1. **Постановка задачи оптимизации. Классификация задач оптимизации:** Задача оптимизации - это задача нахождения наилучшего решения (в смысле какого-либо критерия) из множества допустимых решений. Задачи оптимизации можно классифицировать по:

- Типу оптимизируемой функции (линейная, нелинейная)
- Количеству переменных (одномерные, многомерные)
- Наличию ограничений (безусловные, условные)
- По характеру решения (дискретные, непрерывные)

2. **Понятие экстремума. Точки глобального минимума и максимума. Минимизирующая последовательность. Точки локального минимума и максимума. Двойственность задач минимизации и максимизации функции.** Экстремум функции - это значение функции, при котором она достигает своего наивысшего (максимума) или наименьшего (минимума) значения. Глобальный максимум/минимум - это наивысшее/наименьшее значение функции на всем множестве определения. Локальный максимум/минимум - это наивысшее/наименьшее значение в некоторой окрестности. Задачи минимизации и максимизации являются двойственными друг другу.

3. **Две разновидности задач оптимизации. Теорема Вейерштрасса:**

- Безусловная оптимизация: задачи, где функция оптимизируется без каких-либо ограничений.
- Условная оптимизация: задачи с ограничениями на переменные. Теорема Вейерштрасса гласит, что если функция непрерывна на замкнутом и ограниченном интервале, то у неё есть максимум и минимум на этом интервале.

4. **Постановка задачи безусловной оптимизации. Необходимое условие экстремума первого порядка. Стационарные точки. Необходимые и достаточные условия второго порядка.**

Задача заключается в минимизации или максимизации функции без ограничений на переменные. Необходимое условие первого порядка: градиент функции равен нулю (стационарные точки). Необходимые и достаточные условия второго порядка связаны со знаком второй производной или определителем Гессиана.

6. **Численные методы безусловной минимизации первого порядка. Общая схема построения минимизирующей последовательности.**

Эти методы основаны на использовании информации о первой производной (градиенте) функции. Общая схема построения минимизирующей последовательности включает в себя выбор начальной точки, определение направления поиска (часто - направление антиградиента), и шага, а затем итеративное движение в выбранном направлении до выполнения критериев остановки (например, малость градиента или достижение максимального числа итераций).

7. Метод градиентного спуска. Алгоритм метода и условия сходимости.

Основная идея метода заключается в итеративном движении к минимуму функции в направлении антиградиента от текущей точки.

- *Алгоритм:* выбирается начальная точка и шаг, вычисляется градиент, производится шаг в направлении антиградиента, и процесс повторяется до сходимости.
- *Условия сходимости:* скорость сходимости зависит от выбора размера шага и формы функции; требуется удовлетворение условиям Вольфа или армихо для гарантии сходимости.

8. Метод наискорейшего спуска. Алгоритм метода и условия сходимости.

Это вариация градиентного спуска, где в каждой точке производится поиск оптимального размера шага.

- *Алгоритм:* на каждом шаге оптимизируется функция одной переменной - величины шага, путём решения задачи минимизации вдоль направления градиента.
- *Условия сходимости:* аналогично методу градиентного спуска, сходимость гарантируется при выполнении определенных условий на шаг.

9. Метод покоординатного спуска. Алгоритм метода и условия сходимости.

Метод заключается в минимизации функции путём поочередной минимизации по каждой координате.

- *Алгоритм:* на каждой итерации выбирается одна координата, и функция минимизируется по этой координате, при фиксации остальных. Процесс повторяется для каждой координаты по очереди.
- *Условия сходимости:* сходимость гарантируется при выпуклости функции и ограниченности множества уровней.

10. Метод Гаусса-Зейделя. Алгоритм метода и условия сходимости.

Это итерационный метод решения систем линейных уравнений, который также можно адаптировать для задач оптимизации.

- *Алгоритм:* похож на метод покоординатного спуска, но после обновления одной координаты, это обновление сразу используется при минимизации по следующим координатам.
- *Условия сходимости:* в контексте оптимизации сходимость аналогична условиям для метода покоординатного спуска.

11. Методы сопряженных градиентов. Идея метода. Методы Флетчера-Ривса Полака-Рибьера. Алгоритмы методов и условия сходимости.

Это итерационный метод для решения систем линейных уравнений и минимизации квадратичных форм. Главное преимущество в том, что направления поиска в этих методах сопряжены относительно матрицы квадратичной формы, что обеспечивает более быструю сходимость.

Метод Флетчера-Ривса и *метод Полака-Рибьера* — это два варианта метода сопряженных градиентов.

- *Алгоритм:* выбор начальной точки и направления. На каждом шаге производится минимизация вдоль сопряженного направления и определение нового направления на основе градиента.
- *Условия сходимости:* метод сходится для квадратичных функций за конечное число шагов, но на практике может использоваться для широкого класса функций.

12. Численные методы безусловной минимизации второго порядка. Общая схема построения минимизирующей последовательности.

Эти методы используют информацию о второй производной (матрице Гессе) функции, что может обеспечивать более быструю сходимость.

- *Общая схема:* использование как градиента, так и Гессиана для определения направления поиска и шага. Обычно требует вычисления или приближения второй производной.

13. Метод Ньютона и Ньютона-Рафсона. Алгоритмы методов и условия сходимости.

Эти методы основаны на приближении функции квадратичной формой в окрестности текущей точки.

- *Алгоритм:* направление поиска определяется как обратное направление градиента, масштабируемое матрицей Гессе (или её обратной матрицей).
- *Условия сходимости:* методы сходятся квадратично вблизи решения для выпуклых функций. Но если Гессиан не является положительно определенным, метод может не сходиться.

14. Метод Марквардта. Алгоритм метода и условия сходимости.

Комбинирует метод Ньютона с методом градиентного спуска, обеспечивая сходимость даже тогда, когда Гессиан не положительно определен.

- *Алгоритм:* добавляет диагональную матрицу к Гессиану, чтобы обеспечить его положительную определенность и устойчивость метода.
- *Условия сходимости:* благодаря модификации, метод обычно сходится шире, чем стандартный метод Ньютона.

15. Методы переменной метрики. Общая идея. Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла. Алгоритм метода и условия сходимости.

Идея этих методов заключается в том, чтобы аппроксимировать обратную матрицу Гессе, обновляя ее на каждом шаге.

Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла (DFP) - один из таких методов.

- *Алгоритм:* на каждом шаге обновляется приближение обратной матрицы Гессе на основе разницы градиентов и разницы точек.
- *Условия сходимости:* метод сходится суперлинейно для многих классов функций, особенно когда начальное приближение достаточно хорошо.

16. Метод конфигураций. Алгоритм метода и условия сходимости.

Этот метод используется для решения задач многомерной оптимизации без ограничений. Он основан на построении последовательности точек, каждая из которых получается как результат оптимизации вдоль определенного направления.

- *Алгоритм:* выбирается начальная точка и генерируется набор направлений. В каждой точке проводится одномерная минимизация вдоль каждого из направлений, после чего происходит переход в новую точку.
- *Условия сходимости:* сходимость метода гарантирована при условии, что функция ограничена снизу и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

17. Метод деформируемого многогранника(метод Нелдера — Мида) . Алгоритм метода и условия сходимости.

Это метод оптимизации, который предназначен для поиска минимума функции многих переменных без наличия производных.

- *Алгоритм:* начинается с инициализации многогранника вокруг начальной точки. На каждом шаге вычисляется значение функции в вершинах многогранника, после чего многогранник деформируется с использованием операций отражения, расширения, сжатия и уменьшения.
- *Условия сходимости:* хотя метод и не гарантирует нахождения глобального минимума, он сходится к локальному минимуму при условии, что функция непрерывна.

18. Постановка задачи условной оптимизации с ограничениями типа равенств. Регулярный и нерегулярный экстремум. Обобщенная и классическая функция Лагранжа.

Здесь функция многих переменных минимизируется при условии, что одна или несколько других функций (ограничения) равны нулю.

- *Регулярный экстремум* достигается, когда ограничения не нарушают условий экстремума.
- *Обобщенная функция Лагранжа* вводится для учета ограничений путем добавления к целевой функции произведений множителей Лагранжа на функции-ограничения.
- *Классическая функция Лагранжа* используется, когда доступны только ограничения типа равенств.

19. Необходимые условия условного экстремума первого порядка для задач оптимизации с ограничениями типа равенств. Понятие условно стационарной точки. Геометрическая иллюстрация.

Необходимые условия: Если вектор-функция $f(x)$ имеет локальный экстремум на ограничении $g(x) = 0$ и Якобиан матрицы ограничений имеет полный ранг в этой точке, то существует вектор множителей Лагранжа λ, такой что система $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$ выполняется.

Условно-стационарная точка: Это точка, в которой градиент функции ортогонален пространству, допустимому ограничениями. В контексте ограничений типа равенства это означает, что градиент целевой функции может быть выражен как линейная комбинация градиентов ограничений.

Геометрическая иллюстрация: Можно представить поверхность целевой функции и поверхность ограничений. Условно-стационарные точки будут теми, где уровень функции "касается" поверхности ограничений.

20. Необходимые и достаточные условия условного экстремума второго порядка для задач оптимизации с ограничениями типа равенств.

Необходимые условия: Пусть x^* - условно-стационарная точка. Если в x^* функция имеет локальный минимум, тогда для всех направлений d, удовлетворяющих ограничениям типа равенства, вторая производная $d^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) d$ неотрицательна, где L - функция Лагранжа.

Достаточные условия: Если в дополнение к необходимым условиям, $d^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) d$ положительна для всех направлений d, отличных от нуля и удовлетворяющих ограничениям, то x^* - точка локального минимума.

21. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа.

Множители Лагранжа показывают изменение оптимального значения целевой функции при небольшом изменении ограничения. В контексте экономики множители Лагранжа могут интерпретироваться как тенистые цены или дополнительные издержки/выгоды от увеличения ограничений на единицу.

ЛИБО

Множители Лагранжа можно интерпретировать как "цену" ограничения. В экономическом контексте, если у вас есть ограничение бюджета и вы пытаетесь максимизировать полезность, множитель Лагранжа для этого ограничения покажет вам, на сколько изменится ваша полезность при небольшом увеличении вашего бюджета.

22. Постановка задачи условной оптимизации с ограничениями типа неравенств. Регулярный и нерегулярный экстремум. Обобщенная и классическая функция Лагранжа. Активные и пассивные ограничения.

Задача состоит в минимизации или максимизации функции при условии, что одна или несколько других функций (ограничений) удовлетворяют неравенству.

- *Регулярный экстремум:* достигается, когда ограничения не нарушают условия экстремума.
- *Обобщенная функция Лагранжа:* включает в себя множители Лагранжа, как и в случае с равенствами, но с дополнительными условиями для обработки неравенств.

- *Активные и пассивные ограничения:* активные ограничения те, что удовлетворяют равенству на оптимальном решении, в то время как пассивные ограничения не влияют на оптимальное решение.

23. Необходимые условия условного экстремума первого порядка для задач оптимизации с ограничениями типа неравенств. Понятие условно стационарной точки. Геометрическая иллюстрация.

Для неравенств, используется метод множителей Лагранжа с учетом дополнительных условий Каруша-Куна-Таккера (УККТ). Эти условия включают в себя:

1. Условие стационарности.
2. Условие допустимости решения.
3. Условие допустимости множителей Лагранжа.
4. Условие дополняющей нежесткости.

Условно-стационарная точка и геометрическая иллюстрация: Аналогично случаю с равенствами.

24. Достаточные условия первого порядка, необходимые и достаточные условия условного экстремума второго порядка для задач оптимизации с ограничениями типа неравенств.

Эти условия аналогичны условиям для задач с ограничениями типа равенства, но с дополнительным учетом ограничений типа неравенства. Основное добавление здесь - это условия дополняющей нежесткости, которые гарантируют, что либо ограничение активно (и равно нулю), либо соответствующий множитель Лагранжа равен нулю.

25. Постановка вариационной задачи. Понятие функционала. Понятие допустимой кривой. Задача Дидоны. Задача о брахистохроне.

Вариационные задачи сводятся к поиску экстремума функционала, который является функцией от функций.

- *Понятие допустимой кривой:* это такая кривая, которая удовлетворяет заданным ограничениям.
- *Задача Дидоны:* классическая вариационная задача о максимизации площади фигуры, ограниченной кривой заданной длины.
- *Задача о брахистохроне:* задача о поиске кривой, по которой тяжелое тело, двигающееся без трения, достигнет другой точки за наименьшее время.

26. Понятие нормы в пространствах непрерывных и непрерывно дифференцируемых кривых. Понятие окрестности кривой. Понятие глобального экстремума функционала.

Норма в пространствах кривых обычно определяется как максимальное значение абсолютной величины функции (или её производной в случае дифференцируемых кривых) на заданном интервале. Это предоставляет меру "длины" кривой в функциональном пространстве.

- *Окрестность кривой* - это набор точек в пространстве, находящихся на расстоянии, меньшем заданного эпсилон, от данной кривой. В контексте функциональных пространств это обычно рассматривается в терминах нормы разности функций.
- *Глобальный экстремум функционала* - это точка (или точки), в которых функционал достигает своего абсолютного максимального или минимального значения на всем множестве допустимых функций или кривых.

27. Понятие вариации кривой и функционала. Представление допустимой кривой через экстремаль и вариацию кривой.

Вариация кривой обычно относится к малому изменению кривой, представляемому как главная часть разности между новой кривой и исходной в пределе малых изменений.

- *Вариация функционала* - это изменение значения функционала, вызванное вариацией кривой.
- *Допустимая кривая* может быть представлена через *экстремаль* (кривая, на которой функционал достигает экстремума) и *вариацию кривой* (малое изменение этой кривой).

28. Простейшая вариационная задача от одной функции с закрепленными концами. Необходимое условие экстремума. Уравнение Эйлера. Дифференцируемость экстремалей

Простейшая вариационная задача - это задача нахождения экстремума функционала, заданного на классе функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям (в данном случае - с закрепленными концами).

- *Необходимое условие экстремума* указывает, что первая вариация функционала должна равняться нулю в экстремали.
- *Уравнение Эйлера* - это дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют экстремали функционала. Оно происходит из необходимого условия экстремума.

- *Дифференцируемость экстремалей* обозначает, что экстремали являются дифференцируемыми функциями, то есть функциями с существующими и непрерывными производными до определенного порядка.

29. Простейшая вариационная задача от одной функции с закреплёнными концами. Необходимое условие экстремума функционала второго порядка. Условие Лежандра.

Необходимое условие экстремума функционала второго порядка утверждает, что для того чтобы функция была экстремумом, вторая вариация функционала должна быть неотрицательной (для минимума) или неположительной (для максимума).

- *Условие Лежандра* - это критерий, проверяющий условие второго порядка, заключающееся в неотрицательности (или неположительности) определителя Гессиана функционала в экстремали.

30. Простейшая вариационная задача от одной функции с закрепленными концами. Необходимое условие экстремума функционала. Условие Якоби. Условие Вейерштрасса.

Необходимое условие экстремума: Любая экстремаль функционала должна удовлетворять уравнению Эйлера. Это дифференциальное уравнение второго порядка относительно y и следует из условия стационарности первой вариации функционала.

Условие Якоби: Это критерий для того, чтобы экстремаль была не вырожденной. Если определитель Якоби (или его минор) не равен нулю на интервале $[a, b]$, то экстремаль не является вырожденной.

Условие Вейерштрасса: Для того чтобы функция $y(x)$ была точкой реального экстремума функционала, функция F должна удовлетворять условию Вейерштрасса. Это условие гласит, что существует такая постоянная $e > 0$, что $F_y^2 - F_{y'y'} \geq eF_{y'}^2$ на всем множестве возможных значений y, y'.

- *Условие Якоби:* Это условие, которое гарантирует, что решение вариационной задачи действительно является экстремумом. Оно связано с исследованием второй вариации функционала.
- *Условие Вейерштрасса:* Оно гарантирует, что если функционал достигает своего экстремального значения на некотором множестве, то он также достигает этого значения на граничных точках этого множества.

31. Простейшая вариационная задача от одной функции с закрепленными концами. Достаточное условие сильного и слабого экстремума функционала.

Простейшая вариационная задача с закрепленными концами выглядит так: найти экстремаль функционала $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$, где $y(a) = y_a$ и $y(b) = y_b$ являются фиксированными значениями.

Достаточные условия:

- *Сильный экстремум*: Если $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера и при этом вторая вариация функционала $\delta^2 J[y]$ положительна (или отрицательна) для всех допустимых вариаций δy, то $y(x)$ является точкой сильного минимума (или максимума).
- *Слабый экстремум*: Если вторая вариация функционала не определена строго (не только положительна или отрицательна), то говорят о слабом экстремуме.