CAPITOLUL 1

Vectori şi puncte

1.1 Breviar teoretic

1.1.1 Spaţiul vectorial al vectorilor liberi

Definiţia 1.1. Un *segment orientat* sau un *vector legat* $\overline{AB}$ este o pereche ordonată de puncte (A, B). Punctul A se numeşte *originea* sau *punctul de aplicare* al vectorului, în timp ce punctul B se numeşte *capătul* sau *extremitatea* vectorului. Distanţa dintre punctele A şi B se numeşte *modulul* vectorului $\overline{AB}$ şi se notează cu $\|\overline{AB}\|$. Alternativ, vectorul legat $\overline{AB}$ poate fi gândit ca fiind segmentul $[AB]$ cu o orientare aleasă pe el. Un vector legat se reprezintă cu ajutorul unei săgeţi care pleacă din punctul A şi are vârful în punctul B. În cazul în care punctele A şi B coincid, vectorul $\overline{AB} \equiv \overline{AA}$ se numeşte *vector nul* cu originea în A şi se mai notează cu $\overline{0}_A$ sau, dacă punctul A este subînţeles, pur şi simplu cu $\overline{0}$.

Definiţia 1.2. Vom spune că doi vectori legaţi $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au *aceeaşi direcţie* dacă dreptele suport ale celor două segmente orientate, AB şi CD sunt paralele (sau coincid).

Dacă vectorii legaţi $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi direcţie, iar dreptele lor suport nu coincid, vom spune că ei au şi *acelaşi sens* dacă dreptele AC şi BD se intersectează în interiorul trapezului $ABDC$. În caz contrar, vom spune că cei doi vectori au sensuri opuse.

Definiţia 1.3. Spunem că doi vectori legaţi $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt *echipolenţi* şi scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ dacă ei au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea tuturor vectorilor legaţi.

Definiţia 1.4. Se numeşte *vector liber* o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă. Vectorul liber determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$. Astfel,

$$\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} \,|\, \overline{CD} - \text{segment orientat a.î. } \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$$

Dacă nu vrem să scoatem în evidenţă un reprezentant, vectorii liberi se notează cu litere mici, de regulă de la începutul alfabetului: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$.

Adunarea vectorilor liberi

Fie $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ doi vectori liberi oarecare. Alegem un punct oarecare O din spaţiu şi construim un punct A astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiţia 1.5 (regula triunghiului)**.** Se numeşte *sumă* a vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ şi se notează cu $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, vectorul $\overrightarrow{OB}$.

Mulţimea $\mathcal{V}$ a vectorilor liberi din spaţiu este un grup abelian în raport cu adunarea vectorilor. Elementul neutru este vectorul nul (clasa vectorilor legaţi de modul zero), iar opusul unui vector liber $[\overline{AB}]$ este vectorul liber $[\overline{BA}]$.

Înmulţirea cu scalari a vectorilor

Definiţia 1.6. Dacă $\mathbf{a}$ un vector liber şi $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real, definim *produsul vectorului* $\mathbf{a}$ *cu scalarul* λ ca fiind un vector, notat cu $\lambda\mathbf{a}$, caracterizat în modul următor:

(i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de

$$\|\lambda\mathbf{a}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$

produsul din membrul drept fiind un prosus de numere reale;

(ii) direcţia lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcţia lui $\mathbf{a}$;

(iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui $\mathbf{a}$ dacă $\lambda > 0$ sau cu sensul opus sensului lui $\mathbf{a}$ dacă $\lambda < 0$.

În raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari, mulţimea vectorilor liberi este un spaţiu vectorial real. Acest spaţiu are dimensiunea 3, dacă segmentele orientate de la care plecăm sunt din spaţiu, sau dimensiunea 2 dacă lucrăm cu vectori situaţi într-un plan. Toate noţiunile legate de spaţii vectoriale se aplică acestui spaţiu (combinaţii liniare, dependenţă liniară, baze, etc.)

1.1.2 Sisteme de coordonate afine

Definiţia 1.7. Considerăm o bază orientată (ordinea vectorilor este fixată!) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a spaţiului vectorilor liberi şi O un punct din spaţiu. Sistemul $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se numeşte *reper* sau *sistem de coordonate afine* în $\mathbb{R}^3$. Coordonatele unui punct M sunt, prin definiţie, componentele vectorului $\overrightarrow{OM}$ (*vectorul de poziţie al lui M faţă de origine*), în raport cu baza considerată. Vom scrie $M = M(x_1, x_2, x_3)$ sau $M = M(x, y, z)$.

Analog se definesc coordonatele în plan, dar baza are doar doi vectori.

Definiţia 1.8. O bază orientată în plan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ se numeşte *directă* sau *dreaptă* dacă atunci când rotim primul vector pentru a-l suprapune peste al doilea, pe drumul cel mai scurt, rotaţia se face în sens trigonometric pozitiv (invers mersului acelor de ceasornic). Altfel baza se numeşte *inversă* sau stângă.

O bază orientată în spaţiu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se numeşte *directă* sau *dreaptă* dacă, văzută din extremitatea vectorului al treilea, rotaţia primului vector pentru a-l suprapune peste al doilea, pe drumul cel mai scurt, se face în sens trigonometric pozitiv (invers mersului acelor de ceasornic). Altfel baza se numeşte *inversă* sau stângă.

Un sistem de coordonate este drept sau stâng, după cum este baza orientată care îl defineşte.

Definiţia 1.9. Un sistem de corodonate se numeşte *ortogonal* dacă vectorii bazei sunt perpendiculari doi câte doi. Dacă, în pus, vectorii bazei sunt de lungime 1, sistemul (sau reperul) se numeşte *ortonormat*.

În această culegere, dacă nu se precizează altfel, toate bazele (în plan şi spaţiu) sunt ortonormate şi directe. O astfel de bază, în plan, se notează cu $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, iar în spaţiu, cu $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Dreptele care trec prin origine şi sunt paralele cu vectorii de coordonate se numesc *axe de coordonate*: Ox – paralelă cu $\mathbf{i}$, Oy – paralelă cu $\mathbf{j}$, Oz – paralelă cu $\mathbf{k}$.

1.1.3 Produsul scalar a doi vectori liberi

Dacă $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt doi vectori liberi, *produsul scalar* al celor doi vectori este un număr real, notat cu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, dat de

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\alpha, \tag{1.1.1}$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

Proprietăţi

(a) Pentru orice vector liber $\mathbf{a}$ avem $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2}$.

(b) Produsul scalar este comutativ: pentru orice doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ avem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

(c) Produsul scalar liniar în fiecare dintre cei doi factori. Dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori liberi, iar λ şi μ sunt două numere reale, atunci

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \mu \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

(d) Doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar se anulează (cu convenţia că vectorul nul se consideră perpendicular pe orice vector).

(e) Cosinusul unghiului format de doi vectori liberi $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este dat de

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}.$$

Expresia produsului scalar în coordonate

Dacă am ales un sistem de coordonate ortonormat în raport cu care vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt daţi prin $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, respectiv $\mathbf{b} = \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, atunci

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Drept urmare:

- Lungimea unui vector $\mathbf{a}$ este dată de

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

- Cosinusul unghiului format de doi vectori liberi $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este dat de

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

- Doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

1.1.4 Produsul vectorial al doi vectori

Produsul vectorial al doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este un *vector*, notat $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, definit în modul următor:

1. Dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt coliniari, atunci $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.
2. Dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ nu sunt coliniari, atunci produsul vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este un vector astfel încât:
   (a) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\alpha$, unde α este unghiul dintre cei doi vectori.
   (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este perpendicular atât pe $\mathbf{a}$, cât şi pe $\mathbf{b}$.
   (c) Sensul vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se alege astfel încât tripletul ordonat de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ să fie orientat direct.

Proprietăţi

Printre proprietăţile produsului vectorial menţionăm:

- Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este egal cu zero.
- Produsul vectorial este *anticomutativ*: dacă $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, atunci
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$
- Produsul vectorial este liniar în fiecare factor: dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori, iar λ şi μ sunt două numere reale, atunci
$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mu (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$
- Aria paralelogramului construit pe doi vectori este egală cu norma produsului vectorial al celor doi vectori, iar aria triunghiului construit pe cei doi vectori este egală cu jumătate din această normă.
- Deşi are sens să vorbim de produse vectoriale de trei factori (spre deosebire de cazul produsului scalar), în general produsul vectorial *nu este asociativ*: dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori, atunci
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Expresia în coordonate a produsului vectorial

Dacă avem doi vectori $\mathbf{a}(a_1, b_1, c_1)$ şi $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, daţi prin intermediul componentelor lor relativ la o bază ortonormată, atunci produsul lor vectorial se poate scrie

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}. \tag{1.1.2}$$

1.1.5 Produsul mixt al trei vectori

Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori. Se numeşte *produs mixt* al acestor trei vectori scalarul

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{1.1.3}$$

Proprietăţi

1. Modulul produsului mixt al trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori:
$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$
2. Volumul tetraedrului construit pe trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ este dat de
$$V = \frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$
3. Produsul mixt este liniar în fiecare argument (adică este triliniar).
4. Trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt se anulează.
5. Trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ formează un reper direct dacă şi numai dacă
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0.$$

Expresia produsului mixt în coordonate

Dacă vectorii $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3), \mathbf{b}(b_1, b_2, b_)$ şi $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ sunt daţi prin intermediul componentelor lor faţă de o bază ortonormată, atunci

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.1.4}$$

1.1.6 Alte produse de vectori

Dublul produs vectorial

Considerăm trei vectori oarecare $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$. Se numeşte *dublu produs vectorial* al celor trei vectori (în această ordine!) unul dintre vectorii $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Pentru ei avem expresiile:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a} \tag{1.1.5}$$

şi

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}. \tag{1.1.6}$$

Produse de patru vectori

Există două produse de patru vectori care apar în aplicaţii. Considerăm patru vectori oarecare $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$.

1. Se numeşte *produs vectorial al celor patru vectori* triplul produs vectorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. El se calculează cu formula

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\, \mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\, \mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\, \mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\, \mathbf{a}. \tag{1.1.7}$$

2. Se numeşte *produs scalar al celor patru vectori* scalarul $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. El se calculează cu formula

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) & (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) & (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \end{vmatrix}. \tag{1.1.8}$$