Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2007/2008

LOGIQUE

Sujet de contrôle continu- 6 Décembre 2007

Durée : 2 H
Documents autorisés : notes de cours, feuilles et notes de TD.

Exercice 1(sur 5 points)
On se demande si les règles $\rightarrow_g, \vee_g$ du calcul des séquents sont réversibles ou non.
1- Pour chacune des quatre règles suivantes, déterminer s' il s' agit d' une règle dérivée du système LK ?

$$\frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \;,\quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta}$$
$$\frac{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \;,\quad \frac{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta}$$

2- Que peut-on en conclure sur les règles $\rightarrow_g, \vee_g$ du calcul des séquents ?
3- Pour chacune de ces règles, dire si on peut la simuler par une dérivation sans coupure de LK ?

Exercice 2(sur 5 points)
1- La suite suivante est-elle une preuve dans le système LJ ?

$$\begin{array}{ll}
R(x) \vdash R(x) & \mathtt{ax} \\
R(x), \neg R(x) \vdash & \neg_g \\
R(x) \vdash \neg\neg R(x) & \neg_d \\
\forall x R(x) \vdash \neg\neg R(x) & \forall_g \\
\forall x R(x) \vdash \neg \exists x \neg R(x) & \exists_d
\end{array}$$

2- Le séquent $\forall x R(x) \vdash \neg \exists x \neg R(x)$ est-il prouvable dans LJ ?

Exercice 3(sur 10 points)
On définit une relation binaire $\preceq$ sur les formules propositionnelles par : pour toutes formules propositionnelles A, B, $A \preceq B$ si et seulement si

$$\vdash_{\mathrm{LJ}} (A \rightarrow B)$$

1- Montrer que $\preceq$ est un préordre, c'est à dire une relation réflexive et transitive.
2- Vérifier que $P \preceq (P \vee \neg P)$ et $\neg P \preceq (P \vee \neg P)$.

On note $\equiv$ la relation d'équivalence associée au préordre $\preceq$; autrement dit

$$A \equiv B \text{ ssi } (A \preceq B \text{ et } B \preceq A)$$

3- Montrer que $\neg P \equiv (P \rightarrow \neg P)$.
4- Montrer que, pour toutes formules A, B, $A \preceq A \vee B$ et $B \preceq A \vee B$.

On note $\prec$ la relation de préordre strict associée au préordre $\preceq$; autrement dit $A \prec B$ ssi ($A \preceq B$ et $A \not\equiv B$).
5- Montrer que si A, B sont incomparables pour le préordre $\preceq$, alors $A \prec (A \vee B)$ et $B \prec (A \vee B)$.

On se restreint maintenant aux formules propositionnelles sur un alphabet de variables propositionnelles réduit à une seule variable propositionnelle P.
6- Montrer que $\perp \prec P$, $\perp \prec \neg P$ et que $P, \neg P$ sont incomparables par $\preceq$.
Aide : on pourra remarquer que $P \to \neg P$ (resp. $\neg P \to P$) ne sont pas des tautologies classiques.
7- En déduire que $P \prec (P \vee \neg P)$ et $\neg P \prec (P \vee \neg P)$.

On considère l'ensemble de 6 formules :

$$\mathcal{F} := \{\perp, P, \neg P, P \vee \neg P, P \to \neg P, P \vee \neg P \vee (P \to \neg P)\}$$

7.1 Décrire l'ensemble quotient $\mathcal{F}/\equiv$.
7.2 Décrire l' ordre sur $\mathcal{F}/\equiv$ induit par le préordre $\preceq$.
8- On considère l' ensemble de 6 formules :

$$\mathcal{G} := \{\perp, P, \neg P, P \vee \neg P, \neg P \to P, P \vee \neg P \vee (\neg P \to P)\}$$

8.1 Comparer P et $\neg P \to P$
8.2 Les formules $\neg P \to P$ et $P \vee \neg P$ sont-elles comparables pour $\preceq$?
8.3 Décrire l'ensemble quotient $\mathcal{G}/\equiv$.
8.4 Décrire l'ordre sur $\mathcal{G}/\equiv$ induit par le préordre $\preceq$.