Группа НКН бд-01-20 Мухамедияр Адиль.

Домашняя работа №6 и №7.

№1. Проверить на слабый экстремум

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to extr \qquad x(0)=1; \quad x(1)=0.$$

1) Ищем экстремаль.

$2\ddot{x}=0 \Rightarrow 2\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0.$

$\ddot{x}=0 \Rightarrow \dot{x}=C_1 \Rightarrow x = C_1 t + C_2 \Rightarrow \begin{cases} x(0)=1 \\ x(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \hat{x} = -t+1.$

2) Проверяем усл. Лежандра.

$P(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} = 2 > 0 \Rightarrow$ min?

3) Ур. Якоби

$Q(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{d}{dt} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}} = 0 - \dfrac{d}{dt}(0) = 0$

$P(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} = 2$

$Q(t)h - \dfrac{d}{dt} P(t)\dot{h} = 0$

$0 \cdot h - 2\dfrac{d}{dt}(\dot{h}) = 0$

$2\ddot{h}=0 \Rightarrow \ddot{h}=0 \Rightarrow \dot{h}=C_1 \Rightarrow h = C_1 t + C_2.$

~~$h(0) = C_2 = 0$~~

Подставляем знач. $(a, b] = (0; 1]$

если есть хотя бы одна точка, где $h=0$

$\Downarrow$

сопряж. т. есть

иначе их нет

$\begin{rcases} h(0) = 0 \\ \dot{h}(0) = 1 \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1. \end{cases}$ $\Rightarrow h = t$ – нет сопряженных точек

$\hat{x}$ – доставл. слабый min (нет. сопр. т. $\Rightarrow \hat{x}$ доставляет; есть сопр. т. $\Rightarrow \hat{x}$ – не дост.)

№2. $\displaystyle\int_0^{T_0} \dot{x}^2 dt \to extr \qquad x(0)=0, \quad x(T_0) = \xi$

1) $2\ddot{x}=0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2 \Rightarrow C_1 = \dfrac{\xi}{T_0}, C_2 = 0 \Rightarrow \hat{x} = \dfrac{\xi}{T_0} t$

2) $P(t) = 2 > 0 \Rightarrow$ min?

3) $0 \cdot h - 2\dfrac{d}{dt}(\dot{h}) = 0 \Rightarrow 2\ddot{h} = 0 \Rightarrow \ddot{h} = 0 \Rightarrow \dot{h} = C_1 \Rightarrow h = C_1 t + C_2$

$C_1 = 1, \quad C_2 = 0 \Rightarrow h = t$ – нет сопр. т.

$\hat{x}$ – дост. слабый min

№3. $\int\limits_0^1 (x - \dot{x}^2)\,dt \to extr \qquad x(0) = x(1) = 0$

1) $\ddot{x} = -0{,}5 \Rightarrow \dot{x} = -0{,}5t + C_1 \Rightarrow x = -0{,}25t^2 + C_1 t + C_2$

$C_1 = 0{,}25, \; C_2 = 0 \Rightarrow \hat{x} = -0{,}25t^2 + 0{,}25t$

2) $P(t) = -2 < 0 \Rightarrow \max\,?$

3) $Q(t) = 0 - \frac{d}{dt}(0) = 0$

$0 \cdot h + 2\,\frac{d}{dt}(\dot{h}) = 0$

$2\ddot{h} = 0 \Rightarrow \ddot{h} = 0 \Rightarrow \dot{h} = C_1 \Rightarrow h = C_1 t + C_2$

$\left.\begin{matrix} h(0) = 0 \\ \dot{h}(0) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow h = t$ — нет сопр. т.

$\hat{x}$ — дост. слабый max.

№4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\,dt \to extr \qquad x(0) = 0, \; x(T_0) = \xi$.

1) $\ddot{x} = -0{,}5 \Rightarrow x = -0{,}25t^2 + C_1 t + C_2$

~~$C_1 = 0{,}25 \quad C_2 = 0 \Rightarrow$~~

$C_1 = (\xi + 0{,}25T_0^2) \cdot \frac{1}{T_0}, \quad C_2 = 0 \Rightarrow \hat{x} = -0{,}25t^2 + \frac{\xi + 0{,}25T_0^2}{T_0} \cdot t$

2) $P(t) = 2 > 0 \Rightarrow \min\,?$

3) $Q(t) = 0$

$0 \cdot h - 2 \cdot \frac{d}{dt}(\dot{h}) = 0$

$-2\ddot{h} = 0 \Rightarrow \ddot{h} = 0 \Rightarrow \dot{h} = C_1 \Rightarrow h = C_1 t + C_2$

$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \dot{h}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow h = t$ — нет сопр. точек

$\hat{x}$ — достав. слабый min.

№5. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + tx)\,dt \to extr \qquad x(0) = x(1) = 0$

1) $t - 2\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{t^3}{12} + C_1 t + C_2 \Rightarrow C_2 = 0, \; C_1 = -\frac{1}{12}$

$\hat{x} = \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{12}t$

2) $P(t) = 2 > 0 \Rightarrow \min\,?$

3) $Q(t) = 0$

$0 \cdot h - 2\frac{d}{dt}(\dot h) = 0$

$-2\ddot h = 0 \Rightarrow \ddot h = 0 \Rightarrow \dot h = C_1 \Rightarrow h = C_1 t + C_2$

$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \dot h(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow h = t$ — нет сопр. т.

$\hat x$ — доставляет слабый min

№6. $\int_0^1 (t^2 x - \dot x^2)\,dt \to extr$ $\qquad x(0) = x(1) = 0$

1) $t^2 + 2\ddot x = 0 \Rightarrow \ddot x = -\frac{t^2}{6} \Rightarrow \dot x = -\frac{t^3}{6} + C_1 \Rightarrow x = \frac{-t^4}{24} + C_1 t + C_2$

~~2)~~ $C_1 = \frac{1}{24}$, $C_2 = 0 \Rightarrow \hat x = -\frac{t^4}{24} + \frac{t}{24}$

2) $P(t) = -2 < 0 \Rightarrow$ max ?

3) $Q(t) = 0$

$0 \cdot h + 2\frac{d}{dt}(\dot h) = 0$

$2\ddot h = 0 \Rightarrow \dot h = C_1 \Rightarrow h = C_1 t + C_2$

$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \dot h(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow h = t$ — нет сопр. т.

$\hat x$ — дост. слабый max

№7. $\int_0^{T_0} \dot x^3\,dt \to extr$ $\qquad x(0) = 0,\ x(T_0) = \xi$

1) $0 - 3\dot x^2 = 0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2 \Rightarrow C_1 = \xi / T_0$, $C_2 = 0 \Rightarrow \hat x = \cancel{\frac{\xi \cdot t}{T_0}}$

2) $P(t) = 6\dot x$

Так как Домашняя работа №7 это продолжение №6 работы, я решил повторно не писать решение и продолжит здесь.

№1 (продолжение) Проверка на сильный экстремум.

Функция Вейерштрасса:

начальное условие

$E(t, x, p, \dot x) = f(t, x, \dot x) - f(t, x, p) - (\dot x - p)\frac{\partial f}{\partial \dot x}(t, x, p)$

$E = \dot x^2 - p^2 - (\dot x - p) \cdot 2p = \dot x^2 - p^2 - 2p\dot x + 2p^2 = \dot x^2 - 2\dot x p +$

$+ p^2 = (\dot x - p)^2 \geq 0$

$\hat x$ — сильный min $\quad$ (т.к. $P(t) > 0$ и $E \geq 0$)

№2 (Продолжение)

$$E = \dot{x}^2 - p^2 - (\dot{x} - p)\cdot 2p = (\dot{x} - p)^2 \geqslant 0$$

$\hat{x}$ – сильный ~~...~~ min.

№3 (Продолжение)

$$E = (x - \dot{x}^2) - (x - p^2) - (\dot{x} - p)\cdot(-2p) = x - x - \dot{x}^2 + p^2 + 2\dot{x}p - 2p^2 =$$
$$= -\dot{x}^2 + 2\dot{x}p - p^2 = -(\dot{x} - p)^2 \leq 0$$

$\hat{x}$ – сильный max.

№4. (Продолжение)

$$E = (\dot{x}^2 - x) - (p^2 - x) - (\dot{x} - p)\cdot 2p = \dot{x}^2 - x \mp p^2 + x - 2\dot{x}p + 2p^2 =$$
$$= \dot{x}^2 - 2\dot{x}p + p^2 = (\dot{x} - p)^2 \geqslant 0$$

$\hat{x}$ – сильный min.

№5. (Продолжение)

$$E = (\dot{x}^2 + tx) - (p^2 + tx) - (\dot{x} - p)\cdot 2p = \dot{x}^2 + tx - p^2 - tx - 2\dot{x}p + 2p^2 =$$
$$= \dot{x}^2 - 2\dot{x}p + p^2 = (\dot{x} - p)^2 \geqslant 0$$

$\hat{x}$ – сильный min.

№6. (Продолжение)

$$E = (t^2x - \dot{x}^2) - (t^2x - p^2) - (\dot{x} - p)\cdot(-2p) = t^2x - \dot{x}^2 - t^2x + p^2 + 2\dot{x}p -$$
$$- 2p^2 = -\dot{x}^2 + 2\dot{x}p - p^2 = -(\dot{x} \mp p)^2 \leq 0$$

$\hat{x}$ – сильный max.