Отчёт по лабораторной работе №5 Математическое моделирование

Модель хищник-жертва. Вариант №32

Выполнил: Мажитов Магомед Асхабович

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

2 Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [3]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [3]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3 Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

4 Задание

Вариант 32:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.25x(t) + 0.025y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.45y(t) - 0.045y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 11$ Найдите стационарное состояние системы.

5 Выполнение лабораторной работы

5.1 Построение математической модели. Решение с помощью программ

5.1.1 Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 8
y0 = 11


a = 0.25
b = 0.025
c = 0.45
d = 0.045



function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
```

```
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=300,legend=false)

plot!(plt, X, Y, color=:blue)

savefig(plt, "lab05_1.png")

plt2 = plot( dpi=300, legend=true)

plot!(plt2, T, X, label="Численность жертв", color=:red)

plot!(plt2, T, Y, label="Численность хищников", color=:green)

savefig(plt2, "lab05_2.png")
```

Код программы для стационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.25
```

```
b = 0.025
c = 0.45
d = 0.045

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(dpi=300, legend=true)

plot!(plt2, T, X, label="Численность жертв", color=:red)

plot!(plt2, T, Y, label="Численность хищников", color=:green)

savefig(plt2, "lab05_3.png")
```

5.1.2 Результаты работы кода на Julia

На следующих рисунках изображены итоговые графики.(рис. [5.1])

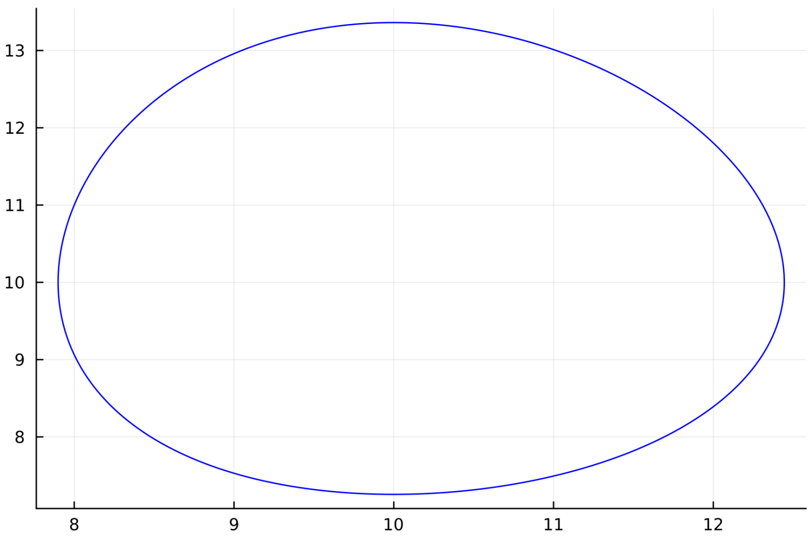

Рис. 5.1: График зависимости численности хищников от численности жертв

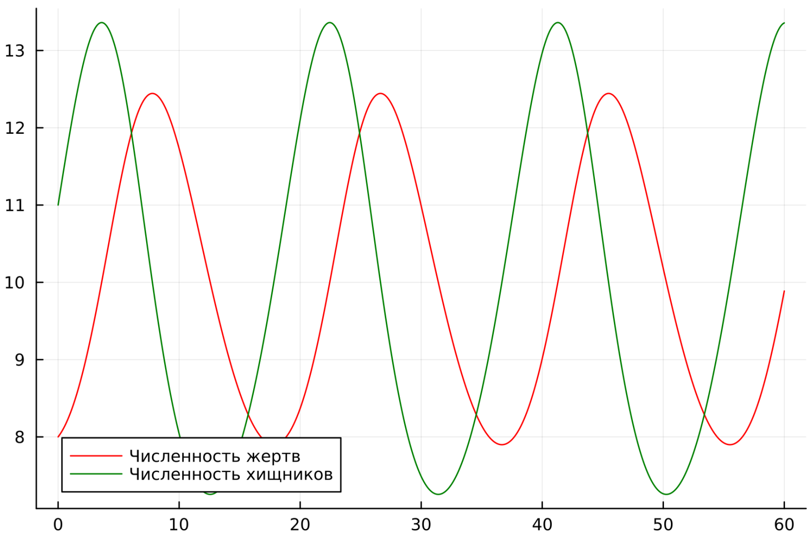

Рис. 5.2: График зависимости численности хищников и численности жертв от времени

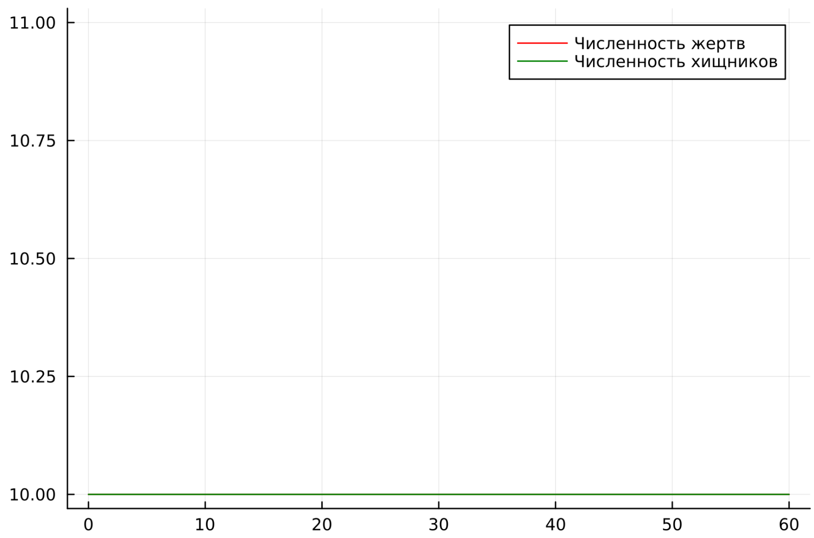

Рис. 5.3: Стационарное состояние системы

6 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia.

7 Список литературы. Библиография

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Решение дифференциальных уравнений: https://www.wolframalpha.com/

[3] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/Lot