CAPITOLUL 2

Dreapta în plan

2.1 Breviar teoretic

Fie Δ o dreaptă din planul π, fixat în acest capitol. Un vector nenul $\mathbf{a}$, coliniar cu dreapta Δ, se numeşte *vector director* al dreptei. Orice dreaptă are o infinitate de vectori directori, întrucât orice vector nenul, coliniar cu un vector director, este, el însuşi, un vector director. Un vector director de lungime egală cu unitatea se numeşte *versor director* al dreptei. Orice dreaptă are exact doi versori directori, care sunt vectori opuşi. Astfel, dacă $\mathbf{a}$ este un vector director oarecare al dreptei Δ, cei doi versori directori ai dreptei sunt vectorii

$$\mathbf{v}_{\pm} = \pm\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Considerăm acum o dreaptă Δ din plan, de vector director $\mathbf{a}$, şi M_0 un punct oarecare al dreptei, care are vectorul de poziţie $\mathbf{r}_0$ relativ la un punct O, fixat, din plan. Atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al oricărui punct M de pe dreaptă se poate scrie ca

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{a}, \tag{2.1.1}$$

unde t este un număr real. Ecuaţia (2.1.1) se numeşte *ecuaţia vectorială* a dreptei Δ.

Dacă relativ la un sistem de coordonate afine $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, cu originea în punctul O, punctul M_0 are coordonatele (x_0, y_0), iar vectorul $\mathbf{a}$ are componentele (l, m), atunci ecuaţia vectorială (2.1.1) se poate scrie ca un sistem de două ecuaţii scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1.2}$$

unde (x, y) sunt cordonatele punctului curent M de pe dreaptă în sistemul de coordonate ales. Ecuaţiile (2.1.2) se numesc *ecuaţiile parametrice* ale dreptei Δ.

Dacă l şi m sunt ambele nenule, putem elimina parametrul t între cele două ecuaţii din sistemul (2.1.2) şi obţinem aşa-numita *ecuaţie canonică* a dreptei Δ:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{2.1.3}$$

Ecuaţia (2.1.3) se poate scrie şi dacă unul dintre numerele l şi m se anulează, cu convenţia că dacă într-una dintre fracţii se anulează numitorul, aceasta este o indicaţie a faptului că numărătorul trebuie să fie identic nul. Astfel, de exemplu, ecuaţia

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}$$

trebuie înlocuită cu ecuaţia

$$x-x_0=0.$$

Vom utiliza această convenţie în această culegere.

Fie $M_0(x_0,y_0)$ şi $M_1(x_1,y_1)$ două puncte distincte ale dreptei Δ. Atunci vectorul $\overrightarrow{M_0M_1}$ este un vector nenul coliniar cu dreapta, deci e un vector director al său. Dar componentele vectorului $\overrightarrow{M_0M_1}$ sunt (x_1-x_0,y_1-y_0), prin urmare, ecuaţia canonică a dreptei Δ se poate scrie

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \tag{2.1.4}$$

Aceasta este *ecuaţia dreptei prin două puncte*.

Să considerăm, acum, o dreaptă Δ din plan, care trece prin punctul $M_0(x_0,y_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}(l,m)$ astfel încât $l\neq 0$ (dreapta nu este "verticală"). Atunci ecuaţia canonică a dreptei, (2.1.3), poate fi rescrisă sub forma

$$y-y_0=\frac{m}{l}(x-x_0).$$

Numărul $k\equiv\dfrac{m}{l}$ se numeşte *coeficientul unghiular al dreptei*. În cazul în care baza de coordonate este ortonormată, atunci k este unghiul pe care dreapta îl face cu direcţia pozitivă a axei Ox şi se numeşte *panta dreptei*. În cele ce urmează, baza de coordonate va fi întotdeauna ortonormată. Ecuaţia

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{2.1.5}$$

este ecuaţia dreptei Δ, care *trece prin* M_0 *şi are panta* k.

Este uşor de constatat că ecuaţia (2.1.5) se poate rescrie sub forma

$$y=kx+b, \tag{2.1.6}$$

unde $b=y_0-kx_0$. Această formă a ecuaţiei dreptei se numeşte *ecuaţia explicită*. Un alt nume care se foloseşte este *ecuaţia pantă-tăietură*, deoarece b este ordonata punctului în care dreapta taie axa Oy (*tăietura* dreptei pe axa Oy).

Revenind la ecuaţia vectorială a dreptei (2.1.1), putem rescrie această ecuaţie sub forma

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a}. \tag{*}$$

Fie $\mathbf{n}$ un vector nenul perpendicular pe vectorul director al dreptei (un vector *normal* la dreaptă). Există o infinitate de astfel de vectori, toţi coliniari între ei. Dacă înmulţim scalar ambii membri ai ecuaţiei (*) cu $\mathbf{n}$, obţinem că vectorii de poziţie ai tuturor punctelor de pe dreaptă verifică ecuaţia

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0. \tag{2.1.7}$$

Se vede uşor că şi reciproca este adevărată (orice punct al cărui vector de poziţie verifică ecuaţia (2.1.7) aparţine dreptei).

Dacă folosim componentele vectorilor, ecuaţia (2.1.7) se poate scrie sub forma

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0$$

sau

$$n_1x+n_2y-n_1x_0-n_2y_0=0.$$

Astfel, ecuaţia unei drepte în plan se poate scrie sub forma

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1.8}$$

unde coeficienţii A şi B nu se anulează simultan şi ei sunt componentele unui vector normal la dreaptă. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia generală a dreptei*. Ea poate fi folosită pentru drepte de orice direcţie, inclusiv drepte verticale.

Observaţie. Cum vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este un vector normal la dreapta de ecuaţie (2.1.8), este clar că vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este un vector director al dreptei, întrucât el este un vector (nenul!) perpendicular pe vectorul normal. Astfel, din ecuaţia generală a dreptei putem citi imediat atât un vector normal, cât şi un vector director.

Dacă dreapta nu trece prin origine şi nu este paralelă cu nici una dintre axele de coordonate, atunci ecuaţia generală a dreptei se poate scrie sub forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \tag{2.1.9}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia dreptei prin tăieturi*, deoarece numerele reale a şi b reprezintă abscisa (respectiv ordonata) punctului în care dreapta intersectează axa Ox (respectiv axa Oy), adică sunt ceea ce numim *tăieturile* dreptei pe cele două axe de coordonate.

Uneori este util să scriem ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct dat prin intersecţia a două drepte, fără a determina efectiv coordonatele punctului de intersecţie. Aceasta se face utilizând ecuaţia *fasciculului de drepte* determinat de cele două drepte. Astfel, dacă

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{2.1.10}$$

şi

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2.1.11}$$

sunt două drepte concurente, adică dacă

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.1.12}$$

atunci o dreaptă oarecare care trece prin punctul de intersecţie al celor două drepte are ecuaţia de forma

$$\lambda\,(A_1x + B_1y + C_1) + \mu\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.1.13}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, care nu se pot anula simultan.

Mulţimea tuturor dreptelor din plan ale căror ecuaţii se pot scrie sub forma (2.1.13), pentru anumite valori ale parametrilor, formează *fasciculul de drepte determinat de dreptele* (2.1.10) *şi* (2.1.11).

Observaţie. Uneori ecuaţia fasciculului de drepte se scrie sub forma

$$A_1x + B_1y + C_1 + \alpha\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.1.14}$$

unde α poate lua orice valoare reală, inclusiv 0. Este de remarcat, totuşi, că ecuaţia (2.1.14) nu descrie şi dreapta (2.1.11), care ar corespunde lui $\alpha = \infty$.

Unghiul dintre două drepte este unghiul dintre vectorii lor directori (sau, ceea ce este acelaşi lucru, unghiul dintre vectorii normali). Întrucât schimbând sensul unuia dintre cei doi vectori tangenţi unghiul se înlocuieşte cu suplementul său, înseamnă că avem, de fapt, două unghiuri, unul ascuţit şi unul obtuz.

Dacă cele două drepte sunt date prin ecuaţiile lor generale, (2.1.10) şi (2.1.11), atunci vectorii lor normali sunt $\mathbf{n}_1(A_1, B_1)$ şi $\mathbf{n}_2(A_2, B_2)$, deci cosinusurile unghiurilor celor două unghiuri dintre drepte sunt date de

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.1.15}$$

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile lor explicite, $y = k_1x + b_1$, respectiv $y = k_2x + b_2$, atunci putem scrie tangentele celor două unghiuri dintre drepte:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \tag{2.1.16}$$

Pentru a determina unghiul *ascuţit* dintre două drepte este suficient ca în formulele (2.1.15) şi (2.1.16) să înlocuim membrii drepţi cu valorile absolute ale acestor cantităţi.

Aceste formule permit stabilirea condiţiilor de paralelism şi perpendicularitate a două drepte.

Astfel, dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile lor generale, atunci:

- dreptele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \tag{2.1.17}$$

- dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \tag{2.1.18}$$

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile lor explicite, atunci:

- dreptele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$1 + k_1k_2 = 0; \tag{2.1.19}$$

- dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$k_1 = k_2. \tag{2.1.20}$$

Dacă în ecuaţia generală a dreptei înlocuim vectorul normal cu unul dintre cei doi versori normali, astfel încât termenul liber să devină negativ, obţinem aşa-numita *formă normală (Hesse)* a ecuaţiei dreptei:

$$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - p = 0, \tag{2.1.21}$$

unde p este distanţa de la origine până la dreaptă (lungimea perpendicularei coborâte din origine pe dreaptă), iar α este unghiul pe care îl face dreapta cu Ox. Dacă dreapta trece prin origine, se poate alege oricare dintre cei doi versori normali la dreaptă.

Dacă se pleacă de la ecuaţia generală a dreptei (2.1.8), ecuaţia normală va fi

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \tag{2.1.22}$$

unde semnul de la numitor se alege astfel încât termenul liber să fie negativ. Dacă termenul liber se anulează, putem alege oricare dintre cele două semne.

Distanţa de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ până la o dreaptă dată prin ecuaţia generală (2.1.8) este

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.1.23}$$