Université BORDEAUX 1 — U.F.R. Mathématiques et Informatique
Epreuve de J.Bétréma — 17 janvier 2005

Master Informatique 1ère année
INF 300 - Modèles de calcul

Durée: 3 heures
Tous documents interdits.

Exercice 1

Un corrigé est disponible ci-dessous.

Dans cet exercice (et dans le suivant), un *semi-prédicat* P désigne une fonction booléenne $P : \mathbf{N} \to \{0, 1\}$, qui peut être *partielle*. Une procédure p calcule, comme d'habitude, une fonction $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

1. Soit E l'ensemble des procédures p qui calculent des semi-prédicats. E est-il décidable ? *Note* : la réponse doit être soigneusement justifiée ; cette recommandation s'applique à toutes les questions, et spécialement à celles où la réponse demandée est "oui" ou "non".
2. Soit F l'ensemble des procédures p telles que chaque `return` soit suivi de 0 ou 1. On suppose aussi que le texte de la procédure se termine par une instruction `return`, pour garantir que le résultat du calcul, si celui-ci termine, est bien défini. F est-il décidable ?
3. Montrer que tout semi-prédicat *calculable* P peut être calculé par une procédure $p \in F$.

Dans la suite, on associe à tout semi-prédicat *calculable* P l'ensemble suivant, appelé ensemble *accepté* par P :

$$A(P) = \{ x \mid P(x) = 1 \}$$

4. $A(P)$ est-il, en général, décidable ? *Note* : si la réponse est "oui", il faut montrer que $A(P)$ est décidable pour tout semi-prédicat calculable P ; si la réponse est "non", il faut montrer qu'il existe des semi-prédicats calculables P tels que $A(P)$ ne soit pas décidable.
5. $A(P)$ est-il, en général, récursivement énumérable ?
6. Tout ensemble B récursivement énumérable est-il de la forme $A(P)$?

On considère maintenant les machines de Turing avec deux états terminaux q_0 et q_1 . La machine s'arrête lorsqu'elle atteint un état terminal, et le résultat du calcul est 0 ou 1 selon l'état. Si la machine boucle, ou si elle s'arrête dans un état non terminal (par absence de règle applicable), le résultat du calcul est indéfini. On associe à toute machine M de ce type l'ensemble suivant, appelé ensemble *accepté* par M :

$$A(M) = \{ u \mid M(u) = 1 \}$$

où $M(u)$ désigne, comme d'habitude, le résultat du calcul exécuté par M, avec u écrit initialement sur la bande. Un langage de la forme $A(M)$ est dit *reconnaissable par une machine de Turing*.

7. Que peut-on dire des langages reconnaissables par des machines de Turing ? *Note* : la réponse souhaitée est simple, technique, et précise. Sinon, ne dites rien : cela ne vous rapportera certes aucun point, mais vous évitera, ici comme ailleurs, de perdre du temps (et d'agacer le correcteur) !

Exercice 2

Un corrigé est disponible ci-dessous.

A tout prédicat à deux variables $P(x, y)$ on peut associer une fonction f définie par :

$$f(x) = \min \{ y \mid P(x, y) \}$$

Idem si P est un *semi-prédicat* (voir la définition au début de l'exercice 1, à part cela les exercices sont indépendants), mais dans ce cas, par exemple, $f(x) = 5$ signifie :

$$P(x, 5) \wedge (y < 5 \Rightarrow \neg P(x, y) \vee P(x, y) \text{ non défini }).$$

1. Ecrire (en langage C) une procédure qui calcule f lorsque P est un prédicat calculable. Dans quel cas l'exécution de cette procédure boucle-t-elle ? *Note* : un prédicat, contrairement à un semi-prédicat, est une fonction booléenne totale, c'est-à-dire toujours définie.
2. On souhaite écrire une procédure qui calcule f même si P est un semi-prédicat (calculable). On fait donc intervenir le temps, et après un peu de réflexion on écrit la procédure suivante :

```
int phi (int x) {
  for (t = 0; ; t++)
    for (y = 0; y < t; y++)
      if ( h (P, x, y, t) && P (x, y) )
        return y;
}
```

   où $h(P, x, y, t)$ exprime, comme d'habitude, que le calcul de $P(x, y)$ est terminé au temps t. Montrer que le calcul de $\varphi(x)$ termine si et seulement si $f(x)$ est défini. Montrer par contre que dans ce cas, on peut avoir $\varphi(x) \neq f(x)$.

   A votre avis, ce problème peut-il être corrigé ? Si la réponse est positive, écrire une procédure correcte ; si la réponse semble négative, une preuve est, comme toujours, plus difficile ; on demande seulement, dans ce cas, de donner en quelques lignes des arguments en faveur de cette conjecture.
3. Soit $A(x, q)$ le semi-prédicat vrai si le calcul de $q(x)$ termine, et non défini sinon. Ce semi-prédicat est-il calculable ? *Note* : q désigne une procédure quelconque ; on ne l'appelle pas p, pour éviter toute confusion avec P.
4. Montrer que, pour tout x, l'ensemble $\{ q \mid A(x, q) \}$ est infini.
5. On suppose que la fonction f associée au semi-prédicat A est calculable ; pour décider si le calcul de $q(x)$ termine, on compare q et $f(x)$; si $q < f(x)$, la réponse est facile, expliquer pourquoi ; idem si $q = f(x)$; par contre si $q > f(x)$, on n'est pas plus avancé.

   Expliquer comment transformer A pour obtenir un algorithme voisin du précédent et qui résolve le problème de l'arrêt. Que peut-on en conclure ? *Indication* (partielle) : on peut ajouter une troisième variable dans la définition de A.

A partir de maintenant on revient à la situation de la question 1 : P est un *prédicat* calculable. On cherche à exprimer f en λ-calcul. Pour cela, on passe par la définition récursive suivante :

$$f(x) = g(x, 0) \; ; \; g(x, y) = \textbf{si } P(x, y) \textbf{ alors } y \textbf{ sinon } g(x, y + 1)$$

6. Vérifier que cette (curieuse) définition de f est correcte, en expliquant en particulier pourquoi cette récurrence "à l'envers" est valide.
7. On suppose P défini par un λ-terme, qu'on appellera aussi P. En utilisant un opérateur de point fixe Y, définir g par un λ-terme G. *Rappel* : pour tout M, $Y\,M \rightarrow M\,(Y\,M)$; on ne demande absolument pas de définir Y, dont l'existence a été prouvée en cours ; on demande de définir M tel que $G = Y\,M$ réponde à la question posée.
8. En utilisant G, définir f par un λ-terme F. On suppose que $f(5) = 3$; réduire $F\,\mathbf{5}$.

Exercice 3

Un corrigé est disponible ci-dessous.

Le problème de la *coloration* d'un graphe avec 3 couleurs, appelé en abrégé **3-COL**, est le suivant :

- *Instance* : un graphe G, non orienté, avec m arêtes et n sommets.
- *Question* : les sommets de G peuvent-ils être coloriés avec trois couleurs, de telle sorte que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de même couleur ?

Dans la suite, les couleurs seront notées 0, 1 et 2. Une *coloration* est donc une fonction γ :

$S \to \{0, 1, 2\}$, où S désigne l'ensemble des sommets de G, et où, pour toute arête (i, j), on a : $\gamma (i) \neq \gamma (j)$.

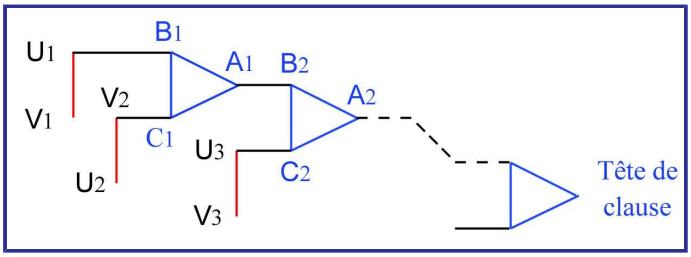
1. Montrer soigneusement que **3-COL** appartient à la classe **NP** : expliquer en quoi consiste, dans ce cas, un certificat, et évaluer précisément la complexité de l'algorithme de vérification du certificat.
2. A chaque sommet i on associe trois variables booléennes x_i , y_i et z_i ; la première (resp. seconde, troisième) exprime que la couleur du sommet i vaut 0 (resp. 1, 2). Ainsi la clause :

   $$x_i \vee y_i \vee z_i$$

   exprime que le sommet i est colorié. Compléter ces n clauses pour obtenir un ensemble de clauses Φ tel que tout choix de valeurs pour les 3 n variables booléennes, qui satisfait Φ, corresponde à une coloration de G, et vice-versa.
3. Combien de clauses la formule Φ contient-elle ? La construction précédente constitue-t-elle une réduction **3-COL** $\to$ **SAT** (ou plus précisément **CNF**), ou l'inverse ? Cette réduction est-elle polynomiale ? *Note* : on commencera par rappeler la définition d'une réduction polynomiale $A \to B$, où A et B désignent deux problèmes.
4. La réduction précédente est en accord avec un théorème fondamental, qu'on demande d'énoncer.

Dans la suite on part, inversement, d'un ensemble Φ de clauses, auquel on veut associer une instance de **3-COL**. Pour cela on construit un graphe comme suit :

- A chaque variable booléenne x_i on associe un segment U_i V_i (c'est-à-dire deux sommets, qu'on appellera *principaux*, reliés par une arête).
- A chaque opérateur $\vee$ on associe un triangle A_j B_j C_j (c'est-à-dire trois sommets, qu'on appellera *annexes*, reliés par trois arêtes). A_j est appelé *tête du triangle*.
- Si, par exemple, la première clause débute par $x_1 \vee \neg x_2$, on relie par une arête le sommet principal U_1 au sommet annexe B_1 , et le sommet principal V_2 au sommet annexe C_1 .
- Si, par exemple, la première clause débute par $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$, on la traite comme $(x_1 \vee \neg x_2) \vee x_3$: U_1 et V_2 sont attachés au premier triangle comme ci-dessus, puis on relie sa tête A_1 à B_2 , et U_3 à C_2 .
- Et ainsi de suite : une clause comportant k variables est représentée par une chaîne de k - 1 triangles ; la seule tête de triangle qui reste "libre" est appelée *tête de clause*.



- Le graphe G comporte enfin deux sommets supplémentaires, notés Z (zéro) et N (neutre), et reliés entre eux. Z a pour couleur 0, et N a pour couleur 2 : en permutant les couleurs, on peut toujours adopter cette convention, qui n'est donc pas restrictive.

  N est relié à tous les sommets principaux et à toutes les têtes de triangles ; Z est relié à toutes les têtes de clauses.

Questions :

5. Compléter le dessin pour le graphe associé aux clauses $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ et $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$. Ce graphe comporte 5 triangles ; ne pas dessiner les sommets N et Z, ni les arêtes issues de ces sommets.

6. Expliquer le rôle des sommets N et Z.
7. Montrer que si une tête de triangle A_j a pour couleur 1, au moins l'un des sommets — autres que A_j — reliés à B_j et C_j , a pour couleur 1.
8. Illustrer, sur l'exemple de la question 5, comment tout choix de valeurs pour les 4 variables booléennes, qui satisfait les deux clauses, correspond à une coloration de G, et vice-versa.
9. Evaluer précisément, en fonction du nombre n' de variables booléennes et du nombre m' de connecteurs $\vee$, la taille du graphe ainsi construit. En déduire que cette construction est une réduction polynomiale … → … (compléter).
10. En déduire que **3-COL** est **NP**-complet, en donnant les détails de la (courte) preuve.

Corrigé.

Remarque sur le barème : les notes entre 10 et 30 ont été ajustées pour que la note finale soit comprise entre 10 et 18. La copie qui a obtenu 51 points a laissé le correcteur perplexe…

Exercice 1

Voir l'énoncé ci-dessus.

1. (3 points). Non, E n'est pas décidable, à cause du théorème de Rice. E est défini par une propriété qui ne dépend que de la fonction calculée par p, à savoir :

   $$\forall x \,.\, p\,(x) = 0 \text{ ou } 1 \text{ (ou n'est pas défini).}$$

   Cette propriété n'est pas triviale (elle n'est ni toujours vraie ni toujours fausse), donc le théorème de Rice s'applique.

   Note : pour obtenir les 3 points, il faut énoncer correctement le théorème de Rice.
2. (2 points). Oui, F est décidable, car au contraire F est défini par une propriété du *texte* de la procédure p, qui peut être vérifiée automatiquement par un *analyseur* syntaxique.
3. (1 point). Soit q une procédure qui calcule P ; par définition, $q \in E$, mais il est très facile de transformer q en une procédure $p \in F$:

   ```
   int p (int x) {
     if (q (x) == 0) return 0;
     [else] return 1;
   }
   ```

   Si $q \in E$, p et q calculent la même fonction, et réciproquement. *Note* : c'est exactement la convention du langage C, qui ne possède pas de type *booléeen*, et définit "vrai" par "différent de 0".
4. *Barème* : 4 points pour l'ensemble des questions 4, 5 et 6.

   Non, en général $A\,(\,P\,)$ n'est pas décidable, voir pourquoi ci-dessous (question 6).

   Note : certain(e)s étudiant(e)s ont traité une question différente, avec des contorsions diverses pour essayer de (se) le cacher. Ils/elles ont démontré que l'ensemble

   $$\{\,(\,P\,,\,x\,) \mid P\,(x) = 1\,\}$$

   est indécidable, en adaptant la preuve de l'indécidabilité du problème de l'arrêt, ou en invoquant directement le théorème de Rice. Ce n'était pas la question posée, d'ailleurs il est évidemment faux que $A\,(\,P\,)$ ne soit jamais décidable.
5. Oui, $A\,(\,P\,)$ est récursivement énumérable, car semi-décidable. En effet la fonction semi-caractéristique de cet ensemble est peu différente de P, et peut être calculée par la procédure

suivante :

```
int scA (int x) {
  int y = p (x);
  if (y == 1)
    return 1;
  while (1);
}
```

où p désigne une procédure qui calcule P ; scA (x) vaut 1 si $x \in A$ (P). Sinon, ou bien P n'est pas défini, et le calcul de y ne termine pas ; ou bien P (x) = 0, et l'instruction `while(1)` ne termine pas.

Note : beaucoup d'étudiant(e)s ont confondu la définition de A (P) et celle d'un ensemble semi-décidable ; la différence est légère, mais P n'est pas exactement la fonction semi-caractéristique de A (P), car P peut prendre la valeur 0, contrairement à une fonction semi-caractéristique.

6. Oui, tout ensemble B récursivement énumérable est de la forme A (P), car B est semi-décidable, donc il suffit de choisir pour P la fonction semi-caractéristique de B.

   Ceci justifie la réponse donnée à la question 4, car il existe des ensembles récursivement énumérables et non décidables.

7. (2 points). On sait que les machines de Turing ont exactement la même puissance de calcul que les procédures d'un modèle de programmation impératif, comme C. Donc les langages reconnaissables par des machines de Turing sont exactement les langages de la forme A (P), c'est-à-dire les langages récursivement énumérables. *Rappel* : un mot sur un alphabet de taille b, peut être considéré comme la représentation d'un entier en base b ; il n'y a donc pas de différence entre un langage et un ensemble d'entiers.

Exercice 2

Voir l'énoncé ci-dessus.

1. (2 points) Procédure de calcul de f :

   ```
   int f (int x) {
     for (int y = 0; ! P (x, y); y++);
     return y;
   }
   ```

   Le calcul de f (x) boucle lorsqu'il n'existe pas d'entier y tel que P (x, y).

   Note. Si P est un semi-prédicat, il y a un second cas où le calcul ne termine pas :

   $$(*)\ \exists y\ .\ P\ (x, y)\ \text{non défini} \wedge (\ z < y \Rightarrow \neg\ P\ (x, z)\ )$$

   En théorie de la calculabilité, l'opérateur de *minimisation*, qui transforme le semi-prédicat P en une fonction notée μP :

   $$\mu P\ (\ x\ ) = \text{"min"}\ \{\ y \mid P\ (x, y)\ \}$$

   respecte la convention ci-dessus : lorsque la condition (*) est vérifiée, μP (x) n'est pas défini. Ainsi μ transforme une fonction booléenne calculable partielle en une fonction elle aussi calculable partielle. La définition de f donnée dans l'énoncé est la définition mathématique standard du minimum d'un ensemble, mais les questions suivantes montrent que f n'est en général pas calculable, lorsque P est un semi-prédicat calculable. Inversement μP ne calcule pas un vrai minimum, d'où les guillemets autour de "min".

2. (2 points) Avec les conventions de l'énoncé, f (x) est défini dès que l'ensemble E = { $y \mid P$ (x, y) } n'est pas vide.
   - Si le calcul de $y = \varphi$ (x) termine, cet entier y vérifie P (x, y), et donc E n'est pas vide.
   - Réciproquement, si E n'est pas vide, soit y_0 un élément de E : il existe t_0 tel que le calcul

de $P\ (x, y_0)$ est terminé au temps t_0 . Le calcul de $\varphi\ (x)$ ne peut pas boucler, car dès que t dépasse à la fois t_0 et y_0, la condition qui suit *if* est vérifiée pendant l'exécution de la boucle interne.

(2 points) Par contre $\varphi\ (x)$ est l'entier $y \in E$ dont le calcul est *le plus rapide*, et non le minimum de E.

(1 point) Ce problème ne semble pas pouvoir être corrigé, car on voit bien comment transformer la procédure `phi` pour *énumérer* tous les éléments de E, mais comment savoir, pendant cette énumération, à quel instant apparaît l'élément minimal ? Si 5 est le minimum des éléments énumérés après plusieurs jours de calcul, comment savoir si, en attendant quelques instants de plus, on ne va pas voir apparaître 2 ?

3. (2 points) Oui, A est calculable, car c'est la fonction semi-caractéristique de l'ensemble :

$$H = \{\ (q, x)\ |\ q\ (x)\ \text{termine}\ \}$$

qui est récursivement énumérable, donc semi-décidable.

4. (2 points) Pour tout x, il existe une infinité de procédures q telles que le calcul de $q\ (x)$ termine ; par exemple `"return x"`, `"return x + 1"`, `"return x + 2"`, etc. ; les procédures `"return 0"`, `"return 1"`, `"return 2"`, etc. , qui ne tiennent pas compte de leur argument x, conviennent aussi.

5. (2 points) $f\ (x)$ est (le numéro de) la première procédure p (dans l'ordre de numérotation des procédures) telle que le calcul de $p\ (x)$ termine ; d'après la question précédente, $f\ (x)$ est toujours défini. Si $q < f\ (x)$, on est sûr que le calcul de $q\ (x)$ ne termine pas. Si $q = f\ (x)$, on est sûr que le calcul de $q\ (x)$ termine.

(3 points) Soit $B\ (x, n, q) = n \leqslant q \wedge A\ (x, q)$. On peut considérer les deux premiers arguments de B comme un couple (x, n) ; si la fonction $g\ (x, n)$ associée à B :

$$g\ (x, n) = \min\ \{\ q\ |\ B\ (x, n, q)\ \}$$

était calculable, il suffirait de comparer, comme ci-dessus, q et $g\ (x, q)$ pour savoir si le calcul de $q\ (x)$ termine.

On en conclut que la fonction f définie au début de cet exercice n'est en général pas calculable, lorsque P est un semi-prédicat calculable. Au lieu d'utiliser explicitement H, on peut raccourcir l'argument en considérant n'importe quel ensemble *infini* E récursivement énumérable et non décidable. On définit :

$$P\ (x, y) = x \leqslant y \wedge y \in E$$

On a : $x \in E \Leftrightarrow f\ (x) = x$, et f est totale, car E est infini. Si la fonction f était calculable, E serait décidable.

6. (2 points) Si $f\ (x)$ est défini, et vaut par exemple 5, on a :

$$f\ (x) = g\ (x, 0) = g\ (x, 1)\text{, car } P\ (x, 0) \text{ est faux ;}$$
$$g\ (x, 1) = g\ (x, 2)\text{, car } P\ (x, 1) \text{ est faux ; etc. jusqu'à}$$
$$g\ (x, 5) = 5\text{, car } P\ (x, 5) \text{ est vrai.}$$

Si $f\ (x)$ n'est pas défini, le calcul récurrent ne termine pas, puisque $\forall y\ .\ \neg\ P\ (x, y)$.

7. (3 points) Soit $M = \lambda\ g\ x\ y\ .\ \mathbf{if}\ (P\ x\ y)\ y\ (g\ x\ (\mathbf{succ}\ y))$. Alors $G = Y\ M$ vérifie, quels que soient les entiers **m** et **n** :

$$G\ \mathbf{m}\ \mathbf{n} \rightarrow M\ G\ \mathbf{m}\ \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{if}\ (P\ \mathbf{m}\ \mathbf{n})\ \mathbf{n}\ (G\ \mathbf{m}\ (\mathbf{succ}\ \mathbf{n}))\ .$$

8. (2 points) $F = \lambda\ x\ .\ G\ x\ \mathbf{0}$, et si $f\ (5) = 3$, on a :

$$F\ \mathbf{5} \rightarrow G\ \mathbf{5}\ \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{if}\ (P\ \mathbf{5}\ \mathbf{0})\ \mathbf{0}\ (G\ \mathbf{5}\ (\mathbf{succ}\ \mathbf{0})) \rightarrow$$
$$\rightarrow \mathbf{if\ false}\ \mathbf{0}\ (G\ \mathbf{5}\ (\mathbf{succ}\ \mathbf{0})) \rightarrow G\ \mathbf{5}\ (\mathbf{succ}\ \mathbf{0}) \rightarrow G\ \mathbf{5}\ \mathbf{1}$$

De même :

$$G\ \mathbf{5\ 1} \to G\ \mathbf{5\ 2} \to G\ \mathbf{5\ 3}$$

Enfin :

$$G\ \mathbf{5\ 3} \to \mathbf{if}\ (\ P\ \mathbf{5\ 3}\ )\ \mathbf{3}\ (\ G\ \mathbf{5}\ (\ \mathbf{succ\ 3}\ )\ ) \to \mathbf{if\ true\ 3}\ (\ G\ \mathbf{5}\ (\ \mathbf{succ\ 3}\ )\ ) \to \mathbf{3}\ .$$

Exercice 3

Voir l'énoncé ci-dessus.

1. (2 points) **3-COL** appartient à la classe **NP**, car un certificat est une coloration γ, et le vérifieur doit simplement s'assurer que, pour chaque sommet i, $\gamma\ (\ i\ )$ est compris entre 0 et 2, et que chaque arête a ses extrémités de couleurs différentes. La complexité de cette vérification est donc proportionnelle à $m + n$.

2. (3 points) Pour chaque arête $(\ i, j\ )$, il faut ajouter les trois clauses suivantes :

   $$\neg\ (\ x_i \wedge x_j\ ) = \neg x_i \vee \neg x_j\ ,\ \neg y_i \vee \neg y_j\ ,\ \neg z_i \vee \neg z_j$$

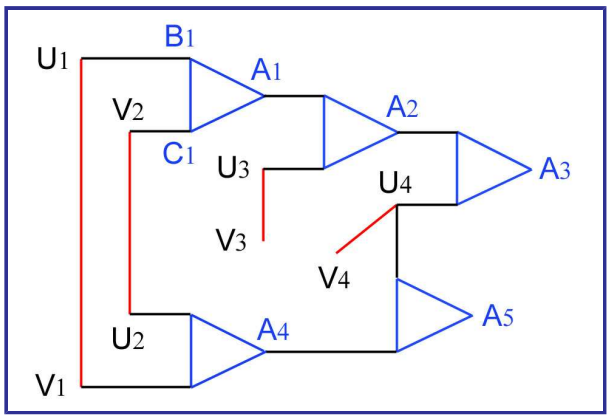
   Remarque : il est inutile (mais pas faux) d'ajouter des clauses pour exprimer qu'un sommet ne possède pas simultanément plusieurs couleurs ; en effet autoriser deux couleurs pour un sommet i rend la coloration du graphe plus difficile : il ne reste plus de choix pour la couleur des sommets reliés à i. Autrement dit, si Φ est satisfaite avec par exemple $x_i = y_i = 1$, Φ est aussi satisfaite avec $x_i = 1$ et $y_i = 0$.

3. (3 points) Φ comporte $3\ m + n$ clauses. La construction précédente constitue une réduction f : $A =$ **3-COL** → $B =$ **SAT** (et même $B =$ **3-CNF**). En effet à chaque instance G du problème A, on a associé une instance $\Phi = f\ (\ G\ )$ du problème B, de telle sorte que $A\ (\ G\ )$ — autrement dit "G est 3-coloriable", soit équivalent à $B\ (\ \Phi\ )$ — autrement dit "$\Phi = f\ (\ G\ )$ est satisfiable".

   Décrire la construction f comme un algorithme détaillé, avec les structures de données adéquates, serait certainement assez long et délicat ; on peut cependant affirmer sans risque que la complexité de cet algorithme est polynomiale, car la taille de Φ est une fonction linéaire de la taille de G.

4. (2 points) La réduction précédente est en accord avec le théorème de Cook, qui dit que **SAT** est **NP**-complet : pour tout problème A de la classe NP, il existe une réduction polynomiale A → **SAT**.

5. (2 points) Voici le graphe associé aux clauses $(\ x_1 \vee \neg\ x_2 \vee x_3 \vee x_4\ )$ et $(\ \neg\ x_1 \vee x_2 \vee x_4\ )$:

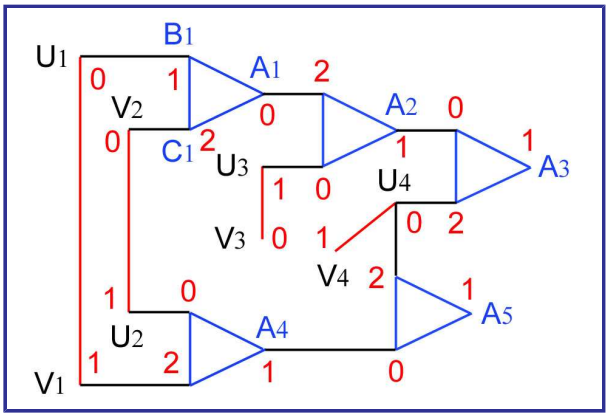
   Les sommets V_3 et V_4 ne sont reliés à aucun triangle, car $\neg x_3$ et $\neg x_4$ n'apparaissent dans aucune clause. Au contraire le sommet U_4 est relié à deux triangles, car x_4 apparaît dans deux clauses. Le sommet N n'apparaît pas sur le dessin, mais est relié à tous les sommets U_i , V_i et A_j . Le sommet Z n'apparaît pas sur le dessin, mais est relié aux sommets A_3 et A_5 .

6. (2 points) Le sommet N force tous les sommets principaux et toutes les têtes de triangles à être coloriés 0 ou 1 ; Z force la couleur des têtes de clauses à 1.

7. (2 points) Si une tête de triangle A a pour couleur 1, l'un des sommets B ou C a pour couleur 0 ;

supposons que ce soit B. Le sommet relié à B est un sommet principal ou une tête de triangle, donc n'est pas colorié 2 (car il est relié à N, voir question précédente) ; la seule couleur restante est 1.

8. (3 points) Choisissons par exemple $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. La coloration correspondante du graphe attribue la couleur 0 aux sommets U_1 , V_2 , V_3 et U_4 ; les autres sommets principaux, soit V_1 , U_2 , U_3 et V_4 reçoivent la couleur 1. La seule couleur possible pour A_1 est 0 (voir question précédente), tandis que B_1 et C_1 sont coloriés 1 et 2. Par contre, grâce à U_3 qui est colorié 1, on peut attribuer la couleur 1 au sommet A_2 ; le sommet relié à U_3 est colorié 0, et le troisième sommet du triangle est colorié 2. Ceci correspond au fait que la valeur $x_3 = 1$ satisfait la première clause. Enfin A_3 est colorié 1 (pas d'autre choix, car c'est une tête de clause, reliée à Z), et le sommet entre A_2 et A_3 est colorié 0. Et ainsi de suite, voir dessin :



Inversement, à partir d'une coloration, on attribue la valeur 0 (respectivement 1) à la variable x_i si le sommet U_i est colorié 0 (respectivement 1). Comme une tête de clause est de couleur 1 (car reliée à Z, voir question 6), l'un des sommets principaux reliés aux triangles qui composent cette clause, est lui-même colorié 1 (voir question précédente) ; donc chaque clause est satisfaite.

9. (2 points) Le graphe comporte 2 n' sommets principaux, et m' triangles, donc le nombre de sommets vaut :

$$n = 2\,n' + 3\,m' + 2\ .$$

Les arêtes se classent comme suit :

- n' arêtes rouges qui relient les sommets principaux U_i et V_i ;
- 3 m' arêtes bleues formant les triangles, et 2 m' arêtes noires issues des sommets B_j et C_j ;
- 2 $n' + m'$ arêtes issues de N ;
- $c + 1$ arêtes issues de Z, où c désigne le nombre de clauses, qui est inférieur à m'.

D'où le nombre d'arêtes :

$$m = n' + 3\,m' + 2\,m' + 2\,n' + m' + c + 1 = 3\,n' + 6\,m' + c + 1\ .$$

Comme on l'a indiqué question 3, décrire la construction g, qui transforme un ensemble de clauses en un graphe, comme un algorithme détaillé, avec les structures de données adéquates, serait certainement long ; on peut cependant affirmer sans risque que la complexité de cet algorithme est polynomiale, car la taille de G est une fonction linéaire de la taille de Φ.

La construction g est une réduction polynomiale **CNF → 3-COL**. En effet à chaque instance Φ de **CNF**, c'est-à-dire à chaque ensemble de clauses Φ, on a associé une instance $G = g\ (\ \Phi\ )$ du problème **3-COL**, de telle sorte que:

$$\Phi \text{ est satisfiable} \Leftrightarrow g\ (\ \Phi\ ) \text{ est 3-coloriable.}$$

10. (2 points) On en déduit que **3-COL** est **NP**-complet. En effet tout problème dans la classe **NP** peut être réduit polynomialement à **SAT** (théorème de Cook) ; on peut réduire

polynomialement **SAT** à **CNF**, et **CNF** à **3-COL** (question précédente). Donc tout problème dans la classe **NP** peut être réduit polynomialement à **3-COL**.