Luoghi critici per la ricostruzione di scene dinamiche

una applicazione di geometria algebrica proiettiva alla computer vision

Tesi di laurea di: Luca Magri

Relatrice: Prof.ssa Marina Bertolini

13 Dicembre 2011

La computer vision

Estrarre informazioni da una serie di immagini (foto, video).

Problema della ricostruzione

A partire da una serie di immagini di una scena ricostruire la scena $3D$ a meno di una proiettività.

La computer vision

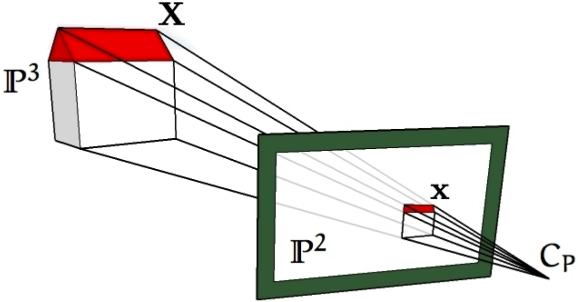
Estrarre informazioni da una serie di immagini (foto, video).

Problema della ricostruzione

A partire da una serie di immagini di una scena ricostruire la scena $3D$ a meno di una proiettività.

Modello proiettivo di un'immagine statica

Uno scatto fotografico una proiezione lineare $P\colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ di centro C_P.



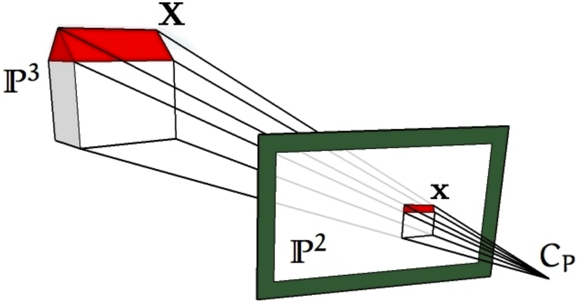
È quindi rappresentato come una matrice 3×4 di rango massimo definita a meno di moltiplicazioni per matrici invertibili:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ punto della *scena*, $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^2$ punto della *vista*, vale $\lambda\mathbf{x} = P\mathbf{X}$

Modello proiettivo di un'immagine statica

Uno scatto fotografico una proiezione lineare $P\colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ di centro C_P.



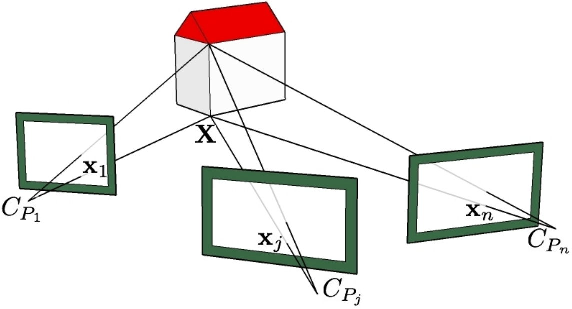
È quindi rappresentato come una matrice 3×4 di rango massimo definita a meno di moltiplicazioni per matrici invertibili:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}^3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{X} \in \mathbb{P}^3$ punto della *scena*, $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^2$ punto della *vista*, vale $\lambda \mathbf{x} = P\mathbf{X}$

Più viste

Consideriamo n immagini della stessa scena: n proiezioni $P_i \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.



I punti $\mathbf{x}_i$ che sono proiezioni dello stesso punto $\mathbf{X}$ della scena si dicono punti corrispondenti.
Ricostruzione per triangolazione.

Spazi di dimensione arbitraria

Generalizzazione a proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$

Matrici: P una matrice $(k+1) \times (h+1)$ di rango massimo;

Centro: C_P uno spazio di dimensione $k-h-1$.

Generalizzazione a proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$

Matrici: P una matrice $(k+1) \times (h+1)$ di rango massimo;

Centro: C_P uno spazio di dimensione $k-h-1$.

Spazi di dimensione arbitraria

Generalizzazione a proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$

Matrici: P una matrice $(k+1) \times (h+1)$ di rango massimo;

Centro: C_P uno spazio di dimensione $k-h-1$.

Spazi di dimensione arbitraria

Generalizzazione a proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$

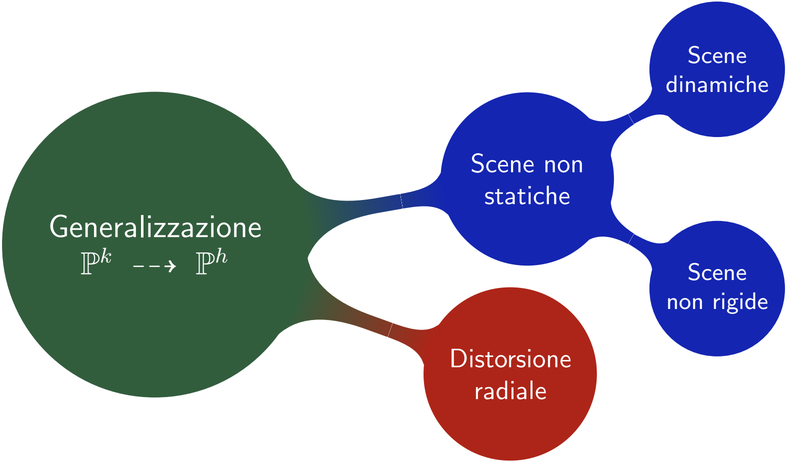
Matrici: P una matrice $(k+1) \times (h+1)$ di rango massimo;

Centro: C_P uno spazio di dimensione $k-h-1$.

Spazi di dimensione arbitraria

Generalizzazione a proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$

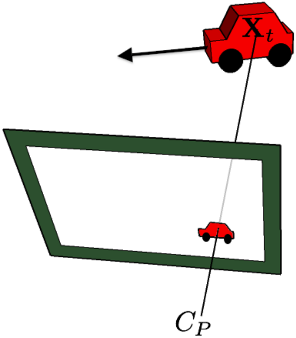
- Matrici: P una matrice $(k+1) \times (h+1)$ di rango massimo;
- Centro: C_P uno spazio di dimensione $k-h-1$.



Scene dinamiche

Una scena dinamica di $\mathbb{P}^n$ è composta da punti $\{\mathbf{X}_{it}\}$ le cui coordinate variano in funzione del parametro t.
Possono essere interpretate come scene statiche in spazi di dimensione più alta.

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x + t\mathrm{d}x \\ y + t\mathrm{d}y \\ z + t\mathrm{d}z \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3$$

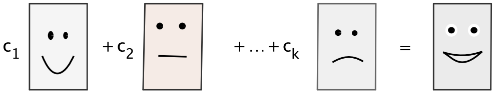


$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^6$$

La fotografia della scena dinamica è rappresentata con una proiezione $\mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ data dalla matrice 3×7 della forma $\widetilde{P} = [P|t\mathbf{p}_1|t\mathbf{p}_2|t\mathbf{p}_3]$.

Scene non rigide

Un volto, così come viene modellizzato dalla *face recognition*, è un oggetto non rigido.



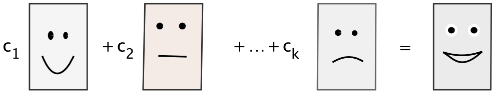
Una scena non rigida è una collezione di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ la cui forma può essere espressa come combinazione lineare di un insieme fissato di K punti presi sulle forme rigide base:

$$\mathbf{X}_i = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathbf{B}_{ki}.$$

Una scena non rigida di $\mathbb{P}^3$ può essere rappresentata in modo statico utilizzando proiezioni $\mathbb{P}^{4K-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{3K-1}$.

Scene non rigide

Un volto, così come viene modellizzato dalla *face recognition*, è un oggetto non rigido.



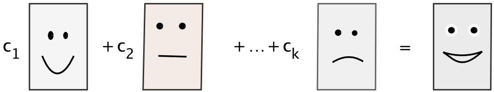
Una scena non rigida è una collezione di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ la cui forma può essere espressa come combinazione lineare di un insieme fissato di K punti presi sulle forme rigide base:

$$\mathbf{X}_i = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathbf{B}_{ki}.$$

Una scena non rigida di $\mathbb{P}^3$ può essere rappresentata in modo statico utilizzando proiezioni $\mathbb{P}^{4K-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{3K-1}$.

Scene non rigide

Un volto, così come viene modellizzato dalla *face recognition*, è un oggetto non rigido.



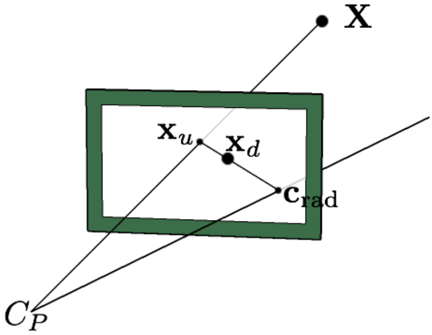
Una scena non rigida è una collezione di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ la cui forma può essere espressa come combinazione lineare di un insieme fissato di K punti presi sulle forme rigide base:

$$\mathbf{X}_i = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathbf{B}_{ki}.$$

Una scena non rigida di $\mathbb{P}^3$ può essere rappresentata in modo statico utilizzando proiezioni $\mathbb{P}^{4K-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{3K-1}$.

Distorsione radiale

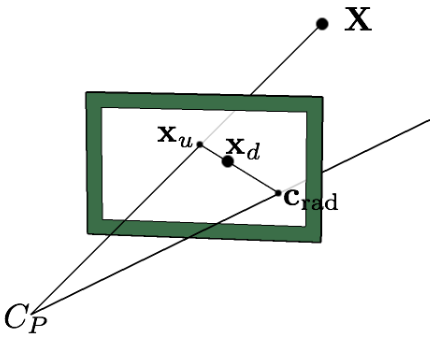
Fenomeno che riguarda le camere reali.
La proiezione non è lineare.



Si dimostra che può essere corretta introducendo una proiezione $Q\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ detta camera radiale $1D$ tale che $Q\colon \mathbf{x}_d \mapsto \ell_{\text{rad}}$.

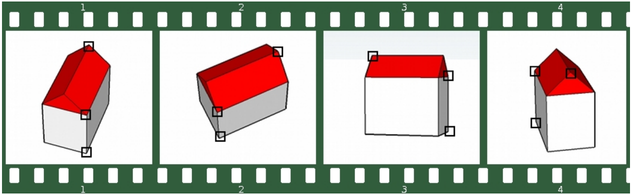
Distorsione radiale

Fenomeno che riguarda le camere reali.
La proiezione non è lineare.



Si dimostra che può essere corretta introducendo una proiezione $Q\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ detta camera radiale $1D$ tale che $Q\colon \mathbf{x}_d \mapsto \ell_{\mathrm{rad}}$.

Matching dei punti: Si individua nelle diverse immagini un numero sufficiente N di n-uple di punti corrispondenti;



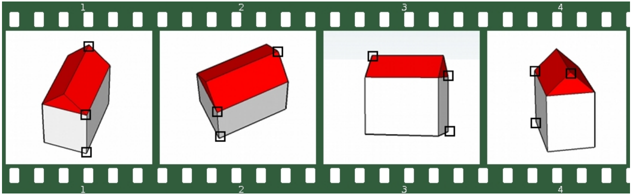
Ricostruzione dei tensori: la corrispondenza tra i punti delle varie viste può essere espressa con degli strumenti di algebra multilineare: i tensori di grassmann n-focali. Si sostituiscono le coordinate dei punti corrispondenti nelle equazioni individuate dai tensori di Grassmann;

Calibrazione delle camere: dalle entrate dei tensori si ricavano le matrici di proiezione P_j e i relativi centri;

Ricostruzione della scena: si ricostruisce la scena e la sua evoluzione temporale.

Ricostruzione della scena

Matching dei punti: Si individua nelle diverse immagini un numero sufficiente N di n-uple di punti corrispondenti;



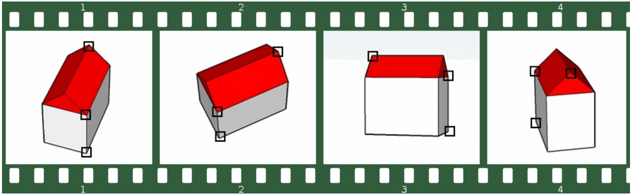
Ricostruzione dei tensori: la corrispondenza tra i punti delle varie viste può essere espressa con degli strumenti di algebra multilineare: i tensori di grassmann n-focali. Si sostituiscono le coordinate dei punti corrispondenti nelle equazioni individuate dai tensori di Grassmann;

Calibrazione delle camere: dalle entrate dei tensori si ricavano le matrici di proiezione P_j e i relativi centri;

Ricostruzione della scena: si ricostruisce la scena e la sua evoluzione temporale.

Ricostruzione della scena

Matching dei punti: Si individua nelle diverse immagini un numero sufficiente N di n-uple di punti corrispondenti;



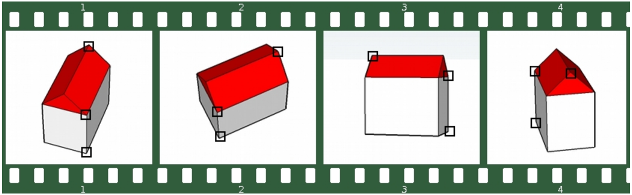
Ricostruzione dei tensori: la corrispondenza tra i punti delle varie viste può essere espressa con degli strumenti di algebra multilineare: i tensori di grassmann n-focali. Si sostituiscono le coordinate dei punti corrispondenti nelle equazioni individuate dai tensori di Grassmann;

Calibrazione delle camere: dalle entrate dei tensori si ricavano le matrici di proiezione P_j e i relativi centri;

Ricostruzione della scena: si ricostruisce la scena e la sua evoluzione temporale.

Ricostruzione della scena

Matching dei punti: Si individua nelle diverse immagini un numero sufficiente N di n-uple di punti corrispondenti;



Ricostruzione dei tensori: la corrispondenza tra i punti delle varie viste può essere espressa con degli strumenti di algebra multilineare: i tensori di grassmann n-focali. Si sostituiscono le coordinate dei punti corrispondenti nelle equazioni individuate dai tensori di Grassmann;

Calibrazione delle camere: dalle entrate dei tensori si ricavano le matrici di proiezione P_j e i relativi centri;

Ricostruzione della scena: si ricostruisce la scena e la sua evoluzione temporale.

Minimo numero di viste

Per proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ la ricostruzione della scena è possibile solo se si dispone di un numero n sufficiente di immagini.
Numero minimo di viste per la calibrazione delle camere

$$\omega_{k,h} = s + 1$$

se

$$k = sh + l \text{ con } 0 \leq l < k.$$

Se $n \geq \omega_{k,h}$ si possono stimare i tensori di Grassmann, le matrici di proiezione, i centri e quindi ricostruire la scena...
A meno che i punti corrispondenti scelti nella fase di matching non provengano da punti della scena che determinano una configurazione critica.

Minimo numero di viste

Per proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ la ricostruzione della scena è possibile solo se si dispone di un numero n sufficiente di immagini.
Numero minimo di viste per la calibrazione delle camere

$$\omega_{k,h} = s + 1$$

se

$$k = sh + l \text{ con } 0 \leq l < k.$$

Se $n \geq \omega_{k,h}$ si possono stimare i tensori di Grassmann, le matrici di proiezione, i centri e quindi ricostruire la scena...
A meno che i punti corrispondenti scelti nella fase di matching non provengano da punti della scena che determinano una configurazione critica.

Configurazioni critiche

Un insieme di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ con $i = 1, \ldots, N$, di $\mathbb{P}^k$ è una configurazione critica per n viste, se esistono

- un insieme di N punti $\{\mathbf{Y}_i\}$ di $\mathbb{P}^k$ non proiettivamente equivalente a $\{\mathbf{X}_i\}$;
- due collezioni di matrici $\{P_j\}_{j=1}^n$ e $\{Q_j\}_{j=1}^n$ di dimensioni $(h+1) \times (k+1)$ e di rango massimo tali che, a meno di una proiettività dei $\mathbb{P}^h$ immagine, si abbia:

$$P_j \mathbf{X}_i = \lambda_{i,j} Q_j \mathbf{Y}_i.$$

Gli insiemi $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$ si dicono configurazioni critiche associate e le matrici $\{P_j\}$ e $\{Q_j\}$ sono dette matrici coniugate associate.

Configurazioni critiche

Un insieme di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ con $i = 1, \ldots, N$, di $\mathbb{P}^k$ è una configurazione critica per n viste, se esistono

- un insieme di N punti $\{\mathbf{Y}_i\}$ di $\mathbb{P}^k$ non proiettivamente equivalente a $\{\mathbf{X}_i\}$;
- due collezioni di matrici $\{P_j\}_{j=1}^n$ e $\{Q_j\}_{j=1}^n$ di dimensioni $(h+1) \times (k+1)$ e di rango massimo tali che, a meno di una proiettività dei $\mathbb{P}^h$ immagine, si abbia:

$$P_j \mathbf{X}_i = \lambda_{i,j} Q_j \mathbf{Y}_i.$$

Gli insiemi $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$ si dicono configurazioni critiche associate e le matrici $\{P_j\}$ e $\{Q_j\}$ sono dette matrici coniugate associate.

Configurazioni critiche

Un insieme di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ con $i = 1, \dots, N$, di $\mathbb{P}^k$ è una configurazione critica per n viste, se esistono

- un insieme di N punti $\{\mathbf{Y}_i\}$ di $\mathbb{P}^k$ non proiettivamente equivalente a $\{\mathbf{X}_i\}$;
- due collezioni di matrici $\{P_j\}_{j=1}^n$ e $\{Q_j\}_{j=1}^n$ di dimensioni $(h+1) \times (k+1)$ e di rango massimo tali che, a meno di una proiettività dei $\mathbb{P}^h$ immagine, si abbia:

$$P_j \mathbf{X}_i = \lambda_{i,j} Q_j \mathbf{Y}_i.$$

Gli insiemi $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$ si dicono configurazioni critiche associate e le matrici $\{P_j\}$ e $\{Q_j\}$ sono dette matrici coniugate associate.

Configurazioni critiche

Un insieme di punti $\{\mathbf{X}_i\}$ con $i = 1, \ldots, N$, di $\mathbb{P}^k$ è una configurazione critica per n viste, se esistono

- un insieme di N punti $\{\mathbf{Y}_i\}$ di $\mathbb{P}^k$ non proiettivamente equivalente a $\{\mathbf{X}_i\}$;
- due collezioni di matrici $\{P_j\}_{j=1}^n$ e $\{Q_j\}_{j=1}^n$ di dimensioni $(h+1) \times (k+1)$ e di rango massimo tali che, a meno di una proiettività dei $\mathbb{P}^h$ immagine, si abbia:

$$P_j \mathbf{X}_i = \lambda_{i,j} Q_j \mathbf{Y}_i.$$

Gli insiemi $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$ si dicono configurazioni critiche associate e le matrici $\{P_j\}$ e $\{Q_j\}$ sono dette matrici coniugate associate.

Luoghi critici

La condizione di proporzionalità tra i punti $P_j\mathbf{X}_i$ e $Q_j\mathbf{Y}_i$ può essere espressa utilizzando $\binom{h+1}{2}$ opportune matrici $E_{u,v}$ che confrontano tra loro coppie di coordinate di questi punti, ottenendo

$$(P_j\mathbf{X})^\top E_{u,v} Q_j \mathbf{Y} = 0.$$

Il luogo critico $\mathcal{X}_h^k$ per la ricostruzione da n viste da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^h$ è dato dai punti $\mathbf{X}$ per i quali esiste un punto $\mathbf{Y}$ che soddisfa le equazioni precedenti. Siamo quindi portati a considerare il sistema di $\binom{h+1}{2}n$ equazioni del tipo precedente e chiedere che abbia soluzioni $\mathbf{Y}$ non banali.

Luoghi critici

La condizione di proporzionalità tra i punti $P_j\mathbf{X}_i$ e $Q_j\mathbf{Y}_i$ può essere espressa utilizzando $\binom{h+1}{2}$ opportune matrici $E_{u,v}$ che confrontano tra loro coppie di coordinate di questi punti, ottenendo

$$(P_j\mathbf{X})^\top E_{u,v} Q_j \mathbf{Y} = 0.$$

Il luogo critico $\mathcal{X}_h^k$ per la ricostruzione da n viste da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^h$ è dato dai punti $\mathbf{X}$ per i quali esiste un punto $\mathbf{Y}$ che soddisfa le equazioni precedenti. Siamo quindi portati a considerare il sistema di $\binom{h+1}{2}n$ equazioni del tipo precedente e chiedere che abbia soluzioni $\mathbf{Y}$ non banali.

La matrice associata

Questo avviene se la matrice dei coefficienti del sistema M di ordine $\binom{h+1}{2}n \times (k+1)$ non ha rango massimo.

$$M(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{p_1}^1 \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_1}^2 - (\mathbf{p_1}^2 \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_1}^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{p_j}^u \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_j}^v - (\mathbf{p_j}^v \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_j}^u \\ \vdots \\ (\mathbf{p_n}^h \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_n}^{h+1} - (\mathbf{p_n}^{h+1} \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_n}^h \end{pmatrix},$$

Un punto $\mathbf{X}$ della scena appartiene a $\mathcal{X}_h^k$ se e solo se $\mathrm{rk}(M(\mathbf{X})) \leq k$.

$\mathcal{X}_h^k$ è una varietà determinantale lineare.

La matrice associata

Questo avviene se la matrice dei coefficienti del sistema M di ordine $\binom{h+1}{2} n \times (k+1)$ non ha rango massimo.

$$M(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{p_1}^1 \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_1}^2 - (\mathbf{p_1}^2 \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_1}^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{p_j}^u \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_j}^v - (\mathbf{p_j}^v \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_j}^u \\ \vdots \\ (\mathbf{p_n}^h \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_n}^{h+1} - (\mathbf{p_n}^{h+1} \cdot \mathbf{X})\mathbf{q_n}^h \end{pmatrix},$$

Un punto $\mathbf{X}$ della scena appartiene a $\mathcal{X}_h^k$ se e solo se $\mathrm{rk}(M(\mathbf{X})) \leq k$.

$\mathcal{X}_h^k$ è una varietà determinantale lineare.

Risultati

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

Risultati

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

Risultati

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

Risultati

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

Risultati

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

Risultati

In letteratura sono stati studiati i luoghi ciritici per proiezioni

- da $\mathbb{P}^3$ a $\mathbb{P}^2$ (caso classico)
- da $\mathbb{P}^k$ a $\mathbb{P}^2$ (foto di scene dinamiche)

In questo elaborato vengono considerate proiezioni $\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^h$ in particolare sono studiate alcune proiezioni su $\mathbb{P}^3$:

1. $\mathcal{X}_3^4$;
2. $\mathcal{X}_3^5$;
3. $\mathcal{X}_h^k$ quando $k \equiv h - 1$ modulo h.

Studio di $\mathcal{X}_3^4$

Proiezioni da $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, siamo nel caso di 2 viste e M ha dimensioni 12×5. Studio in alcuni casi numerici utilizzando *Macaulay2*.

- la componente di dimensione massima è una superficie di grado 3 di $\mathbb{P}^4$ non singolare ;
- $\mathcal{X}_3^4$ è una varietà determinantale propria, il generico luogo critico ha dimensione 2 e grado 3.

Proiezioni da $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, siamo nel caso di 2 viste e M ha dimensioni 12×5. Studio in alcuni casi numerici utilizzando *Macaulay2*.

- la componente di dimensione massima è una superficie di grado 3 di $\mathbb{P}^4$ non singolare ;
- $\mathcal{X}_3^4$ è una varietà determinantale propria, il generico luogo critico ha dimensione 2 e grado 3.

Studio di $\mathcal{X}_3^4$

Proiezioni da $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, siamo nel caso di 2 viste e M ha dimensioni 12×5. Studio in alcuni casi numerici utilizzando *Macaulay2*.

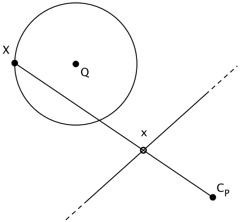
- la componente di dimensione massima è una superficie di grado 3 di $\mathbb{P}^4$ non singolare ;
- $\mathcal{X}_3^4$ è una varietà determinantale propria, il generico luogo critico ha dimensione 2 e grado 3.

Proiezioni $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$

Queste proiezioni si incontrano ad esempio nello studio di una scena non rigida i cui punti sono descritti da:

$$\mathbf{X}_{it} = \mathbf{Q}_i + a_i \cos\phi(t)\mathbf{E}_1 + a_i \sin\phi(t)\mathbf{E}_2.$$

Questa scena può interpretarsi, in una opportuna carta affine, come composta da punti che si muovono di moto circolare.



Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori 4×3 tutti nulli;
  - minori 3×3 contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
    - non più di 4 righe da una vista;
    - minori $4 + 3$ tutti nulli;
    - minori $3 + 3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori $4+3$ tutti nulli;
  - minori $3+3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori $4 + 3$ tutti nulli;
  - minori $3 + 3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori $4 + 3$ tutti nulli;
  - minori $3 + 3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^{4} a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori $4 + 3$ tutti nulli;
  - minori $3 + 3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori $4 + 3$ tutti nulli;
  - minori $3 + 3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Studio di $\mathcal{X}_3^5$

Per proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ il numero minimo di viste è 2.
M è una matrice 12×6 per determinare $\mathcal{X}_3^5$, dobbiamo annullare i minori di ordine 6×6.

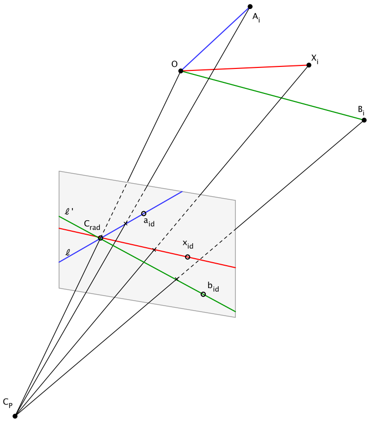
- Studio dei minori di ordine massimo di M:
  - non più di 4 righe da una vista;
  - minori $4 + 3$ tutti nulli;
  - minori $3 + 3$ contribuiscono a determinare l'ideale $I(\mathcal{X}_3^5)$
- $I(\mathcal{X}_3^5) = \langle \sum p^\alpha p^\beta r^\gamma r^\delta f \rangle$ dove $f = \sum_{i,j=1}^4 a_{i,j} p^i r^j$
- $\mathcal{X}_3^5 = V(f)$.
- Singolarità: si dimostra che il generico luogo critico $\mathcal{X}_3^5$ è non singolare.

Proiezioni $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$

Queste proiezioni si incontrano ad esempio nello studio di un video distorto radialmente della scena non rigida:

$$\mathbf{X}_i = t_1 \mathbf{A}_i + t_2 \mathbf{B}_i$$

che rappresenta dei punti che si muovono di moto rettilineo uniforme.



Studio di $\mathcal{X}_h^k$ se $k \equiv h - 1$ modulo h

Generalizzazione dei risultati ottenuti nel caso $\mathcal{X}_3^5$ sfruttando la particolare struttura di M.

- Un minore costruito estraendo $h+1$ righe da una stessa vista è nullo;
- i minori non nulli sono costruiti prendendo h righe da ogni vista;
- $\mathcal{X}_h^k$ è un'ipersuperficie di grado $\omega_{k,h}$;
- si determina il polinomio f che la definisce.

Studio di $\mathcal{X}_h^k$ se $k \equiv h - 1$ modulo h

Generalizzazione dei risultati ottenuti nel caso $\mathcal{X}_3^5$ sfruttando la particolare struttura di M.

- Un minore costruito estraendo $h+1$ righe da una stessa vista è nullo;
- i minori non nulli sono costruiti prendendo h righe da ogni vista;
- $\mathcal{X}_h^k$ è un'ipersuperficie di grado $\omega_{k,h}$;
- si determina il polinomio f che la definisce.

Studio di $\mathcal{X}_h^k$ se $k \equiv h-1$ modulo h

Generalizzazione dei risultati ottenuti nel caso $\mathcal{X}_3^5$ sfruttando la particolare struttura di M.

- Un minore costruito estraendo $h+1$ righe da una stessa vista è nullo;
- i minori non nulli sono costruiti prendendo h righe da ogni vista;
- $\mathcal{X}_h^k$ è un'ipersuperficie di grado $\omega_{k,h}$;
- si determina il polinomio f che la definisce.

Studio di $\mathcal{X}_h^k$ se $k \equiv h - 1$ modulo h

Generalizzazione dei risultati ottenuti nel caso $\mathcal{X}_3^5$ sfruttando la particolare struttura di M.

- Un minore costruito estraendo $h+1$ righe da una stessa vista è nullo;
- i minori non nulli sono costruiti prendendo h righe da ogni vista;
- $\mathcal{X}_h^k$ è un'ipersuperficie di grado $\omega_{k,h}$;
- si determina il polinomio f che la definisce.

Studio di $\mathcal{X}_h^k$ se $k \equiv h - 1$ modulo h

Generalizzazione dei risultati ottenuti nel caso $\mathcal{X}_3^5$ sfruttando la particolare struttura di M.

- Un minore costruito estraendo $h + 1$ righe da una stessa vista è nullo;
- i minori non nulli sono costruiti prendendo h righe da ogni vista;
- $\mathcal{X}_h^k$ è un'ipersuperficie di grado $\omega_{k,h}$;
- si determina il polinomio f che la definisce.

Grazie per l'attenzione!