ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

3.1. Определение непрерывной дроби

Пример 3.1. Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший общий делитель чисел 46 и 62:

$$62 = 1 \cdot 46 + 16,$$

$$46 = 2 \cdot 16 + 14,$$

$$16 = 1 \cdot 14 + 2,$$

$$14 = 7 \cdot 2 + 0.$$

Поделим эти равенства на 46, 16, 14 и 2 соответственно. Получим

$$\frac{62}{46} = 1 + \frac{16}{46} = 1 + \frac{1}{46/16} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{14}{16}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{16/14}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{14}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14/2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}.$$

Последнее выражение представляет собой разложение числа $\frac{62}{46}$ в непрерывную дробь. □

Определение 3.1. *Непрерывной* (или *цепной*) дробью называется выражение вида

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots}}} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right], \tag{3.1}$$

где элементы a_k и b_k могут быть вещественными или комплексными числами, а также функциями одной или нескольких переменных. Дроби $a_0 = \frac{a_0}{1}$, $\frac{b_k}{a_k}$, где $k = 1, 2, \ldots$, называются *звеньями* непрерывной дроби (соответственно нулевым, первым и т. д.). Будем предполагать, что $a_k \neq 0$ при $k > 0$. Следует отметить, что в сокращенной записи (3.1) звенья $\frac{b_k}{a_k}$ сокращать нельзя.

Если число звеньев непрерывной дроби (3.1) конечное, то она называется *конечной* и сокращенно обозначается $\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n$. Конечная непрерывная дробь отождествляется с рациональным числом, которое получается в результате выполнения указанных действий.

Пример 3.2. Рассмотрим непрерывную дробь $\left[1; \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{7}\right]$ из примера 3.1. «Свернем» эту дробь, последовательно выполняя умножение и «переворачивая» дроби:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8/7}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{7}{8}} = 1+\frac{1}{23/8} = 1+\frac{8}{23} = \frac{31}{23}.$$

Заметим, что полученное рациональное число — это то же число $\frac{62}{46}$, но уже с взаимно простыми числителем и знаменателем. □

Обобщим рассуждения примера 3.1. Перепишем последовательность равенств, получаемых в алгоритме Евклида:

$$a = bq_0 + r_1,\ b = r_1q_1 + r_2,\ r_1 = r_2q_2 + r_3,\ \ldots,\ r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k,\ r_{k-1} = r_kq_k,$$

в виде равносильной цепочки равенств:

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b},\quad \frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1},\quad \frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2},\ldots,\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}=q_{k-1}+\frac{r_k}{r_{k-1}},\quad \frac{r_{k-1}}{r_k}=q_k\,.$$

Используя эти соотношения, выразим дробь $\frac{a}{b}$ через $q_0, q_1, \ldots, q_k$:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_{k-1}+\cfrac{1}{q_k}}}}. \tag{3.2}$$

Таким образом, алгоритм Евклида позволяет представить каждое рациональное число в виде конечной непрерывной дроби.

Определение 3.2. Непрерывная дробь вида $\left[a_0;\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots\right]$ (обозначается также $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$), где $a_i\in\mathbb{N}$, называется *обыкновенной*.

Замечание. Если в представлении (3.2) записать $q_k=(q_k-1)+1$ (при $q_k>1$), то получится другое представление числа $\frac{a}{b}$ в виде непрерывной дроби:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_{k-1}+\cfrac{1}{(q_k-1)+\cfrac{1}{1}}}}}=q_0'+\cfrac{1}{q_1'+\cfrac{1}{q_2'+\ddots+\cfrac{1}{q_{k-1}'+\cfrac{1}{q_k'+\cfrac{1}{q_{k+1}'}}}}},$$

где $q_{k+1}'=1$. Поэтому для однозначности представления в конечной обыкновенной непрерывной дроби $[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n]$ всегда будем считать $a_n>1$.

Непрерывная дробь (3.1) с бесконечным числом звеньев называется *бесконечной* и сокращенно обозначается $\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^\infty$. Каждое положительное иррациональное число можно разложить в бесконечную обыкновенную непрерывную дробь, причем это разложение единственно [5].

Пример 3.3. Разложим в непрерывную дробь число $\alpha = \sqrt{47}$. Целая часть числа $\sqrt{47}$ равна 6, поэтому $\sqrt{47} = 6 + \frac{1}{a_1}$. Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{47}-6} = \frac{6+\sqrt{47}}{11}.$$

Целая часть числа a_1 равна 1, поэтому $a_1 = 1 + \frac{1}{a_2}$ и

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - 1} = \frac{11}{\sqrt{47}-5} = \frac{5+\sqrt{47}}{2} = 5 + \frac{1}{a_3}.$$

Продолжаем разложение:

$$a_3 = \frac{1}{a_2 - 5} = \frac{2}{\sqrt{47}-5} = \frac{5+\sqrt{47}}{11} = 1 + \frac{1}{a_4},$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3 - 1} = \frac{11}{\sqrt{47}-6} = \frac{6+\sqrt{47}}{1} = 12 + \frac{1}{a_5},$$

$$a_5 = \frac{1}{a_4 - 12} = \frac{1}{\sqrt{47}-6} = \frac{6+\sqrt{47}}{11} = 1 + \frac{1}{a_6}.$$

Поскольку $a_5 = a_1$, дальше элементы непрерывной дроби будут повторяться. Последовательно подставляя полученные выражения друг в друга, получаем разложение

$$\sqrt{47}=6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\ddots}}}}}}}}\,. \qquad \square$$

3.2. Подходящие дроби

Определение 3.3. Отрезок $\frac{P_k}{Q_k}=\left[a_0;\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\ldots,\frac{b_k}{a_k}\right]$ непрерывной дроби (конечной или бесконечной) называют k-й *подходящей дробью*, при этом полагают $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$; $P_0=a_0$; $Q_0=1$. Число k называют *порядком* подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$.

Теорема 3.1 (закон составления подходящих дробей). Числа P_k, Q_k, $k=-1, 0, 1, \ldots$, определяемые из соотношений

$$P_k=a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2};\ Q_k=a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2}, \qquad (3.3)$$

где

$$P_{-1}=1,\ Q_{-1}=0,\ P_0=a_0,\ Q_0=1, \qquad (3.4)$$

являются соответственно числителями и знаменателями подходящих дробей $\frac{P_k}{Q_k}$ непрерывной дроби (3.1).

Доказательство. Обозначим R_k подходящие дроби непрерывной дроби (3.1) и докажем, что $R_k=\frac{P_k}{Q_k}$ для $k=1, 2, \ldots$.

Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции: при $k=1$ для подходящей дроби R_1 имеем

$$R_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}.$$

Из соотношений (3.3) с учетом (3.4) находим

$$P_1 = a_1 P_0 + b_1 P_{-1} = a_1 \cdot a_0 + b_1 \cdot 1 = a_0 a_1 + b_1,$$

$$Q_1 = a_1 Q_0 + b_1 Q_{-1} = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 = a_1.$$

Следовательно, $R_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ и для $k = 1$ утверждение теоремы справедливо.

Пусть теперь теорема верна для всех натуральных чисел, не превосходящих k. Покажем, что она справедлива и для очередного натурального числа $k + 1$. Из соотношений (3.3) получаем

$$P_{k+1} = a_{k+1} P_k + b_{k+1} P_{k-1}, \quad Q_{k+1} = a_{k+1} Q_k + b_{k+1} Q_{k-1}.$$

По индукционному предположению

$$R_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}}.$$

По определению подходящая дробь R_{k+1} получается из подходящей дроби R_k путем замены a_k суммой $a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$. Поэтому

$$R_{k+1} = \frac{\left(a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) P_{k-1} + b_k P_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k P_{k-1} + b_k P_{k-2}) + b_{k+1} P_{k-1}}{a_{k+1}(a_k Q_{k-1} + b_k Q_{k-2}) + b_{k+1} Q_{k-1}} =$$

$$= \frac{a_{k+1} P_k + b_{k+1} P_{k-1}}{a_{k+1} Q_k + b_{k+1} P_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}. \qquad \square$$

Следствие. Для непрерывной дроби с положительными элементами числители P_k образуют монотонно возрастающую последовательность при $k \geq 0$; знаменатели Q_k образуют монотонно возрастающую последовательность при $k \geq 1$.

Для удобства вычислений подходящих дробей по формулам (3.3) обычно пользуются следующей таблицей:

k	-1	0	1	2	3	$\ldots$
b_k			b_1	b_2	b_3	$\ldots$
a_k		a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$
P_k	1	a_0	P_1	P_2	P_3	$\ldots$
Q_k	0	1	Q_1	Q_2	Q_3	$\ldots$

П р и м е р 3.4. Найдем все подходящие дроби для непрерывной дроби $\left[0; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right]$. Заполняем таблицу:

k	-1	0	1	2	3
b_k			1	3	5
a_k		0	2	4	6
P_k	1	0	1	4	29
Q_k	0	1	2	11	76

Отсюда $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{2}, \ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{4}{11}, \ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{29}{76}$. □

При вычислении подходящих дробей для обыкновенной непрерывной дроби вторую строку в таблице, как правило, не пишут.

П р и м е р 3.5. Найдем все подходящие дроби для обыкновенной непрерывной дроби [2; 1, 2, 1, 3, 1, 4]. Заполняем таблицу:

k	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_k		2	1	2	1	3	1	4
P_k	1	2	3	8	11	41	52	249
Q_k	0	1	1	3	4	15	19	91

Отсюда

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{2}{1},\ \frac{P_1}{Q_1}=\frac{3}{1},\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{8}{3},\ \frac{P_3}{Q_3}=\frac{11}{4},\ \frac{P_4}{Q_4}=\frac{41}{15},\ \frac{P_5}{Q_5}=\frac{52}{19},\ \frac{P_6}{Q_6}=\frac{249}{91}.\qquad\square$$

Лемма 3.2. Для соседних подходящих дробей $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, $\frac{P_k}{Q_k}$ непрерывной дроби (3.1) при $k \geq 1$ справедливо соотношение

$$P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k-1}b_1b_2\ldots b_k. \tag{3.5}$$

Доказательство. Обозначим $\Delta_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix}$ и распишем элементы первого столбца по закону составления подходящих дробей. Тогда

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_kP_{k-1}+b_kP_{k-2} & P_{k-1} \\ a_kQ_{k-1}+b_kQ_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_kP_{k-2} & P_{k-1} \\ b_kQ_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} = b_k\begin{vmatrix} P_{k-2} & P_{k-1} \\ Q_{k-2} & Q_{k-1} \end{vmatrix} =$$
$$= -b_k\begin{vmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = -b_k\Delta_{k-1}.$$

Проводя аналогичные выкладки для Δ_{k-1}, Δ_{k-2}, …, получаем:

$$\Delta_k = (-b_k)(-b_{k-1})\ldots(-b_1)\Delta_0 = (-1)^k b_1b_2\ldots b_k\Delta_0,$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = a_0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1.$$

Отсюда $P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = \Delta_k = (-1)^{k+1}b_1b_2\ldots b_k = (-1)^{k-1}b_1b_2\ldots b_k$. $\square$

Для подходящих дробей обыкновенной непрерывной дроби соотношение (3.5) имеет вид

$$P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k = (-1)^{k-1}. \tag{3.6}$$

Следствие. Для обыкновенной непрерывной дроби числитель и знаменатель любой подходящей дроби взаимно просты.

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(P_k, Q_k)$. Тогда оба слагаемых в левой части равенства (3.6) делятся на d, а значит и $(-1)^{k-1}$ делится на d, то есть $d = \pm 1$. □

Лемма 3.3. Для подходящих дробей $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$, $\frac{P_k}{Q_k}$ непрерывной дроби (3.1) при $k \geq 2$ справедливо соотношение

$$P_kQ_{k-2} - P_{k-2}Q_k = (-1)^k b_1 b_2 \ldots b_{k-1} a_k. \tag{3.7}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Составляем базу индукции:

$$P_2Q_0 - P_0Q_2 = (a_2P_1 + b_2P_0) \cdot 1 - a_0(a_2Q_1 + b_2Q_0) =$$

$$= a_2(a_1P_0 + b_1P_{-1}) + b_2a_0 - a_0(a_2(a_1Q_0 + b_1Q_{-1}) + b_2) =$$

$$= a_0a_1a_2 + a_2b_1 + a_0b_2 - a_0a_1a_2 - a_0b_2 = b_1a_2 = (-1)^2 b_1 a_2.$$

Тогда

$$P_{k+1}Q_{k-1} - P_{k-1}Q_{k+1} = (a_{k+1}P_k + b_{k+1}P_{k-1})Q_{k-1} - P_{k-1}(a_{k+1}Q_k + b_{k+1}Q_{k-1}) =$$

$$= a_{k+1}(P_kQ_{k-1} - P_{k-1}Q_k) = a_{k+1}(-1)^{k-1} b_1 b_2 \ldots b_k = (-1)^{k+1} b_1 b_2 \ldots b_k a_{k+1}.$$ □

Теорема 3.4. Для непрерывной дроби с положительными элементами справедливы следующие утверждения.

1. Подходящие дроби четного порядка образуют монотонно возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядка — монотонно убывающую последовательность.

2. Любая подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка.

3. Число, выражаемое этой непрерывной дробью, содержится между двумя соседними подходящими дробями (рис. 3.1).

С л е д с т в и е. Если $\frac{P_k}{Q_k}$, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ — подходящие дроби для числа α, заданного обыкновенной непрерывной дробью, то выполняется неравенство

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \le \frac{1}{Q_k Q_{k+1}},$$

а при $\alpha \ne \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ — строгое неравенство

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$, где $k \ge 2$, является *наилучшим приближением* числа α, выраженного обыкновенной непрерывной дробью, то есть для любых положительных целых чисел P, Q, таких, что $0 < Q \le Q_k$ и $\frac{P}{Q} \ne \frac{P_k}{Q_k}$, выполняется неравенство $|Q_k\alpha - P_k| < |Q\alpha - P|$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Бесконечная непрерывная дробь $\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^\infty$ называется *сходящейся*, если существует конечный предел

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k},$$

где $\frac{P_k}{Q_k}$ — подходящие дроби, $k = 1, 2, \ldots$; при этом число α принимается за значение этой непрерывной дроби. Если такой предел не существует, то бесконечная непрерывная дробь называется *расходящейся*, и ей не приписывается никакого числового значения.

П р и м е р 3.6. Решим уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$, используя непрерывные дроби. Перепишем его в виде $x^2 = 5x - 4$, отсюда $x = 5 - \frac{4}{x}$, то есть

$$x = 5 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{4}{5 - \ddots}}.$$

Вычислим подходящие дроби к x:

$$\frac{5}{1}, \frac{21}{5}, \frac{85}{21}, \frac{341}{85}, \ldots, \frac{4^{k+1}-1}{4^k-1} = 4 + \frac{3}{4^k-1},$$

где $k \geq 1$. Эта последовательность монотонно убывает и стремится к 4 при $k \to \infty$ (рис. 3.2 на стр. 96), то есть $x = 4$ — корень уравнения.

Аналогично ищем второй корень. Записываем уравнение в виде $4 = 5x - x^2$, откуда $x = \frac{4}{5-x}$, то есть

$$x = \cfrac{4}{5 - \cfrac{4}{5 - \ddots}}.$$

Вычисляем подходящие дроби:

$$\frac{4}{5}, \frac{20}{21}, \frac{84}{85}, \frac{340}{341}, \ldots, \frac{4^k-4}{4^k-1} = 1 - \frac{3}{4^k-1},$$

где $k \geq 2$. Предел этой монотонно возрастающей последовательности равен 1 при $k \to \infty$, то есть $x = 1$ — второй корень уравнения. □

Т е о р е м а 3.5. Если все элементы a_k, b_k ($k = 0, 1, \ldots$) бесконечной непрерывной дроби положительны, причем

$$b_k \leq a_k, \quad a_k \geq d > 0 \ (k = 1, 2, \ldots),$$

то бесконечная непрерывная дробь сходится.

С л е д с т в и е. Обыкновенная непрерывная дробь всегда сходится.

П р и м е р 3.7. Найдем число, задаваемое бесконечной непрерывной дробью [1; 1, 1, 1, ...].

Из выражения

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

получаем $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$, то есть $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Это уравнение имеет два решения:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Все элементы непрерывной дроби [1; 1, 1, 1, ...] положительны, поэтому $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. □