Представление числа в виде суммы квадратов

Теорема 3. 10 (Эрмит). Любой делитель d числа $a^2 + 1$, где, a E Z, можно представить в виде суммы двух квадратов.

Пример 3.16. Пусть $a = 7949$, тогда

$$a^2 + 1 = 63186602 = 2 \cdot 37 \cdot 853873.$$

Пусть $d = 853873$. Раскладываем рациональное число $\frac{a}{d}$ в обыкновенную непрерывную дробь:

$$\frac{7949}{853873} = [0; 107, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 107].$$

Вычисляем подходящие дроби, пока не получим выполнение условия (3.12) для $\sqrt{d} = \sqrt{853873} \approx 924{,}052$:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{107}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{2}{215}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{5}{537}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{7}{752}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{19}{2041}.$$

Таким образом, $k = 5$ и искомое представление имеет вид

$$853873 = (aQ_5 - dP_5)^2 + Q_5^2 =$$

$$= (7949 \cdot 752 - 853873 \cdot 7)^2 + 752^2 = 537^2 + 752^2.$$

Аналогично получаем для других делителей числа 63186602:

d	$\frac{a}{d}$	k	P_k	Q_k	Q_{k+1}	$(aQ_k - dP_k)^2 + Q_k^2$
2	[3974; 2]	1	3974	1	2	$1^2 + 1^2$
37	[214; 1, 5, 6]	2	1289	6	37	$1^2 + 6^2$
$2 \cdot 37$	[107; 2, 2, 1, 1, 2, 2]	4	752	7	12	$(-5)^2 + 7^2$
$2 \cdot 853873$	[0; 214, 1, 5, 5, 1, 214]	4	6	1289	6660	$(-215)^2 + 1289^2$
$37 \cdot 853873$	[0; 3974, 1, 1, 3974]	3	1	3975	7949	$3974^2 + 3975^2$

3.5. Разложение функций в непрерывные дроби

Непрерывные дроби можно использовать для представления и вычисления функций.

По аналогии с рациональными числами рациональные функции раскладываются в конечные непрерывные дроби. Разложим в непрерывную дробь рациональную функцию

$$f(x)=\frac{c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2+\ldots+c_{1n}x^n}{c_{00}+c_{01}x+c_{02}x^2+\ldots+c_{0n}x^n}.$$

Производя элементарные преобразования, получаем:

$$f(x)=\frac{1}{\frac{c_{00}}{c_{10}}+\frac{c_{00}+c_{01}x+c_{02}x^2+\ldots+c_{0n}x^n}{c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2+\ldots+c_{1n}x^n}-\frac{c_{00}}{c_{10}}}=\frac{c_{10}}{c_{00}+xf_1(x)},$$

где

$$f_1(x)=\frac{c_{20}+c_{21}x+c_{22}x^2+\ldots+c_{2n}x^n}{c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2+\ldots++c_{1n}x^n}$$

и

$$c_{2k}=c_{10}c_{0,k+1}-c_{00}c_{1,k+1},\quad k=0,\ 1,\ \ldots .$$

Аналогично

$$f_1(x)=\frac{c_{20}}{c_{10}+xf_2(x)},$$

где

$$f_2(x)=\frac{c_{30}+c_{31}x+c_{32}x^2+\ldots+c_{3n}x^n}{c_{20}+c_{21}x+c_{22}x^2+\ldots+c_{2n}x^n}$$

и

$$c_{3k}=c_{20}c_{1,k+1}-c_{10}c_{2,k+1},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

Аналогично

$$f_1(x)=\frac{c_{20}}{c_{10}+xf_2(x)},$$

где

$$f_2(x)=\frac{c_{30}+c_{31}x+c_{32}x^2+\ldots+c_{3n}x^n}{c_{20}+c_{21}x+c_{22}x^2+\ldots+c_{2n}x^n}$$

и

$$c_{3k}=c_{20}c_{1,k+1}-c_{10}c_{2,k+1},\quad k=0,\,1,\,\ldots,$$

и т. д. Таким образом,

$$f(x)=\cfrac{c_{10}}{c_{00}+\cfrac{c_{20}x}{c_{10}+\cfrac{c_{30}x}{c_{20}+\ddots+c_{n-1,0}+\cfrac{c_{n0}x}{c_{n-1,0}}}}}=\left[0;\frac{c_{10}}{c_{00}},\frac{c_{20}x}{c_{10}},\frac{c_{30}x}{c_{20}},\ldots,\frac{c_{n0}x}{c_{n-1,0}}\right].$$

Коэффициенты c_{jk} можно вычислять как определитель

$$c_{jk}=-\begin{vmatrix}c_{j-2,0} & c_{j-2,k+1}\\ c_{j-1,0} & c_{j-1,k+1}\end{vmatrix},\quad j\ge 2.$$

Пример 3.17. Разложим в непрерывную дробь функцию

$$f(x)=\frac{1-3x+2x^2}{1+4x+5x^2-6x^3}.$$

Коэффициенты c_{jk} запишем в таблицу:

	k			
j	0	1	2	3
0	1	4	5	–6
1	1	–3	2	0
2	7	3	–6	0
3	–24	20	0	0
4	–212	144	0	0
5	–784	0	0	0
6	–112896	0	0	0

Следовательно,

$$\frac{1-3x+2x^2}{1+4x+5x^2-6x^3}=\left[0;\frac{1}{1},\frac{7x}{1},\frac{-24x}{7},\frac{-212x}{-24},\frac{-784x}{-212},\frac{-112896x}{-784}\right]=$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{7x}{1-\cfrac{24x}{7-\cfrac{212x}{-24-\cfrac{784x}{-212+144x}}}}}.$$

Если функция $f(x)$ раскладывается в бесконечную непрерывную дробь, то в общем случае нужно доказать сходимость этой дроби и убедиться, что предельное значение подходящих дробей равно $f(x)$.

Раскладывая функцию в непрерывную дробь, можно вычислять приближенное значение этой функции.

Пример 3.18. Для функции e^x известно разложение в непрерывную дробь, полученное Эйлером:

$$e^x = \left[0; \frac{1}{1}, \frac{-2x}{2+x}, \frac{x^2}{6}, \frac{x^2}{10}, \ldots, \frac{x^2}{4n+2}, \ldots\right],$$

сходящееся для любого x, вещественного или комплексного [3].

Вычислим для этой функции подходящие дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{2+x}{2-x}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}, \ldots$$

При $x = 1$ пятая подходящая дробь дает $e \approx \dfrac{2721}{1001} = 2,71828\ldots$