Université Paris 1 - UFR 10
Licence de Logique. Année L3 (2007-2008)
Cours de Logique. JB Joinet

Sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste

Remarque préliminaire Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On rappelle qu'on appelle *fonction caractéristique de* A, l'application $\delta_{\mathsf{A}} : \mathsf{E} \longrightarrow \{0,1\}$ définie par :

$$\delta_{\mathsf{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathsf{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observons que :

1. la fonction caractéristique δ_{A} porte bien son nom ; elle *caractérise* bien A : connaître δ_{A}, c'est connaître A et réciproquement.
2. n'importe quelle application δ de E dans $\{0,1\}$ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble A de E et d'un seul, à savoir l'ensemble :
$$\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{E}\,;\, \delta(x) = 1\}.$$

Si l'on transpose 2. dans le cas particulier où E est l'ensemble $\mathsf{At}(\mathcal{L})$ des atomes d'un langage propositionnel $\mathcal{L}$, on voit que toute application $\delta : \mathsf{At}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{0,1\}$ (autrement dit toute "distribution de valeurs de vérité") détermine un unique sous-ensemble de $\mathsf{At}(\mathcal{L})$ $-$ à savoir l'ensemble des variables propositionnelles auxquelles cette ddvv associe la "valeur de vérité" 1 (*vrai*). Dans la présentation et l'étude de la sémantique classique, en vertu du point 1. ci-dessus, on pourrait facilement adapter les développements faisant appel à la notion de ddvv, en y formulant directement en termes de ces sous-ensembles de $\mathsf{At}(\mathcal{L})$ qui caractérisent les ddvv, les notions concernées.

Définition 1 Soit $\mathcal{L}$ un langage propositionnel. Une **structure de Kripke** est un triplet :

$$\mathcal{M} = \big(|\mathcal{M}|\,,\, \leq\,,\, \mathsf{D}\big) \quad \text{où :}$$

- $|\mathcal{M}|$ est un ensemble non vide appelé l'*ensemble des états* qu'on notera α, β, γ etc (dans le contexte des sémantiques à la Kripke élaborées pour diverses logiques modales, ces "états" sont traditionnellement appelés des "mondes possibles").
- $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur $|\mathcal{M}|$
- D est une application de $|\mathcal{M}|$ dans $\mathcal{P}\big(\mathsf{At}(\mathcal{L})\big)$ (qui associe donc à chaque *état* un ensemble particulier de variables propositionnelles) telle que

$$\text{si } \alpha \leq \beta, \text{ alors } \mathsf{D}(\alpha) \subseteq \mathsf{D}(\beta) \quad \text{(monotonie)}$$

Définition 2 Une **structure de Kripke** dans laquelle l'ordre $\leq$ est *arborescent* (autrement dit, est un ordre partiel avec plus petit élément $-$ appelé la *racine* $-$ et où chaque élément non minimal admet un unique "prédécesseur") sera dite "structure de Kripke arborescente". Dans une telle structure, on appelera "branche" une suite $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}, \ldots)$ d'états de $|\mathcal{M}|$ telle que α_{i_1} est racine de $\leq$ et telle que pour tout k, on ait α_{i_k} prédécesseur de $\alpha_{i_{k+1}}$.

Remarque On pourrait démontrer que tous les résultats utilisés ci-dessous, sont encore valables lorsqu'on se limite aux structures de Kripke arborescentes, ce que nous feront dorénavant.

Commentaire Soit $\mathcal{M}$ une structure de Kripke (arborescente).

- En tenant compte du "rappel préliminaire" ci-dessus, si α un état de $|\mathcal{M}|$, la donnée de $\mathsf{D}(\alpha)$ peut être vue comme celle d'une ddvv (qu'au demeurant on peut bien nommer :) α, telle que p (une formule atomique) soit vraie relativement à cette ddvv si et seulement si $\mathsf{p} \in \mathsf{D}(\alpha)$.
- Considérons $\mathsf{b} = (\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}, \ldots)$ une branche dans $\mathcal{M}$. Par la condition de monotonie, la suite $\big(\mathsf{D}(\alpha_{i_1}), \ldots, \mathsf{D}(\alpha_{i_k}), \ldots\big)$ est une suite (d'ensembles de variables propositionnelles) croissante pour l'inclusion. En termes de ddvv, une telle branche décrit donc en quelque sorte la succession des étapes de définition d'une ddvv "rendant vraies" de plus en plus de propositions (atomiques). Ainsi envisagé, l'ensemble des branches de $\mathcal{M}$ (autrement dit l'arbre complet décrit par $\mathcal{M}$) décrit en quelque sorte un ensemble de scénarii épistémiques (où le "savoir" s'accumule et, éventuellement, augmente, mais ne diminue jamais).

Définition 3 Soient $\mathcal{M}$ une **structure de Kripke** et $\alpha \in |\mathcal{M}|$. La satisfaction de la formule φ en le monde α de $\mathcal{M}$, notée $\models_{\mathcal{M},\alpha}$ (ou simplement $\models_{\alpha}$, quand il n'y a pas d'ambiguïté) est définie par :

- Si φ atomique : $\models_{\alpha} \varphi$ ssi $\varphi \in \mathsf{D}(\alpha)$
- Si $\varphi := \psi \wedge \chi$: $\models_{\alpha} \varphi$ ssi $\models_{\alpha} \psi$ et $\models_{\alpha} \chi$
- Si $\varphi := \psi \vee \chi$: $\models_{\alpha} \varphi$ ssi $\models_{\alpha} \psi$ ou $\models_{\alpha} \chi$
- Si $\varphi := \neg\psi$: $\models_{\alpha} \varphi$ ssi quel que soit $\beta \geq \alpha$, on a $\not\models_{\beta} \psi$
- Si $\varphi := \psi \rightarrow \chi$: $\models_{\alpha} \varphi$ ssi quel que soit $\beta \geq \alpha$, si $\models_{\beta} \psi$ alors $\models_{\beta} \chi$

Remarque 4 Pour toute formule φ, si $\models_{\alpha} \varphi$, alors quel que soit $\beta \geq \alpha$, on a $\models_{\beta} \varphi$

Définition 5 Une structure de Kripke $\mathcal{M}$ satisfait φ, ou encore est *modèle intuitionniste* de φ (notation: $\models_{\mathcal{M}} \varphi$) si et seulement si pour tout $\alpha \in |\mathcal{M}|$, on a $\models_{\alpha} \varphi$. De même, on dit que $\mathcal{M}$ est modèle intuitionniste de Γ (notation : $\models_{\mathcal{M}} \Gamma$) ssi pour toute $\varphi \in \Gamma$, on a $\models_{\alpha} \varphi$. Si tout modèle intuitionniste de Γ est modèle intuitionniste de φ, on dit que φ est conséquence intuitionniste de Γ (notation : $\Gamma \overset{\mathsf{int}}{\models} \varphi$). Si $\overset{\mathsf{int}}{\models} \varphi$, on dit que φ est intuitionnistiquement valide.

Théorème 6 (Adéquation et complétude). Pour tout ensemble d'énoncés Γ et tout énoncé φ :

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{DNI}} \varphi \quad \text{ssi} \quad \Gamma \overset{\mathsf{int}}{\models} \varphi$$

Application (du théorème d'adéquation) : pour démontrer que φ n'est pas déductible de Γ en DNI, il suffit de trouver une structure de Kripke $\mathcal{M}$ telle que $\models_{\mathcal{M}} \Gamma$, mais telle que $\not\models_{\mathcal{M}} \varphi$

Les théorèmes d'adéquation et de complétude s'étendent au cas général de la sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste *du premier ordre*, que, par manque de temps, on ne présentera pas dans le cadre de ce cours.