Exercice :

1)
On suppose admise la règle R donnée dans l'exrcice :

Montrons que l'on peut en deriver le tiers exclu:

Soit P: Prop,

on a

```
  P |- P (assumption)         ~P |- ~ P (assumption)

 ----------------------------------------------------
   |- P \/~P    (regle R)
```

2)
Reciproquement, si l'on admet le tiers exclu, on peut obtenir la regle R

Soient A, B , C : Prop et Gamma, on suppose qu'on a
Gamma, A |- B et Gamma, ~A |- C

```
------------- (hypothese)      -------------- (hypothese)
Gamma, A |- B                 Gamma, ~A |- C               Gamma |- A \/ ~A
----------------------------------------------------------------------------
             Gamma |- C  (elimination du ou)
```

Problème

1ere question

```
Definition arc (i j:Nat) :=
  i=0 /\ j=1 \/
  i=1 /\ j=2 \/
  i=2 /\ j=0 \/
  i=3 /\ j=0 \/
  3<=i /\ j=succ i.
```

2eme question

a)

Montrer "arc 1 2" revient a montrer

```
1=0 /\ 2=1 \/
1=1 /\ 2=2 \/
1=2 /\ 2=0 \/
1=3 /\ 2=0 \/
3<=1 /\ 2=succ 1.
```

(se montre en utilisant 2 fois la regle d'introduction du "ou",
une fois la regle d'introduction du "et", et la reflexivité de l'égalité.

b)

On doit montrer

```
i : Nat
H : 3 <= i

--------------------------------

i=0 /\ j=1 \/
i=1 /\ j=2 \/
i=2 /\ j=0 \/
i=3 /\ j=0 \/
3<=i /\ succ i =succ i.
```

(facile : regles d'introduction du ou, du et , et de l'egalite)

c)

Supposons H : arc 2 1 et montrons False :

L'√©nonc√© de H devient

```
2=0 /\ 1=1 \/
2=1 /\ 1=2 \/
2=2 /\ 1=0 \/
2=3 /\ 1=0 \/
3<=2 /\ 1=succ 2
```

Par √©limination du "ou" du "et" on obtient des sequents ayant toujours au
moins une hypothese fausse:

par exemple:

```
2=0
1=1
-----
False
```

d) On doit prouver :

```
 i : Nat
 H :   0=0 /\ i=1 \/
       0=1 /\ i=2 \/
       0=2 /\ i=0 \/
       0=3 /\ i=0 \/
       3<=0 /\ i=succ 0.
 --------------------------
 i=1
```

En eliminant les ou, puis les et dans l'hypothese H, on
trouve un but trivial :

```
0=0
i=1
-----
i=1
```

et les autres cas sont triviaux :

```
0=1
i=2
------
i=1
```

(car on peut prouver ~(0=1))

Question 3

La proposition "Connected i j" est d√©finie de fa√ßon impr√©dicative :

"i est connecté à j si tout ensemble X de sommets
 (qui contient i et tel que
  pour tout sommet k, si k appartient a X, alors X contient aussi tout
  sommet l relié à k par un arc) contient auyssi le sommet j".

question 4.

Preuve de "Connected 0 2"

Soit X un ensemble contenant le sommet 0 et tel que
pour tout sommet k, si k appartient a X, alors X contient aussi tout
  sommet l relié à k par un arc.

alors X contient aussi 1 (car il y a un arc de 0 √† 1)
X contient aussi 2 (car il y a un arc de 1 √† 2).

On a donc montré la proposition "Connected 0 2"

Preuve de forall i, Connected 0 i -> i=0 \/ i=1 \/ i=2.

Soit i, supposons "Connected 0 i"

On considere le predicat X(i)= i=0 \/ i=1 \/ i=2.

On a bien sûr X(0)

de plus soit k tel que X(k), c'est √† dire k=0 \/ k=1 \/ k=2

soit l tel que arc k l

si k=0, alors l= 1 et on a bien X(l) (C'est √† dire 1=0 \/ 1=1 \/ 1=2)
si k=1 alors l=2 et on a bien X(2)
si k=2 alors l=0 et on a bien X(0)

On a donc X(l)

D'apres la definition de Connected

D'apres la definition de Connected, on a bien X(i) c'est √† dire

$i=0 \lor i=1 \lor i=2$.