UNIVERSITE PARIS I
LICENCE DE LOGIQUE   LOGIQUE

LA SEMANTIQUE DE KRIPKE

DEFINITION: Soit $\mathscr{L}$ un langage propositionnel. Une structure de Kripke pour $\mathscr{L}$ (ou $\mathscr{L}$-structure de Kripke) est un triplet $\mathfrak{M} = (M , \leq , D)$, où

- M est un ensemble non vide, dont les éléments (qu'on notera α, β, γ ...) , sont appelés états (ou mondes possibles dans le contexte de la logique modale),
- $\leq$ est un ordre sur M,
- $D : M \rightarrow \mathscr{P}(At-\{\perp\})$ est une application qui à tout $\alpha\in M$ associe un ensemble d'atomes de $\mathscr{L}$ différents de $\perp$ et qui vérifie : si $\alpha\leq\beta$, alors $D(\alpha)\subseteq D(\beta)$.

DEFINITION: Soient $\mathscr{L}$ un langage d'énoncés , For($\mathscr{L}$) l'ensemble des formules de $\mathscr{L}$ et $\mathfrak{M} = (M , \leq , D)$ une $\mathscr{L}$-structure de Kripke .
Pour $\alpha\in M$, on définit $v_\alpha : For(\mathscr{L}) \rightarrow \{0 , 1\}$ par :

1. Si φ est atomique, $v_\alpha(\varphi) =1$ ssi $\varphi\in D(\alpha)$.
2. Si $\varphi = \psi\wedge\chi$, $v_\alpha(\varphi) =1$ ssi $v_\alpha(\psi) = v_\alpha(\chi)=1$.
3. Si $\varphi = \psi\vee\chi$, $v_\alpha(\varphi) =1$ ssi $v_\alpha(\psi) = 1$ ou $v_\alpha(\chi) =1$.
4. Si $\varphi = \psi\rightarrow\chi$, $v_\alpha(\varphi) =1$ ssi $\forall\beta \geq \alpha$ (si $v_\beta(\psi) =1$, alors $v_\beta(\chi) =1$).

De 4. et du fait que $\neg\varphi =_{def} \varphi\rightarrow\perp$, on obtient

5. $v_\alpha(\neg\varphi) =1$ ssi $\forall\beta \geq \alpha$ ($v_\beta(\varphi) = 0$).

- Si $v_\alpha(\varphi)=1$, on dit que φ est <u>vraie</u> dans α.
- $\mathfrak{M}=(M , \leq , D)$ est un <u>modèle</u> de φ ($\mathfrak{M}\models\varphi$) ssi pour tout $\alpha\in M$, $v_\alpha(\varphi)=1$.

THEOREME: Soit $\mathscr{L}$ un langage propositionnel. Pour toute formule φ de $\mathscr{L}$,
$\vdash_{DNI}\varphi$ ssi pour toute $\mathscr{L}$-structure de Kripke $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\models\varphi$.

Pour montrer qu'une formule φ de $\mathscr{L}$ n'est pas un théorème de DNI, il suffit (en utilisant le théorème précédent) de trouver une $\mathscr{L}$-structure de Kripke $\mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{M}$ n'est pas modèle de φ , i.e. trouver $\mathfrak{M}=(M , \leq , D)$ et $\alpha\in M$ tel que $v_\alpha(\varphi) = 0$.

EXEMPLES

1. $\psi : \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ n'est pas un théorème de DNI.

$v_\alpha(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) = 0$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha\ (\ v_\beta(\neg\neg\varphi)=1$ et $v_\beta(\varphi)=0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha(\ (\forall\gamma \geq \beta\ \ v_\gamma(\neg\varphi)=0\ )$ et $v_\beta(\varphi)=0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha(\ (\forall\gamma \geq \beta\ \ (\exists\delta \geq \gamma\ \ v_\delta(\varphi)=1)\ )$ et $v_\beta(\varphi)=0\ )$.

Soit $\mathfrak{M}=(\ \{\ m_1\ ,\ m_2\ \}\ ,\ \leq\ ,\ D)$, avec $m_1<m_2$, $D(m_1)=\varnothing$ et $D(m_2)=\{p\}$.
On vérifie que $v_{m1}(\neg\neg p\rightarrow p)=0$.

2. $\psi : (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ n'est pas un théorème de DNI.

$v_\alpha(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi=0$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha\ (\ v_\beta(\neg\varphi \rightarrow\varphi)=1$ et $v_\beta(\varphi)=0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha(\ (\forall\gamma \geq \beta\ ($ si $v_\gamma(\neg\varphi)=1$, alors $v_\gamma(\varphi)=1)\ )$ et $v_\beta(\varphi) = 0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha(\ (\forall\gamma \geq \beta\ ($ si $(\forall\delta \geq \gamma\ (v_\delta(\varphi)=0)$, alors $v_\gamma(\varphi)=1\ )$ et $v_\beta(\varphi)=0\ )$.

Soit $\mathfrak{M} = (\ \{m_1\ ,\ m_2\}\ ,\ \leq\ ,\ D\ )$, avec $m_1<m_2$, $D(m_1)=\varnothing$ et $D(m_2)=\{p\}$.
On vérifie que $v_{m1}((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)=0$.

3. $\theta : \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ n'est pas un théorème de DNI.

$v_\alpha(\neg(\varphi \wedge\neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) = 0$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha\ \ (\ v_\beta\ (\neg(\varphi \wedge\neg\psi)) =1$ et $v_\beta(\varphi \rightarrow \psi) = 0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha\ (\ (\forall\gamma \geq \beta\ \ v_\gamma(\varphi \wedge\neg\psi)=0\ )$ et $\exists\gamma \geq \beta\ (v_\gamma(\varphi)=1$ et $v_\gamma(\psi)=0)\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha\ (\ (\forall\gamma \geq \beta\ \ (v_\gamma(\varphi)=0$ ou $v_\gamma(\neg\psi)=0\ )\ )$ et $\exists\gamma \geq \beta\ (\ v_\gamma(\varphi)=1$ et $v_\gamma(\psi)=0)\ )$
$\exists\beta \geq \alpha\ (\ (\forall\gamma \geq \beta\ \ (v_\gamma(\varphi)=0$ ou $\exists\delta\geq\gamma\ \ v_\delta(\psi)=1)\ )$
et $\exists\gamma \geq \beta\ (v_\gamma(\varphi)=1$ et $v_\gamma(\psi)=0)\ )$

Soit $\mathfrak{M} = (\ \{m_1, m_2, m_3\}\ ,\ \leq\ ,\ D)$, avec $m_1<m_2<m_3$,
$D(m_1)=\varnothing$, $D(m_2)=\{p\}$ et $D(m_3)=\{p\ ,\ q\}$.
On vérifie que $v_{m1}(\neg(p \wedge\neg\ q) \rightarrow (q \rightarrow p))=0$.

4. $\theta : \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ n'est pas un théorème de DNI.

$v_\alpha(\neg(\varphi \wedge\psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))=0$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha\ (\ v_\beta(\neg(\varphi\wedge\psi))=1$ et $v_\beta(\neg\varphi\vee\neg\psi)=0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha(\ \forall\gamma \geq \beta\ \ v_\gamma(\varphi\wedge\psi)=0$ et $v_\beta(\neg\varphi)=0$ et $v_\beta(\neg\psi)=0\ )$ ssi
$\exists\beta \geq \alpha(\ (\forall\gamma \geq \beta\ \ (\ v_\gamma(\varphi)=0$ ou $v_\gamma(\psi)=0\ )\ )$
et $(\exists\delta \geq \beta\ \ v_\delta(\varphi)=1$ et $\exists\delta \geq \beta\ \ v_\delta(\psi)=1)\ )$

Soit $\mathfrak{M} = (\{m_1, m_2, m_3\}, \leq, D)$, avec $m_1<m_2$ et $m_1<m_3$
$D(m_1)=\varnothing$, $D(m_2)=\{p\}$, $D(m_3)=\{q\}$.
On vérifie que $v_{m1}(\neg(p\wedge q) \rightarrow (\neg p\vee\neg q))=0$.

EXEMPLES de théorèmes et non-théorèmes de DNI.

THEOREMES

1. $\neg\neg\neg\varphi\rightarrow\neg\varphi$
2. $\neg(\varphi\rightarrow \psi)\rightarrow\neg\neg\psi$
3. $(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow (\neg\psi\rightarrow\neg\varphi)$
4. $\neg(\varphi\vee\psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge\neg\psi)$
5. $\neg(\varphi\wedge\psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$
6. $\neg\neg(\varphi\vee\neg\varphi)$
7. $\neg(\varphi\rightarrow\psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi\vee\psi)$

1'. $\varphi\rightarrow\neg\neg\varphi$
2'. $\neg(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$
3'. $(\varphi\rightarrow\neg\psi)\leftrightarrow (\psi\rightarrow\neg\varphi)$

NON-THEOREMES

1. $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
2. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
4. $\neg(\varphi\wedge\psi) \rightarrow \neg\varphi\vee\neg\psi$
5. $\neg(\varphi\wedge\neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
6. $\varphi\vee\neg\varphi$
7. $(\varphi \rightarrow \psi)\vee(\psi \rightarrow \varphi)$

4'. $\neg(\neg\varphi \wedge\neg\psi) \rightarrow \varphi\vee\psi$
6'. $\neg\neg\varphi\vee\neg\varphi$