

Université Bordeaux 1. Master d'informatique.

Logique INF462

17 Décembre 2007

Sujet de Mr. Castéran Tous documents autorisés; durée conseillée: 1h30

A lire avant d'écrire quoi que ce soit *Le critère d'évaluation sera la qualité et la clarté de vos explications. Les commandes Coq non accompagnées d'explications ne seront pas prises en compte ; il vaut mieux expliquer simplement la structure de vos preuves. Vous pourrez admettre toute propriété arithmétique triviale, comme $4 \leq 8$, $33 \neq 42$, $\sim(6 < 4)$, $(\forall x : \mathbf{Nat}, x \leq 0 \rightarrow x = 0)$, etc.*

1 Exercice (4pts)

On considère la logique propositionnelle intuitionniste (sans le tiers exclu). Montrer que si l'on ajoute la règle suivante, on obtient exactement la logique propositionnelle classique :

$$\frac{A \ B \ C : \mathbf{Prop} \quad \Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \sim A \vdash C}{\Gamma \vdash B \vee C} R$$

2 Problème (6 pts)

On considère dans ce problème des graphes orientés, dont les sommets sont étiquetés par des entiers naturels distincts (voir par exemple la figure 1).

On peut définir un tel graphe à l'aide d'un prédicat $\mathbf{arc} : \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Prop}$.

2.1 Première question

Définir en *Coq* le prédicat \mathbf{arc} associé au graphe de la figure 1. Votre définition peut utiliser toutes les ressources de l'arithmétique de Peano : zéro, successeur, addition, relations $<$ et \leq , etc. Si vous ne pouvez pas faire autrement, vous pouvez écrire votre définition sous forme d'axiomes.

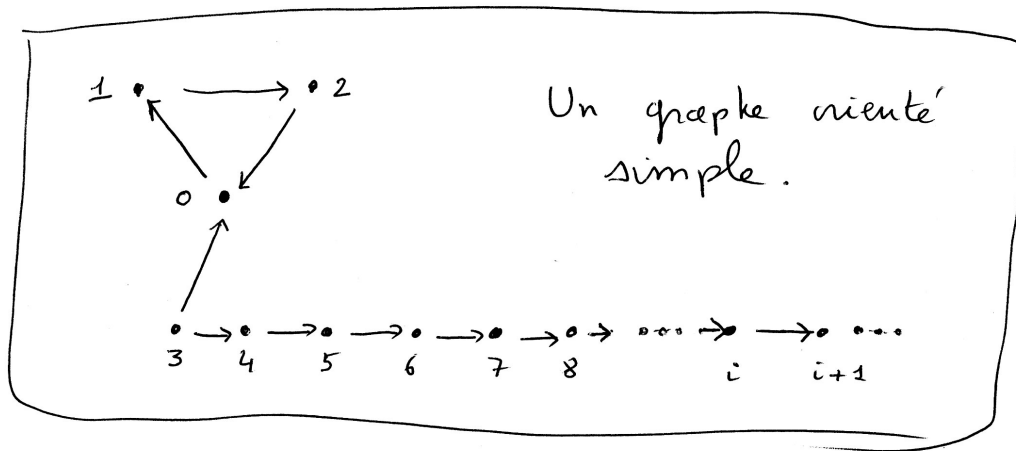


Figure 1: un graphe simple

2.2 Deuxième question

Votre définition vous permet-elle de prouver les lemmes suivants ? Comment ?

$$\text{arc } 1 \ 2 \quad (1)$$

$$\forall i : \text{Nat}, 3 \leq i \rightarrow \text{arc } i \ (i+1) \quad (2)$$

$$\sim(\text{arc } 2 \ 1) \quad (3)$$

$$\forall i : \text{Nat}, \text{arc } 0 \ i \rightarrow i = 1 \quad (4)$$

Dans la suite du problème vous pourrez admettre ces propriétés du prédicat `arc`, ainsi que celles de la même forme “visibles” sur le dessin

2.3 Troisième question

Expliquer la définition ci-dessous :

```
Definition Connected (i j:Nat) :=
  ∀ (X: Nat → Prop),
  X i →
  (∀ k l: Nat, X k → arc k l → X l) →
  X j.
```

2.4 Quatrième question

Comment montrer les lemmes suivants ?

Lemma L02 : `Connected 0 2`.

Lemma Loop_012 : $\forall i, \text{Connected } 0 \ i \rightarrow i=0 \vee i=1 \vee i=2$.