КР №1. (07.10.21).

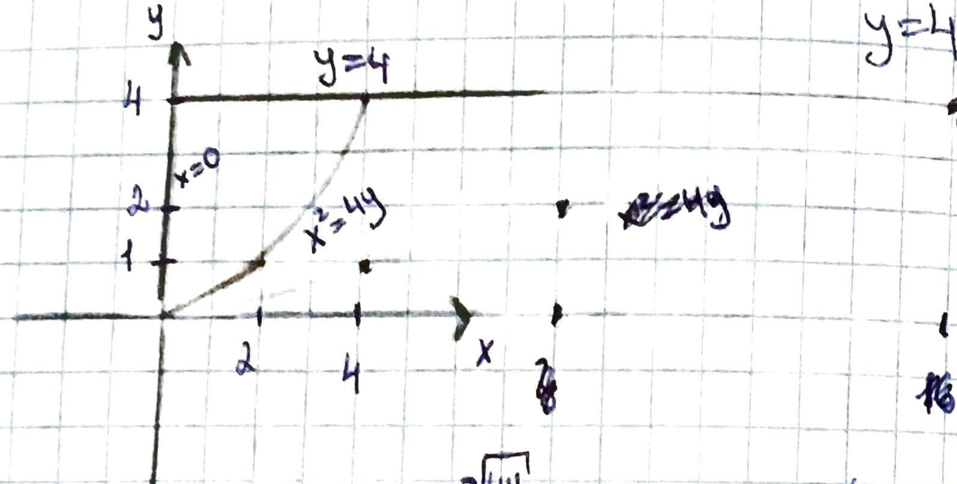
Задачи с 1–5, 3 пункты.

$n=3 \quad m=4 \quad g(m)=g(4)=y^2.$

Вычис-лить интеграл

№1 3) $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$ $\quad x^2=4y,\ y=m,\ x=0\ (x>0).$

$y=4$



$$\iint\limits_G (4-y)\,dxdy = \int_0^4\int_0^{\sqrt{4y}} (4-y)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(4x - xy\right)\Big|_0^{\sqrt{4y}} dy =$$

$$= \int_0^4 \left(8\sqrt{y} - 2\sqrt{y^3}\right) dy = \left(\frac{2\cdot 8\sqrt{y^3}}{3} - \frac{2\cdot 2\sqrt{y^5}}{5}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{2\cdot 8\cdot 2^3}{3} - \frac{2\cdot 2\cdot 2^5}{5} = \frac{5\cdot 2^7 - 2^7\cdot 3}{15} = \frac{2^8}{15} = \frac{256}{15}.$$

№4 3) $\int\limits_C e^{x-y}\,dx + y^2\,dy$ $\qquad A(2;1),\ B(1;3)$

C – прямая

Формула:

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + \varphi(x)\cdot Q(x,y(x))\right] d$$

Криволинейный интеграл II рода

Для начала найдём уравнение прямой AB:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ где $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$

$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-1}{3-1} \Rightarrow -x+2=\frac{y-1}{2} \Rightarrow y=5-2x. \Rightarrow$

$\Rightarrow dy=-2\,dx$ (Производим замену)

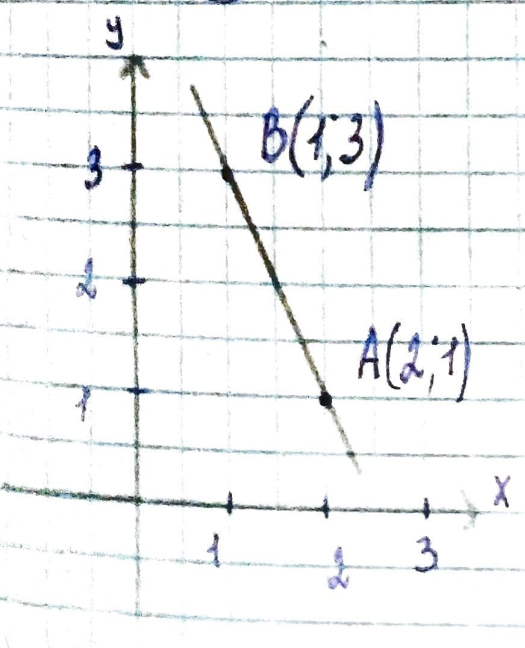
$$\int_C e^{x-y}dx+y^2dy=\int_C e^{x-(5-2x)}dx+(5-2x)^2\cdot(-2)\,dx=$$

$$=\int_1^2\left(e^{3x-5}-8x^2+40x-50\right)dx=\left(\frac{e^{3x-5}}{3}\cancel{-16x}\right.$$

$$\left.-\frac{8x^3}{3}+20x^2-50x\right)\Big|_1^2=\left(\frac{e}{3}-\frac{2^6}{3}+80-100\right)-$$

$$-\left(\frac{e^{-2}}{3}-\frac{8}{3}+20-50\right)=\frac{e-e^{-2}}{3}-\frac{7\cdot 8}{3}+10=$$

$$=\frac{e-e^{-2}-56+30}{3}=\frac{e-e^{-2}-26}{3}$$



Криволинейный интеграл II род через Грина

№5 (3) $\int\limits_C \left((x+y)^2+y^2\right)dx-\left(x^2+y^2\right)dy$

C – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$

Формула Грина

$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\int\limits_\Gamma P\partial x+Q\partial y$$

$P=(x+y)^2+y^2$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2x+4y$

$Q=-x^2-y^2$

Подставим по формуле Грина:

$$\int\limits_0^{1-x}\int\limits_0^{1}\left(-2x-(2x+4y)\right)dxdy=\int\limits_0^{1-x}\int\limits_0^{1}\left(-4x-4y\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(-4x-4y)dy=\int\limits_0^1\left(-4xy-2y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx=$$

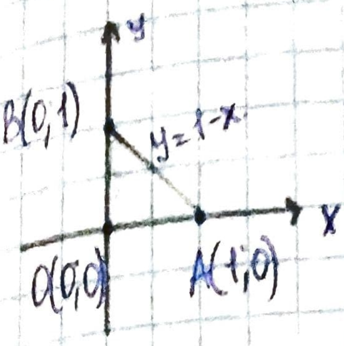
$$=\int\limits_0^1\left(-4x+4x^2-2(1-x)^2\right)dx=\int\limits_0^1\left(-4x+4x^2-2x^2+\right.$$

$$\left.+4x-2\right)dx=\int\limits_0^1\left(2x^2-2\right)dx=\left(\frac{2x^3}{3}-2x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$

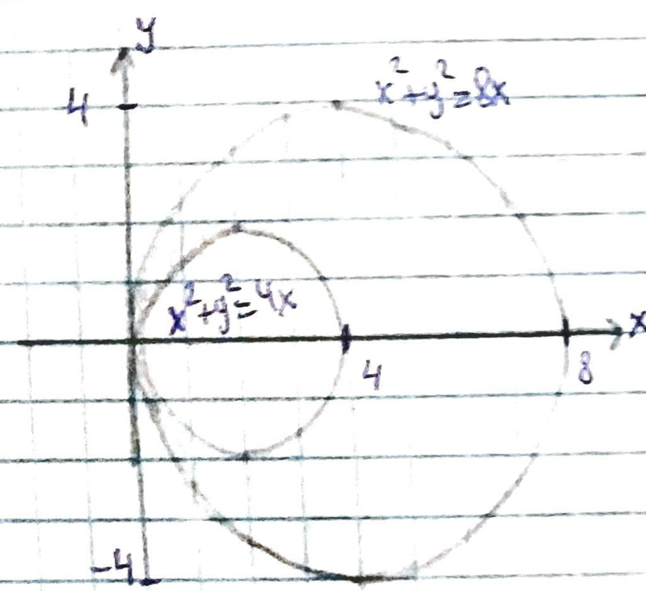
Найдем уравнение прямой AB для нахождения пределов интегрирования:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{1-0} \Rightarrow 1-x=y$$



$$x^2-2\cdot 4x+16+y^2=16$$
$$(x-4)^2+y^2=4^2$$

№2 3) $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$ $\qquad x^2+y^2=8x,\ x^2+y^2=4x\ (x>0)$



$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$x^2+y^2=4x$ (подставим значения)

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=4r\cos\varphi$

$r=4\cos\varphi$

Пишем линии в полярных коор

$x^2+y^2=8x$ $\qquad 4\cos\varphi < r < 8\cos\varphi$

$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=8r\cdot\cos\varphi$ $\qquad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$r=8\cos\varphi$

Теперь, так как мы нашли пределы интегрирования, начинаем решать задачу.

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,dr =$$

$$\cancel{= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r^2\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, \frac{r^3}{3}\Bigg|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2^8\cos^3\varphi}{3} - \frac{2^6\cos^3\varphi}{3}\right) d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^6\cos^3\varphi}{3}}$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r^2\cdot r\,dr = \left(\text{по формуле: } \iint\limits_\Gamma f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma (r,\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi\right) =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Bigg|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2^3\cos\varphi)^4 - (2^2\cos\varphi)^4}{4}\,d\varphi =$$

Формула понижения степени

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2^8\cos^4\varphi\,(2^4-1)}{4}\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^6\cdot 15\cdot\cos^4\varphi\,d\varphi = 2^6\cdot 15\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{2^6\cdot 15}{2^2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 2\varphi + 2\cos 2\varphi + 1)\,d\varphi =$$

$$= 2^4\cdot 15 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = 2^4\cdot 15\cdot$$

$$\cdot \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \Big\{\, 2^4\cdot 15\left(\frac{3\pi}{4} + \sin\pi + \right.$$

$+\frac{1}{8}\underset{0}{\sin 2\pi} + \frac{3\pi}{4} + \underset{0}{\sin(-\pi)} + \frac{1}{8}\underset{0}{\sin(-2\pi)}\Big)\Big) = 2^4 \cdot 15 \cdot \frac{6\pi}{4} =$

$= 360\pi$

№3 3) $\int\limits_C 2y^2\, ds$ C – первая арка циклоиды.

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $R = a$.

$dx = a(1 - \cos t)$

$dy = a \sin t$

$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t - 2a^2\cos t + a^2}\, dt =$

$= \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t}\, dt$

$$\int\limits_C 2y^2\, ds = \int\limits_0^{2\pi} 2\cdot a^2(1-\cos t)^2\sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 2\cdot a^3 (1-\cos t)^2 \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

Сделаем замену переменных: $t = 2\alpha$

$(1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha)$

$$= -32a^3\int\limits_0^{2\pi} \sin^4\alpha\, d\cos\alpha = \begin{pmatrix} \text{Замена:} \\ z = \cos\alpha \end{pmatrix} = 32a^3\int\limits_0^1 (1 - z^2)^2 dz =$$

$$= 32\cdot a^3\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3$$