SEMINARUL 1

Algebră vectorială

Problema 1.1. Se dă un tetraedru $ABCD$. Găsiţi sumele vectorilor:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

Problema 1.2. Se dă o piramidă cu vârful în S şi baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să se demonstreze egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Problema 1.3. Fie $ABCD$ un tetraedru. Demonstraţi că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. Este adevărată această afirmaţie pentru orice patru puncte din spaţiu?

Problema 1.4. Punctul O este centrul unui hexagon regulat $ABCDEF$. Determinaţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$, în funcţie de vectorii $\mathbf{p} = \overrightarrow{OE}$ şi $\mathbf{q} = \overrightarrow{OF}$.

Problema 1.5. Demonstraţi că dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor unui patrulater $ABCD$, atunci $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = 0$.

Problema 1.6. Punctele E şi F sunt mijloacele diagonalelor unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

Problema 1.7. Fie E şi F mijloacele laturilor AB şi CD ale unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

şi utilizaţi această proprietate pentru a demonstra teorema liniei mijlocii într-un trapez.

Problema 1.8. Se dă un hexagon regulat $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 3\overrightarrow{C_1C_4}.$$

Problema 1.9. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Determinaţi descompunerea vectorului $\overrightarrow{AD}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

Problema 1.10. Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

Problema 1.11. Se dă un trapez $ABCD$ în care baza AB este de k ori ($k > 1$) mai mare decât baza mică CD. Fie M şi N mijloacele bazelor. Găsiţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$.

Problema 1.12. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC şi un punct oarecare O în planul triunghiului. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Problema 1.13. Punctele M, N, P sunt, respectiv, mijloacele laturilor AB, BC, CA ale triunghiului ABC. Să se determine vectorii $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

Problema 1.14. În figura 1.1 este reprezentat paralelipipedul $ABCDEFGH$. Fie $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$ şi $\overrightarrow{DF}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$.

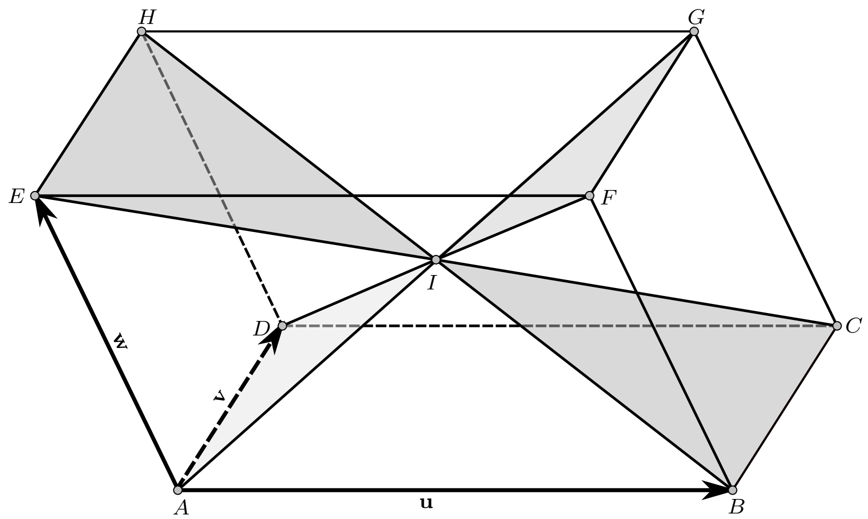

Figura 1.1

Problema 1.15. Să se demonstreze că medianele unui triunghi sunt concurente şi că suma vectorilor care au originile în punctul de intersecţie al medianelor şi extremităţile în vârfurile triunghiului este vectorul nul.

Problema 1.16. Se cunosc coordonatele vârfurilor A, B, C ale paralelogramului $ABCD$, faţă de un reper oarecare. Să se determine coordonatele celui de-al patrulea vârf (D), în fiecare dintre situaţiile următoare:

1) $A(2,3), B(1,4), C(0,-2)$;

2) $A(-2,-1), B(3,0), C(1,-2)$.

Problema 1.17. Se cunosc coordonatele vârfurilor A şi B şi coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC. Determinaţi coordonatele vârfului C al triunghiului în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) $A(4,1), B(3,-2), G(0,2)$;

2) $A(3,5), B(-1,-3), C(1,1)$.

Problema 1.18. Se dă trapezul $ABCD$, în care $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AB}$. Punctele M şi N sunt mijloacele bazelor AB şi DC, iar P este punctul de intersecţie a diagonalelor, AC şi BD, ale trapezului.

1) Luând vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ ca bază, determinaţi componentele vectorilor $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}$.

2) Luând vectorii $\overrightarrow{PA}$ şi $\overrightarrow{PB}$ ca bază, determinaţi componentele vectorilor $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

Problema 1.19. Se dau, în plan, trei vectori, prin componentele lor relativ la o bază oarecare: $\mathbf{a}(4,-2)$, $\mathbf{b}(3,5)$, $\mathbf{c}(-2,-12)$. Exprimaţi vectorul $\mathbf{c}$ ca o combinaţie liniară a vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$.

Problema 1.20. Se dau vectorii necoliniari $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$. Demonstraţi că sistemul de vectori $\mathbf{m} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ este liniar dependent, iar vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$ sunt necoliniari. Exprimaţi vectorul $\mathbf{m}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{p}$.

Problema 1.21. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC. Exprimaţi:

1) vectorul $\overrightarrow{MA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$;

2) vectorul $\overrightarrow{AB}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$;

3) vectorul $\overrightarrow{OA}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}$, unde O este un punct oarecare din spaţiu.