

---

Produsul vectorial și produsul mixt

---

**Problema 3.1.** Determinați  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  dacă  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  și  $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ .

**Problema 3.2.** Se dau vectorii  $\mathbf{a}(3, -1, -2)$  și  $\mathbf{b}(1, 2, -1)$ . Să se calculeze:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}, (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

**Problema 3.3.** Determinați distanțele dintre laturile paralele ale paralelogramului construit pe vectorii  $\overrightarrow{AB}(6, 0, 2)$  și  $\overrightarrow{AC}(1.5, 2, 1)$ .

**Problema 3.4.** Determinați vectorul  $\mathbf{p}$ , știind că el este perpendicular pe vectorii  $\mathbf{a}(2, 3, -1)$  și  $\mathbf{b}(1, -1, 3)$  și verifică ecuația

$$\mathbf{p} \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 51.$$

**Problema 3.5.** Se dau punctele  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(3, 0, -3)$  și  $C(5, 2, 6)$ . Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ .

**Problema 3.6.** Se dau punctele  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(5, -6, 2)$  și  $C(1, 3, -1)$ . Determinați lungimea înălțimii triunghiului  $ABC$ , coborâte din vârful  $B$  pe latura  $AC$  a triunghiului.

**Problema 3.7.** Se dau vectorii  $\mathbf{a}(2, -3, 1)$ ,  $\mathbf{b}(-3, 1, 2)$  și  $\mathbf{c}(1, 2, 3)$ . Să se calculeze  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  și  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .

**Problema 3.8.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Demonstrați că dacă diagonala  $AC$  înjumătățește diagonala  $BD$ , atunci triunghiurile  $ACB$  și  $ACD$  au arii egale.

**Problema 3.9.** Fie  $P$  și  $Q$  mijloacele laturilor neoparalele  $BC$  și  $AD$  ale unui trapez  $ABCD$ . Demonstrați că triunghiurile  $APD$  și  $CQB$  au aceeași arie.

**Problema 3.10.** Vectorii  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  și  $\mathbf{c}$  sunt vectorii de poziție ai vârfurilor unui triunghi  $ABC$  relativ la un punct  $O$ . Determinați aria triunghiului  $ABC$  în funcție de acești vectori.

**Problema 3.11.** Stabiliți dacă tripletul de vectori  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  este drept sau stâng, dacă

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{k}.$$

**Problema 3.12.** Demonstrați că punctele  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(0, 1, 5)$ ,  $C(-1, 2, 1)$  și  $D(2, 1, 3)$  sunt situate într-un același plan.

**Problema 3.13.** Determinați volumul tetraedrului care are vârfurile în punctele  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(5, 5, 4)$ ,  $C(3, 2, -1)$  și  $D(4, 1, 3)$ .

**Problema 3.14.** Un tetraedru de volum 5 are ca trei dintre vârfuri punctele  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(3, 0, 1)$  și  $C(2, -1, 3)$ . Al patrulea vârf,  $D$ , este situat pe axa  $Oy$ . Determinați coordonatele punctului  $D$ .

**Problema 3.15.** Se dau trei vectori  $\mathbf{a}(8, 4, 1)$ ,  $\mathbf{b}(2, 2, 1)$  și  $\mathbf{c}(1, 1, 1)$ . Să se determine vectorul  $\mathbf{d}$ , de lungime 1, care formează cu vectorii  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$  unghiuri egale, este perpendicular pe vectorul  $\mathbf{c}$  și este orientat în așa fel încât tripletele de vectori  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  și  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$  au aceeași orientare (sunt ambele drepte sau ambele stângi).

**Problema 3.16.** Se dau doi vectori  $\mathbf{a}(11, 10, 2)$  și  $\mathbf{b}(4, 0, 3)$ . Să se găsească un vector unitar  $\mathbf{c}$ , ortogonal la vectorii  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$ , astfel încât tripletul de vectori  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  să fie drept.

**Problema 3.17.** Fie  $ABC$  un triunghi și fie  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $AC$ . Prin  $C$  se duce o paralelă la  $AB$  care întâlnește  $BE$  în  $P$ . Demonstrați că

$$\text{Aria } \triangle FEP = \text{Aria } \triangle FCE = \frac{1}{2} \triangle ABC.$$

**Problema 3.18.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex plan. Demonstrați că

$$\text{Aria } ABCD = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} \right\|.$$

**Problema 3.19.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex plan astfel încât

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{d}, \overrightarrow{AC} = m\mathbf{b} + p\mathbf{d},$$

unde  $m$  și  $p$  sunt două numere reale. Demonstrați că aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria } ABCD = \frac{1}{2} |m + p| \cdot \|\mathbf{b} \times \mathbf{d}\|.$$

**Problema 3.20.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex plan astfel încât  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$  și  $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$ , atunci aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria } ABCD = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{a}\|.$$

**Problema 3.21.** Determinați ariile triunghiurilor cu vârfurile în punctele de coordonate:

- (a)  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$  și  $(2, -1, 4)$ ;
- (b)  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  și  $(1, 1, 1)$ ;
- (c)  $(-1, 2, 3)$ ,  $(2, -1, -1)$  și  $(1, 1, -1)$ ;
- (d)  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  și  $(0, 0, c)$ .

**Problema 3.22.** Determinați volumele tetraedrelor cu vârfurile în punctele de coordonate:

- (a)  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$  și  $(-1, 1, 1)$ ;
- (b)  $(-1, 0, 1)$ ,  $(2, -1, 0)$ ,  $(3, 2, 5)$  și  $(1, 2, 1)$ .

**Problema 3.23.** Demonstrați că volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele de coordonate  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  și  $(x_4, y_4, z_4)$  este egal cu valoarea absolută a numărului

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

**Problema 3.24.** Demonstrați că volumul tetraedrului ale căror vârfuri au vectorii de poziție  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  și  $\mathbf{d}$  este dat de formula

$$\text{Vol} = \frac{1}{6} |(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Deduceți, de aici, un criteriu pentru coplanaritatea punctelor cu vectorii de poziție  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  și  $\mathbf{d}$ .