования конечного предела последовательности, примененного к последовательности частичных сумм s_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, так как

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = s_{n+p} - s_{n-1}.$$

Пример 10.2. Для *гармонического ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому при $0 < \varepsilon < 1/2$ нельзя подобрать номера n_0, указанного в критерии Коши. Следовательно, ряд расходится.

11 Знакопостоянные ряды

Лемма 11.1. *Если члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *неотрицательны, то он сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы* s_n *ограничены сверху.*

Доказательство. При условиях леммы $s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n$ $(n \in \mathbb{N})$, т.е. последовательность $\{s_n\}$ возрастает, а возрастающая последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.

Теорема 11.1. (Интегральный признак Коши сходимости ряда.) *Если функция* $f(x)$ *неотрицательна и убывает на полупрямой* $x \geq 1$*, то сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n) \tag{11.1}$$

эквивалентна сходимости несобственного интеграла

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{11.2}$$

Доказательство. В силу монотонности функции $f(x)$ она интегрируема на любом конечном отрезке $[1,\eta] \subset [1,+\infty)$.

Если $k \le x \le k+1$, то вследствие убывания функции $f(x)$ будем иметь $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[k,k+1]$, получаем

$$f(k)\int_k^{k+1} dx \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge f(k+1)\int_k^{k+1} dx,$$

т.е.

$$f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge f(k+1).$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

т.е.

$$s_{n+1} - f(1) \le \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le s_n, \tag{11.3}$$

где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Если интеграл (11.2) сходится, то из неравенства (11.3) в силу неотрицательности f следует, что последовательность частичных сумм s_n ограничена сверху:

$$s_{n+1} \le f(1) + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty,$$

и ряд (11.1) сходится по лемме.

Если же интеграл (11.2) сходится, то в силу неотрицательности f имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty,$$

а так как согласно неравенству (11.3)

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

то, перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Это означает, что ряд (11.1) расходится.

Следствие 11.1. *Обобщенный гармонический ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится при $s > 1$ *и расходится при* $s \leq 1$.

Доказательство. При $s \leq 0$ утверждение следствия вытекает из необходимого условия сходимости числовых рядов, а при $s > 0$ – из интегрального признака сходимости для функции $f(x) = x^{-s}$.

Теорема 11.2. (Первый или допредельный признак сравнения.) *Пусть* $0 \leq u_n \leq v_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1. *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*
2. *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *расходится.*

Доказательство. Если $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n < +\infty$ и $\sigma_n := \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k = \sigma_n \leq \sigma,$$

откуда в силу леммы следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Второе утверждение теоремы следует из первого путем рассуждений от противного.

Следствие 11.2. (Второй или предельный признак сравнения.) *Пусть* $u_n \geq 0$, $v_n > 0$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) и*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$$
Тогда:

1. *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится и* $0 \leq l < +\infty$*, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2. *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится и* $0 < l \leq +\infty$*, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *расходится.*

Это следствие доказывается аналогично своему аналогу для несобственных интегралов.

Теорема 11.3. (Признак Даламбера.) *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с неотрицательными членами существует предел*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = l. \tag{11.4}$$
Тогда, если $l < 1$*, то ряд сходится, а если* $l > 1$*, то расходится.*

Доказательство. Пусть $l < 1$. Выберем число $q \in (l, 1)$. Тогда в силу условия (11.4) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} < q$, откуда $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для $n = n_0 + 1$, $n_0 + 2, \ldots,$ получим $u_{n_0+k} < q^k u_{n_0}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k u_{n_0} = u_{n_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, так как $q < 1$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а значит, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если же $l > 1$, в силу условия (11.4) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, откуда $u_n > u_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для $n = n_0+1$, $n_0+2, \ldots,$ получим $u_{n_0+k} > u_{n_0+k-1} > \cdots > u_{n_0} > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не стремится к нулю, откуда в силу необходимого условия следует его расходимость.

Теорема 11.4. (Радикальный признак Коши.) *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с неотрицательными членами существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{11.5}$$

Тогда, если $l < 1$, *то ряд сходится, а если* $l > 1$, *то расходится.*

Доказательство. Пусть $l < 1$. Выберем число $q \in (l, 1)$. Тогда в силу условия (11.5) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$, откуда $u_n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а значит, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если же $l > 1$, в силу условия (11.5) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1$, откуда $u_n > 1$, и ряд расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости.

12 Знакопеременные ряды

Теорема 12.1. (Признак Лейбница.) *Если последовательность* $\{u_n\}$ *убывает и стремится к нулю:*

$$u_n \geq u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{12.1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{12.2}$$

сходится к некоторому числу s, *причем для его частичных сумм* s_n *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$|s_n - s| \leq u_{n+1}. \tag{12.3}$$

Из (12.1) следует, что $u_n \geq 0$. При $u_n > 0$ ряды вида (12.2) называют *знакочередующимися.*

Доказательство. В силу убывания u_n имеем

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) = \\ &= s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geq s_{2n} \geq 0,\ n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

и

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \le u_1.$$

Поскольку последовательность $\{s_{2n}\}$ возрастает и ограничена сверху, то она имеет конечный предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n},$$

причем

$$0 \le s \le u_1, \tag{12.4}$$

а так как $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s.$$

Неравенство (12.3) следует из того, что

$$s - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k+1} u_{n+k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k,$$

где $0 \le |s - s_n| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \le u_{k+1}$ в силу (12.4).

Определение 12.1. Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если же первый ряд сходится, а второй – нет, первый ряд называется *условно сходящимся.*

Теорема 12.2. (Критерий Коши абсолютной сходимости ряда.) *Для абсолютной сходимости ряда* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $n_0 \in \mathbb{N}$*, что для всех* $n > n_0$ *и всех целых* $p \ge 0$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}| < \varepsilon. \tag{12.5}$$

Доказательство. Это следует из определения 19.1 и критерия Коши сходимости ряда.

Теорема 12.3. *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

Доказательство. Это следует из неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{p} u_{n+k}\right| \le \sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}|. \tag{12.6}$$

По критерию Коши абсолютной сходимости ряда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$ и всех целых $p \ge 0$ правая часть неравенства (12.6) меньше ε, а следовательно, то же верно и для его левой части, и ряд сходится по критерию Коши для обычной сходимости.

Пример 12.1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ сходится абсолютно, так как сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно (условно), так как гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

Теорема 12.4. *Линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов является абсолютно сходящимся рядом.*

Доказательство. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$, откуда в силу неравенств

$$|\lambda u_n + \mu\, v_n| \le |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda u_n + \mu\, v_n|$, т.е. абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda u_n + \mu\, v_n$.

Приведем без доказательства некоторые свойства абсолютно сходящихся рядов, вообще говоря, не присущие условно сходящимся.

Теорема 12.5. (Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.) *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{12.7}$$

абсолютно сходится, то любой ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^*, \tag{12.8}$$

состоящий из тех же членов в другом порядке, тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Замечание 12.1. Любой (не обязательно абсолютно) сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ обладает и *сочетательным свойством:* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, где $v_n = \sum\limits_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} u_k$, $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $m_n > m_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $m_0 = 0$, сходится к той же сумме, что и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, так как последовательность частичных сумм второго ряда является подпоследовательностью частичных сумм первого.

Теорема 12.6. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *абсолютно сходятся, то абсолютно сходится и ряд, составленный из всех попарных произведений их членов, причем его сумма* s *равна произведению сумм данных рядов.*

13 Функциональные последовательности и ряды

Определение 13.1. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *(равномерно) ограниченной* на множестве X, если существует такая константа $c > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_n(x)| \leq c. \tag{13.1}$$

Определение 13.2. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *(поточечно) сходящейся* на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторому числу $f(x) \in \mathbb{R}$. В этом случае функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют *(поточечным) пределом* функциональной последовательности $\{f_n\}$.

Определение 13.3. Множество всех числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ с $x \in X$ называется *функциональным рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на множестве X, функции $f_n(x)$ – его *членами,* сумма

$s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ – *частичной суммой,* ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x)$ – *остатком.*

Определение 13.4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{13.2}$$

называется *(поточечно) сходящимся* на множестве X, если последовательность $\{s_n(x)\}$ его частичных сумм сходится на этом множестве к некоторой функции $s(x)$, которую называют *суммой ряда* (13.2). Говорят также, что функция $s(x)$ *раскладывается* в этот ряд, и пишут

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Если ряд (13.2) при любом фиксированном $x \in X$ сходится абсолютно, то его называют *абсолютно сходящимся на множестве X.*

Пример 13.1. Последовательность $\{x^n\}$ (соответственно ряд $\{x^n - x^{n-1}\}$) сходятся на отрезке $[0, 1]$ к разрывной функции

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Этот пример показывает, что из поточечной (даже абсолютной) сходимости ряда с непрерывными членами не следует непрерывность его суммы. Чтобы гарантировать ее, требуется сходимость в более сильном смысле.

Определение 13.5. Функциональная последовательность $\{f_n\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции f на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{13.3}$$

Соответственно определяется равномерная сходимость для функциональных рядов.

Лемма 13.1. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась к функции f, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{13.4}$$

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ равномерно на X. Тогда по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство (13.3), а следовательно, и

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и означает выполнение условия (13.4).

Если же условие (13.4) выполнено, то по определению предела числовой последовательности существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство (13.4), а следовательно, и (13.3), что и означает равномерную сходимость f_n к f.

Следствие 13.1. *Если существует такая последовательность* $\{\alpha_n\}$*, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *и для всех* $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \tag{13.5}$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* f *на множестве* X.

Доказательство. Из (13.5) следует, что

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n,$$

а это в силу $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ влечет (13.4).

Теорема 13.1. (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.) *Для того чтобы последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходилась к некоторой функции* f *на множестве* X*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_0*, что для всех* $x \in X$*,* $n > n_0$ *и* $p = 0, 1, \ldots$ *выполнялось неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{13.6}$$

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ равномерно на X. Тогда по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2,$$

откуда

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leq \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. выполнено (13.6).

Пусть теперь выполнено (13.6), тогда для каждого $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет критерию Коши для числовых последовательностей и, следовательно, сходится. Обозначая ее предел через $f(x)$ и переходя в (13.6) к пределу при $p \to \infty$, получаем (13.3).

Определение 13.6. Ряд (13.2) называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если на этом множестве равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Замечание 13.1. Если какие-то функциональные последовательности или ряды равномерно сходятся на некотором множестве, то любые их конечные линейные комбинации также равномерно сходятся к соответствующим линейным комбинациям их пределов.

Теорема 13.2. (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.) *Если ряд* (13.2) *равномерно сходится на множестве X, то последовательность его членов равномерно стремится к нулю на этом множестве.*

Доказательство. Так как

$$u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

а $\{s_n(x)\}$ и $\{s_{n-1}(x)\}$ равномерно сходятся к сумме ряда $s(x)$ на X, то утверждение теоремы следует из предыдущего замечания.

Теорема 13.3. (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.) *Для того чтобы ряд* (13.2) *равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_0, что для всех $x \in X$, $n > n_0$ и $p = 0, 1, \dots$ выполнялось неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{13.7}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из критерия Коши равномерной сходимости последовательностей с учетом равенства

$$u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x) = s_{n+p}(x) - s_n(x).$$

Лемма 13.2. *Если ряд* (13.2) *равномерно сходится на множестве X, а функция f ограничена на этом множестве, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x) u_n(x) \tag{13.8}$$

тоже равномерно сходится на X.

Доказательство. Ограниченность функции f означает существование такой константы $c > 0$, что $|f(x)| \le c$ для всех $x \in X$, откуда

$$\begin{aligned} |f(x)u_n(x) + \dots + f(x)u_{n+p}(x)| &\le |f(x)| \cdot |u_n(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \\ &\le c|u_n(x) + \dots + u_{n+p}(x)|, \end{aligned}$$

и из выполнения критерия Коши равномерной сходимости для ряда (13.2) следует его выполнение для ряда (13.8).

Теорема 13.4. (Признак Вейерштрасса.) *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \alpha_n \geq 0, \tag{13.9}$$

сходится и для всех $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$|u_n(x)| \leq \alpha_n, \tag{13.10}$$

то ряд (13.2) *абсолютно и равномерно сходится на множестве* X*.*

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (13.2) при каждом $x \in X$ следует из принципа сравнения. Для доказательства равномерной сходимости обозначим $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$. Тогда

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon_n.$$

Из сходимости ряда (13.9) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, а тогда в силу следствия 20.1 ряд (13.2) равномерно сходится на множестве X.

Имеют место следующие свойства равномерно сходящихся рядов:

Теорема 13.5. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{13.11}$$

равномерно сходится на множестве X *и в некоторой точке* $x_0 \in X$ *все члены ряда непрерывны, то сумма ряда* $s(x)$ *непрерывна в этой точке.*

Замечание 13.2. Условие равномерной сходимости в теореме существенно (см. пример 13.1).

Теорема 13.6. (Почленное интегрирование рядов.) *Пусть члены ряда* (13.11) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и ряд равномерно сходится на нем. Тогда, какова бы ни была точка* $x_0 \in [a, b]$*, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt \tag{13.12}$$

также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ *и*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt. \tag{13.13}$$

Замечание 13.3. Условие равномерной сходимости существенно, как показывает
Пример 13.2. Пусть функции $f_n(x)$ заданы формулами

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n \le x \le 2/n, \\ 0, & 2/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $x \in [0, 1]$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, откуда $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0$, но $\int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = 1$.

Теорема 13.7. (Почленное дифференцирование рядов.) *Пусть члены ряда* (13.11) *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$, *а ряд производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{13.14}$$

равномерно сходится на $[a, b]$. *Тогда, если ряд* (13.11) *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *причем его сумма* $s(x)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{13.15}$$

14 Степенные ряды

Определение 14.1. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{14.1}$$

Замечание 14.1. Заменой $y = z - z_0$ и переобозначением $z = y$ ряд (14.1) сводится к виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{14.2}$$

Теорема 14.1. (Абель.) *Если степенной ряд* (14.2) *сходится при* $z = z_0 \neq 0$, *то при любом* z *таком, что* $|z| < |z_0|$, *он сходится абсолютно.*

Доказательство. По необходимому условию сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$, и поэтому существует $c > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|a_n z_0^n| \leq c,$$

откуда

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq c \left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

и ряд (14.2) сходится по первому признаку сравнения с геометрической прогрессией, имеющей знаменатель

$$\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

Следствие 14.1. *Если ряд* (14.2) *расходится при* $z = z_0 \neq 0$, *то при любом* z *таком, что* $|z| < |z_0|$, *он тоже расходится.*

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей теоремы путем рассуждений от противного.

Определение 14.2. Число

$$R = \sup X, \tag{14.3}$$

где X – множество неотрицательных значений z, при которых ряд (14.2) сходится, называется *радиусом сходимости* этого ряда, а интервал $(-R, R)$ – его *интервалом сходимости.*

Теорема 14.2. *Пусть* R *– радиус сходимости ряда* (14.2). *Тогда при* $|z| < R$ *ряд сходится абсолютно, при* $|z| > R$ *расходится, а в любом интервале* $(-r, r)$ *с* $0 \leq r < R$ *сходится равномерно.*

Доказательство. Из равенства (14.3) и определения sup следует, что для $0 < R \leq +\infty$ и $|z| < R$ существует $x \in X$ такое, что $|z| < x < R$, а так как по определению множества X во всех его точках ряд сходится, то по теореме 14.1 он абсолютно сходится и в точке z.

Если $0 \le R < +\infty$ и $|z| > R$, то для любой точки x такой, что $R < x < |z|$, в силу равенства (14.3) и определения sup имеем $x \notin X$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится, и по следствию 14.1 расходится и ряд (14.3).

При $|z| \le r < R$ имеем

$$|a_n z^n| \le |a_n r^n|,$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ абсолютно сходится по доказанному, а следовательно, ряд (14.3) равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$ по признаку Вейерштрасса.

Аналогично определяется и исследуется интервал сходимости ряда (14.1).

Теорема 14.3. (Абель.) *Если $R < +\infty$ – радиус сходимости степенного ряда* (14.2) *и этот ряд сходится при $z = R$, то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$.

Следствие 14.2. *Если ряд* (14.2) *сходится при $z = R$, то его сумма непрерывна на отрезке* $[0, R]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из непрерывности каждого члена ряда (14.2) на отрезке $[0, R]$ и теорем 13.5 и 14.3.

Пример 14.1. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^n$ равен 0 по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot |z|^{n+1}}{n! \cdot |z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } z \ne 0, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, а рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ – единице. В силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса и необходимого условия сходимости единице равен также радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ во всех граничных точках интервала сходимости абсолютно сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ – расходится (по необходимому условию сходимости), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ сходится при $z = -1$ и расходится при $z = 1$.

Лемма 14.1. *Радиусы сходимости R, R_1 и R_2 соответственно рядов (14.2),*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} z^{n+1}, \tag{14.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{14.5}$$

равны: $R = R_1 = R_2$.

Доказательство. Из неравенств

$$\left| \frac{a_{n+1}}{n+1} z^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} |z| \, |a_n z^n| \leq |z| \, |a_n z^n|$$

и

$$|a_n z^n| \leq n |a_n z^n| = |n a_n z^{n-1}| \, |z|$$

следует, что сходимость ряда (14.5) в точке z влечет сходимость ряда (14.2), а та, в свою очередь, – сходимость ряда (14.4), т.е. $R_1 \geq R \geq R_2$.

Остается показать, что $R_2 \geq R_1$. Для этого возьмем $z \neq 0$, $|z| < R_1$ и докажем, что в точке z сходится ряд (14.5). Запишем

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z|^2} \left| \frac{z}{r} \right|^{n+1} \left| \frac{a_{n+1}}{n+1} r^{n+1} \right| = \frac{n(n+1)}{|z|^2} \, q^{n+1} \left| \frac{a_{n+1}}{n+1} \, r^{n+1} \right|, \tag{14.6}$$

где $|z| < r < R_1$ и $q = |z/r|$, $0 < q < 1$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{|z|^2} \, q^{n+1}$$

сходится по признаку Даламбера, поэтому последовательность его членов ограничена:

$$\left| \frac{n(n+1)}{|z|^2} \, q^{n+1} \right| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{14.7}$$

В силу (14.6) и (14.7) имеем

$$|n a_n z^{n-1}| \leq c \left| \frac{a_{n+1}}{n+1} \, r^{n+1} \right|.$$

Так как $r < R_1$, то ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \, r^{n+1}$ абсолютно сходится, и по первому признаку сравнения абсолютно сходится и ряд (14.5), ч.т.д.

Теорема 14.4. *Если функция f раскладывается в окрестности z_0 в степенной ряд* (14.1) *с радиусом сходимости $R > 0$, то:*

1. *Функция f имеет на интервале $(z_0 - R, z_0 + R)$ производные всех порядков, которые можно найти из ряда* (14.1) *почленным дифференцированием:*

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}. \tag{14.8}$$

2. *Для любого $z \in (z_0 - R, z_0 + R)$*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \tag{14.9}$$

   (ряд (14.1) *можно почленно интегрировать на интервале $(z_0 - R, z_0 + R)$).*

3. *Ряды* (14.1), (14.8) *и* (14.9) *имеют одинаковые радиусы сходимости.*

Доказательство. Утверждение 3 следует из предыдущей леммы, а утверждения 1 и 2 – из теоремы 14.3 для $[z_0 - r, z_0 + r]$, где $0 < r < R$, и общих теорем 13.6 и 13.7 о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов.

Следствие 14.3. *В условиях теоремы имеем*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{14.10}$$

и соответственно

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \tag{14.11}$$

т.е. разложение (14.1) *единственно.*

Доказательство. Формула (14.10) следует из (14.8) при $z = z_0$.

15 Ряд Тейлора

Определение 15.1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{15.1}$$

называется ее *рядом Тейлора* в точке x_0.

Из теоремы 13.7 следует, что если функция раскладывается в окрестности некоторой точки в степенной ряд, то она бесконечно дифференцируема (и этот ряд является ее рядом Тейлора). Обратное неверно.

Пример 15.1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{15.2}$$

Если $x \neq 0$, то все производные этой функции имеют вид

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{c_k}{x^k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad m_n \in \mathbb{N}. \tag{15.3}$$

Сделав замену переменной $t = 1/x^2$, получим

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} \right| = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

и в силу (15.3)

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(0) = 0,$$

т.е. все члены ряда Тейлора функции (15.2) равны нулю, в отличие от значений функции в окрестности 0.

Из формулы Тейлора

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x), \tag{15.4}$$

где

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{15.5}$$

а $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, вытекает, что функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0} r_n(x) = 0. \tag{15.6}$$

Установим новые формы записи $r_n(x)$.

Теорема 15.1. *Если функция f непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, то остаточный член формулы Тейлора можно записать в следующих формах:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt, \tag{15.7}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1, \tag{15.8}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{15.9}$$

Эти формы называются соответственно *интегральной, формой Лагранжа* и *формой Коши.*

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Эта формула служит базисом индукции для доказательства (15.7). Шаг индукции при $1 \le m \le n$ делается с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^m(t)(x-t)^{m-1}dt = -\frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^m(t)\, d(x-t)^m =$$
$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{m+1}(t)\,(x-t)^m\,dt =$$
$$= \frac{f^{(m)}(t)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{m+1}(t)\,(x-t)^m\,dt.$$

По интегральной теореме о среднем с учетом знакопостоянства $(x-t)^n$ (так как t изменяется между x_0 и x) имеем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1},$$

а также

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

с $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, откуда

$$x - \xi = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (x - x_0)(1 - \theta),$$

что доказывает (15.8) и (15.9).

Из доказанного утверждения вытекает

Теорема 15.2. (Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.) *Если функция f имеет в окрестности точки x_0 все производные, ограниченные в совокупности на этой окрестности, то f раскладывается в этой окрестности в степенной ряд.*

Доказательство. Условие теоремы означает существование такой константы $c > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, и всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leq c. \tag{15.10}$$

Запишем остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа (15.8). Из неравенства (15.10) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq c\frac{h^{n+1}}{n+1},$$

где $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$, а так как в силу сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+1}}{n+1} = 0,$$

то и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ при $|x - x_0| < h$, что и означает сходимость ряда Тейлора к функции f в этой окрестности.

Пример 15.2. Так как для функции $f(x) = e^x$ имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого $a > 0$, $x \in (-a, a)$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$0 < f^{(n)}(x) < e^a.$$

По теореме 15.2 функция e^x раскладывается в ряд Тейлора на любом интервале $(-a, a)$, а следовательно, и на всей числовой оси. Так как $f^{(n)}(0) = 1$ для всех n, то

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{15.11}$$

Аналогично доказывается, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{15.12}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{15.13}$$

По теореме 14.1 соответствующие ряды сходятся и для любых комплексных чисел. Они определяют функции комплексной переменной, также обозначаемые e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Ряд

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

равномерно сходится по признаку Вейерштрасса на любом отрезке $[-q, q]$, $0 < q < 1$, что позволяет почленно интегрировать его от 0 до $x \in (-1, 1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \tag{15.14}$$

где ряд сходится при $x \in (-1, 1)$ по теореме 13.6 о почленном интегрировании, а при $x = 1$ – по признаку Лейбница. Следовательно, по теореме 15.3 на отрезке $[0, 1]$ его сходимость равномерна и сумма непрерывна, как и функция $\ln(1 + x)$. Устремив x к 1, получим, что формула (15.14) имеет место для всех $x \in (-1, 1]$ (при $x = -1$ ряд расходится как гармонический, а при $|x| > 1$ – по необходимому условию).

По признаку Даламбера при $x \in (-1, 1)$ сходится и *биномиальный ряд*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \tag{15.15}$$

Можно показать, что ряд также сходится в точке $x = 1$ при $\alpha > -1$ и в точке $x = -1$ при $\alpha \geq 0$. По теореме 22.3, когда ряд (15.15) сходится, его сумма равна $(1 + x)^\alpha$.

16 Тригонометрические ряды Фурье

Определение 16.1. Функциональные ряды вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{16.1}$$

где коэффициенты $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, называются *тригонометрическими рядами.* Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots, n \in \mathbb{N}, \tag{16.2}$$

называется *тригонометрической системой.*

Лемма 16.1. Функции системы (16.2) имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \ m \neq n, \ m, n \in \mathbb{N}_0; \\
&\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \ m \neq n, \ m, n \in \mathbb{N}_0; \\
&\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \ m, n \in \mathbb{N}_0; \\
&\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \ m \neq n, \ m, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{16.3}$$

Доказательство. Например,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \quad &= \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = \\
&= \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \ n \neq m;
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \pi + \frac{\sin 2nx}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \ n \in \mathbb{N}.$$

Другие равенства (16.3) доказываются аналогично.

Определение 16.2. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то тригонометрический ряд (16.1), коэффициенты которого заданы формулами

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{16.4}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ \ n \in \mathbb{N},$$

называется *(тригонометрическим) рядом Фурье* функции f. В этом случае пишут

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Теорема 16.1. *Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{16.5}$$

Доказательство. Поскольку ряд (16.1) равномерно сходится, то обе части равенства (16.5) можно почленно интегрировать:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)dx =$$
$$= a_0\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right) = 2\pi a_0,$$

откуда следует первая формула (16.4).

Умножая обе части (16.5) на $\cos mx$ или на $\sin mx$, снова получаем равномерно сходящиеся ряды. Интегрируя обе части получившихся равенств с учетом (16.3), приходим к оставшимся формулам (16.4).

Очевидно, что сужение функции f на полуинтервал $[-\pi, \pi)$ можно 2π–периодически продолжить на $\mathbb{R}$ по формуле

$$f^*(x + 2\pi k) = f(x),\ \ x \in [-\pi, \pi),\ \ k \in \mathbb{Z},$$

причем ряды Фурье функций f и f^* на отрезке $[-\pi, \pi]$ совпадают, так как значения f и f^* могут различаться только в точке π.

Для формулировки достаточных условий сходимости ряда Фурье нам потребуются следующие понятия.

Определение 16.3. Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности своей точки разрыва первого рода x, то *односторонними* (*правосторонней* и *левосторонней*) производными f в точке x называются пределы

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}, \quad f'_-(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h}.$$

Определение 16.4. Функция f называется *кусочно дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$, если существует такое его разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^n$, что f дифференцируема на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, \ldots, n)$, а в точках x_{i-1} и x_i $(i = 1, \ldots, n)$ существуют правосторонние (соответственно левосторонние) производные $f'_+(x_{i-1})$ и $f'_-(x_i)$.

Замечание 16.1. Из определения следует, что кусочно дифференцируемая функция f является на отрезке $[a, b]$ кусочно непрерывной и поэтому интегрируемой по Риману.

Введем обозначение

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \tag{16.6}$$

Замечание 16.2. Если функция $f(t)$ периодична с некоторым периодом T и абсолютно интегрируема на периоде, то же самое верно и для $f_x^*(t)$.

Теорема 16.2. (Признак Дини сходимости ряда Фурье.) *Пусть функция f 2π–периодична и абсолютно интегрируема на периоде, x – ее точка непрерывности или разрыва первого рода и интеграл*

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{t} \, dt < \infty. \tag{16.7}$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

в частности, в точке непрерывности – к $f(x)$.

Следствие 16.1. *Пусть функция f 2π–периодична и абсолютно интегрируема на периоде, а в точке x существуют ее конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и*

$f'_-(x)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Так как при условиях следствия

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{f_x^*(t)}{t} = \\ = \lim_{t\to 0_+}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right] = f'_+(x) - f'_-(x) < \infty,$$

то функция $\dfrac{f_x^*(t)}{t}$ ограничена на некотором интервале $(0,\delta)$ с $0 < \delta < \pi$. Поэтому существует интеграл Римана

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt,$$

а интеграл

$$\int_\delta^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt$$

сходится как интеграл от произведения абсолютно интегрируемой функции на ограниченную, что влечет справедливость условий теоремы, а следовательно, и ее заключения.

Замечание 16.3. Это следствие означает, в частности, что тригонометрический ряд Фурье функции f, кусочно дифференцируемой на $[-\pi,\pi]$, при $x \in (-\pi,\pi)$ сходится к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, а при $x = \pm\pi$ – к $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ (так как в силу 2π–периодичности функции f имеем $f(-\pi\pm 0) = f(\pi\pm 0)$).