Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2007/2008

LOGIQUE

Sujet d'examen de Juin 2008- G. Sénizergues

Documents autorisés : tous documents autorisés.
Indications : Les 4 exercices se suivent et forment un tout. Il est possible d'admettre les résultats d'un exercice et de les utiliser dans les exercices suivants.
Définitions : On considère la Théorie des monoides (MO, en abbrégé).
La signature est formée de : un symbole de fonction d' arité 2, "$*$", un symbole de relation d' arité 2 "$=$" et un ensemble dénombrable de constantes $\{e, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.
Les axiomes consistent en les deux axiomes suivants
ASS : $\forall x, y, z \;\; x * (y * z) = (x * y) * z$
NE : $\forall x \;\; (x * e = x \quad \wedge \quad e * x = x)$
auxquels on ajoute tous les axiomes de l'égalité (sur cette signature) :
REF : $\forall x. \;\; x = x$
SYM : $\forall x. \forall y. \;\; (x = y \rightarrow y = x)$
TRANS : $\forall x, y, z \;\; (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$
COMPF : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \;\; (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \rightarrow (x_1 * x_2 = y_1 * y_2)$

Exercice 1 (sur 4 points)

Soient Φ, Ψ des formules du premier ordre et x une variable. Donner une preuve dans LK des séquents

$$\vdash \neg\forall x.\Phi \rightarrow \exists x.\neg\Phi \quad ; \quad \Phi \rightarrow \Psi \vdash \neg\Psi \rightarrow \neg\Phi \quad ; \quad \exists x.\neg\Phi \vdash \exists x.(\Phi \rightarrow \Psi)$$

Exercice 2 (sur 10 points)

On considère la formule Q suivante :

$$\forall x. \;\; x = e$$

1- Montrer que MO $\not\models Q$
2- Montrer que MO $\not\models \neg Q$
3- Que peut-on en conclure sur la prouvabilité dans LK des séquents
MO $\vdash Q$ et MO $\vdash \neg Q$?
4- Donner une preuve dans LK du séquent MO $\vdash Q \vee \neg Q$
5- Le séquent de la question 4 est-il prouvable dans LJ ?
6- Montrer que le séquent suivant n'est pas prouvable dans LK :
MO $\vdash \exists x.[(x = e \rightarrow \neg Q) \wedge ((\neg x = e) \rightarrow Q)]$
7- Donner une preuve dans LK du séquent :
$S :=$ MO $\vdash \exists x.[(x = e \rightarrow Q) \wedge ((\neg x = e) \rightarrow \neg Q)]$
8- Existe-t-il un terme t tel que le séquent suivant soit prouvable dans LK :
MO $\vdash (t = e \rightarrow Q) \wedge ((\neg t = e) \rightarrow \neg Q)$?
9- Le séquent S est-il prouvable dans LJ ?

Exercice 3 (sur 7 points)
Le but de cet exercice est de donner une preuve dans LK du séquent

$$\mathrm{MO} \vdash (\forall x.\ x = e) \to (\forall y.\forall z.\ y * z = z * y)$$

1- Donner une preuve dans LK de
$EG, \forall x.\ x = e \vdash y = e \wedge z = e$
2- Montrer, par une méthode syntaxique, que le séquent suivant a une preuve dans LK :
$EG, y = e \wedge z = e \vdash y * z = z * y$
Aide : on pourra, par exemple, donner une preuve dans LK augmenté de certaines règles de DN puis utiliser un théorème du cours.
3- En utilisant les preuves données aux questions 1 et 2, donner une preuve dans LK de
$\mathrm{MO} \vdash (\forall x.\ x = e) \to (\forall y.\forall z.\ y * z = z * y)$

Exercice 4 (sur 10 points)
On considère la formule R suivante :

$$\forall y.\forall z.\ y * z = z * y$$

Reprendre l'exercice 2, en remplaçant partout la formule Q par la formule R.
Aide : la question 7 pourra être décomposée en étapes :
7.1 $\mathrm{MO}, R \vdash_{\mathrm{LK}} \exists x.[(x = e \to R) \wedge ((\neg x = e) \to \neg R)]$
7.2 $\mathrm{MO}, \neg R \vdash_{\mathrm{LK}} \neg Q$ (en utilisant l'ex. 1 et l'ex. 3)
7.3 $\mathrm{MO}, \neg R \vdash_{\mathrm{LK}} \exists x.\neg x = e$ (en utilisant l'ex. 1)
7.4 $\mathrm{MO}, \neg R \vdash_{\mathrm{LK}} \exists x.(x = e \to R)$ (en utilisant l'ex. 1)
7.5 $\mathrm{MO}, \neg R \vdash_{\mathrm{LK}} \forall x.((\neg x = e) \to \neg R)$
7.6 $\mathrm{MO}, \neg R \vdash_{\mathrm{LK}} \exists x.[(x = e \to R) \wedge ((\neg x = e) \to \neg R)]$
et finalement
7.7 $\mathrm{MO} \vdash_{\mathrm{LK}} \exists x.[(x = e \to R) \wedge ((\neg x = e) \to \neg R)]$