Calcul des séquents

En 1935 Gentzen a proposé la déduction naturelle, un formalisme pour décrire les preuves du calcul des prédicats, dont l'idée était de coller au plus près à la manière dont les mathématiciens raisonnent. Il a ensuite tenté d'utiliser la déduction naturelle pour produire une preuve syntaxique de la cohérence de l'arithmétique, mais les difficultés techniques l'ont conduit à reformuler le formalisme en une version plus symétrique : le *calcul des séquents*. C'est dans ce cadre qu'il a démontré ce qui devait devenir l'un des théorèmes principaux de la théorie de la démonstration : le théorème d'*élimination des coupures*. Dag Prawitz a montré en 1965 que ce théorème pouvait se transporter à la déduction naturelle

Sommaire [masquer]

Définition [modifier]

On donne ici une version légèrement modernisée par rapport à celle de Gentzen du calcul des séquents LK qui formalise la logique classique. On verra plus bas que sur le même principe on peut définir LJ, un calcul des séquents pour la logique intuitionniste, LL pour la logique linéaire... La définition ci-dessous suppose un minimum de familiarité avec le calcul des prédicats.

Note terminologique [modifier]

Le terme *calcul des séquents* est une traduction de l'anglais *sequent calculus*, lui-même hérité de l'allemand *Sequenzenkalkül*. La traduction littérale de l'allemand en français donnerait plutôt *calcul des séquences* et on trouve certains auteurs utilisant cette terminologie. Toutefois l'usage le plus courant a imposé l'emploi du néologisme *séquent*.

Séquent [modifier]

L'objet de base du calcul est le *séquent*, qui est un couple de listes finies (éventuellement vides) de formules. Les séquents sont usuellement notés :

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_p$$

où les Ai sont les *hypothèses* et les Bj sont les *conclusions* du séquent. On voit ici apparaître l'innovation majeure du calcul des séquents : la symétrie parfaite entre hypothèses et conclusions. Un autre point important à noter est qu'une même formule peut apparaître plusieurs fois à gauche et/ou à droite dans un séquent, par exemple A_1 peut être la même formule que An ; on dit alors que cette formule a plusieurs *occurrences* dans le séquent.

Interprétation d'un séquent [modifier]

La notation séquent peut se comprendre comme une astuce syntaxique pour dénoter des formules particulières ; la virgule à gauche s'interprète comme une conjonction, la virgule à droite comme une disjonction et le symbole $\vdash$ comme une implication, si bien que le séquent ci-dessus peut se comprendre comme une notation pour la formule :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_p$$

Règles [modifier]

Les règles du calcul des séquents spécifient comment à partir d'un certain nombre (éventuellement nul) de séquents *prémisses*, on peut dériver un nouveau séquent *conclusion*. Dans chacune des règles les lettres grecques Gamma, Delta, etc. dénotent des suites de formules, on fait figurer les séquents prémisses au-dessus, séparés par un trait horizontal du séquent conclusion. Elles se divisent en trois groupes : le groupe *identité*, le groupe *structurel* et le groupe *logique*.

groupe identité

$$\frac{}{A \vdash A}\ \mathit{axiome} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \mathit{coupure}$$

Une discussion sur la règle de coupure figure plus bas. Remarquons que la règle axiome est la seule de tout le calcul qui n'a pas de séquent prémisse.

Pour les groupes structurel et logique, les règles viennent par paire selon le côté, gauche ou droit, du séquent où elles agissent.

groupe structurel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ \textit{échange gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sigma(\Delta)}\ \textit{échange droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \textit{affaiblissement gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \textit{affaiblissement droite}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \textit{contraction gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \textit{contraction droite}$$

Dans les règles d'échange la notation $\sigma(\Gamma)$ désigne une permutation des (occurrences de) formules figurant dans Γ. Les règles d'échanges sont responsables de la *commutativité* de la logique.

Les règles de contraction et d'affaiblissement expriment une forme d'idempotence des opérateurs « $\vee$ » et « $\wedge$ » de la logique : une formule A est équivalente aux formules $A \vee A$ et $A \wedge A$.

groupe logique

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\textit{-gauche} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\textit{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\textit{-gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\textit{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\textit{-gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\textit{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \to\textit{-gauche} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \to\textit{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\ \forall\textit{-gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ \forall\textit{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ \exists\textit{-gauche} \qquad \frac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ \exists\textit{-gauche}$$

Les règles de quantificateurs sont soumises à des restrictions : dans les règles de $\forall$-droite et $\exists$-gauche, on demande que la variable x ne figure dans aucune des formules de Γ et Δ. La notation $A[t / x]$ désigne la formule A dans laquelle la variable x est remplacée par un terme t.

Démonstrations [modifier]

Une démonstration de LK est un arbre de séquents construit au moyen des règles ci-dessus de façon à ce que chaque séquent soit conclusion d'exactement une règle ; la démonstration est terminée si l'on arrive à ce que toutes les feuilles de l'arbre soient des règles axiome. Le séquent racine de l'arbre est la conclusion de la démonstration. Voici un exemple de démonstration du principe de contraposition de l'implication ; pour simplifier on a omis les utilisations de règles d'échange et représenté en gras les (occurrences de) formules dans les séquents prémisses sur lesquelles porte chaque règle :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\mathit{aff\text{-}droite}$}
\UnaryInfC{$A \vdash \mathbf{A}, B$}
\RightLabel{$\neg\text{-}\mathit{gauche}$}
\UnaryInfC{$\neg \mathbf{A}, A \vdash B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$\mathit{aff\text{-}gauche}$}
\UnaryInfC{$A, \mathbf{B} \vdash B$}
\RightLabel{$\neg\text{-}\mathit{droite}$}
\UnaryInfC{$A \vdash \neg \mathbf{B}, B$}
\RightLabel{$\rightarrow\text{-}\mathit{gauche}$}
\BinaryInfC{$\neg B \rightarrow \neg A, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$}
\RightLabel{$\rightarrow\text{-}\mathit{droite}$}
\UnaryInfC{$\mathbf{\neg B \rightarrow \neg A} \vdash \mathbf{A \rightarrow B}$}
\RightLabel{$\rightarrow\text{-}\mathit{droite}$}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$}
\end{prooftree}
$$

Discussion [modifier]

Le calcul des séquents et les autres formalismes logiques [modifier]

Le calcul des séquents, contrairement aux systèmes à la Hilbert ou à la déduction naturelle, n'est pas un formalisme très intuitif ; le propos de Gentzen était de résoudre certains problèmes techniques rencontrés en déduction naturelle lors de la démonstration de la cohérence de l'arithmétique. C'est pourquoi le calcul des séquents doit se penser comme un formalisme pour *raisonner* sur les preuves formelles plutôt que pour *rédiger* des preuves formelles, ce à quoi la déduction naturelle est plus adaptée. On peut toutefois facilement montrer que toute formule prouvable dans l'un des systèmes l'est également dans l'autre.

L'intérêt du calcul des séquents est de rendre explicite un grand nombre de propriétés de la logique :

- la dualité hypothèse/conclusion exprimée par la symétrie parfaite entre la droite et la gauche dans les séquents ;
- la symétrie de la logique classique exprimée par le partitionnement des règles en gauche et droite ;
- les propriétés structurelles (commutativité, idempotence) exprimées par les règles du groupe structurel.

La règle de coupure [modifier]

La règle de coupure est une généralisation du *modus-ponens*. Pour le voir il faut considérer le cas particulier de la règle où :

- Γ, Δ et Γ' sont des séquences vides de formules ;
- Δ' contient une unique formule B.

Dans ce cas particulier les deux séquents prémisse de la règle deviennent respectivement $\vdash A$ et $A \vdash B$ tandis que le séquent conclusion devient $\vdash B$.

La règle de coupure joue un rôle très particulier dans le calcul des séquents pour deux raisons :

- elle est indispensable pour formaliser les preuves mathématiques ; en effet l'expérience montre que, à l'exception des démonstrations faciles de tautologies, la moindre preuve de mathématique utilise quasiment exclusivement la règle de coupure ;
- plus techniquement, c'est la seule règle à violer la *propriété de la sous-formule* ; si on observe les règles du calcul des séquents on voit que pour chaque règle, sauf la coupure, les formules apparaissant dans les séquents prémisse sont encore présentes dans le séquent conclusion. Autrement dit, si une démonstration du calcul des séquents n'utilise pas la règle de coupure, alors toutes les formules apparaissant dedans sont des sous-formules du séquent conclusion, c'est-à-dire que le séquent conclusion de la démonstration est le plus compliqué de toute la démonstration.

La propriété de la sous-formule était très importante pour Gentzen car c'est elle qui permet de démontrer la cohérence du calcul : en effet le séquent le plus simple possible est le séquent *vide* qui ne contient aucune formule ni à gauche, ni à droite. Or ce séquent exprime une contradiction. Pour voir que le calcul est cohérent il suffit donc de voir que le séquent vide n'est pas prouvable ; mais une démonstration sans coupure du séquent vide ne devrait contenir que des séquents plus simples, et il n'y en a aucun. Donc toute démonstration du séquent vide doit utiliser la règle de coupure. Et voilà comment Gentzen a été conduit à démontrer son célèbre théorème d'*élimination des coupures* qui stipule justement que de toute démonstration d'un séquent, on peut extraire une démonstration sans coupure du même séquent, ce qui montre en corollaire qu'il n'existe aucune démonstration du séquent vide. C'est en adaptant cette démonstration d'élimination des coupures au cas de l'arithmétique que Gentzen a produit sa preuve de cohérence de l'arithmétique.