CAPITOLUL 3

Dreapta şi planul în spaţiu

3.1 Breviar teoretic

3.1.1 Planul în spaţiu

Fixăm un sistem de coordonate afin în spaţiu, cu origine în punctul O.

Fie Π un plan în spaţiu şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – un punct din plan. Dacă $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ sunt doi vectori necoliniari paraleli cu planul Π, atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct oarecare $M(x, y, z)$ din plan se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2, \tag{3.1.1}$$

unde $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, iar u şi v sunt numere reale. Ecuaţia (3.1.1) se numeşte *ecuaţia vectorială a planului* Π.

Dacă proiectăm ecuaţia (3.1.1) pe axele de coordonate, obţinem *ecuaţiile parametrice ale planului* Π:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 \cdot u + l_2 \cdot v, \\ y = y_0 + m_1 \cdot u + m_2 \cdot v, \\ z = z_0 + n_1 \cdot u + n_2 \cdot v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}. \tag{3.1.2}$$

Ecuaţia vectorială (3.1.1) exprimă, de fapt, condiţia ca vectorii $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ să fie liniar independenţi, deci, în acest caz, coplanari. Dar condiţia ca cei trei vectori să fie coplanari, aşa cum ştim deja, este echivalentă cu condiţia ca produsul lor mixt să se anuleze:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0. \tag{3.1.3}$$

Vom numi această ecuaţie *ecuaţia vectorială neparametrică a planului care trece printr-un punct dat şi este paralel cu doi vectori (necoliniari) daţi*.

Ecuaţia (3.1.3) se poate rescrie, folosind expresia în coordonate a produsului mixt al trei vectori şi obţinem *ecuaţia scalară a planului care trece printr-un punct dat şi este paralel cu doi vectori (necoliniari) daţi*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.4}$$

Trei puncte necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ determină un plan Π. Doi vectori necoliniari care sunt paraleli cu acest plan sunt, de exemplu, vectorii

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad \text{şi} \quad \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Astfel, planul Π, determinat de cele *trei puncte necoliniare* este planul care trece prin M_1 şi este paralel cu $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$, prin urmare, ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.5}$$

Ecuaţia (3.1.5) se mai poate scrie şi în forma mai simetrică şi mai uşor de memorat, dar mai puţin practică

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.6}$$

Forma cea mai utilizată de reprezentare a unui plan este *ecuaţia generală*,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1.7}$$

unde A, B, C, D sunt numere reale, astfel încât A, B, C să nu se anuleze simultan.

Vectorul $\mathbf{n}(A, B, C)$ este un vector *normal* la plan.

Dacă toţi cei patru coeficienţi din ecuaţia generală a planului sunt nenuli (ceea ce este echivalent cu faptul că planul nu e paralel cu nici o axă de coordonate şi nu trece prin origine), atunci ecuaţia se poate rescrie sub forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \tag{3.1.8}$$

Ecuaţia (3.1.8) se numeşte *ecuaţia planului prin tăieturi*, deoarece numerele a, b, respectiv c sunt abscisa, ordonata, respectiv cota, punctelor în care planul intersectează axa Ox, axa Oy, respectiv axa Oz, adică sunt *tăieturile* planului pe cele trei axe de coordonate.

O formă particulară a ecuaţiei generale a planului se obţine dacă înlocuim vectorul normal la plan cu unul dintre cei doi versori ai săi. Atunci putem alege unul dintre cei doi versori normali astfel încât ecuaţia generală a planului să devină

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0, \tag{3.1.9}$$

unde p este distanţa de la origine până la plan (lungimea perpendicularei coborâte din origine pe plan), iar α, β şi γ sunt unghiurile făcute de versorul normal cu axele Ox, Oy, respectiv Oz.

Ecuaţia (3.1.9) se numeşte *forma normală* sau *forma Hesse* a ecuaţiei generale a planului. Dacă planul trece prin origine, atunci p este egal cu zero şi se poate folosi oricare dintre cei doi versori.

Dacă planul este dat prin ecuaţia generală (3.1.7), atunci ecuaţia sa normală se poate scrie sub forma

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \tag{3.1.10}$$

unde semnul de la numitor se alege astfel încât termenul liber,

$$\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

să fie negativ.

Un plan separă planul în două semispaţii deschise:

semispaţiul negativ (cel care conţine originea) şi

semispaţiul pozitiv (cel opus semispaţiului negativ).

Dacă planul trece prin origine, atunci se alege un versor normal oarecare. Semispaţiul pozitiv va fi acela care conţine extremitatea versorului normal, atunci când vectorul este ataşat unui punct din plan.

Se numeşte *abatere* a unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ relativ la un plan Π dat prin ecuaţia normal (3.1.9) numărul real

$$\delta(M_0, \Pi) = \cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0 - p. \tag{3.1.11}$$

Dacă planul este dat printr-o ecuaţie generală arbitrară, de forma (3.1.7), atunci abaterea punctului faţă de plan va fi dată de relaţia

$$\delta(M_0, \Pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + C_0 z + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{3.1.12}$$

cu aceeaşi regulă de alegere a semnului de la radical ca în cazul ecuaţiei normale a planului.

Abaterea unui punct de la un plan este lungimea cu semn a perpendicularei coborâte din punct pe plan, lungimea fiind considerată negativă atunci când punctul de află în semispaţiul negativ definit de plan şi pozitivă atunci când acesta se găseşte în semispaţiul pozitiv.

Distanţa $d(M_0, \Pi)$ de la un punct M_0 la un plan Π este lungimea perpendicularei coborâte din punct pe plan, adică avem

$$d(M_0, \Pi) = |\delta(M_0, \Pi)|. \tag{3.1.13}$$

Astfel, dacă planul este dat prin ecuaţia normală, atunci

$$d(M_0, \Pi) = |\cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0 - p|\,, \tag{3.1.14}$$

în timp ce dacă planul este dat printr-o ecuaţie generală oarecare, atunci

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_0 z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.1.15}$$

Unghiul a două plane este unghiul plan asociat unghiului diedru format de plane. El este egal cu unghiul format de vectorii normali la cele două plane. Ca şi în cazul dreptei în plan, există, de fapt, patru unghiuri între cele două plane, două câte două egale (opuse la vârf). De asemenea, ca şi în cazul dreptei în plan, formula pe care o vom da ne dă cosinusul unuia dintre aceste unghiuri.

Dacă cele două plane, fie ele Π_1 şi Π_2 sunt date prin ecuaţiile lor generale

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3.1.16}$$

respectiv

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{3.1.17}$$

atunci vectorii lor normali sunt $\mathbf{n}_1\,(A_1, B_1, C_1)$, respectiv $\mathbf{n}_2\,(A_2, B_2, C_2)$, atunci cosinusul unghiului α format de cele două plane (de fapt, de cei doi vectori normali) este dat de

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.1.18}$$

Unghiul α este ascuţit dacă avem $\cos\alpha > 0$ şi obtuz dacă $\cos\alpha < 0$. Dacă vrem să obţinem unghiul ascuţit, atunci folosim formula

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.1.19}$$

Planele Π_1 şi Π_2 sunt *perpendiculare* dacă vectorii lor normali sunt perpendiculari, deci condiţia de perpendicularitate este

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{3.1.20}$$

în timp ce ele sunt *paralele* atunci când vectorii normali sunt paraleli, deci condiţia de paralelism se scrie

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.1.21}$$

Planele bisectoare a două plane concurente, date prin ecuaţiile lor generale (3.1.16) şi (3.1.17) sunt planele care formează unghiuri egale cu cele două plane. Ele reprezintă, pe de altă parte, *locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două plane*, prin urmare vor fi date de ecuaţia

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{3.1.22}$$

sau

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \tag{3.1.23}$$

unde fiecare alegere de semn corespunde câte unui plan bisector.

3.1.2 Dreapta în spaţiu

Ca şi în cazul dreptei în plan, vom numi *vector director* al unei drepte Δ orice vector nenul $\mathbf{a}$ care este coliniar cu dreapta. Şi de data aceasta avem o infinitate de vectori directori, oricare doi dintre ei fiind coliniari între ei.

Dacă alegem o origine O în spaţiu şi un punct M_0 pe dreapta Δ, atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct oarecare M de pe dreaptă se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{a}, \tag{3.1.24}$$

unde t este un număr real, $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, iar $\mathbf{a}$ este vectorul director al dreptei. Ecuaţia (3.1.24) se numeşte *ecuaţia vectorială a dreptei care trece prin punctul M_0 şi are vectorul director* $\mathbf{a}$.

Dacă alegem un sistem de coordonate, cu origine în O, relativ la care punctul M are coordonatele (x, y, z), punctul M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0), iar vectorul $\mathbf{a}$ are componentele (l, m, n), atunci ecuaţia (3.1.24) se poate înlocui cu sistemul de ecuaţii scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \tag{3.1.25}$$

Ecuaţiile (3.1.25) se numesc *ecuaţiile parametrice ale dreptei Δ, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralelă cu vectorul* $\mathbf{a}$ *(sau are vectorul director* $\mathbf{a}$*)*.

Dacă eliminăm parametrul t din ecuaţiile parametrice (3.1.25) obţinem *ecuaţiile canonice ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care are vectorul director* $\mathbf{a}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{3.1.26}$$

Şi aici, ca şi în cazul ecuaţiei canonice a dreptei în plan, folosim convenţia că dacă unul dintre numitori se anulează, atunci şi numărătorul corespunzător trebuie să fie luat egal cu zero. Cu alte cuvinte, de exemplu, sistemul de ecuaţii

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}$$

trebuie înlocuit cu sistemul

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}, \quad z-z_0=0,$$

în timp ce sistemul

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{0}$$

se înlocuieşte cu sistemul

$$y-y_0=0, \quad z-z_0=0.$$

Putem scrie cu uşurinţă ecuaţiile dreptei care trece prin două puncte distincte din spaţiu, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Un vector director al acestei drepte este

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0),$$

deci ecuaţiile canonice ale acestei drepte sunt

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{3.1.27}$$

În sfârşit, o altă modalitate de a reprezenta o dreaptă este ca intersecţie de două plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{3.1.28}$$

unde rangul matricei

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

trebuie să fie egal cu 2, condiţie care este echivalentă cu cerinţa ca vectorii normali la cele două plane să nu fie paraleli, deci planele să se intersecteze.

Dacă o dreaptă Δ este dată prin intermediul unei intersecţii de plane (3.1.28), atunci un vector director al dreptei se poate obţine calculând produsul vectorial al celor doi vectori normali la plane:

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1(A_1, B_1, C_1) \times \mathbf{n}_2(A_2, B_2, C_2),$$

adică

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Distanţa de la un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la o dreaptă Δ, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}$, este dată de formula

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}, \tag{3.1.29}$$

unde $\mathbf{r}_0$, respectiv $\mathbf{r}_1$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M_0, respectiv M_1.

Unghiul a două drepte Δ_1 şi Δ_2 este unghiul format de vectorii lor directori $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$. Ca şi în cazul a două drepte în plan, avem un unghi ascuţit şi unul obtuz. Cosinusurile celor două unghiuri sunt date, prin urmare, de formula

$$\cos\alpha = \pm\frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{3.1.30}$$

Desigur, cosinusul pozitiv corespunde unghiului ascuţit, în timp ce cosinusul negativ corespunde unghiului obtuz.

Dacă vrem să determinăm cosinusul unghiului ascuţit, folosim formula

$$\cos\alpha = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{3.1.31}$$

Cele două drepte sunt *perpendiculare* dacă şi numai dacă vectorii lor sunt perpendiculari, deci condiţia de perpendicularitate este

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \tag{3.1.32}$$

Dreptele sunt, în schimb, *paralele* dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt coliniari, adică

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{3.1.33}$$

cu aceeaşi convenţie asupra componentelor nule ca şi în cazul ecuaţiilor canonice ale dreptei.

3.1.3 Dreapta şi planul

Poziţia relativă a două plane

Două plane, Π_1 şi Π_2, date prin ecuaţiile lor generale

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

şi

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

- se taie după o dreaptă dacă
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2;$$
- sunt paralele dacă
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$
- coincid dacă
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Poziţia relativă a trei plane

Considerăm trei plane, date prin ecuaţiile lor generale:

$$\begin{cases} (\Pi_1)\; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ (\Pi_2)\; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ (\Pi_3)\; A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \tag{3.1.34}$$

Fie Δ determinantul sistemului (3.1.34):

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

m – matricea sistemului,

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

şi M – matricea sa extinsă,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Atunci:

(a) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci planele se intersectează într-un punct.

(b) Dacă $\Delta = 0$, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, iar vectorii normali la cele trei plane sunt, doi câte doi, necoliniari, atunci planele se intersectează, două câte două, după câte o dreaptă, iar cele trei drepte care se obţin sunt paralele.

(c) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, dar doi dintre cei trei vectori normali la plane sunt coliniari[1], atunci dintre cele trei plane (cele cu vectorii normali coliniari) sunt paralele între ele, iar cel de-al treilea le intersectează pe celelalte două după câte o dreaptă.

(d) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar vectorii normali sunt doi câte doi necoliniari, atunci planele sunt două câte două distincte şi trec prin aceeaşi dreaptă.

(e) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar doi dintre cei trei vectori normali sunt coliniari, atunci două dintre plane coincid (cele care au vectorii normali coliniari), iar cel de-al treilea le intersectează după o dreaptă.

(f) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 3$, atunci planele sunt distincte şi paralele între ele.

(g) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 2$, atunci două dintre plane coincid, iar cel de-al treilea este paralel cu ele.

(h) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 1$, atunci toate cele trei plane coincid.

Fascicule de plane şi snopuri de plane

Dacă se dau două plane distincte concurente

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3.1.35}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{3.1.36}$$

se numeşte *fascicul de plane* determinat de cele două plane mulţimea tururor planelor din spaţiu care trec prin dreapta de intersecţie a celor două plane. Ecuaţia unui plan oarecare din fascicul se poate scrie sub forma

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{3.1.37}$$

unde α şi β sunt două numere reale care nu se pot anula simultan. Dreapta de intersecţie a planelor date se numeşte *axa fasciculului*.

Fie

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \tag{3.1.38}$$

ecuaţiile a trei plane care trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$ astfel încât să fie îndeplinită condiţia

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.1.39}$$

[1] Nu pot fi toţi trei coliniari, deoarece $\operatorname{rg} m = 2$!

Se numeşte *snop de plane* sau *stea de plane* cu centrul în S_0 mulţimea tuturor planelor care trec prin acest punct. Ecuaţia unui plan oarecare al snopului se poate scrie sub forma

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0, \quad (3.1.40)$$

unde α, β şi γ sunt trei numere reale care nu se anulează simultan.

Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan

Dacă se dă un plan Π

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (3.1.41)$$

şi o dreaptă Δ, dată prin ecuaţiile sale parametrice

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad (3.1.42)$$

atunci:

- dacă
$$Al+Bm+Cn \neq 0$$
(adică dacă vectorul director al dreptei nu e perpendicular pe vectorul normal la plan), atunci dreapta şi planul au un punct comun (dreapta *înţeapă* planul);

- dacă
$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$$
(adică dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe vectorul normal la plan şi există un punct de pe dreaptă care nu aparţine planului) atunci dreapta este paralelă cu planul.

- dacă
$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$
(adică dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe vectorul normal la plan şi există un punct de pe dreaptă care aparţine planului) atunci dreapta este conţinută în planul.

Ecuaţia planului determinat de două drepte concurente

Dreptele concurente

$$\Delta_1): \ \frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1} \quad (3.1.43)$$

şi

$$(\Delta_2): \ \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2}, \quad (3.1.44)$$

care trec prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, determină un plan de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.45)$$

Ecuaţia planului determinat de o dreaptă şi un punct

Dreapta

$$(\Delta) : \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \tag{3.1.46}$$

şi punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$, care nu aparţine dreptei, determină un plan de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.47}$$

Ecuaţia planului determinat de două drepte paralele

Dreptele paralele (şi distincte!)

$$(\Delta_1) : \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \tag{3.1.48}$$

şi

$$(\Delta_2) : \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}, \tag{3.1.49}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$, determină un plan, de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.50}$$

Proiecţia unui punct pe un plan

Proiecţia unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe un plan de ecuaţie

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

este piciorul perpendicularei coborâte din punctul dat pe plan. Coordonatele sale se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} = \dfrac{z-z_0}{C}. \end{cases}$$

Proiecţia unui punct pe o dreaptă în spaţiu

Proiecţia unui punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ pe o o dreaptă

$$\Delta : \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

este punctul însuşi, dacă el aparţine dreptei, sau piciorul perpendicularei coborâte din punct pe dreaptă, dacă punctul nu aparţine dreptei. În cel de-al doilea caz, coordonatele proiecţiei se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}, \\ (x-x_1) \cdot l + (y-y_1) \cdot m + (z-z_1) \cdot n = 0. \end{cases} \tag{3.1.51}$$

Proiecţia unei drepte pe un plan

Proiecţia dreptei

$$(\Delta):\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{3.1.52}$$

pe planul

$$(\Pi):\ Ax+By+Cz+D=0 \tag{3.1.53}$$

este punctul lor de intersecţie, dacă dreapta este perpendiculară pe plan. Dacă dreapta Δ nu este perpendiculară pe planul Π, atunci proiecţia sa pe plan este intersecţia dintre planul Π şi planul perpendicular pe Π, care trece prin dreapta Δ. Ecuaţiile proiecţiei sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{3.1.54}$$

Poziţia reciprocă a două drepte în spaţiu

Considerăm două drepte în spaţiu:

$$(\Delta_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{3.1.55}$$

şi

$$(\Delta_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \tag{3.1.56}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1,y_1,n_1)$, respectiv $M_2(x_2,y_2,z_2)$ şi au vectorii directori $\mathbf{a}_1(l_1,m_1,n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2,m_2,n_2)$.

Atunci:

- dreptele Δ_1 şi Δ_2 sunt paralele şi distincte dacă vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt coliniari, dar vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ sunt necoliniari;

- dreptele Δ_1 şi Δ_2 coincid dacă vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ sunt coliniari.

Presupunem acum că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari (adică dreptele corespunzătoare nu sunt paralele). Atunci

- dreptele sunt concurente dacă vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ sunt coplanari, adică dacă

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0; \tag{3.1.57}$$

- dreptele sunt necoplanare (sau strâmbe) dacă cei trei vectori sunt necoplanari, adică dacă

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{3.1.58}$$

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

$$(\Delta_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{3.1.59}$$

şi

$$(\Delta_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \tag{3.1.60}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1, y_1, n_1)$, respectiv $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi au vectorii directori $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$, astfel încât

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

este singura dreaptă care intersectează ambele drepte şi este perpendiculară pe ele. Ecuaţiile perpendicularei comune se obţin intersectând un plan care trece prin prima dreaptă şi prin perpendiculara comună cu un plan care trece prin cea de-a doua dreaptă şi prin perpendiculaera comună. Astfel, ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \end{cases} \tag{3.1.61}$$

unde $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sunt componentele vectorului director al perpendicularei comune, $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$.

Distanţa dintre două drepte strâmbe (lungimea perpendicularei comune)

Distanţa dintre două drepte strâmbe Δ_1 şi Δ_2 este distanţa dintre punctele în care perpendiculara comună a celor două drepte intersectează dreptele. Ea este, astfel, *lungimea segmentului de pe perpendiculara comună, cuprins între punctele de intersecţie cu cele două drepte* sau, cu un uşor abuz de limbaj, *lungimea perpendicularei comune* a dreptelor date.

Această distanţă se calculează ca distanţa dintre un punct oarecare de pe prima dreaptă şi planul care trece prin cea de-a doua dreaptă şi este paralel cu prima dreaptă. Astfel, avem

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}} \right|. \tag{3.1.62}$$

Notaţiile sunt aceleaşi ca în paragraful precedent.

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci unghiul dintre dreaptă şi plan este egal cu $\frac{\pi}{2}$. În caz contrar, *unghiul dintre dreaptă şi plan este unghiul dintre dreaptă şi proiecţia sa pe plan, adică unghiul dintre vectorul director al dreptei şi vectorul director al proiecţiei sale pe plan.*

Dacă dreapta are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$, iar planul are ecuaţia generală

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

atunci unghiul dintre dreaptă şi plan este unghiul φ dat de

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{3.1.63}$$

Dreapta este *paralelă* cu planul dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe vectorul normal la plan, adică dacă

$$Al + Bm + Cn = 0, \tag{3.1.64}$$

iar ea este *perpendiculară* pe plan dacă cei doi vectori menţionaţi sunt paraleli, adică dacă

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{3.1.65}$$