Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2007/2008

# LOGIQUE

Sujet d'examen de Décembre 2007- G. Sénizergues

**Documents autorisés** : tous documents autorisés.
On rappelle les ensembles d'axiomes suivants.

**EG** (Théorie de l'égalité)
**REF** : $\forall x \;\; x = x$
**SYM** : $\forall x, y \;\; (x = y \to y = x)$
**TRANS** : $\forall x, y, z \;\; (x = y \wedge y = z) \to x = z)$
**COMPF** : $\forall \vec{x}, \vec{y} \;\; (\vec{x} = \vec{y} \to f(\vec{x}) = f(\vec{y}))$
**COMPR** : $\forall \vec{x}, \vec{y} \;\; (\vec{x} = \vec{y} \to R(\vec{x}) \to R(\vec{y}))$

**P0'**
Tous les axiomes de EG ;
**A1** : $\forall x \;\; \neg S(x) = 0$
**A3** : $\forall x, y \;\; (S(x) = S(y) \to x = y)$
**A4** : $\forall x \;\; (x + 0 = x)$
**A5** : $\forall x, y \;\; (x + S(y) = S(x + y))$
**A6** : $\forall x \;\; (x \times 0 = 0)$
**A7** : $\forall x, y \;\; (x \times S(y) = x \times y + x)$

**PA'** (Arithmétique de Péano)
Tous les axiomes de $\mathrm{P}'_0$ ;
$\mathrm{REC}_\Phi$ : $(\Phi(0) \wedge (\forall x(\Phi(x) \to \Phi(S(x)))) \to \forall x \Phi(x)$
pour toutes les formules $\Phi(x)$ ;

**Exercice 3**(sur 5 points)
1- Ecrire une preuve dans LJ de

$$\mathrm{EG} \vdash \exists y(\neg(0 = 0) \to 0 = S(y))$$

2- Ecrire une preuve dans LJ de

$$\mathrm{EG} \vdash \exists y(\neg(x = 0) \to S(x) = S(y))$$

3- Ecrire une preuve dans LJ de

$$\mathrm{PA}' \vdash \exists y(\neg(x = 0) \to x = S(y))$$

4- Existe-t-il un terme $t_1$ (resp. $t_2, t_3$) sur la signature de $\mathrm{PA}'$ tel que

$$\mathrm{EG} \vdash (\neg(0 = 0) \to 0 = S(t_1))?$$

$$\mathrm{EG} \vdash (\neg(x=0) \to S(x) = S(t_2))?$$

$$\mathrm{PA}' \vdash (\neg(x=0) \to x = S(t_3))?$$

Comment expliquez-vous ce phénomène ?

**Exercice 4**(sur 5 points)

1- Donner une preuve dans LK de $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$ (pour toutes formules $A, B$).

2- Donner une structure de Kripke qui est un contre-modèle de $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$ (où $P, Q$ sont des variables propositionnelles).

Que peut-on en déduire sur la prouvabilité du séquent $\vdash (P \to Q) \vee (Q \to P)$ dans LJ ?

3- Une structure de Kripke $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ est dite *linéaire* ssi, pour tous $k, k' \in K, k \leq k'$ ou $k' \leq k$. Montrer que, si $\mathcal{K}$ est une structure de Kripke propositionnelle linéaire, alors, pour toutes formules $A, B$,

$$\mathcal{K} \Vdash (A \to B) \vee (B \to A).$$

4- On note LT le système LJ auquel on ajoute le schéma d'axiome

$$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$$

Soit $\mathcal{Q}$ un ensemble dénombrable de variables propositionnelles. Notons $\mathcal{F}(\mathrm{LJ})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathrm{LT})$, $\mathcal{F}(\mathrm{LK})$) l'ensemble des formules propositionnelles sur $\mathcal{Q}$ qui sont prouvables dans LJ (resp, dans LT, dans LK). Montrer que les inclusions $\mathcal{F}(\mathrm{LJ}) \subset \mathcal{F}(\mathrm{LT}) \subset \mathcal{F}(\mathrm{LK})$ sont strictes.