Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2007/2008

LOGIQUE

Corrigé de l'examen de Décembre 2007- G. Sénizergues

Exercice 3(sur 5 points)

Q1-

1- $0 = 0 \vdash 0 = 0$ (ax)
2- REF $\vdash 0 = 0$ $(\forall_g)$
3- REF, $\neg(0 = 0) \vdash$ $(\neg_g)$
4- REF, $\neg(0 = 0) \vdash 0 = S(0)$(aff$_d$)
5- REF $\vdash \neg(0 = 0) \to 0 = S(0)(\to_d)$
6- REF $\vdash \exists y(\neg(0 = 0) \to 0 = S(y))(\exists_d)$
7- EG $\vdash \exists y(\neg(0 = 0) \to 0 = S(y))$(aff$^*_g$)

Q2-

1'- $S(x) = S(x) \vdash S(x) = S(x)$ (ax)
2'- REF $\vdash S(x) = S(x)$ $(\forall_g)$
3'- REF, $\neg(x = 0) \vdash S(x) = S(x)$(aff$_g$)
4'- REF $\vdash \neg(x = 0) \to S(x) = S(x)(\to_d)$
5'- REF $\vdash \exists y(\neg(x = 0) \to S(x) = S(y))(\exists_d)$
6'- EG $\vdash \exists y(\neg(x = 0) \to S(x) = S(y))$(aff$^*_g$)

Q3-

Posons $H(x) := \exists y(\neg(x = 0) \to x = S(y))$.
La preuve donnée en Q1 se termine par EG $\vdash H(0)$.
Réécrivons la preuve de Q2, en changeant la première occurrence de x en S(x) : on obtient la preuve suivante de EG $\vdash H(S(x))$:
8- $S(x) = S(x) \vdash S(x) = S(x)$ (ax)
9- REF $\vdash S(x) = S(x)$ $(\forall_g)$
10- REF, $\neg(S(x) = 0) \vdash S(x) = S(x)$(aff$_g$)
11- REF $\vdash \neg(S(x) = 0) \to S(x) = S(x)(\to_d)$
12- REF $\vdash \exists y(\neg(S(x) = 0) \to S(x) = S(y))(\exists_d)$
13- EG $\vdash \exists y(\neg(S(x) = 0) \to S(x) = S(y))$(aff$^*_g$)
On fait suivre 1-13 d'une preuve par récurrence de $\forall x H(x)$:
14- EG, $H(x) \vdash H(S(x))$(13,aff$^*_g$)
15- EG $\vdash H(x) \to H(S(x))(\to_d)$
16- EG $\vdash \forall x H(x) \to H(S(x))(\forall_d)$
17- EG $\vdash H(0) \wedge (\forall x H(x) \to H(S(x)))$(6,16 $\wedge_d$)
18- EG, $H(x) \vdash H(x)$(ax$'$)
19- EG, $\forall x H(x) \vdash H(x)(\forall_g)$
20- EG, REC$_H \vdash H(x)$(17,19 $\to_g$)
Comme EG $\cup \{$REC$_H\}$ est une partie finie de PA$'$ la suite des lignes 1-20 est une preuve dans LJ de PA$' \vdash H(x)$ i.e.

$$\text{PA}' \vdash \exists y(\neg(x = 0) \to x = S(y)).$$

Q4-
Choisissons $t_1 := 0$. La suite des lignes 1-5 de Q1 est une preuve dans LJ de

$$\mathrm{EG} \vdash (\neg(0 = 0) \to 0 = S(t_1))$$

Choisissons $t_2 := x$. La suite des lignes 1'-4' de Q2 est une preuve dans LJ de

$$\mathrm{EG} \vdash (\neg(x = 0) \to S(x) = S(t_2))$$

Tout terme t_3 sur la signature $\{0, S, +, \times\}$ et l'ensemble de variables $\{x\}$ est un polynôme, à coefficients entiers naturels, sur l'indéterminée x. En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,il existe un entier m, tel que

$$\mathbb{N} \models (t_3(\underline{n}) = \underline{n} + \underline{m})$$

(où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\underline{p}$ est le terme $S(S \ldots (0) \ldots)$, qui contient p occurrences du symbole S), ce qui est incompatible avec

$$\mathbb{N} \models \underline{n} = S(t_3(\underline{n})).$$

Il n'existe donc aucun terme t_3 tel que

$$\mathrm{PA}' \vdash (\neg(x = 0) \to x = S(t_3))$$

Explication :
- la théorie EG est "de Harrop" ; c'est pourquoi, dès que $\mathrm{EG} \vdash_{\mathrm{LJ}} \exists y \Phi(y)$ il existe un terme t tel que $\mathrm{EG} \vdash_{\mathrm{LJ}} \Phi(t)$
- par contre PA' n'est pas "de Harrop" ; en particulier la formule REC_H utilisée en Q3 *n*'est *pas* une formule de Harrop.

Exercice 4(sur 5 points)
Q1-
1- $A, B \vdash A, B (\mathrm{ax}')$
2- $A \vdash B \to A, B (\to_d)$
3- $\vdash (B \to A), (A \to B) (\to_d)$
4- $\vdash (A \to B) \vee (B \to A) (\vee_d)$

Q2- Considérons la structure de Kripke $\mathcal{K} := (K, \leq, \Vdash)$ où

$$K := \{0, 1, 2\}, \quad \leq := \{(0,1), (0,2)\} \text{ et } \quad \Vdash := \{(1, P), (2, Q)\}.$$

Par définition : $1 \Vdash P$ et $1 \nVdash Q$
Donc $1 \nVdash P \to Q$
Et comme $0 \leq 1$ on en déduit que :

$$0 \nVdash P \to Q \qquad (1)$$

En échangeant 1 avec 2 et P avec Q dans l'argument précédent, on obtient :

$$0 \nVdash Q \to P \qquad (2)$$

Et de (1)(2) on déduit que :

$$0 \nVdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$$

La structure $\mathcal{K}$ est un contre-modèle de $(P \to Q) \vee (Q \to P)$.
Le séquent $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$ n'est donc pas prouvable dans LJ .

Q3 Soit $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ une structure de Kripke *linéaire*. Soient A, B des formules. Considérons l'ensemble de noeuds
$$E := \{e \in K \mid e \not\Vdash A \text{ et } e \Vdash B\}.$$

Cas 1 : $E = \emptyset$.
Dans ce cas, pour tout $k \in K$, $k \Vdash B \to A$.
Cas 2 : $E \neq \emptyset$. (notons e l'un des éléments de E). Soit $k \in K$. Comme l'ordre $\leq$ est total, $k \leq e$ ou $e \leq k$. Si $k \leq e$: $k \not\Vdash A$, car la relation $\Vdash$ est "croissante" (i.e. ($k \Vdash F$ et $k \leq k'$) entraîne que $k' \Vdash F$).
Si $e \leq k$: $k \Vdash B$.
Finalement, pour tout $k \in K$, $k \not\Vdash A$ ou $k \Vdash B$.
Ceci entraîne que pour tout $k \in K$ et tout $k' \geq k$, (si $k' \Vdash A$ alors $k' \Vdash B$),
i.e. pour tout $k \in K$, $k \Vdash A \to B$.
Comme l'un des cas 1,2 se produit, on obtient
$$\mathcal{K} \Vdash (A \to B) \vee (B \to A).$$

Q4- On note LT le système LJ auquel on ajoute le schéma d'axiome S :
$$\vdash (A \to B) \vee (B \to A).$$

La formule $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ est une instance de S, donc elle appartient à $\mathcal{F}$(LT), mais d' après Q2, elle n'appartient pas à $\mathcal{F}$(LJ).
La formule $P \vee \neg P$ a un contre-modèle linéaire (K :={0,1} avec $0 \leq 1$ et $\Vdash := \{(1, P)\}$).
Donc, d'après Q3, cette formule n'appartient pas à $\mathcal{F}$(LT). Par contre $P \vee \neg P$ appartient à $\mathcal{F}$(LK).