Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2007/2008

LOGIQUE

Corrigé du contrôle continu du 6 Décembre 2007

Exercice 1(sur 6 points)
On se demande si les règles $\rightarrow_g, \vee_g$ du calcul des séquents sont réversibles ou non.
1- Les 4 règles proposées sont des règles dérivées du système LK.

Règle 1 :
1- $A \vdash A, B$ (ax')
2- $\vdash A, A \rightarrow B$ ($\rightarrow_d$)
3- $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$ ($\neg_g$)
4- $\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta$ (Hypothèse)
5- $\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B), \Delta$ ($\neg_d$)
6- $\Gamma \vdash A, \Delta$ (5,3, coupure)
Règle 2 :
1- $A, B \vdash B$ (ax')
2- $B \vdash A \rightarrow B$ ($\rightarrow_d$)
3- $\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta$ (Hypothèse)
4- $\Gamma, B \vdash \Delta$ (2,3, coupure).
Règle 3 :
1- $A \vdash A, B$ (ax')
2- $A \vdash A \vee B$ ($\vee_d$)
3- $\Gamma, A \vee B \vdash \Delta$ (Hypothèse)
4- $\Gamma, A \vdash \Delta$ (2,3, coupure).
Règle 4 :
1- $B \vdash A, B$ (ax')
2- $B \vdash A \vee B$ ($\vee_d$)
3- $\Gamma, A \vee B \vdash \Delta$ (Hypothèse)
4- $\Gamma, B \vdash \Delta$ (2,3, coupure).
2- Les règles $\rightarrow_g, \vee_g$ du calcul des séquents sont donc *réversibles.*
3- Aucune de ces règles ne peut être simulée par une dérivation *sans coupure* de LK. Traitons en détail la règle 1 :
Les règles de LK$\setminus\{$ coupure $\}$ sont toutes des règles d'introduction ou des règles structurelles. Supposons que la règle 1 soit simulée par une preuve π sans coupure, utilisant l'hypothèse $H := \Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta$. Le sous-arbre π' de cette preuve, de racine $R = \Gamma \vdash A, \Delta$, n'a aucun noeud étiqueté par H , car $A \rightarrow B$ est une sous-formule de H qui n'est pas sous-formule de R. Donc π' est une preuve dans LK du séquent $\Gamma \vdash A, \Delta$. En remplaçant dans ce séquent (et dans π'), Γ par $\emptyset$, Δ par $\emptyset$ et A par $\perp$, on obtient une preuve π'' de $\vdash \perp$, ce qui n'est pas possible.
Pour la règle 2 (et la règle 4) on obtient une impossibilité en posant $\Gamma := \emptyset$ et $\Delta := \neg B$; Pour la règle 3 on obtient une impossibilité en posant $\Gamma := \emptyset$ et $\Delta := \neg A$.
Exercice 2(sur 5 points)
1- La suite suivante n'est pas une preuve dans le système LJ : le couple (ligne 4,ligne 5) n'est *pas* une instance de la règle $\exists_d$

$R(x) \vdash R(x)$	`ax`
$R(x), \neg R(x) \vdash$	$\neg_g$
$R(x) \vdash \neg\neg R(x)$	$\neg_d$
$\forall x R(x) \vdash \neg\neg R(x)$	$\forall_g$
$\forall x R(x) \vdash \neg\exists x \neg R(x)$	$\exists_d$

2- Voici une preuve correcte dans LJ du séquent $\forall x R(x) \vdash \neg\exists x \neg R(x)$:
1- $R(x) \vdash R(x)$(ax)
2- $R(x), \neg R(x) \vdash$ $(\neg_g)$
3- $\forall x R(x), \neg R(x) \vdash$ $(\forall_g)$
4- $\forall x R(x), \exists x \neg R(x) \vdash$ $(\exists_g)$
5- $\forall x R(x) \vdash \neg\exists x \neg R(x)$ $(\neg_d)$
N.B. L' application de $\forall_g$, pour passer de la ligne 2 à la ligne 3, est correcte puisque cette règle ne comporte aucune restriction sur la variable x. L'application de $\exists_g$ à la ligne 4 est correcte car la variable x n'a pas d'occurrence *libre* dans $\forall x R(x)$.

Exercice 3(sur 13 points)
Q1- Réflexivité :
Voici une preuve, dans LJ, de $\vdash A \to A$
1- $A \vdash A$ (ax)
2- $\vdash A \to A$ $(\to_d)$

Transitivité :
Voici une preuve, dans LJ, à partir des hypothèses $\vdash A \to B$ et $\vdash B \to C$ du séquent $\vdash A \to C$:
1- $A, B \vdash B$(ax')
2- $A, B, C \vdash C$ (ax')
3- $A, B, B \to C \vdash C$ $(1, 2, \to_g)$
4- $A, B \to C \vdash A$ (ax')
5- $A, A \to B, B \to C \vdash C(4, 3, \to_g)$
6- $A \to B, B \to C \vdash A \to C(\to_d)$
7- $\vdash A \to B$ (hypothèse)
8- $B \to C \vdash A \to C$(7,6, coupure)
9- $\vdash B \to C$ (hypothèse)
10- $\vdash A \to C$(9,8, coupure)
Donc, si $A \preceq B$ et $B \preceq C$, alors $A \preceq C$.
Q2- Vérifions que $P \preceq (P \vee \neg P)$:
1- $P \vdash P$ (ax)
2- $P \vdash P \vee \neg P$ $(\vee_d^1)$
3- $\vdash P \to (P \vee \neg P)$ $(\to_d)$
Vérifions que $\neg P \preceq (P \vee \neg P)$.
1- $\neg P \vdash \neg P$ (ax)
2- $\neg P \vdash P \vee \neg P$ $(\vee_d^2)$
3- $\vdash \neg P \to (P \vee \neg P)$ $(\to_d)$
Q3 Donnons une preuve dans LJ de $\vdash \neg P \to (P \to \neg P)$ puis une preuve de $\vdash (P \to \neg P) \to \neg P$.

1- $\neg P, P \vdash \neg P$ (ax')
2- $\neg P \vdash P \to \neg P$ ($\to_d$)
3- $\vdash \neg P \to (P \to \neg P)$ ($\to_d$)

1- $P \vdash P$ (ax)
2- $P, \neg P \vdash$ ($\neg_g$)
3- $P \vdash P$ (ax)
4- $P \to \neg P, P \vdash$ (3,2,$\to_g$)
5- $P \to \neg P \vdash \neg P$ ($\neg_d$)
6- $\vdash (P \to \neg P) \to \neg P$ ($\to_d$)

Q4- Montrons que, pour toutes formules A, B, on a $A \preceq A \vee B$ et $B \preceq A \vee B$.
1- $A \vdash A$ (ax)
2- $A \vdash A \vee B$ ($\vee_d^1$)
3- $\vdash A \to (A \vee B)$ ($\to_d$)

1- $B \vdash B$ (ax)
2- $B \vdash A \vee B$ ($\vee_d^2$)
3- $\vdash B \to (A \vee B)$ ($\to_d$)

Q5- Supposons que A, B sont incomparables pour le préordre $\preceq$, i.e. $A \npreceq B$ et $B \npreceq A$.
Si on avait $(A \vee B) \preceq A$, alors , par Q4, on aurait $B \preceq (A \vee B) \preceq A$ et par transitivité de $\preceq$ (Q1), on aurait $A \preceq B$; mais cette affirmation est contraire à l' hypothèse d' incomparabilité de A avec B. Donc, en fait, $(A \vee B) \npreceq A$. Donc, par Q4, $A \prec (A \vee B)$.
Par un raisonnement analogue $B \prec (A \vee B)$.

Q6- Montrons que $\bot \prec P$ et $\bot \prec \neg P$:
1- $\bot \vdash$ ($\bot_g$)
2- $\bot \vdash P(\text{aff}_d)$
3- $\vdash \bot \to P(\to_d)$

1- $\bot \vdash$ ($\bot_g$)
2- $\bot \vdash \neg P(\text{aff}_d)$
3- $\vdash \bot \to \neg P(\to_d)$

En logique classique, aucn des séquents suivants n'est valide :

$$\vdash P \to \bot \qquad \vdash \neg P \to \bot \qquad \vdash P \to \neg P \qquad \vdash \neg P \to P.$$

En effet, ces séquents sont faux pour les valuations respectives $\nu(P) := 1, \nu(P) := 0, \nu(P) := 1, \nu(P) := 0$. On en déduit que $\bot \prec P, \bot \prec \neg P$ et que $P, \neg P$ sont incomparables par $\preceq$.
Q7- En utilisant Q5, on en déduit que $P \prec (P \vee \neg P)$ et $\neg P \prec (P \vee \neg P)$.
7.1- Par Q6 et Q7, les 4 classes $[\bot]_\equiv, [P]_\equiv, [\neg P]_\equiv, [P \vee \neg P]_\equiv$ sont disctinctes. Par Q3, $[P]_\equiv = [P \to \neg P]_\equiv$ et on en déduit que l'on a aussi $P \equiv P \vee P \equiv (P \vee (P \to \neg P))$ et finalement $P \vee \neg P \equiv P \vee \neg P \vee (P \to \neg P)$ i.e. $[P \vee \neg P]_\equiv = [P \vee \neg P \vee (P \to \neg P)]_\equiv$. Donc l' ensemble quotient $\mathcal{F}/\equiv$ a 4 classes :

$$\mathcal{F}/\equiv = \{[\bot]_\equiv, [P]_\equiv, [\neg P]_\equiv, [P \vee \neg P]_\equiv\}$$

7.2 L' ordre sur $\mathcal{F}/\equiv$ induit par le préordre $\preceq$ est décrit par la figure 1. Cette figure représente

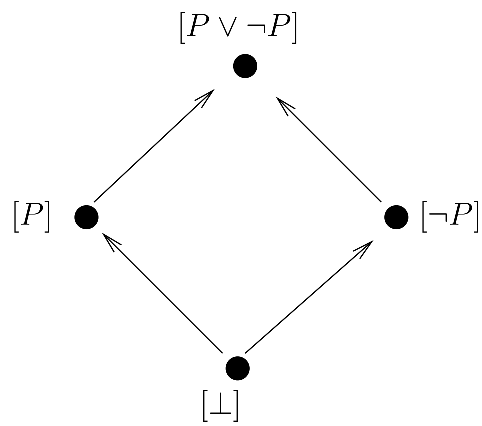

FIG. 1 – $\mathcal{F}/\equiv$.

le *diagramme de Hasse* de l'ordre : chaque flèche relie un élément à son successeur. Deux éléments x, y sont liés par l'ordre ssi il y a un chemin de x à y dans le diagramme de Hasse.
Q8- 8.1 Montrons que $P \prec \neg P \to P$
1- $P, \neg P \vdash P$ (ax')
2- $P \vdash \neg P \to P$ ($\to_d$)
3- $\vdash P \to (\neg P \to P)$ ($\to_d$)
Considérons la structure de Kripke $\mathcal{K} := (K, \leq, \Vdash)$ où $K = \{0,1\}, 0 \leq 1$ et $\Vdash = \{(1, P)\}$. On a :$0 \nVdash (\neg P \to P) \to P$, donc $\vdash (\neg P \to P) \to P$ n' est pas prouvable dans LJ.
8.2 Le séquent $\vdash (P \vee \neg P) \to (\neg P \to P)$ n'est pas prouvable dans LK (en effet il est rendu faux par la valuation $\nu(P) := 0$). Dans la structure de Kripke $\mathcal{K}$ (définie plus haut) on a : $0 \Vdash (\neg P \to P)$ et $0 \nVdash P \vee \neg P$, donc $0 \nVdash (\neg P \to P) \to (P \vee \neg P)$, donc le séquent $\vdash (\neg P \to P) \to (P \vee \neg P)$ n'est pas prouvable dans LJ . On a ainsi montré que $(\neg P \to P)$ et $(P \vee \neg P)$ sont incomparables pour $\preceq$.
8.3 $\mathcal{G}/\equiv$ a donc exactement 6 éléments :

$$\mathcal{G} := \{[\bot]_\equiv, [P]_\equiv, [\neg P]_\equiv, [P \vee \neg P]_\equiv, [\neg P \to P]_\equiv, [P \vee \neg P \vee (\neg P \to P)]_\equiv\}$$

8.4 L'ordre sur $\mathcal{G}/\equiv$ induit par le préordre $\preceq$ est décrit par son diagramme de Hasse sur la figure 2.

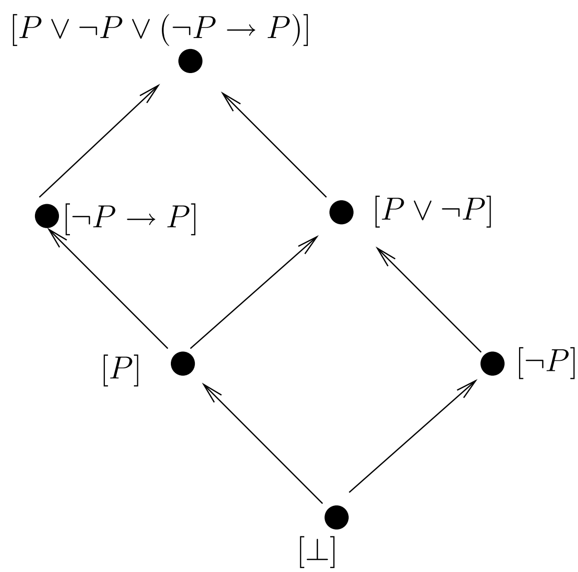

Fig. 2 – $\mathcal{G}/\equiv$.