SEMINARUL 2

Produsul scalar al vectorilor

Problema 2.1. Determinaţi lungimile diagonalelor unui paralelogram construit pe vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, unde $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sunt vectori de lungime 1 iar $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 60°$.

Problema 2.2. Să se găsească unghiul dintre vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, unde $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sunt vectori unitari, iar $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 120°$.

Problema 2.3. Lungimea ipotenuzei AB a unui triunghi dreptunghic ABC este egală cu c. Calculaţi suma

$$S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Problema 2.4. Determinaţi unghiul format de diagonalele paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{a}(2, 1, 0)$ şi $\mathbf{b}(0, -2, 1)$.

Problema 2.5. Determinaţi numărul real λ astfel încât cosinusul unghiului format de vectorii

$$\mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$$

şi

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

să fie egal cu $\dfrac{5}{12}$.

Problema 2.6. Un vector $\mathbf{p}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{b} = 18\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ şi face un unghi obtuz cu axa Oy. Determinaţi componentele lui $\mathbf{p}$, ştiind că $\|\mathbf{p}\| = 14$.

Problema 2.7. Un vector $\mathbf{p}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}(4, -2, -3)$ şi $\mathbf{b}(0, 1, 3)$ şi face un unghi ascuţit cu axa Ox. Determinaţi componentele lui $\mathbf{p}$ dacă $\|\mathbf{p}\| = 26$.

Problema 2.8. Se dau trei vectori $\mathbf{a}(4, 1, 5)$, $\mathbf{b}(0, 5, 2)$ şi $\mathbf{c}(-6, 2, 3)$. Determinaţi un vector $\mathbf{x}$ astfel încât $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 18$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 1$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 1$.

Problema 2.9. Într-un triunghi echilateral ABC, de latură egală cu unitatea, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$. Calculaţi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}.$$

Problema 2.10. Se dă în spaţiu un patrulater $ABCD$, astfel încât $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, -1, -2)$ şi $\overrightarrow{CD} = (-1, -2, 2)$. Demonstraţi că patrulaterul este un pătrat.

Problema 2.11. Lungimile vectorilor nenuli $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt egale. Determinaţi unghiul φ dintre ei, dacă se şie că vectorii $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ şi $\mathbf{q} = 5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ sunt perpendiculari.

Problema 2.12. Determinaţi unghiul, în radiani, între vectorii $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ în următoarele cazuri:

(a) $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (-2, 10, 2)$;

(b) $\mathbf{u} = (3, 3, 0), \mathbf{v} = (2, 1, -2)$;

(c) $\mathbf{u} = (-1, 1, 1), \mathbf{v} = (1, 1, 1)$;

(d) $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$;

(e) $\mathbf{u} = (300, 300, 0), \mathbf{v} = (-2000, -1000, 2000)$.

Problema 2.13. Determinaţi vectorul $\mathbf{u}$ astfel încât $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$, măsura în grade a unghiului dintre $\mathbf{u}$ şi $(1, -1, 0)$ să fie de $45°$, iar $\mathbf{u}$ să fie perpendicular pe vectorul $(1, 1, 0)$.

Problema 2.14. Calculaţi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$, ştiind că $ABCD$ este un tetraedru regulat, de muchie egală cu 1.

Problema 2.15. Calculaţi $\|2\mathbf{u} + 4\mathbf{v}\|^2$, ştiind că $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, iar măsura în radiani a unghiului dintre $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ este egală cu $\frac{2\pi}{3}$.

Problema 2.16. Fie A, B, C trei puncte din $\mathbb{R}^3$ şi fie $\mathbf{c} = \overrightarrow{BA}$ şi $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$. Demonstraţi că vectorul $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} + \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ este paralel cu bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$. Interpretaţi rezultatul, legându-l de o proprietate cunoscută a rombului.

Problema 2.17. Determinaţi vectorul $\mathbf{u}$ astfel încât $\|\mathbf{u}\| = 3\sqrt{3}$, iar $\mathbf{u}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$ şi $\mathbf{w} = (2, -4, 6)$. Dintre vectorii $\mathbf{u}$ care verifică aceste condiţii, care formează un unghi ascuţit cu vectorul $(1, 0, 0)$?

Problema 2.18. Determinaţi vectorul $\mathbf{u}$, perpendicular pe vectorii $\mathbf{v} = (4, -1, 5)$ şi $\mathbf{w} = (1, -2, 3)$ şi care satisface $\mathbf{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.