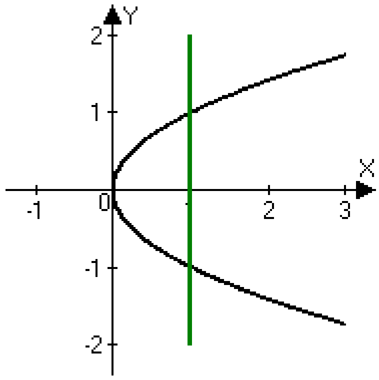
1. Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_G x^2y^2dxdy$**, G – ограничено линиями:** $x = y^2$**,** $x = 1$

<u>Решение:</u>

Сделаем чертеж:



Область интегрирования: $\begin{cases} -1 < y < 1 \\ y^2 < x < 1 \end{cases}$

Получаем:

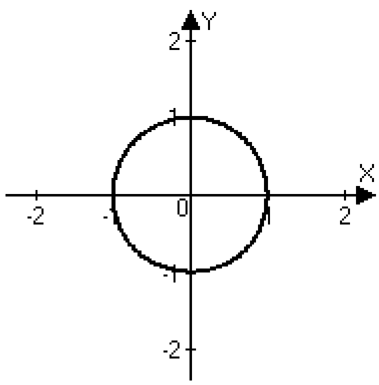
$$\iint\limits_G x^2y^2dxdy = \int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{y^2}^{1}x^2y^2dx = \int\limits_{-1}^{1}dy\cdot\left(\frac{x^3}{3}y^2\right)\Bigg|_{y^2}^{1} = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}\left(y^2\right)^3y^2\right)dy = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}y^8\right)dy =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}y^9\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{9}y^3 - \frac{1}{27}y^9\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) = \frac{2}{9} - \frac{2}{27} = \frac{6-2}{27} = \frac{4}{27}$$

2.1 Вычислить интеграл, перейдя к полярным координатам: $\iint\limits_G \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$**,** $G: x^2 + y^2 < 1$

<u>Решение:</u>

Сделаем чертеж:



Перейдем к полярным координатам: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1$$
$$r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 1$$
$$r^2 = 1$$
$$r = 1$$

Область интегрирования: $\begin{cases} 0 < r < 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) = \cos\left(\pi\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\right) = \cos\left(\pi\sqrt{r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}\right) = \cos\left(\pi\sqrt{r^2}\right) =$$
$$= \cos(\pi r)$$

Получаем:

$$\iint\limits_G \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \cos(\pi r)\cdot r dr \Rightarrow \begin{bmatrix} u = r; du = dr \\ dv = \cos\pi r; v = \dfrac{1}{\pi}\sin\pi r \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi r\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\pi}\sin\pi r dr\right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\left(\frac{1}{\pi}\sin\pi - \frac{1}{\pi}\sin 0\right) - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\left(-\cos\pi r\right)\Bigg|_0^1\right) =$$

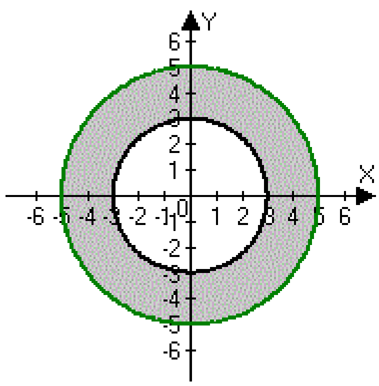
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left((0-0) + \frac{1}{\pi^2}\cos\pi r\Bigg|_0^1\right) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}\cos\pi - \frac{1}{\pi^2}\cos 0\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}\cdot(-1) - \frac{1}{\pi^2}\cdot 1\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{\pi^2}\right)d\varphi = -\frac{2}{\pi^2}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{2}{\pi^2}\cdot 2\pi = -\frac{4}{\pi}$$

2.2. Вычислить интеграл, перейдя к полярным координатам: $\iint\limits_G \dfrac{dxdy}{x^2+y^2-1}$**,** $G: 9 \le x^2 + y^2 \le 25$

<u>Решение:</u>

Сделаем чертеж:



Перейдем к полярным координатам: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 9 & r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 25 \\ r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 9 & r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 25 \\ r^2 = 9 & r^2 = 25 \\ r = 3 & r = 5 \end{array}$$

Область интегрирования: $\begin{cases} 3 < r < 5 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\frac{1}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 1} = \frac{1}{r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) - 1} = \frac{1}{r^2 - 1}$$

Получаем:

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \frac{1}{r^2 - 1}\cdot rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 \frac{r}{r^2 - 1}dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{d\left(r^2 - 1\right)}{r^2 - 1} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{2}\left(\ln\left|r^2 - 1\right|\right)\Big|_3^5 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\ln|24| - \ln|8|\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln 3 d\varphi = \frac{1}{2}\ln 3\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ln 3\cdot(2\pi - 0) = \pi\ln 3$$

3. Вычислить криволинейный интеграл на плоской кривой Г: $\int\limits_\Gamma f(x,y)ds$, Г – дуга развертки окружности (эвольвента) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, если

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

<u>Решение:</u>

$$x = a(\cos t + t\sin t);\quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

$$dx = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t;\quad dy = a(\cos t - \cos t - t(-\sin t)) = at\sin t$$

$$dS = \sqrt{dy^2 + dx^2} = \sqrt{(at\sin t)^2 + (at\cos t)^2}dt = \sqrt{a^2t^2\sin^2 t + a^2t^2\cos^2 t}dt =$$

$$= \sqrt{a^2t^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}dt = \sqrt{a^2t^2}dt = atdt$$

$$Y = \int_0^{2\pi}\left((a(\cos t + t\sin t))^2 + (a(\sin t - t\cos t))^2\right)\cdot atdt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(a^2\left(\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t\right)\right)\cdot atdt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(a^2\left(\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + t^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\right)\right)\cdot atdt = \int_0^{2\pi}\left(a^2\left(1 + t^2\cdot 1\right)\right)\cdot atdt = \int_0^{2\pi} a^3t\left(1 + t^2\right)dt =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(t + t^3\right)dt = a^3\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right)\Big|_0^{2\pi} = a^3\left(\frac{4\pi^2}{2} + \frac{16\pi^4}{4}\right) = a^3\left(2\pi^2 + 4\pi^4\right) = 2a\pi^2\left(1 + 2\pi^2\right)$$

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$$Y=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(a(\cos t+t\sin t)\right)^2+\left(a(\sin t-t\cos t)\right)^2}\cdot atdt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(\cos^2 t+2t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t\right)}\cdot atdt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)+t^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\right)}\cdot atdt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(1+t^2\cdot 1\right)}\cdot atdt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+t^2}\cdot atdt=$$

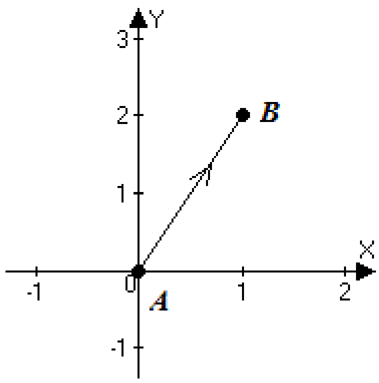
$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sqrt{1+t^2}dt=a^2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}d\left(1+t^2\right)=\frac{1}{2}a^2\cdot\left(\frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}a^2\cdot\left(\frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{3}a^2\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{3}a^2\left(\sqrt{\left(1+(2\pi)^2\right)^3}-\sqrt{\left(1+0^2\right)^3}\right)=\frac{1}{3}a^2\left(\sqrt{\left(1+4\pi^2\right)^3}-1\right)$$

4. Вычислить криволинейный интеграл по кривой Г, пробегаемой от точки А к точке В: $\int_\Gamma xdy-ydx$**, А(0,0), В(1,2), если Г – отрезок АВ**

<u>Решение:</u>

Строим:



Используем формулу:

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left\{P(x,y(x))+\phi'(x)Q(x,y(x))\right\}dx$$

Найдем уравнение прямой АВ: $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}\Rightarrow y=2x$

$y=2x; dy=2dx$

$$\int_\Gamma xdy-ydx=\int x\cdot 2dx-2xdx=\int(2x-2x)dx=\int 0dx=0$$

5. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Г, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева $\int\limits_{\Gamma}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$**, если:**

1) Г – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

<u>Решение:</u>

Формула Грина: $\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{C}Pdx+Qdy$

$$P=xy+x+y$$
$$Q=xy+x-y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y+1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+1$$

Получаем:

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}(y+1-(x+1))dxdy=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}(y-x)dxdy=\begin{bmatrix} x=ar\cos t \\ y=br\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \\ 0<r<1 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\int\limits_0^{2\pi}(br\sin t-ar\cos t)abrdrdt=ab\int\limits_0^{2\pi}(a\sin t-b\cos t)dt\int\limits_0^1 r^2dr=ab(-a\cos t+b\sin t)\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1=$$

$$=ab(-a\cos 2\pi+b\sin 2\pi-(-a\cos 0+b\sin 0))\cdot\frac{1}{3}=ab(-a+0-(-a+0))\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}ab(-a+a)=0$$

2) Г – окружность $x^2+y^2=ax$

<u>Решение:</u>

Формула Грина: $\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{C}Pdx+Qdy$

$$P=xy+x+y$$
$$Q=xy+y-y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y+1$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=x+1$$

Преобразуем уравнение окружности к каноническому виду:

$$x^2+y^2=ax$$

$$x^2-ax+y^2=0$$

$$\left(x^2-ax+\frac{1}{4}a^2\right)-\frac{1}{4}a^2+y^2=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+y^2=\frac{1}{4}a^2$$

Получаем:

$$\iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+y^2\le\frac{1}{4}a^2}(y-x)dxdy=\iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+y^2\le\frac{1}{4}a^2}(y-x)dxdy=\begin{bmatrix}\text{Замена переменных}: \\ x-\frac{1}{2}a=r\cos t \\ y=r\sin t \\ 0\le r\le\frac{1}{2}a \\ 0\le t\le 2\pi; I=r\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}a}dr\int_0^{2\pi}\left(r\sin t-\left(r\cos t+\frac{1}{2}a\right)\right)rdt=\int_0^{\frac{1}{2}a}dr\int_0^{2\pi}\left(r\sin t-r\cos t-\frac{1}{2}a\right)rdt=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}a}dr\int_0^{2\pi}\left(r^2\sin t-r^2\cos t-\frac{1}{2}ar\right)dt=\int_0^{\frac{1}{2}a}dr\cdot\left(-r^2\cos t-r^2\sin t-\frac{1}{2}art\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}a}\left(-r^2\cos 2\pi-r^2\sin 2\pi-\frac{1}{2}ar\cdot 2\pi-\left(-r^2\cos 0-r^2\sin 0-\frac{1}{2}ar\cdot 0\right)\right)dr=$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}a}\left(-r^2-a\pi r-\left(-r^2\right)\right)dr=\int_0^{\frac{1}{2}a}\left(-r^2-a\pi r+r^2\right)dr=\int_0^{\frac{1}{2}a}(-a\pi r)dr=-\pi a\cdot\frac{1}{2}r^2\Bigg|_0^{\frac{1}{2}a}=-\pi a\left(\frac{1}{2}a\right)^2=$$

$$=-\pi\frac{a^3}{8}$$