TD6 - Détection et correction d'erreurs

Exercice 1 : Code-barres postal français

[Wikipédia] *Le système de codage des codes postaux utilisé par la poste française sert à aider à l'aiguillage du courrier. Le code postal est converti en barres de hauteur entière ou de hauteur nulle.*
En France, le code-barre postal du trafic national se traduit par une double série de barres. La première (à droite, 20 bâtons) représente le code postal. La deuxième (plus à gauche, nombre de bâtons variable) représente la tournée du facteur, uniquement si l'adresse a pu être lue automatiquement.
La table de codage est montrée sur la droite. | note une barre pleine et . une absence de barre.
Les 45 millimètres du code sont utilisés, en imprimant une barre ou en laissant un blanc tous les 1,88 mm.
(Valeur,codage) : (0,..||||),(1,.|.|||),(2,.||.||),(3,.|||.|),(4,|..|||),(5,|.|.||),(6,|.||.|),(7,||..||),(8,||.|.|),(9,|||..|)
Les professionnels lisent les codes de la droite vers la gauche.

1. Comment est repéré le début du code ?
2. Quel est le code postal codé par le code suivant : [......I.I.II..IIIII..III.III.I.III.I.........] ?
3. Quelle est la distance de Hamming de ce code ? Combien d'erreurs peut-on détecter ? Combien d'erreurs peut-on corriger ?

Exercice 2 : CRC (Cyclic Redundancy Check)

Les mots considérés sont ici des mots binaires (bn-1, bn-2, ?, b0) et sont interprétés comme des polynômes à coefficient binaire : B(x) = $b_{n-1} * x^{(n-1)}$ + $b_{n-2} * x^{(n-2)}$ ... b_1 * x + b_0.
La clé C(x) associée à un tel mot est définie comme étant le reste de la division de B(x)*x^k par G(x), où k est le degré de G(x).

1. Quelle est la clé associée au mot 110111, si on considère le polynôme générateur G(x) = x^2+x+1.
2. Quelles conditions doivent vérifier B(x), C(x) et G(x) ?

Exercice 3 : Code de Hamming

[Source] un mot de 7 bits (s3,s5,s6,s7,s9,s10,s11)

[Code] 4 bits de contrôle (c1,c2,c4,c8) insérés aux positions 2^i :

(c1,c2,s3,c4,s5,s6,s7,c8, s9, s10,s11)

[Principe] Le bit de donnée en position k est contrôlé par les bits dont les positions sont les coefficients de la décomposition binaire de k. Le bit de contrôle en position 2^i est choisi de telle sorte que la somme des bits qu'il contrôle (ainsi que lui-même) fasse 0 modulo 2 : contrôle de parité.

1. Quels sont les bits qui contrôlent s11 ?
2. Quels sont les bits contrôlés par c1 et c4 ? Exprimez la valeur de ces bits en fonction de celle des autres.
3. Quel est le code du mot [1101011] ?
4. Quelle condition vérifie le code s'il n'y a pas eu d'erreur ?
5. Quelle condition vérifie le code si le bit k a été altéré ? Comment fait-on pour le corriger ?
6. Quel est le message correspondant au code [11111011100] ?

Exercice 4 : Parité bi■dimensionnelle (block sum check)

On sait que l'ajout d'un bit de parité à une trame permet de détecter les erreurs simples (i.e. portant sur un seul bit) dans un message. Une généralisation de ce principe permet d'obtenir de meilleurs résultats. On découpe le message en j blocs de i bits. On représente le résultat sous forme d'un tableau et on calcule un bit de parité par ligne et un par colonne, comme le montre l'exemple ci■dessous (qui utilise une parité impaire). On ajoute ensuite le résultat de ces deux chaînes de parité à la fin du message.

$$101100 \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \end{array} \Rightarrow 10110010110$$

Déterminez la valeur d'un tel code pour le message 1010111010111100. Vous utiliserez un code de parité impaire bi■dimensionnel ayant un nombre de bits minimum.

En raisonnant sur les distances de Hamming, montrez que ce type de code permet de détecter et de corriger toute erreur simple dans un message, ainsi que de détecter toute erreur double. Permet-il de corriger toute erreur double ? Si oui pourquoi, si non donnez un contre-exemple.