



# Lineáris Algebra



## Verzió információk

References	GitHub: October 23, 2020
Branch	GitHub: October 23, 2020
Dirty	
Hash	GitHub: October 23, 2020
Author	GitHub: October 23, 2020
Iso Date	GitHub: October 23, 2020
First Tag	GitHub: October 23, 2020
Describe	
Reln	GitHub: October 23, 2020
Roff	
Tags	
Describe	(None)



Motivation is a fire from within. If someone else tries to light that fire under you, chances are it will burn very briefly.

---

*Stephen R Covey*

## Előszó

A LEGFONTOSABB FORRÁS (Dancs és Puskás 2001).

...

Igyekszem strukturáltan írni. Kicsi, atomszerű építőkövek egymás utáni megértése visz az anyagban előre, ezek az egymástól feltűnő módon szeparált „állítások” és azok érvekkel való alátámasztása, amit „bizonyításnak” is szokás mondani. Az írásmód oka, hogy evvel is hangsúlyozzam, hogy az olvasónak igyekeznie kell strukturáltan gondolkodni. A hátulütője, hogy hibásan azt a helytelen képzetet keltheti, mintha az egyes állítások mintegy puzzle-ként állnának össze. Nem, nem erről van szó. A puzzle-ban minden elem egyenrangú, az egyik elem hiánya éppen annyira fájdalmas mint a másiké. Ez egyetlen matematikai disziplína esetében sem igaz! Az olvasónak igyekeznie kell, hogy meglássa mi a legfontosabb gondolat a sok-sok állításnak, mint építménynek egy-egy „nyilvánvaló következményében”.

Hogy e kis lépések egymástól még határozottabban váljanak el azt az írás tipográfiája is erősíti azzal, az állítás-szerű környezeteket a „, és a bizonyítás környezetet a „ karakterekkel zárom le.

Stb.

Magyarkuti Gyula

Budapest, 2020. október 23-án

# Tartalomjegyzék

<b>I</b>	<b>Ősz</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Előzmények</b>	<b>11</b>
1.1.	Algebrai struktúrák . . . . .	11
1.2.	Polinomgyűrűk . . . . .	13
1.3.	Polinomok oszthatósága és a maradékos osztás . . . . .	15
1.4.	Az Euklideszi-algoritmus . . . . .	18
1.5.	Polinom faktorizáció . . . . .	20
1.6.	Mátrixok . . . . .	21
1.7.	A komplex számok mint mátrixok . . . . .	25
1.8.	A komplex számok abszolútértéke . . . . .	27
1.9.	A komplex számok trigonometrikus alakja . . . . .	29
1.10.	Polinom faktorizáció a komplex- és a valós számtengely felett . . . . .	30
<b>2</b>	<b>A vektortér fogalma</b>	<b>33</b>
2.1.	Vektortér altípusai . . . . .	34
2.2.	Elimináció . . . . .	36
2.3.	Lineárisan független rendszerek . . . . .	44
<b>3</b>	<b>A Steinitz-lemma</b>	<b>47</b>
3.1.	Rang-tétel . . . . .	47
3.2.	Dimenzió . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Koordinatázás</b>	<b>51</b>
4.1.	Lineáris operátor fogalma . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Alterekek Minkowski-összege és direkt összege</b>	<b>55</b>
5.1.	Minkowski-összeg . . . . .	55
5.2.	Direkt összeg . . . . .	57
5.3.	Direkt kiegészítő . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Vektortér faktortere</b>	<b>61</b>
<b>II</b>	<b>Tavasz</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Mátrixok és lineáris operációk</b>	<b>67</b>
7.1.	Rang-defektus-tétel következménye . . . . .	67
7.2.	Mátrixok tere mint koordináta-ter . . . . .	68
7.3.	Lineáris operátorok szorzata . . . . .	71
<b>8</b>	<b>Általános bázis-transzformáció</b>	<b>75</b>
8.1.	Vektor koordinátái az új bázisban . . . . .	75
8.2.	Lineáris operátorok mátrixai az új bázisban . . . . .	76
8.3.	Lineáris transzformáció mátrixai az új bázisban . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Invariáns altípusok</b>	<b>77</b>

9.1. Transzformációk sajátértéke	79
<b>10 Transzformációk polinomjai</b>	<b>81</b>
10.1. Kis minimálpolinom	82
10.2. Minimál polinom	83
10.3. Sajátvektorok és diagonalizálhatóság	85
<b>11 Transzformációk redukálása</b>	<b>89</b>
11.1. Sajátvektorok, minimálpolinom és diagonalizálhatóság	90
11.2. Redukálás: az általános eset	91
<b>12 Redukálás irreducibilis minimálpolinom esetén</b>	<b>93</b>
12.1. Irreducibilis polinommal képzett magtér redukálása	95
<b>13 A minimálpolinom fokszámáról</b>	<b>97</b>
<b>14 Nilpotens transzformációk</b>	<b>99</b>
14.1. Hatvány függvény alakú minimálpolinom	99
14.2. Nilpotens operátorok redukálása	99
14.3. Egyértelműség	101
14.4. Illusztrációk	103
14.5. A nillpotens felbontási tétel nélkül?	105
<b>15 A Jordan-normálalak</b>	<b>107</b>
15.1. Egy gyöktényezős minimálpolinom	107
15.2. Jordan-normálalak: az általános eset	108
<b>16 Determináns</b>	<b>111</b>
16.1. Permutációk	111
16.2. Mértékek	114
16.3. A mértékek jellemzése	119
16.4. A determináns kifejtése	121
16.5. A karakterisztikus polinom	123
<b>17 Skaláriszorzatos terek geometriája</b>	<b>127</b>
17.1. Definíciók	127
17.2. Egyenlőtlenségek	129
17.3. Pont és altér távolsága	130
17.4. Ortogonalizáció	131
17.5. Projekciós tétel	133
17.6. Ortonormált rendszer teljessége	134
<b>18 Az adjungált operátor bevezetése</b>	<b>137</b>
18.1. Riesz-reprezentáció véges dimenziós skaláriszorzatos-térben	137
18.2. Az adjungált operáció	137
18.3. Önadjungált transzformációk	140
18.4. Unitér transzformációk	140
<b>19 Normális transzformációk diagonalizálhatósága</b>	<b>143</b>
<b>20 Ortogonális projekciók</b>	<b>147</b>
20.1. Ortogonális transzformációk lineáris kombinációja	148
<b>21 Spektrális felbontások</b>	<b>151</b>
21.1. Komplex eset	151
21.2. Valós eset	154
21.3. Operátornorma	155
<b>Függelékek</b>	<b>157</b>

<b>A A komplex számokról</b>	<b>159</b>
A.1. Lineáris algebrai megközelítés . . . . .	159
A.2. Analízis megközelítés . . . . .	161
A.3. A komplex számok egyértelműsége . . . . .	163
<b>Irodalom</b>	<b>167</b>
<b>Tárgymutató</b>	<b>169</b>

**I. rész**

**Ősz**



## 1. fejezet

# Előzmények

A LINEÁRIS ALGEBRA tárgyalásához elengedhetetlenül szükséges általános algebrai ismereteket foglaljuk össze.

### 1.1. Algebrai struktúrák

**1.1. definíció** ( $n$ -változós művelet). Legyen  $H$  egy halmaz. Egy

$$\varphi: H^n \rightarrow H$$

függvényt  $n$ -változós műveletnek nevezünk. Egy halmazt és rajta véges sok műveletet együtt *algebrai struktúrának* mondunk. Jelölés:

$$(H, \varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

ahol  $H$  a halmaz és  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  a  $H$  halmazon értelmezett műveletek.

**1.2. definíció** (félcsoport). Egy  $(S, *)$  algebrai struktúrát *félcsoportnak* mondjuk, ha  $*$  egy kétváltozós asszociatív művelete az  $S$  halmaznak, azaz minden  $a, b, c \in S$  mellett

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Lefordítva ez azt jelenti, hogy

1. minden  $a, b \in S$  mellett  $a * b \in S$ , és
2. minden  $a, b, c \in S$  esetén  $a * (b * c) = a * (b * c)$

**1.3. definíció** (neutrális elem). Az  $(S, *)$  félcsoportban az  $s \in S$  elem *balról* (jobbról) neutrális, ha  $s * t = t$  ( $t * s = t$ ) minden  $t \in S$  mellett. Ha  $s \in S$  balról is és jobbról is neutrális, akkor  $s$ -et egy *neutrális elemnek* mondjuk. A félcsoportot neutrális elemes félcsoportnak nevezzük, ha van benne neutrális elem.

**1.4. állítás.** Ha egy félcsoportban, van egy balról neutrális elem és egy jobbról neutrális elem, akkor ezek megegyeznek. Emiatt egy neutrális elemes félcsoportban neutrális elem csak egy van.

*Bizonyítás:* Legyen  $s_1$  balról- és  $s_2$  jobbról neutrális elem. Ekkor  $s_1 = s_1 * s_2 = s_2$ .

A félcsoport additív írásmódja esetén természetes a neutrális elemet *zérusnak*, míg multiplikatív írásmód esetén *egységnak* nevezni.

**1.5. definíció** (csoport). Egy  $(G, *)$  algebrai struktúrát *csoportnak* nevezünk, ha neutrális elemes félcsoport, amelyben minden  $g \in G$ -hez létezik  $g' \in G$ , hogy

$$g * g' = e = g' * g. \quad (\dagger)$$

Itt  $e \in G$  jelöli a  $G$  csoport neutrális elemét.

**1.6. definíció-állítás** (inverz elem). Legyen  $(G, *)$  egy csoport. Ekkor minden  $g \in G$ -hez, csak egyetlen  $g' \in G$  létezik, amelyre a fenti ( $\dagger$ ) azonosság fennáll. Adott  $g$ -hez ezt ez egyetlen  $g' \in G$  elemet, amelyre ( $\dagger$ ) teljesül a  $g$  elem *inverzének* mondjuk.

*Bizonyítás:* Jelölje  $e$  a csoport neutrális elemét, és tegyük fel, hogy  $g', g''$  inverz elemei  $g$ -nek. Azt mutatjuk meg, hogy  $g' * g = e$  és  $g * g'' = e$  esetén a két inverz megegyezik.

$$g' = g' * e = g' * (g * g'') = (g' * g) * g'' = e * g'' = g''.$$

Példaként gondoljuk meg, hogy az összes  $H \rightarrow H$  függvények halmaza a kompozíció műveettel neutrális elemes félcsoportot, és az összes  $H \rightarrow H$  kölcsönösen egyértelmű függvények halmaza a kompozíció műveettel csoportot alkotnak. Ez utóbbi csoportot mondjuk *permutáció csoportnak*.

**1.7. állítás** (egyszerűsítési szabály). *Csoportban igaz az egyszerűsítési szabály, azaz*

$$a * c = b * c \implies a = b.$$

*Bizonyítás:*  $a = a * e = a * (c * c') = (a * c) * c' = (b * c) * c' = b * (c * c') = b * e = b$ .

**1.8. definíció** (Abel-csoport). Egy  $(G, *)$  csoportot *Abel-csoportnak* nevezünk, ha a művelete *kommutatív* is, azaz minden  $s, t \in G$  mellett  $s * t = t * s$ .

**1.9. definíció** (gyűrű). A kétműveletes  $(R, +, \cdot)$  algebrai struktúrát *gyűrűnek* nevezzük, ha

1.  $(R, +)$  Abel-csoport;
2.  $(R, \cdot)$  félcsoport;
3. és a két műveletet összekötő a következő két disztributivitás:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Ha  $(R, \cdot)$  neutrális elemes félcsoport, akkor azt mondjuk, hogy  $R$  egy *egységelemes gyűrű*, és ha  $(R, \cdot)$  kommutatív félcsoport, akkor azt mondjuk, hogy  $R$  egy *kommutatív gyűrű*.

**1.10. definíció** (test). Egy  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  kétműveletes algebrai struktúrát *testnek* nevezünk, ha olyan kommutatív egységelemes gyűrű, amelyben minden nemzérus<sup>1</sup> elemnek van inverze<sup>2</sup>, és  $0 \neq 1^3$ .

A test az algebrai struktúra, ahol a az összeadás és szorzás műveletekkel úgy számolhatunk, mint amit a valós számok során megszoktuk. Példaként néhány tulajdonság.

**1.11. állítás.** Az  $(R, +, \cdot)$  gyűrűben minden  $a \in R$  mellett

$$a \cdot 0 = 0 \text{ és } (-1)a = -a.$$

*Bizonyítás:*  $0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ . A jobboldali  $a \cdot 0$ -val való egyszerűsítés után kapjuk, hogy  $0 = a \cdot 0$ . A második azonosságot az első felhasználásával kapjuk:  $0 = 0a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$ . Az additív inverz definíciója szerint ez éppen azt jelenti, hogy  $-a = (-1) \cdot a$ .

Ami nagyon fontos, hogy egy gyűrűben nem feltétlen teljesül, hogy elemek szorzata csak úgy lehet zérus, ha legalább az egyik elem zérus. Számunkra a legfontosabb példa a mátrixok gyűrűje<sup>4</sup>, ahol pont ennek a hiánya jelenti nehézséget.

Egy testben ilyen nem fordulhat elő.

**1.12. definíció** (nullosztómentes gyűrű). Egy gyűrűt *nullosztómentesnek* nevezzük, ha két elem szorzata csak úgy lehet nulla, ha legalább az egyik elem nulla.

**1.13. állítás.** Egy test egyben nullosztómentes gyűrű, azaz ha  $\mathbb{F}$  egy test, és  $a, b \in \mathbb{F}$ . Akkor

$$ab = 0 \implies a = 0 \text{ vagy } b = 0.$$

<sup>1</sup>értsd: minden elemnek, amely a + műveletre nézve neutrális elemtől különbözik

<sup>2</sup>értsd: a · szorzás neutrális elemére mint egységelemre nézve

<sup>3</sup>érts: az összeadásra nézve és a szorzásra nézve képzett neutrális elemek nem azonosak.

<sup>4</sup>lásd kicsit később

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $ab = 0$ . Ha  $b \neq 0$ , akkor létezik  $b' \in \mathbb{F}$ , hogy  $bb' = 1$ . Így

$$0 = 0b' = (ab)b' = a(bb') = a1 = a.$$

**1.14. állítás.** Nullosztómentes gyűrűben nem zérus elemmel való szorzatot egyszerűsíteni lehet azaz, ha  $a, b, c \in R, b \neq 0$  esetén

$$ab = cb \implies a = c.$$

*Bizonyítás:*  $(a - c)b = ab - cb = 0 \implies a - c = 0$ .

**1.15. definíció** (ideál). Egy  $(R, +, \cdot)$  kommutatív gyűrű egy  $J \subseteq R$  nem üres részhalmazát *ideálnak* nevezünk, ha

1. minden  $a, b \in J$  mellett  $a + b \in J$ ;
2. minden  $c \in R$  és minden  $a \in J$  mellett  $ca \in J$ .

Ha egy  $d \in R$  adott, akkor a

$$\{da : a \in R\}$$

halmaz egy ideálja  $R$ -nek. Ez a  $d$  elem többszöröseiből álló ideál, amelyet *főideálnak* is nevezünk. Ha egy gyűrűben minden ideál egy főideál, akkor a gyűrűt *főideál-gyűrűnek* mondjuk.

A generált ideál fogalma nagyon fontos.

**1.16. definíció-állítás** (generált ideál). Legyen adott a kommutatív, egységelemes  $(R, +, \cdot)$  gyűrűben véges sok  $a_1, \dots, a_r$  elem. Az e véges sok elemet tartalmazó ideálok közös része maga is ideál, és e metszet az eredeti véges halmazt tartalmazó *legszűkebb ideál*. Jelöljük ezt  $J(a_1, a_2, \dots, a_r)$  módon.

Tekintsük a  $\left\{ \sum_{j=1}^r a_j b_j : b_1, \dots, b_r \in R \right\}$  halmazt. Világos, hogy ez egy ideál az  $R$  gyűrűben. A gyűrű egységelemes, ezért ennek  $J(a_1, \dots, a_r)$  egy részhalmaza. Másrészt minden az  $\{a_1, \dots, a_r\}$  elemeket tartalmazó ideál, egyben tartalmazza a  $\left\{ \sum_{j=1}^r a_j b_j : b_1, \dots, b_r \in R \right\}$  halmazt is, ami azt jelenti, hogy

$$J(a_1, \dots, a_r) = \left\{ \sum_{j=1}^r a_j b_j : b_1, \dots, b_r \in R \right\}$$

az  $a_1, \dots, a_r$  elemeket tartalmazó legszűkebb ideál. Nevezzük ezt az ideált az  $a_1, \dots, a_r$  elemek *generálta ideálnak* is.

Világos, hogy  $\{0\}$  és maga az egész  $R$  ideálok.

A legfontosabb struktúrák számunkra a következők:

- Egységelemes gyűrű, amelyben a nullosztómentesség nem teljesül: mátrixok.
- Kommutatív egységelemes gyűrű, amely nullosztómentes de mégsem test: polinomok.
- Test: a valós vagy a komplex számok.

## 1.2. Polinomgyűrűk

**1.17. definíció** (polinom). Legyen  $\mathbb{F}$  egy test. E test feletti polinomokon az összes

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$$

alakú formális algebrai kifejezést értjük. Itt  $n$  tetszőleges nem negatív egész és  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  tetszőleges, az  $\mathbb{F}$  testbeli elemek. Az  $\mathbb{F}$  test feletti összes polinomok halmazát  $\mathbb{F}[t]$  módon jelöljük.

A fenti definícióban az *algebrai kifejezés* szó arra utal, hogy az  $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n$  műveletek minden  $t \in \mathbb{F}$  mellett értelmesek, és eredményük egy újabb  $\mathbb{F}$  testbeli elem. Ha  $t \in \mathbb{F}$  konkrétan meg van adva, akkor a behelyettesítés után kapott elemet mondjuk a  $p$  polinom helyettesítési értékének.

A *formális algebrai kifejezés* arra utal, hogy egy polinomot az együtthatói határozzák meg, azaz két polinom akkor és csak akkor azonos, ha az összes együtthatói azonosak. Ez szemben áll attal, hogy ha a polinomokra mint függvényekre tekintenénk, akkor a helyettesítési értékek egyenlősége jelentené a két polinom azonos voltát. A formális szó tehát azt jelenti, hogy nem mint függvényre gondolunk, hanem egyszerűen az adott  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  rögzített elemek – ezeket mondjuk együtthatóknak –, által előírt műveletekre. Az az előírás ugyanis, hogy tetszőleges  $t \in \mathbb{F}$  mellett hajtsuk végre az

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n$$

műveletsort. A műveletsorról és nem annak eredményéről van szó.

Két műveletsor akkor azonos, ha ugyanazok a műveletsort meghatározó  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ <sup>5</sup> együtthatók.<sup>6</sup> A jelölések megértése is fontos.  $p(t) \in \mathbb{F}[t]$  semmi másat nem jelent, minthogy  $p(t)$  egy polinom. Persze a polinom nem keverendő össze a helyettesítési értékével, hiszen az egyik egy algebrai kifejezés-együttettsége, a másik egy az adott testbeli elem. Szokásos viszont, hogy ha nincs konkrét t a szövegkörnyezetben, akkor is  $p(t)$  jelöli a polinomot. Néha egyszerűbben csak p-vel jelöljük, főleg akkor ha nincs szó behelyettesítésről, emiatt érdektelen a változó jele. Ritkábban, de előfordul, hogy egy konkrét értékre, mondjuk  $s \in \mathbb{F}$ -re kell kiértékelni a polinomot ilyenkor  $p(s)$  jelöli azt a testbeli elemet, amelyet t helyett s-et téve az előírt műveletek kiértékelése után kapunk. A szövegkörnyezetben minden világosnak kell lennie, hogy  $p(t)$  a polinomot jelenti, vagy egy konkrét t-re kiértékelte testbeli elemet.

**1.18. definíció** (polinom foka). Legyen  $p(t) \in \mathbb{F}[t]$  egy polinom. Azt mondjuk, hogy az  $n$  nem negatív egész szám e polinom fokszáma, ha  $n$  a legnagyobb nemzérus együttható indexe. A legnagyobb nemzérus együtthatót főegyüttettségnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy nemzérus polinom normált, ha 1 a főegyüttettséjéhez.

A  $p(t) = 0$  konstans zérus polinom foka megállapodás szerint legyen  $-\infty$ . A p polinom fokszámát  $\deg p$  módon jelöljük. □

Látni fogjuk, hogy a konstans zérus polinomra  $\deg p = -\infty$  csak egy kényelmes jelölés. Időnként a polinom fokszámával műveleteket is végzünk. Megegyezés szerint ilyenkor  $-\infty + a = -\infty$  minden a nem negatív egész számra, és  $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ . A  $-\infty$  szimbólumot minden egész számnál határozottan kisebbnek gondoljuk.

Két polinom összegét és szorzatát a szokásos módon definiáljuk:

**1.19. definíció.** Legyen  $p, q \in \mathbb{F}[t]$ , két polinom.

$$p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j \text{ és } q(t) = \sum_{j=0}^m \beta_j t^j, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{F}, 0 \leq n, m \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor a p és q összegének definíciója:

$$(p+q)(t) = \sum_{j=0}^{\max\{m,n\}} (\alpha_j + \beta_j) t^j;$$

míg a két polinom szorzatának definíciója:

$$(pq)(t) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j t^j \text{ ahol } c_j = \sum_{k=0}^j \alpha_k \beta_{j-k}.$$

<sup>5</sup> Az előbbi zárójellel azt hangsúlyozzuk, hogy az együtthatók sorrendje is számít.

<sup>6</sup> Persze felmerül a kérdés, hogy ha két polinom minden helyettesítési értéke azonos, akkor igaz-e, hogy mint formális polinomok is azonosak, tehát a két polinom együtthatói is rendre azonosak-e? A pozitív választ később látjuk nem véges számtest, például a valós vagy a komplex test, feletti polinomok esetén. Lásd az 1.32. állítás utáni megjegyzést a 18. oldalon.

Mind az összeadás, minden a szorzás definíciójában úgy kell a formulát érteni, hogy amikor a hivatkozott együtthatók nem léteznek, akkor értékük legyen zérus. Például a szorzat legmagasabb indexű együtthatójára  $c_{n+m} = \alpha_n \beta_m$ , hiszen az  $\alpha_k, \beta_{n+m-k}$  számok csak egyetlen  $k$  mellett értelmezettek közösen, mikor  $k = n$ .<sup>7</sup>

**1.20. állítás.** *Legyenek  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok az  $\mathbb{F}$  test felett. Ekkor*

1.  $\deg(pq) = \deg p + \deg q$
2.  $\deg(p+q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}$ .

*Bizonyítás:* Figyeljünk arra, hogy a konstans zérus polinom esetében is működik a téTEL, és vegyük észre, hogy az szorzat polinomra vonatkozó állítás azért igaz, mert a test nullosztómentes.

A következő állítás igazolását az olvasóra bízom. Aprólékosan igazoljuk a test axiómák gyakorlásaként. Vigyázat: a szorzás asszociativitása nem is olyan egyszerű.

**1.21. állítás.** *Egy  $\mathbb{F}$  test feletti  $\mathbb{F}[t]$  formális polinomok a fent bevezetett összeadás és szorzás műveletekkel, nullosztómentes, kommutatív, egységelemes gyűrűt alkotnak.*

### 1.3. Polinomok oszthatósága és a maradékos osztás

**1.22. definíció** (oszthatóság). Azt mondjuk, hogy a  $p \in \mathbb{F}[t]$  osztója az  $f \in \mathbb{F}[t]$  nem zérus polinomnak, ha létezik  $h \in \mathbb{F}[t]$ , hogy  $f(t) = p(t)h(t)$ . Ilyenkor  $f$ -et a  $p$  egy többszörösének is mondjuk. Jelölés:  $p|f$ .

Világos, hogy egy  $p$  polinom összes többszörösei – tehát azok, amelyeknek  $p$  osztója – ideál alkotnak. Ez a  $p$  generálta legszűkebb ideál, azaz a  $J(p) = \{f \in \mathbb{F}[t] : f \in J(p)\}$  főideál. Ha  $q \in J(p)$ , akkor  $J(q) \subseteq J(p)$ , azaz ha  $q$  egy többszöröse  $p$ -nek, akkor  $q$  minden többszöröse  $p$ -nek is többszöröse. Ha  $p, q$  polinomok, amelyekre  $p|q$  és  $q|p$  akkor a két polinom csak konstans szorzóban különbözik egymástól. Ha például a két polinom még normált is, akkor  $p|q$  és  $q|p$  csak  $p = q$  esetben lehetséges. A polinomgyűrű ideáljaira fokuszálva, azt gondoltuk éppen meg, hogy  $J(p) = J(q)$  normált  $p, q$  polinomokra csak úgy teljesülhet, ha  $p = q$ , azaz a polinomok gyűrűjében minden főideálnak csak egy generáló eleme van a normált polinomok körében.

A következő állítás szerint a polinomok között is működik a maradékos osztás, ahogyan azt az egész számok között megszoktuk.

**1.23. állítás** (maradékos osztás). *Legyenek  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok,  $q \neq 0$ . Ekkor létezik egyetlen  $h, r \in \mathbb{F}[t]$  polinom, amelyre*

$$p = hq + r; \quad \deg r < \deg q.$$

*Bizonyítás:* Először is azt vegyük észre, hogy  $\deg p < \deg q$  esetben  $r = p, h = 0$  szereposztással készen is vagyunk.

Tegyük fel tehát, hogy  $n = \deg p \geq \deg q = m$ , és lássuk be az állítást  $n$  szerinti indukcióval. Ha  $n = 0$ , akkor  $p(t) = \alpha_0$  és  $q(t) = \beta_0 \neq 0$ . Ekkor persze

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \beta_0 + 0,$$

ami azt jelenti, hogy  $h(t) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$  és  $r(t) = 0$  szereposztás megfelelő.

Most tegyük fel, hogy igaz az állítás  $n + 1$ -nél kisebb fokú  $p$  polinomokra ( $n \geq 0$ ), és lássuk be egy pontosan  $n + 1$ -ed fokú polinomra. Legyen tehát

$$p(t) = \alpha_{n+1}t^{n+1} + \cdots + \alpha_0 \quad \text{és} \quad q(t) = \beta_m t^m + \cdots + \beta_0,$$

ahol  $m \leq n + 1$ . Tekintsük a következő polinomot:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_m} t^{n+1-m} q(t).$$

<sup>7</sup>Ha már követjük a konvenciót, amely szerint a nem definiált együtthatókat zérusnak tekintjük, akkor persze  $(p+q)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j + \beta_j) t^j$ ; és  $(pq)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_{j-k}) t^j$  is írható. Itt a fenti összegek nem végtelen összegek, hiszen a két polinom együtthatói csak véges sok esetben különböznek zérustól. Így ebben az esetben a formalisan végtelen összeg definíciója egyszerűen a véges sok nem zérus elem összege.

Világos, hogy ennek főegyütthatója éppen  $\alpha_{n+1}$  és foka éppen  $n+1 = \deg p$ . Így a

$$p_1(t) = p(t) - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_m} t^{n+1-m} q(t).$$

polinomra  $\deg p_1 < \deg p$ . Na most, ha  $\deg p_1 < \deg q$ , akkor a bizonyítás első mondatában említett helyzetben vagyunk, tehát nyilvánvaló szereposztással az állítás igaz  $p_1$ -re és  $q$ -ra. Ha viszont  $\deg p_1 \geq \deg q$  még mindig igaz, akkor az indukciós feltétel szerint található  $h, r \in \mathbb{F}[t]$  polinom, amelyre igaz az állítás. Mindkét esetben találtunk tehát  $h, r$  polinomokat, amelyre

$$p(t) - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_m} t^{n+1-m} q(t) = p_1(t) = h(t)q(t) + r(t); \quad \deg r < \deg q$$

teljesül. Ekkor persze

$$p(t) = \left( h(t) + \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_m} t^{n+1-m} \right) q(t) + r(t); \quad \deg r < \deg q$$

is fennáll. Ezt kellett belátni az állítás egzisztencia részéhez.

Az unicitás részhez tegyük fel, hogy valamely  $h, h_1, r, r_1$  polinomokra

$$h(t)q(t) + r(t) = p(t) = h_1(t)q(t) + r_1(t)$$

teljesül, ahol  $\deg r < \deg q$  és  $\deg r_1 < \deg q$ . Persze átrendezve ekkor

$$(h(t) - h_1(t))q(t) = r_1(t) - r(t)$$

is fennáll. Ekkor a fokszámokra figyelembe véve

$$\deg(h - h_1) + \deg q = \deg(r_1 - r) \leq \max\{\deg r_1, \deg(-r)\} < \deg q.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha  $\deg(h - h_1) = -\infty$ , ami azt jelenti, hogy  $h = h_1$ , amiből persze  $r_1 = r$  már látszik is.

**1.24. állítás** (a polinomgyűrű egy főideál-gyűrű). *A polinomok  $\mathbb{F}[t]$  kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűjében minden a  $\{0\}$ -tól különböző ideált generál az ideálban lévő egyetlen normált minimális fokszámú polinom. Így  $\mathbb{F}[t]$  egy főideál-gyűrű.*

*Bizonyítás:* Legyen a  $J$  egy ideálja  $\mathbb{F}[t]$ -nek, amely nem csak a zérus elemből áll. Vegyük egy minimális fokszámú de nem zérus polinomot  $J$ -ben, tehát olyat, amely maga sem zérus és nála kisebb fokszámú polinom már nincs  $J$ -ben a 0 elemen kívül. Legyen ez  $d$ . Most megmutatjuk, hogy minden  $p \in J$ -re  $d|p$ . A maradékos osztás szerint valamely  $h, r$  polinomokra

$$p(t) = h(t)d(t) + r(t); \quad \text{ahol } \deg r < \deg d.$$

Mivel  $p, d \in J$ , és  $J$  egy ideál, ezért  $r \in J$ . No de  $d$  konstrukciója szerint ilyen csak a zérus polinom van, ezért valóban  $d|p$ . Ez éppen azt jelenti, hogy  $J = \{dh : h \in \mathbb{F}[t]\}$  azaz  $d$  generálja a  $J$  ideált. Azt viszont már korábban is megmondottuk, hogy egy főideált csak egyetlen normált polinom generál.

Megmutattuk tehát, hogy egyetlen normált, minimális fokszámú polinom van  $J$ -ben, és minden  $J$ -beli polinom ennek többszöröse.

Érdemes eltenni magunknak, hogy az ideál generáló eleme, tehát az ideálbeli elemek közös osztója éppen az ideál minimális fokszámú nem zérus polinomja. Ilyenből a normált polinomok közül csak egy van.

**1.25. definíció.** Legyenek most  $p_1, \dots, p_k$  polinomok.

1. A  $d$  polinom a legnagyobb közös osztója az adott polinomoknak, ha
  - a)  $d|p_j$  minden  $j = 1, \dots, k$ -ra,
  - b) ha  $d_1|p_j$  minden  $j = 1, \dots, k$  mellett akkor  $d_1|d$  is fennáll,
  - c)  $d$  normált.

A  $p_1, \dots, p_k$  polinomokat *relatív prímeknek* nevezzük, ha közös osztójuk csak a konstans polinomok, azaz a  $d(t) = 1$  a legnagyobb közös osztó.

2. A  $d$  polinom a *legkisebb közös többszöröse* az adott polinomoknak, ha

- a)  $p_j|d$  minden  $j = 1, \dots, k$ -ra,
- b) ha  $p_j|d_1$  minden  $j = 1, \dots, k$  mellett akkor  $d|d_1$  is fennáll.
- c)  $d$  normált.

Persze az első kérdés, hogy van-e a polinomoknak legnagyobb közös osztója vagy legkisebb közös többszöröse, és hány ilyen van?

**1.26. állítás.** Bármely  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{F}[t]$  nem zérus polinomoknak létezik egyetlen legkisebb közös többszöröse. Jelesül, a legkisebb közös többszörös, a  $\cap_{j=1}^r J(p_j)$  ideálnak, mint főideálnak az egyetlen normált generátora.

*Bizonyítás:* Világos, hogy ideálok metszete is ideál, emiatt  $\cap_{j=1}^r J(p_j)$  is ideál  $\mathbb{F}[t]$  gyűrűben. De itt minden ideál főideál, létezik tehát  $d \in \mathbb{F}[t]$  normált polinom, amelyre

$$J(d) = \cap_{j=1}^r J(p_j)$$

Világos, hogy  $d \in J(p_j)$  minden  $j$ -re, ergo  $d$  többszöröse minden  $p_j$ -nek. Ha  $p_j|d_1$  fennáll, minden  $j$ -re az azt jelenti, hogy  $d_1 \in J(p_j)$ , minden  $j$ -re, azaz  $d_1 \in \cap_{j=1}^r J(p_j) = J(d)$ , tehát  $d|d_1$  valóban fennáll.

Ha  $d$  mellett  $g$  is legkisebb közös többszörös, akkor  $d|g$  és  $g|d$  szerint  $g$  és  $d$  foka azonos, így csak egymás konstans szorosai lehetnek, de mivel mindenketten normáltak, ezért e konstans csak 1 lehet.

**1.27. állítás.** Bármely  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{F}[t]$  nem zérus polinomoknak létezik egyetlen legnagyobb közös osztója. Jelesül, a legnagyobb közös osztó a  $J(p_1, \dots, p_r)$  ideálnak mint főideálnak az egyetlen generáló eleme. Ezért a  $d$  legnagyobb közös osztó kifejezhető

$$d(t) = f_1(t)p_1(t) + \dots + f_r(t)p_r(t)$$

alakban, valamely  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{F}[t]$  polinomok segítségével.

*Bizonyítás:* Láttuk, hogy létezik egyetlen normált  $d$  polinom, amelyre  $J(d) = J(p_1, \dots, p_r)$ . Világos, hogy  $d|p_j$  minden  $j = 1, \dots, r$  és  $d \in J(p_1, \dots, p_r)$ , azaz

$$d = f_1 p_1 + \dots + f_r p_r$$

valamely  $f_1, \dots, f_r$  polinomokra. Ha valamely  $d_1$  polinomra  $d_1|p_j$  minden  $j = 1, \dots, r$  mellett, akkor a fenti azonosság szerint  $d_1|d$  is fennáll.

Az egyértelműség mint a legkisebb közös többszörösnél.

Az előző állítás kiemelt azonosságát *Bezout-azonosságnak* mondjuk.

**1.28. állítás.** Legyenek a  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{F}[t]$  tetszőleges  $\mathbb{F}$  test feletti polinomok. Ezek pontosan akkor relatív prímek, ha léteznek  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{F}[t]$  polinomok, hogy

$$f_1(t)p_1(t) + f_2(t)p_2(t) + \dots + f_r(t)p_r(t) = 1$$

A szakaszt a maradékos osztás módszerének másik fontos következményeivel zárjuk. Azt gondoljuk meg, hogy a gyöktényező a polinomból minden kiemelhető, emiatt egy akármilyen test feletti  $n$ -ed fokú polinom gyökeinek száma  $n$ -nél nagyobb nem lehet.

**1.29. állítás.** Legyen  $p \in \mathbb{F}[t]$  egy nem zérus polinom, és  $t_0$  egy gyöke, azaz  $p(t_0) = 0$ . Ekkor létezik  $h \in \mathbb{F}[t]$  nem zérus polinom, amelyre

$$p(t) = (t - t_0)h(t).$$

*Bizonyítás:* Maradékos osztással  $p$ -re és az elsőfokú  $t - t_0$  polinomra

$$p(t) = h(t)(t - t_0) + r(t), \text{ ahol } \deg r < 1.$$

No de,  $t_0$  egy gyök, tehát  $0 = p(t_0) = r(t_0)$ . Ez azt jelenti, hogy  $\deg r = -\infty$ , ami éppen az állítás.

**1.30. definíció** (gyök multiplicitása). Legyen  $t_0$  gyöke a  $p(t)$  polinomnak. Azt mondjuk, hogy a  $k$  pozitív egész  $e$   $t_0$  gyök multiplicitása, ha van olyan  $h(t)$  polinom, hogy  $p(t) = (t - t_0)^k h(t)$ , de  $h(t_0) \neq 0$ . Néha azt is mondjuk, hogy  $t_0$  egy  $k$ -szoros gyöke  $p$ -nek.

Teljesen világos, hogy a gyöktényező kiemelhetősége miatt minden gyök legalább egyszeres multiplicitású. A következő állítás szerint a gyökök száma még a multiplicitásukkal együtt számolva sem lehet több mint a polinom foka.

**1.31. állítás.** Legyen  $(ek)$  a  $p \in \mathbb{F}[t]$  nem zérus polinom különböző gyökei  $t_1, \dots, t_k$ , és ezen gyökök multiplicitásai rendre  $m_1, \dots, m_k$ . Ekkor  $m_1 + \dots + m_k \leq \deg p$ .

*Bizonyítás:* A test nullosztó mentessége és a gyöktényező kiemelhetősége miatt

$$p(t) = (t - t_1)^{m_1} \cdot (t - t_2)^{m_2} \cdots (t - t_k)^{m_k} \cdot h(t),$$

ahol  $h$  olyan nem zérus polinom, amelynek már nincsen gyöke. A fokszámok összehasonlításából kapjuk, hogy  $m_1 + \dots + m_k \leq m_1 + \dots + m_k + \deg h = \deg p$ .

A fenti gondolat szerint, ha egy legfeljebb  $n$ -ed fokú polinomnak  $n + 1$  különböző gyöke van, akkor csak úgy lehetséges, ha a polinom minden együtthatója nulla. Ezt úgy is szoktuk fogalmazni, hogy egy legfeljebb  $n$ -ed fokú polinomot  $n + 1$  helyettesítési értéke már egyértelműen meghatározza:

**1.32. állítás.** Tegyük fel, hogy  $a, p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok legfeljebb  $n$ -ed fokúak, ahol  $n$  egy nemnegatív egész, és tegyük fel, hogy létezik  $n + 1$  különböző  $t_0, t_1, \dots, t_n$  pont a testben, amelyekre  $p(t_j) = q(t_j)$  minden  $j = 0, \dots, n$ . Ekkor  $p(t) = q(t)$ , azaz  $p$  és  $q$  együtthatói azonosak.

*Bizonyítás:* Legyen  $h = p - q$ . Világos, hogy  $\deg h \leq n$  és  $h$ -nak van  $n + 1$  különböző gyöke. Az előző állítás szerint ez csak a  $h = 0$  polinomra igaz, ami azt jelenti, hogy  $p$  és  $q$  együtthatói azonosak.

A maradékos osztás tételenek szép következménye tehát, hogy ha  $\mathbb{F}$  egy nem véges test, és a  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok, akkor  $p$ -nek és  $q$ -nak pontosan akkor azonosak az együtthatói, ha  $p(t) = q(t)$  fennáll minden  $t \in \mathbb{F}$  mellett.

Itt fontos, hogy  $\mathbb{F}$  nem véges test, hiszen például ha  $\mathbb{F} = \{0, 1\}$  a két elemű test, akkor a  $p(t) = t^2 + t$  polinomra minden  $t \in \{0, 1\}$  mellett  $p(t) = 0$ , de a polinom együtthatói rendre a  $\{0, 1, 1\}$  számok a testből, tehát ez nem a összeadásra nézve neutrális eleme az  $\mathbb{F}[t]$  polinomgyűrűnek.

Konklúzióképpen: megnyugodhatunk, hogy az iménti szörnyűség nem véges testek esetén nem fordulhat elő, tehát mondjuk a valós vagy a komplex számtest felett mindegy, hogy a polinomokat függvényeknek, vagy formális algebrai kifejezéseknek gondoljuk. A lényeg hogy egy  $n$ -ed fokú polinomot az  $n + 1$  együtthatója, definíció szerint, de az  $n + 1$  különböző helyen felvett helyettesítési értéke is egyértelműen meghatározza.

## 1.4. Az Euklideszi-algoritmus

Algoritmust keresünk polinomok legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének meghatározására. Ha egy pillanatra  $(p_1, \dots, p_n)$  jelöli az adott  $p_1, \dots, p_n$  polinomok legnagyobb közös osztóját, akkor nem nehéz meggondolni, hogy

$$((p_1, \dots, p_{n-1}), p_n) = (p_1, \dots, p_n).$$

Ezt  $n = 3, 4, \dots$  számokra alkalmazza azt kapjuk, hogy ha módszerünk van két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározására, akkor evvel már akárhány – persze véges sok – polinom legnagyobb közös osztója is meghatározható. Analóg módon ugyanez igaz a legkisebb közös többszörösre is. Azt gondoltuk meg tehát, hogy ha meg tudnánk határozni két polinom legnagyobb közös többszörösét és legkisebb közös osztóját, akkor ugyanezt már meg tudnánk tenni több polinom esetén is.

Az Euklideszi-algoritmus két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgál. Az eddig ismereteink szerint a  $p, q$  legnagyobb közös osztója a  $J(p, q)$  ideál legalacsonyabb fokú, normált tagja. Az Euklideszi-algoritmus egy véges sok lépésben végrehajtható algoritmus, egy a definíciót sokkal hatékonyabb eljárás, két polinom generálára főideál generáló elemének, azaz a legnagyobb közös osztónak a meghatározására.

Az algoritmus megértése előtt emlékeznünk kell arra, hogy ha  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  valamely polinomok, akkor  $J(p, q) = \{fp + gq : f, g \in \mathbb{F}[t]\}$  jelöli a  $p$  és a  $q$  polinomokat tartalmazó legszűkebb ideált. Világos, hogy ha  $r_1, r_2 \in J(p, q)$ , akkor  $J(r_1, r_2) \subseteq J(p, q)$ .

**1.33. állítás** (Euklidesz). *Legyen  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  nem zérus polinomok. Definiálja  $p_{-1} = p, p_0 = q$ . Folytatva, ha valamely  $i \geq 0$  számra  $p_{i-1}$  és  $p_i$  már definiált és  $p_i \neq 0$ , akkor a maradékos osztás szerint létezik egyetlen  $h_{i+1}, p_{i+1} \in \mathbb{F}[t]$  polinom, amelyre*

$$p_{i-1} = h_{i+1}p_i + p_{i+1}; \text{ ahol } \deg p_{i+1} < \deg p_i. \quad (\dagger)$$

*Mivel minden egyes lépésben csökken a fokszám, ezért van olyan  $s \geq 0$ , hogy  $p_s \neq 0$ , de  $p_{s+1} = 0$ .*

*Erre a  $p_s$  polinomra  $J(p_s) = J(p, q)$ , ezért  $p_s$  normáltja a  $p$  és a  $q$  polinomok legnagyobb közös osztója.*  $\lrcorner$

**Bizonyítás:** A fenti algoritmussal olyan  $p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_s, p_{s+1}$  polinomokat kapunk, amelyekre minden  $i = 0, \dots, s$  mellett a  $(\dagger)$  azonosság fennáll, és  $\deg p_{s+1} = -\infty$ , azaz  $p_{s+1} = 0$ .

A  $(\dagger)$  azonosság szerint, minden  $i = 0, 1, \dots, s$  mellett  $p_{i-1} \in J(p_i, p_{i+1})$ , amiből a  $J(p_{i-1}, p_i) \subseteq J(p_i, p_{i+1})$  tartalmazás adódik. Másrészt a  $(\dagger)$  azonosságot értelmezhetjük úgyis, hogy  $p_{i+1} \in J(p_{i-1}, p_i)$ , amiből persze  $J(p_i, p_{i+1}) \subseteq J(p_{i-1}, p_i)$  következik. Így minden  $i = 0, \dots, s$ -re végül is

$$J(p_{i-1}, p_i) = J(p_i, p_{i+1}).$$

Alkalmazva ezt minden  $i = 0, \dots, s$  mellett

$$J(p, q) = J(p_{-1}, p_0) = J(p_0, p_1) = J(p_1, p_2) = \dots = J(p_s, p_{s+1}) = J(p_s).$$

Most a legkisebb közös többszörös algoritmikus meghatározására törekszünk.

**1.34. állítás.** *Legyenek a  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok relatív prímek, és tegyük fel, hogy  $p \nmid qr$ . Ekkor  $p \mid r$ .*  $\lrcorner$

**Bizonyítás:** Mivel a  $p$  és a  $q$  polinomok relatív prímek, ezért a Bezout-azonosság szerint van  $f$  és  $g$  polinom, amelyekre  $fpr + gqr = r$ . A feltétel szerint  $qr$  a  $p$  többszöröse, így az iménti azonosság baloldala a  $p$  többszöröse, ami éppen azt jelenti, hogy  $p \mid r$ .

**1.35. állítás.** *Tekintsük a  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  normált polinomokat. Jelölje  $d$  a legnagyobb közös osztót, és  $m$  a legkisebb közös többszöröst. Ekkor*

$$d(t)m(t) = p(t)q(t).$$

**Bizonyítás:** Legyen  $p = dr_1$  és  $q = dr_2$ . Először megmutatjuk, hogy  $r_1$  és  $r_2$  relatív prímek. A Bezout-azonosság szerint valamely  $f, g$  polinomra  $d = fdr_1 + gdr_2$ . Kihasználva, hogy nullosztómentes gyűrűben nem zérus elemmel egyszerűsíteni lehet, kapjuk az  $1 = fr_1 + gr_2$  azonosságot. Ez azt jelenti, hogy  $r_1$  és  $r_2$  relatív prímek.

Most megmutatjuk, hogy

$$dr_1r_2 \quad (\dagger)$$

a legkisebb közös többszörös. Világos, hogy ez egy közös többszöröse a  $p, q$  polinomoknak. Tegyük fel, hogy  $s$  egy másik közös többszörös, azaz  $s = ps_1$  és  $s = qs_2$ . Ekkor  $dr_1s_1 = ps_1 = s = qs_2 = dr_2s_2$ , amiből újra a nullosztómentesség szerint

$$r_1s_1 = r_2s_2.$$

Na most, a fent kiemelt azonosság szerint  $r_1 \mid r_2s_2$ , ahol  $r_1$  és  $r_2$  relatív prímek. Ebből azonnal kapjuk, hogy  $r_1 \mid s_2$ . No de  $s = qs_2 = dr_2s_2$ , amiből már látszik, hogy  $s$  egy többszöröse a  $dr_1r_2$  polinomnak. Az is világos, hogy  $(\dagger)$  normált polinom, ez az  $m$  legkisebb közös többszörös. Innen  $d \cdot m = d(dr_1r_2) = (dr_1)(dr_2) = p \cdot q$  már nyilvánvaló.

A fenti állítás csak két polinomra igaz, többre nem, de nekünk csak két polinomra kell. Úgy interpretáljuk, hogy ha a szorzatot osztom maradékosan a legnagyobb közös osztóval, akkor a maradék minden zérus, és a hánnyados éppen a legkisebb közös többszörös. Azt gondoltuk meg tehát, hogy az Euklideszi-algoritmus módszert ad két polinom legkisebb közös többszörösének algoritmikus meghatározására is.

Visszatérve a szakasz elején felvettet gondolatra, ilyen módon véges sok lépésben végrehajtható algoritmust kapunk véges sok polinom legkisebb közös többszörösének meghatározására. Például öt polinom legkisebb közös többszöröséhez, egy Euklideszi-algoritmussal meghatározzuk az első kettő polinom legnagyobb közös osztóját, majd egy újabb maradékos osztással az első kettő legkisebb közös többszörösét. Ugyanezt teszem az így kapott és a harmadik polinommal, az eredmény az első három polinom legkisebb közös többszöröse. Az így kapott polinommal és a negyedik polinommal egy újabb Euklideszi-algoritmus és egy újabb maradékos osztás után kapjuk az első négy polinom legkisebb közös többszörösét, majd ennek eredményével és az ötödik polinommal mint két polinomnak a legkisebb közös többszörösével kapjuk az eredeti öt polinom legkisebb közös többszörösét.

## 1.5. Polinom faktorizáció

Kicsi korunk óta sulykolják belénk, hogy minden egész szám előáll, méghozzá lényegében csak egyféléképpen prímek szorzataként. Ha ismerjük két szám prímtényezős előállítását, akkor nagyon könnyű megmondani a két szám legkisebb közös többszörösét, vagy a legnagyobb közös osztóját. Evvel a probléma csak annyi, hogy nagyon nehéz megmondani két, esetleg jó nagy, szám prímtényezős előállítását, így még az egész számok gyűrűjében is az Euklideszi-algoritmus a megfelelő, véges sok lépésben, végrehajtható módszer a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös konkrét felírására.

Ebben a szakaszban azt mutatjuk meg, hogy prímtényezős előállításról szóló téTEL a polinomok gyűrűjében is igaz marad. Természetesen konkrét algoritmust nem adunk, hiszen ilyen még számokra sem igen van.<sup>8</sup>

**1.36. definíció** (reducibilis polinom). Egy polinomot *reducibilisnek* mondunk, ha előáll mint két legalább elsőfokú polinom szorzata. Egy nem reducibilis polinomot *irreducibilisnek* nevezünk.

Világos, hogy minden legfeljebb elsőfokú polinom tetszőleges test felett irreducibilis. A magasabb fokú polinomok esetében a probléma nagyban függ a testtől is, ahonnan a polinom együtthatói származnak. A következő állítás viszont minden test mellett igaz.

**1.37. állítás** (polinom faktorizáció). *Tetszőleges test feletti polinomgyűrűben, minden (normált) polinom előáll mint (normált) irreducibilis polinomok szorzata.*

*Bizonyítás:* Az előállítandó polinom foka szerinti teljes indukció. Elsőfokú polinom maga irreducibilis.

Most tegyük fel, hogy az állítás igaz  $n$ -nél alacsonyabb fokú polinomokra és lássuk be  $\deg p = n$  mellett, ahol  $n > 1$ . Ha  $p$  irreducibilis, akkor megint készen vagyunk. Ha  $p = fg$  valamely  $\deg f \geq 1$  és  $\deg g \geq 1$  mellett, akkor  $\deg f < n$  és  $\deg g < n$ . Az indukciós feltevés szerint  $f$  és  $g$ , emiatt  $p = fg$  is előáll irreducibilis polinomok szorzataként.

Érdemes látni, hogy ha a  $d$  polinom egy irreducibilis  $p$  polinom osztója, akkor csak  $\deg d = 0$ , vagy  $\deg d = \deg p$  lehetséges. Ezért egy tetszőleges  $f$  polinomra igaz, hogy vagy  $p|f$  vagy  $p$  és  $f$  relatív prímek. Ugyanis, ha az  $f$  és  $p$  polinomok  $d$  legnagyobb közös osztója nem 1, akkor csak  $d = p$  lehetséges, ergo  $p|f$ .

**1.38. állítás** (prím tulajdonság). *Legyen  $p \in \mathbb{F}[t]$  irreducibilis polinom, amelyre  $p|(f_1 \cdots f_n)$ , valamely  $f_j \in \mathbb{F}[t]$  polinomokra, ahol  $j = 1, \dots, n \geq 1$ . Ekkor létezik  $1 \leq j \leq n$ , amelyre  $p|f_j$ .*

*Bizonyítás:* A polinomok  $n$  száma szerinti indukció. Az  $n = 1$  eset semmitmondó módon teljesül. Tegyük fel, hogy igaz az állítás  $n$ -nél kevesebb polinomra, és lássuk be  $n$ -re. Itt  $n \geq 2$ . Induljunk ki tehát abból, hogy

$$p|(f_1 \cdots f_{n-1}) \cdot f_n$$

Ha  $p$  osztója lenne az  $f_1 \cdots f_{n-1}$  szorzatnak, akkor az indukciós feltevés szerint készen is lennének. Ha  $p$  nem osztója a szorzatnak, akkor  $p$  irreducibilis volta miatt relatív prímek. Ekkor az 1.34. állítás szerint  $p|f_n$ .

Az is igaz, hogy ha egy polinom reducibilis, akkor az nem prím, de ezt a gyakorlatokra hagyjuk. Összegében látjuk tehát, hogy a polinomok irreducibilitása és prím tulajdonsága azonos fogalmak.

Az irreducibilis polinomok prím tulajdonsága segítségével a polinomok faktorizáció egyértelműségét is igazolhatjuk.

**1.39. állítás.** *Legyen  $p \in \mathbb{F}[t]$  egy legalább elsőfokú normált polinom. Ekkor ezek sorrendjétől eltekintve egyértelműen léteznek legalább elsőfokú, normált, irreducibilis  $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{F}[t]$  polinomok, hogy  $p = q_1 \cdots q_s$ .*

A „sorrendtől eltekintés” alatt azt értjük, hogy ha  $p$  előáll

$$p_1 \cdots p_s = p = q_1 \cdots q_r$$

legalább elsőfokú, normált, irreducibilis polinomok szorzataként, akkor  $s = r$  és a  $p_1, \dots, p_s$  polinomok alkalmas átindexelése után  $p_j = q_j$ , minden  $j = 1, \dots, s$  mellett.

<sup>8</sup>Természetesen számokra működik az az algoritmus, amit általános iskolában tanultunk, csak annyira lassú, hogy egy nagy szám prímtényezős előállítását esetleg többszáz évig számolná a földkerekesség valamennyi számítógépe. Ez egy szép példája annak, mennyire hasznos lehet az a tudás, ami valaminek a nem tudásáról szól, hiszen emiatt tudunk biztonságos módon két számla között pénzt mozgatni. Lásd például: [https://en.wikipedia.org/wiki/RSA\\_\(cryptosystem\)](https://en.wikipedia.org/wiki/RSA_(cryptosystem))

*Bizonyítás:* Az 1.37. állítás szerint  $p$  előáll, mint normált, irreducibilis polinomok szorzata. Itt legalább egy polinom legalább elsőfokú, hiszen  $p$  legalább elsőfokú. Ha van a szorzat tagjai között nullafokú, akkor az csatlakoztatás során a normáltság szerint, ezért egyszerűen elhagyható. Meggondoltuk tehát, hogy  $p$  legalább elsőfokú, normált, irreducibilis polinomok szorzata.

Az unicitást, a felbontandó polinom fokszáma szerinti indukcióval igazoljuk: Ha a polinom elsőfokú, akkor a felbontás egyértelműsége is nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz az egyértelműség  $n$ -nél alacsonyabb fokszámú polinomokra, és tegyük fel, hogy  $\deg p = n > 1$ . Nézzük két lehetséges előállítást

$$p_1 \cdots p_s = p = q_1 \cdots q_r,$$

ahol  $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_r$  legalább elsőfokú, normált, irreducibilis polinomok. A  $q_1$  polinom osztója a jobboldalnak, ezért a baloldalnak is. A prím tulajdonság miatt, 1.34. állítás,  $q_1$  osztója az egyik baloldali polinomnak. Alkalmas átindexelés után feltehető, hogy  $q_1 | p_1$ . No de,  $p_1$  is irreducibilis, és  $\deg q_1 \geq 1$  miatt csak  $\deg q_1 = \deg p_1$  lehetséges, tehát a normáltság szerint  $q_1 = p_1$ . A polinomgyűrű nullosztó mentessége szerint az első polinomokkal egyszerűsíthetünk, ergo

$$p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_r,$$

is fennáll. A fenti polinom már  $n$ -nél alacsonyabb fokú, így az indukciós feltevés szerint  $s - 1 = r - 1$ , és alkalmas átindexelés után minden  $j = 2, \dots, s$  esetén is teljesül a  $p_j = q_j$  egyenlőség.

Az egész szakaszt összefoglalhatjuk így is:

**1.40. állítás.** *Minden legalább elsőfokú normált polinomhoz léteznek – még hozzá sorrendjüktől eltekintve egyértelműen léteznek – olyan  $q_1, \dots, q_s$  egymástól különböző, normált, irreducibilis polinomok, és olyan  $n_1, \dots, n_s$  pozitív egészek, amelyekre*

$$p(t) = q_1^{n_1}(t) \cdots q_s^{n_s}(t).$$

□

## 1.6. Mátrixok

**1.41. definíció** (mátrix). Egy tetszőleges test feletti mátrixnak nevezzünk, a test elemeiből képzett táblázatot. Ha  $m, n \in \mathbb{N}$  előre rögzített pozitív egészek és az  $A$  táblázatnak  $m$  sora és  $n$  oszlopa van, akkor azt mondjuk, hogy  $A$  egy  $m \times n$  méretű mátrix. Az  $\mathbb{F}$  test feletti  $m \times n$ -es mátrixok halmazát  $\mathbb{F}^{m \times n}$  módon jelöljük.

Ha  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  egy mátrix, akkor  $A_i$  jelöli az  $i$ -edik sort, ami persze egy  $1 \times n$ -es mátrix;  $A^j$  jelöli a  $j$ -edik oszlopot, ami persze egy  $m \times 1$ -s mátrix;  $A_i^j$  jelöli az  $i$ -edik sor  $j$ -edik elemét. Sokszor használjuk az  $A_{i,j} = A_i^j$  jelölést is.

Időnként, azt hangsúlyozandó hogy mátrixokról van szó a mátrixot jelölő betűt kapcsos zárójelbe teszem. Pl.  $[A] \in \mathbb{F}^{m \times n}$ .

A mátrixot a mérete és az elemei határozzák meg. Emiatt két mátrix akkor azonos, ha azonos méretűek, és a megfelelő elemeik is azonosak.

□

Az azonos típusú mátrixok között műveleteket definiálunk:

**1.42. definíció** (mátrixok összege). Rögzített  $m, n \in \mathbb{N}$  mellett, ha  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , akkor ezek összege az a  $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrix, amelyre

$$C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

minden  $i = 1, \dots, m$  és  $j = 1, \dots, n$ . Jelölés:  $C = A + B$ .

□

**1.43. állítás.** Az  $m \times n$  méretű mátrixok az fent definiált összeadás művelettel Abel-csoportot alkotnak. A  $[0]$ -val jelölt neutrális elem az az  $m \times n$ -s mátrix, amelynek minden eleme a test zérus eleme:

$$[0]_{i,j} = 0;$$

az  $[A]$  mátrix additív inverze az az  $[-A]$ -val jelölt  $m \times n$  méretű mátrix, amelyre

$$[-A]_{i,j} = -([A]_{i,j}).$$

□

Most definiáljuk egy számnak és egy mátrixnak a szorzatát.

**1.44. definíció** (szám és mátrix szorzata). Ha  $\alpha \in \mathbb{F}$  egy szám és  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  egy mátrix, akkor ezek szorzata az  $\alpha A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  módon jelölt mátrix, melynek elemeire

$$[\alpha A]_{i,j} = \alpha [A]_{i,j}.$$

Könnyen ellenőrizhetők a következő számolási szabályok:

**1.45. állítás.** Legyenek  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrixok, és  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  tetszőleges számok. Ekkor

1.  $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B;$
2.  $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A;$
3.  $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A);$
4.  $1A = A.$

Az utolsó két állítást, 1.43. és 1.45., együtt később úgy fogjuk fogalmazni, hogy adott test feletti tetszőleges méretű mátrixok vektorteret alkotnak. Ha az  $A_1, \dots, A_k$  azonos méretű mátrixok adottak, akkor tetszőleges  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  számok mellett értelmes az  $A_1, \dots, A_k$  mátrixoknak az  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  számokkal mint együtthatókkal képzett *lineáris kombinációja*:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k.$$

Minden eddig megértett dolog persze az  $m = 1$  speciális esetben, és az  $n = 1$  speciális esetben is igaz. Ha  $m = 1$ , akkor a mátrixot *sorvektornak*; ha pedig  $n = 1$ , akkor a mátrixot *oszlopvektornak* mondjuk.

Most a mátrixok között a szorzás műveletet definiáljuk.

**1.46. definíció** (mátrixok szorzata). Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$  és  $B \in \mathbb{F}^{k \times n}$  mátrix. Fontos, hogy  $A$  oszlopainak száma azonos  $B$  sorainak számával. Ezek  $C = AB$  szorzata egy  $C \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrix, melynek elemeit az alábbi egyenlőség definiálja

$$[C]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A]_{i,s} [B]_{s,j}.$$

Itt persze  $i = 1, \dots, m$  és  $j = 1, \dots, n$ .

Figyeljünk arra, hogy a fenti definícióban az  $A$  és  $B$  mátrixok sorrendje is fontos. Például, ha  $n \neq m$ , akkor  $BA$  nem is értelmes. Még  $m = n$  esetén is  $BA$  egy  $k \times k$  méretű mátrix, míg  $AB$  egy  $n \times n$  méretű mátrix, azaz az  $AB$  szorzatnak általában véve semmi köze a  $BA$  szorzathoz.

A bevezetett összeadás és szorzás műveletekre teljesül a disztributivitás is:

**1.47. állítás.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$ , valamint a  $B, C \in \mathbb{F}^{k \times n}$  mátrixok. Ekkor

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Hasonlóan, ha  $A, B \in \mathbb{F}^{m \times k}$ , valamint a  $C \in \mathbb{F}^{k \times n}$  mátrixok, akkor

$$(A + B)C = AC + BC.$$

*Bizonyítás:* Az első disztributivitást mutatjuk meg, a második evvel analóg. Világos, hogy minden két oldalon azonos méretű mátrixok vannak. minden szóba jövő  $i, j$  index mellett

$$\begin{aligned} [A(B + C)]_{i,j} &= \sum_{s=1}^k [A]_{i,s} [B + C]_{s,j} = \sum_{s=1}^k [A]_{i,s} ([B]_{s,j} + [C]_{s,j}) = \sum_{s=1}^k ([A]_{i,s} [B]_{s,j}) + ([A]_{i,s} [C]_{s,j}) = \\ &= \sum_{s=1}^k [A]_{i,s} [B]_{s,j} + \sum_{s=1}^k [A]_{i,s} [C]_{s,j} = [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j} = [AB + AC]_{i,j}. \end{aligned}$$

Ez éppen az  $A(B + C) = AB + AC$  mátrixazonosságot jelenti.

Szinte banalitás, de egy mátrix az elemei összesége, de a sorai összesége, sőt az oszlopai összesége is. A következő ultrafontos állítás arról szól, hogy a szorzás operációt hogyan kell látnunk attól függően, hogy a szorzat mátrixra, mint elemei összeségére, mint oszlopai összeségére, vagy mint sorainak összeségére gondolunk.

**1.48. állítás.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$  és  $B \in \mathbb{F}^{k \times n}$  mátrix. Jelölje  $C = AB$  ezek szorzatát ebben a sorrendben. Ekkor

1. A szorzat mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme, az  $A$  mátrix  $i$ -edik sorának és a  $B$  mátrix  $j$ -edik oszlopának, mint speciális mátrixoknak a szorzata. Magyarul: minden  $1 \leq i \leq m$  és  $1 \leq j \leq n$  mellett

$$[C]_{i,j} = [A]_i \cdot [B]^j.$$

2. A szorzat mátrix minden oszlopa az  $A$  mátrix oszlopainak a  $B$  mátrix megfelelő oszlopából vett elemekkel képzett lineáris kombinációja. Magyarul: minden  $1 \leq j \leq n$  mellett

$$[C]^j = \sum_{s=1}^k [B]_s^j [A]^s.$$

3. A szorzat mátrix minden sora a  $B$  mátrix sorainak az  $A$  mátrix megfelelő sorából vett elemekkel képzett lineáris kombinációja. Magyarul: minden  $1 \leq i \leq m$  mellett

$$[C]_i = \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s.$$

4. A szorzat mátrix az  $A$  oszlopaiból, és a  $B$  soraiból alkotott diádok összege. Magyarul:

$$[C] = \sum_{s=1}^k [A]^s [B]_s.$$

Diádnak nevezzük egy oszlop- és egy sorvektor szorzatát. Ha az oszlopnak és a sornak rendre azonosak az elemei, akkor szimmetrikus diádról beszélünk.

1. bizonysítása:  $[A]_i \cdot [B]^j = \sum_{s=1}^k [A]_{i,s} [B]_{s,j} = [C]_{i,j}$ .

2. bizonysítása:  $\left[ \sum_{s=1}^k [B]_s^j [A]^s \right]_i = \sum_{s=1}^k [B]_s^j [A]_i^s = \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s^j = [C]_{i,j} = [C]_i^j$  minden  $i$ -re.

3. bizonysítása:  $\left[ \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s \right]^j = \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s^j = [C]_{i,j} = [C]_i^j$  minden  $j$ -re.

4. bizonysítása:  $\left[ \sum_{s=1}^k [A]^s [B]_s \right]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [[A]^s [B]_s]_{i,j} = \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s^j = C_{i,j}$  minden  $i$ -re  $j$ -re.

**1.49. definíció** (Kronecker-delta, identitás mátrix). Kroencker-deltának nevezzük az alábbi egyszerű szimbólumot:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adott  $n \geq 1$  természetes számra az  $n \times n$  méretű identitás mátrix azaz  $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$  mátrix, amelyre

$$[I]_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrix és  $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$  méretű identitás mátrix, akkor  $A \cdot I = A$ . Hasonlóan, ha most  $I$  az  $m \times m$  identitás mátrixot jelöli, akkor pedig  $I \cdot A = A$  azonosság teljesül. Persze, ha  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  négyzetes mátrix és  $I \in \mathbb{F}^{n \times n}$  az ugyanilyen méretű identitás mátrix, akkor

$$IA = AI = A$$

is fennáll.

A mátrixok szorzásának legérdekesebb tulajdonsága a szorzás asszociativitása.

**1.50. állítás.** Legyen az  $A, B, C$  mátrixok úgy megadva, hogy  $AB$  is értelmes és  $BC$  is értelmes legyen, azaz  $A \in \mathbb{F}^{m \times k}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{k \times l}$ ,  $C \in \mathbb{F}^{l \times n}$ . Ekkor

$$A(BC) = (AB)C.$$

*Bizonyítás:* Először is azt vegyük észre, hogy ha az  $A$  és a  $C$  mátrixok egyike egy szám, és a másik két mátrix összeszorozható, akkor a mátrix szorzás definíciója szerint az állítás nyilvánvaló.

Másodszor azt vegyük észre, hogy minden két oldalon azonos méretű konkrétan  $m \times n$  méretű mátrixok szerepelnek.

Azt kell tehát még meggondolnunk, hogy az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme minden két oldalon ugyanaz. A jobboldalon ez

$$\begin{aligned} [AB]_i \cdot [C]^j &= \left( \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s \right) [C]^j = \sum_{s=1}^k ([A]_i^s [B]_s) [C]^j = \sum_{s=1}^k [A]_i^s \left( [B]_s [C]^j \right) \\ &= \sum_{s=1}^k [A]_i^s \left( \sum_{r=1}^l [B]_s^r [C]_r^j \right) = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^l [A]_i^s ([B]_s^r [C]_r^j). \end{aligned}$$

A baloldalon az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme hasonló számolgatással:

$$\begin{aligned} [A]_i [BC]^j &= [A]_i \left( \sum_{r=1}^l [B]^r [C]_r^j \right) = \sum_{r=1}^l [A]_i \left( [B]^r [C]_r^j \right) = \sum_{r=1}^l ([A]_i [B]^r) [C]_r^j \\ &\quad \sum_{r=1}^l \left( \sum_{s=1}^k [A]_i^s [B]_s^r \right) [C]_r^j = \sum_{r=1}^l \sum_{s=1}^k ([A]_i^s [B]_s^r) [C]_r^j. \end{aligned}$$

A testben fennálló asszociativitás és kommutativitás miatt a bal- és a jobboldali kifejezés azonos.

Ha tehát adottak az  $A_1, A_2, \dots, A_p$  mátrixok, úgy hogy a sorban egymás után következőknek értelmes a szorzata, akkor ezek bármilyen zárójelezésével képzett szorzata is értelmes, és ugyanazt a mátrixot eredményezi. Mint azt a számok esetén megszoktuk, használhatjuk az  $A_1 A_2 \dots A_p$  jelölést ezen mátrixok bármelyik zárójelezésével képzett szorzatára. Érdemes a fenti bizonyításból megjegyezni a formulát, amelyet három mátrix szorzatára kapunk:

$$[ABC]_{i,j} = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^l [A]_{i,s} [B]_{s,r} [C]_{r,j}.$$

Foglaljuk össze az eddigieket négyzetes mátrixok mellett:

**1.51. állítás.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$  természetes szám, és tekintsük az  $n \times n$  méretű mátrixok halmazát, ellátva ezt a halmazt a mátrix összeadással és a mátrixszorzással. Az  $(\mathbb{F}^{n \times n}, +, \cdot)$  algebrai struktúra egy egységelemes gyűrű.

Ez a gyűrű, az  $n > 1$  esetben biztosan nem kommutatív. Például  $n = 2$  mellett

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ amíg } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az sem igaz, hogy ez a gyűrű nullosztómentes lenne, hiszen például  $n = 2$  mellett az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix nyilván nem a zérus mátrix (az összeadásra nézve neutrális elem), de  $A \cdot A = 0$ . Ebből persze már az is következik, hogy a fenti  $A$  mátrixnak nincs a szorzásra nézve inverze, de ez e nélkül is nagyon egyszerűen látszik.<sup>9</sup> Gyakorlatként próbálunk magasabb  $n$  számok mellett is a kommutativitás és a nullosztómentesség hiányára példát találni.

<sup>9</sup>Ha  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  jobboldali inverze lenne akkor a jobb alsó sarokra figyelve  $0 \cdot b + 0 \cdot d = 1$  lenne, de egy testben  $1 \neq 0$ .

Nagyon fontos látni, hogy a kommutativitás hiánya, az eddigiek től eltérő számolási gyakorlatot eredményez. A számolás közben a mátrixok sorrendjén nem változtathatunk. Persze előfordul, hogy két mátrix szorzata nem függ a sorrendtől. Ilyenkor a két mátrixot egymással *felcserélhetőnek*, vagy *kommutálónak* mondjuk. Például, az identitás mátrixszal minden más mátrix kommutál. A mátrix azon elemeit, ahol a sor- és az oszlopindexek azonosak a *fődiagonálisbeli* elemeknek mondjuk. Egy mátrixot *diagonális alakúnak* mondunk, ha minden nem zérus eleme a fődiagonálisában van. Az is világos, hogy a diagonális mátrixok egymással kommutálnak. Fontos része az első féléves anyagnak, hogy ha két négyzetes mátrix szorzata az identitás mátrix, akkor e két mátrix egymással kommutál. Ez az eredmény távolról sem nyilvánvaló, és most nem is tudjuk belátni, ehhez már szükség van a lineáris függetlenség fogalmára vagy a Gauss–Jordan eliminációs algoritmusra, amiket majd később vezetünk be.

Nagyon is triviális mégis érdemes észrevenni, hogy a fentiek  $n = 1$  esetben nem jelentenek problémát. Ilyenkor az  $1 \times 1$ -es mátrixok tere voltaképpen azonos az  $\mathbb{F}$ -testtel, hiszen csak az a különbség, hogy egy testbeli  $a$  elemet  $[a]$  módon írjuk. A szorzás és az összeadás definíciója ugyanazt adja, ha mint a testbeli elemre, vagy az ebből képzett  $1 \times 1$ -es mátrixra gondolunk.

Az  $n \times n$ -es négyzetes mátrixok másik érdemleges részstruktúrája az

$$\mathcal{F} = \{c \cdot I : c \in \mathbb{F}\}.$$

Itt  $I$  az  $n \times n$  méretű identitás mátrix, tehát  $\mathcal{F}$  elemei azon diagonális alakú mátrixok, ahol minden elem a diagonálisban azonos. Világos, hogy két ilyen mátrix összege és szorzata is ilyen marad:

$$aI + bI = (a + b)I \text{ és } aI \cdot bI = (ab)I.$$

Ez azt jelenti, hogy az  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  struktúra egy egységelemes gyűrű. Világos, hogy itt bármely két elem kommutál, ergo egy kommutatív egységelemes gyűrűvel állunk szemben és az is teljesen nyilván való, hogy minden nem zérus elemek van a szorzásra nézve inverze. Azt kaptuk tehát, hogy a fenti  $\mathcal{F}$  minden  $n$  mellett egy test.

## 1.7. A komplex számok mint mátrixok

**1.52. definíció** (Izomorf testek). Legyenek  $\mathbb{F}$  és  $\mathbb{G}$  testek. Azt mondjuk, hogy a két test *izomorf* egymással, ha létezik közük *művelettartó bijekció*, azaz létezik

$$\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$$

bijekció, amely tartja a műveleteket is, azaz

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ és } \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

A művelettartó bijekciót *izomorfizmusnak* nevezzük. □

Az izomorf testek között nem teszünk különbséget. Úgy tekintjük őket, hogy csak jelölésükben különböznek. Például, ha az  $\mathbb{R}$  valós számokra gondolunk, akkor a  $2 \times 2$ -es diagonális alakú valós mátrixok közül azok, ahol a diagonális minden eleme azonos, a valós testtel izomorf testet alkot.

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \text{ és } \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}, \text{ ahol } \varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

A  $2 \times 2$ -es valós mátrixok egységelemes gyűrűjében tehát  $\mathcal{R}$  egy olyan részgyűrű, ami még test is, és izomorf az  $\mathbb{R}$  valós számtesttel. Voltaképpen azt csináltuk, hogy a valós számtestet beágyaztuk a  $2 \times 2$ -es mátrixok közé, azaz egy  $a$  valós számot az  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  mátrixszal reprezentálunk (írunk le).

A  $2 \times 2$  méretű valós mátrixok még sok-sok más testet is tartalmaznak.<sup>10</sup> Ezek közül számunkra a legfontosabb a következő részhalmaz.

**1.53. definíció-állítás** (komplex számtest). Jelölje két tetszőleges  $a, b \in \mathbb{R}$  valós szám mellett  $M_{a,b}$  az  $(a, b)$  valós számpárhoz tartozó  $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  mátrixot. Tekintsük az ilyen típusú mátrixok  $\mathcal{C}$ -vel jelölt halmazt:

$$\mathcal{C} = \{M_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

E részhalmaz

<sup>10</sup>Karakterizációjukat lásd: (Ebbinghaus és tsai. 1991)-ben.

1. zárt a mátrix összeadásra és a mátrix szorzásra, így a  $2 \times 2$ -es valós mátrixok egy speciális egységelemes részgyűrűje.

2. E részgyűrűben a mátrix szorzás kommutatív művelet, és

3. és e részgyűrűben minden nem zérus mátrixnak van inverze is a mátrixszorzás műveletre nézve.

Eszerint a  $(\mathcal{C}, +, \cdot)$  algebrai struktúra egy test. Ezt a testet nevezzük a *komplex számtestnek*, vagy a *komplex számtest mátrix reprezentációjának*.

*Bizonyítás:* Az  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  valós számok mellett

$$M_{a,b} + M_{c,d} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = M_{a+c,b+d}$$

és hasonlóan a mátrix szorzás definíciója szerint

$$M_{a,b} \cdot M_{c,d} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} = M_{ac-bd,ad+bc}.$$

Mivel  $M_{1,0}$  a  $2 \times 2$ -es identitás mátrix, ezért  $\mathcal{C}$  a mátrix összeadásra és a mátrixszorzásra nézve egységelemes gyűrűt alkot.

A szorzás kommutativitája is látszik a fenti számolásból, hiszen

$$M_{c,d} \cdot M_{a,b} = M_{ca-db,cb+da} = M_{ac-bd,ad+bc} = M_{a,b} \cdot M_{c,d}$$

a valós számok összeadásának és szorzásának kommutativitása miatt.

Legyen most  $M_{a,b}$  egy nem zérus mátrix, így  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Világos, hogy

$$M_{a,b} \cdot M_{a,-b} = M_{a^2+b^2,0} = (a^2 + b^2) M_{1,0} = (a^2 + b^2) I.$$

Ebből már látszik is, hogy  $M_{a,b} \cdot M_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}} = I$ . Ez a már igazolt kommutativitással éppen azt jelenti, hogy minden nem zérus elemnek van multiplikatív inverze, ergo  $\mathcal{C}$  valóban test.

Ebben a  $\mathbb{C}$  testben az  $M_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  elem olyan, hogy a négyzete a szorzásra nézve reprodukáló elemek az összeadásra nézve képzett inverze:

$$M_{0,1} \cdot M_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{-1,0} = -I.$$

Ez a tulajdonság azért figyelemre méltó, mert ha a szokásoknak megfelelően a test multiplikatív neutrális elemét az 1 szimbólummal jelöljük, akkor olyan elemet találtunk a komplex számtestben, amelynek négyzete éppen  $-1$ . Tudjuk, hogy a valós számtest esetében ez nem lenne lehetséges.

Tekintsük most valamely  $a, b \in \mathbb{R}$  mellett az

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

felbontást. Ha bevezetjük az  $i = M_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  jelölést, akkor minden komplex szám

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

alakban írható. Emlékezzünk arra, hogy a valós számtest is részhalmaza a komplex számtestnek abban az értelemben, ha minden  $a$  valós számot az  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  mátrixszal reprezentálunk. ( $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$ ). Ha tehát megegyezünk abban, hogy az  $a$  valós számra nézve mi az  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  mátrixra gondolunk,<sup>11</sup> akkor azt kapjuk, hogy minden komplex szám

$$M_{a,b} = a + ib$$

<sup>11</sup>Kicsit pontosabban: a valós számok  $2 \times 2$ -es mátrix reprezentációját használjuk.

alakú, ahol  $i$  egy olyan komplex szám, amelyre  $i^2 = -1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ezt nevezzük a komplex szám *normálalakjának*.

Ne felejtsük a műveleteket: Láttuk, hogy  $M_{a,b} + M_{c,d} = M_{a+c,b+d}$ . Ez a normálalak reprezentáció mellett azt jelenti, hogy az összeadás definíciója csak

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad (\dagger)$$

lehet. Hasonlóan emlékszünk, hogy  $M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{ac-bd,ad+bc}$ , ami normálalak reprezentáció mellett az

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad (\ddagger)$$

definíciót eredményezi.

A következőket gondoltuk meg:

**1.54. definíció-állítás** (komplex számtest a normálakkal). Definiálja

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

a komplex számok normálalakját. Az összeadás műveletet definiálja  $(\dagger)$ , és a szorzás műveletet definiálja  $(\ddagger)$ . Az így kapott algebrai struktúra test, amely izomorf a komplex számtest mátrix reprezentációjával. Az izomorfizmust a

$$\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + ib$$

művelettartó bijekció hozza létre.  $\square$

Ha már megértettük, hogy a komplex számok normálalak reprezentációja testet alkot, akkor a  $(\dagger)$  és  $(\ddagger)$  definíciók megjegyzése nagyon könnyű. Más nem is lehet: Az összeadáshoz  $(\dagger)$  csak el kell végezni a műveletet majd kiemelni  $i$ -t, a szorzás definíciójához  $(\ddagger)$  az  $i$  kiemelése után jutunk.

## 1.8. A komplex számok abszolútértéke

A valós számokra jól ismert abszolútérték függvényt terjesztjük ki komplex számtest elemeire.

**1.55. definíció** (valós rész, képzetes rész). Legyen  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = a + ib$ . Ekkor  $a \in \mathbb{R}$  a  $z$  komplex szám *valós része*, és  $b \in \mathbb{R}$  a  $z$  komplex szám *képzetes része*.  $\Re z$  jelöli a valós részt, és  $\Im z$  a képzetes részt.

**1.56. definíció** (konjugált). Legyen  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = a + ib$ . Ekkor  $z$  *konjugáltja*  $\bar{z} = a - ib$ .

A konjugált definíciója alapján, egyszerű számolhatással kapjuk az alábbi azonosságokat.

**1.57. állítás.** Minden  $z \in \mathbb{C}$  komplex szám mellett fennállnak a konjugálás következő szabályai:

$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad z + \bar{z} = 2\Re z, \quad z - \bar{z} = 2i\Im z, \quad z \in \mathbb{R} \text{ akkor és csak akkor, ha } z = \bar{z}, \quad z\bar{z} = (\Re z)^2 + (\Im z)^2 \geq 0.$$

Az összeadás és szorzás művelet is felcserélhető a konjugálással, azaz bármely két  $z, w \in \mathbb{C}$  komplex szám esetén igaz, hogy

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad \text{feltéve, hogy } w \neq 0.$$

Most használjuk először a valós számok rendezését. Az  $\mathbb{R}$  testen a  $\geq$  reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációt az algebrai műveletekkel a következő két axióma kapcsolja össze: minden  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mellett

$$a \geq b \text{ esetén } a + c \geq b + c, \quad a, b \geq 0 \text{ esetén } ab \geq 0.$$

Az  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  azonosság szerint, az  $a, b$  nem negatív valós számok mellett  $a \geq b$  akkor és csak akkor, ha  $a^2 \geq b^2$ . Speciálisan  $a^2 = b^2$  akkor és csak akkor, ha  $a = b$ .

**1.58. definíció** (komplex szám abszolútértéke). Legyen  $z \in \mathbb{C}$  egy komplex szám. Láttuk, hogy  $z\bar{z} \in \mathbb{R}$  és  $z\bar{z} \geq 0$ . E szám négyzetgyökét nevezzük a  $z$  komplex szám *abszolútértékének*. Jelölés:  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .

Ha speciálisan  $\Im z = 0$ , tehát ha  $z$  egy valós szám, akkor e definíció szerint

$$|z| = \sqrt{z^2} = \begin{cases} z & , \text{ha } z \geq 0 \\ -z & , \text{ha } z < 0, \end{cases}$$

ami egybeesik a valós számok abszolútértékének definíciójával. A fentiből azonnal látszik, hogy minden  $a \in \mathbb{R}$  valós szám mellett  $a \leq |a|$ .

Mivel  $z\bar{z} = \bar{z}z$ , ezért  $|z| = |\bar{z}|$ , azaz komplex számnak és konjugáltjának azonos az abszolútértéke. Szokásos technika, hogy a komplex szám abszolútértékére vonatkozó állításokat, az abszolútértékek négyzetére fogalmazzuk át. Ez megtehető, hiszen nem negatív valós számok egyenlősége és azok négyzetének egyenlősége azonos fogalmak. Például  $|z| = 0$ , akkor és csak akkor, ha  $z\bar{z} = 0$ , ami akkor és csak akkor teljesül ha  $z = 0$ . Hasonlóan, ha  $z, w$  komplex számok, akkor  $|zw|^2 = zw(\bar{z}\bar{w}) = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$ , ergo  $|zw| = |z||w|$ .

Világos, hogy  $|\Re z|^2 \leq (\Re z)^2 + (\Im z)^2 = z\bar{z} = |z|^2$ , emiatt  $|\Re z| \leq |z|$ . Ezt alkalmazva tetszőleges  $z, w$  komplex számok mellett

$$|\Re(z\bar{w})| \leq |z\bar{w}| = |z||w|,$$

amit *Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenségek* mondunk. Az abszolútérték legfontosabb tulajdonságai:

**1.59. állítás.** Legyen  $z, w \in \mathbb{C}$  komplex szám. Ekkor

1.  $|z| = 0$  akkor és csak akkor, ha  $z = 0$ ,
2.  $|zw| = |z||w|$ ,
3.  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

□

Az utolsó egyenlőtlenséget *háromszög-egyenlőtlenségeknek* nevezik. Egy kevésbé népszerű, de ekvivalens alakja

$$|(|z| - |w|)| \leq |z - w|.$$

*Bizonyítás:* Csak a háromszög-egyenlőtlenséget nem gondoltuk meg eddig:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{w}\bar{w} = \\ &|z|^2 + |w|^2 + 2\Re(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\Re(z\bar{w})| \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Az első egyenlőtlenség, hogy egy valós szám nem nagyobb az abszolútértékénél, a második egyenlőtlenség pedig a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség.

A kevésbé populáris alakhoz használjuk a már igazolt egyenlőtlenséget:  $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$ , majd ugyanezt a  $z$  és a  $w$  számok felcserélése után mégegyeszer felírva

$$|z| - |w| \leq |z - w| \quad \text{és} \quad |w| - |z| \leq |w - z|.$$

Na most, azt ugyan nem tudjuk, hogy a  $||z| - |w||$  szám a baloldali számok közül melyikkel azonos, de az egyikkel biztosan egybeesik. No de mindegy is melyikkel, hiszen a jobboldal minden esetben a kívánt  $|z - w|$ .

A definíció szerint  $|z|^2 = \bar{z}z$ . Véve minden oldal abszolútértékét, azt kapjuk, hogy<sup>12</sup>,

$$|\bar{z}z| = |z|^2.$$

Persze valós számok esetén az iménti állítás 1., 2., 3. pontját korábban is sokszor használtuk már. Vegyük észre, hogy fent a valós esetet is újra igazoltuk.

<sup>12</sup>Ezt az azonosságot a komplex számok  $C^*$ -azonosságának mondjuk

## 1.9. A komplex számok trigonometrikus alakja

Láttuk, hogy  $z, w \in \mathbb{C}$  komplex szám mellett

$$\Re(z+w) = \Re z + \Re w \quad \text{és} \quad \Im(z+w) = \Im z + \Im w.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az  $a + ib$  komplex számot azonosítjuk az  $\mathbb{R}^2$  sík  $(a, b)$  pontjával, akkor egyszerűen koordinátánként kell összeadni a komplex számokat, minthá a  $z$  komplex szám az origóból az  $(a, b)$  pontra mutató vektor lenne.

A kérdés, hogy ha így képzeljük a komplex számokat, akkor a komplex számok szorzása mit jelent a komplex számoknak megfeleltetett vektorok körében?

**1.60. definíció-állítás** (komplex szám trigonometrikus alakja). Legyen  $z \in \mathbb{C}$  egy nem zérus komplex szám. Ekkor létezik  $\varphi \in \mathbb{R}$  valós szám, hogy

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\dagger)$$

Egy ilyen  $\varphi$  számot nevezünk a  $z$  komplex szám egy *argumentumának*, és néha  $\arg z$  módon jelöljük. A  $(\dagger)$  alak a komplex szám *trigonometrikus alakja*.

Két nem zérus komplex szám egyenlősége azt jelenti, hogy az abszolútértékük azonos, és az argumentumaiak különbsége  $2\pi$  többszöröse.

*Bizonyítás:* Világos, hogy ha  $z = a + ib \neq 0$ , akkor  $a^2 + b^2 > 0$ , így

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Ha  $x$  jelöli a fenti zárójelben a valós részt és  $y$  a képzetes részt, akkor  $x^2 + y^2 = 1$ . Így az  $(x, y)$  pár a sík egységkörének egy pontja. A trigonometrikus függvények középiskolai definíciója szerint, ha  $\varphi$  jelöli az  $(1, 0)$  pontot az  $(x, y)$  ponttal összekötő ív hosszát, – az óramutató járásával ellentétes irányban mérve a körcikk peremén – akkor  $x = \cos \varphi$  és  $y = \sin \varphi$ .

**1.61. állítás.** Legyenek  $a, z, w \in \mathbb{C}$  nem nulla komplex számok a trigonometrikus alakjukban felírva, azaz

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Ekkor a két szám szorzatának abszolútértéke az abszolútértékek szorzata és a szorzat egy argumentumát is megkapjuk mint az argumentumok összege. Magyarázat:

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Speciálisan minden  $n \in \mathbb{Z}$  egész számra

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

A szakasz bevezetőjében feltett kérdésre tehát a válasz, hogy a  $z$  komplex számmal való szorzást a sík olyan geometriai transzformációjának képzelhetjük, amely egy  $\arg z$  szöggel való forgatásból és egy  $|z|$ -szeres origó középpontú nyújtásból áll.

**1.62. definíció** (egységgöök). Legyen az  $n \in \mathbb{N}$  természetes szám rögzítve. Tetszőleges  $k = 0, 1, \dots, n-1$  mellett jelölje

$$\epsilon_k^{(n)} = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n}.$$

az úgynevezett  $n$ -edik komplex egységgöököt.

Az  $n$ -edik komplex egységgöök a komplex számsík pontosan  $n$  különböző pontját alkotják, és az  $n$ -edik hatványuk 1, azaz  $(\epsilon_k^{(n)})^n = 1$ . Emiatt minden  $w \neq 0$  komplex szám mellett pontosan  $n$  komplex gyöke van a  $t^n - w$  polinomnak. Ha ugyanis  $w$  trigonometrikus alakja  $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$ , akkor legyen például  $z_0 = \sqrt[n]{|w|}(\cos(\psi/n) + i \sin(\psi/n))$ , és így  $(z_0 \epsilon_k^{(n)})^n = w$  minden  $k = 0, \dots, n-1$  szám mellett.

## 1.10. Polinom faktorizáció a komplex- és a valós számtest felett

A komplex számtest felett minden nem konstans polinomnak van gyöke. Formálisabban:

**Az algebra alaptétele.** *Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke. Azaz ha  $p(t) \in \mathbb{C}[t]$  egy nem konstans polinom, akkor létezik  $z \in \mathbb{C}$  komplex szám, amelyre  $p(z) = 0$ .*

Az állítást itt nem tudjuk igazolni és egyelőre érdemes bizonyítás nélkül elfogadni. Illusztrációként megérthető, hogy miért igaz  $p(t) = \alpha_0 + t^n$  alakú polinomra. A felépítés jelen pontján tekintsük a komplex számtest egy még nem igazolt tulajdonságának.

Most összefoglaljuk, hogy az algebra alaptétele mit jelent a komplex test feletti, majd a valós test feletti polinomok faktorizációjára nézve. Láttuk, hogy minden normált polinom előáll mint normált irreducibilis polinomok szorzata, emiatt azt kell meggondolnunk, hogy mik az irreducibilis polinomok.

**1.63. állítás.** *A  $\mathbb{C}[t]$  polinomgyűrűben minden legalább másodfokú polinom reducibilis.* □

*Bizonyítás:* Legyen  $p$  egy legalább másodfokú komplex polinom. Az algebra alaptétele miatt van gyöke, és tudjuk hogy a gyöktényező minden kiemelhető. Így azt kapjuk, hogy  $p(t) = (t - z) h(t)$  alakú, emiatt  $2 \leq \deg p = 1 + \deg h$ , ergo  $p$  valóban előállt mint két legalább elsőfokú polinom szorzata. ▪

A polinomok szorzattá bontásáról szóló tételek a komplex számtest feletti speciális esete tehát:

**1.64. állítás.** *A  $\mathbb{C}[t]$  polinomgyűrű minden legalább elsőfokú normált polinomjához léteznek a sorrendjüktől eltekintve egyetlen  $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{C}$  egymástól különböző komplex számok, és léteznek  $n_1, \dots, n_s$  pozitív egészek, amelyekre*

$$p(t) = (t - z_1)^{n_1} \cdots (t - z_s)^{n_s}. \quad \square$$

Persze ez azt jelenti, hogy egy  $n$ -ed fokú komplex polinomnak minden pontosan  $n$  komplex gyöke van, ha a gyökök számát multiplicitással számoljuk. Az állítást egy kicsit egyszerűbben úgy is fogalmazhatjuk, hogy minden nem konstans komplex polinom előáll mint első fokú komplex polinomok szorzata. Az iménti mondat nyilván nem igaz a „komplex” szót a „valós” szóra cserélve, ugyanis minden negatív diszkriminánsú másodfokú valós polinom jó is ellenpéldának. Ez a jelenség az oka annak, hogy a komplex számtest felett sokkal kényelmesebb dolgoznunk mint a valós számok felett.

Most nézzük, hogy mit jelent az algebra alaptétele a valós test feletti polinom gyűrűre nézve.

**1.65. állítás.** *Legyen  $p(t) \in \mathbb{C}[t]$  a komplex polinomgyűrű egy olyan eleme, amelynek minden együtthatója valós. Ekkor a  $z \in \mathbb{C}$  komplex szám pontosan akkor gyöke  $p$ -nek, ha  $\bar{z}$  is gyöke  $p$ -nek. Sőt, ha  $z$  egy  $k$ -szoros multiplicitású gyök, akkor  $\bar{z}$  is pontosan  $k$ -szoros multiplicitású gyök.* □

*Bizonyítás:* A  $p$  polinomra tehát  $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$ , ahol  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . A konjugálás tulajdonságai szerint egy  $z$  komplex számra

$$p(z) = \overline{\sum_{j=0}^n \alpha_j z^j} = \sum_{j=0}^n \overline{\alpha_j z^j} = \sum_{j=0}^n \bar{\alpha}_j \bar{z}^j = \sum_{j=0}^n \alpha_j \bar{z}^j = p(\bar{z}).$$

Emiatt valós együtthatós  $p$  polinomra és  $z$  komplex számra  $p(z) = 0$  akkor és csak akkor, ha  $p(\bar{z}) = 0$ .

Ha a gyök speciálisan valós szám, akkor a multiplicitásra vonatkozó állítás semmit mondó. Ha most  $z$  egy nem valós komplex gyök, akkor  $p(t) = (t - z)(t - \bar{z}) h(t)$ , ahol  $h(z) = 0$  pontosan akkor, ha  $h(\bar{z}) = 0$ . Így, ha  $z$  egy  $k$  szoros gyök, akkor

$$p(t) = (t - z)^k (t - \bar{z})^k \cdot h(t)$$

alakú, ahol  $h$ -nak már sem  $z$  sem  $\bar{z}$  nem gyöke. ▪

Minden valós együtthatós polinom előáll mint első vagy másodfokú polinomok szorzata:

**1.66. állítás.** *Az  $\mathbb{R}[t]$  polinomgyűrű minden legalább elsőfokú normált polinomjához léteznek  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$  valós számok, léteznek  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_s, \beta_s$  valós együttható párok, és léteznek  $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s$  pozitív egészek úgy, hogy*

$$p(t) = (t - x_1)^{n_1} \cdots (t - x_r)^{n_r} \cdot (\alpha_1 + \beta_1 t + t^2)^{m_1} \cdots (\alpha_s + \beta_s t + t^2)^{m_s}.$$

Itt  $r, s \geq 0$ , de  $r + s > 0$ , és  $n_1 + \dots + n_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = \deg p$ , továbbá a jobboldalon szereplő másodfokú polinomok irreducibilisek. □

**Bizonyítás:** Tekintsük a  $p$  polinomot mint a komplex számtest feletti polinomgyűrű egy elemét, és alkalmazzuk a komplex polinom faktorizációról szóló tételeit. A  $p$  így előáll mint első fokú, esetleg komplex polinomok szorzata. A gyököket osszuk két része. Legyenek  $x_1, \dots, x_r$  a különböző valós gyökök, amelyek multiplicitása rendre  $n_1, \dots, n_r$ . Legyenek  $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_s, \bar{z}_s$  a különböző nem valós de komplex gyökök, ahol  $m_1, \dots, m_s$  rendre a konjugált gyökpárok multiplicitása. Így

$$p(t) = (t - x_1)^{n_1} \cdots (t - x_r)^{n_r} \cdot ((t - z_1)(t - \bar{z}_1))^{m_1} \cdots ((t - z_s)(t - \bar{z}_s))^{m_s}.$$

Világos, hogy  $r, s \geq 0$ , de  $r + s > 0$ , és  $n_1 + \cdots + n_r + 2(m_1 + \cdots + m_s) = \deg p$ . A komplex faktorokra végezzük el a szorzást, így  $(t - z_k)(t - \bar{z}_k) = t^2 - 2\Re z_k t + |z_k|^2$ . Így  $\alpha_k = |z_k|^2$  és  $\beta_k = -2\Re z_k$ , választással készen is vagyunk.

A fenti állításból két dollog azonnal látszik. Az első, hogy *valós számtest felett minden legalább harmadfokú polinom reducibilis*, a második pedig, hogy ha egy valós együtthatós polinomnak nincs valós gyöke, akkor csak páros fokú lehet, vagy ami ugyanaz:  *minden páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke*.



## 2. fejezet

# A vektortér fogalma

A LINEÁRIS ALGEBRA kezdő fejezetéhez érkeztünk, miután áttekintettük azokat az általános algebrai ismerteteket, amelyek nélkül nem tárgyalhatók a lineáris algebrához szükséges gondolatok.

**2.1. definíció** (Vektortér). Legyen adva egy  $\mathbb{F}$  test, és egy  $V$  halmaz. Tegyük fel, hogy adott egy  $+ : V \times V \rightarrow V$  két változós művelet (ezt összeadásnak nevezzük) és adott egy  $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$  szintén kétváltozós művelet (ezt skalárral való szorzásnak, vagy számmal való szorzásnak mondjuk). A  $V$ -t az  $\mathbb{F}$  test feletti vektortérnek nevezzük, ha  $(V, +)$  egy Abel-csoport, és a számmal valós szorzás műveletre teljesülnek az alábbi axiómák:

1. minden  $\alpha \in \mathbb{F}$  és minden  $u, v \in V$  mellett  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ ,
2. minden  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  és minden  $u \in V$  mellett  $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ ,
3. minden  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  és minden  $u \in V$  mellett  $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ ,
4. minden  $u \in V$  esetén  $1 \cdot u = u$ .

□

Nagyon hasonlóan ahhoz, ahogyan testben is meggondoltuk igazak a következő számolási szabályok. minden  $\alpha \in \mathbb{F}$  mellett

- i.)  $\alpha \cdot 0 = 0$ ,
- ii.)  $0 \cdot v = 0$ ,
- iii.)  $(-1) \cdot v = -v$ ,
- iv.)  $\alpha \cdot v = 0$  esetén  $\alpha = 0$  vagy  $v = 0$ .

A számmal való szorzás  $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$  művelet eredményének szokásos rövidítése, hogy a kissé körülmenyes  $\alpha \cdot v$  helyett csak  $\alpha v$ -t írunk. Az is előfordul, különösen amikor egy konkrét vektortér konkrét műveletéről van szó, hogy az  $\alpha v$  és a  $v\alpha$  jelölést is ugyanarra az  $\alpha \cdot v \in \mathbb{F}$  elemre használjuk.

Alapvető példa vektortérre a mátrixok tere. Az  $m \times n$  méretű mátrixok  $\mathbb{F}^{m \times n}$  halmaza a mátrix összeadással és a számmal valós szorzással vektorteret alkot az  $\mathbb{F}$  test felett. Ha  $n = 1$ , akkor kapjuk a az oszlopvektorok  $\mathbb{F}^m$  terét, ami így szintén egy  $\mathbb{F}$  feletti vektortér. Speciális esetként  $\mathbb{R}^m$  egy  $\mathbb{R}$  feletti vektortér,  $\mathbb{C}^m$  egy  $\mathbb{C}$  feletti vektortér.

Fontos példa még, egy adott  $X$  halmazból az  $\mathbb{F}$  testbe képező összes függvények halmaza a függvények között szokásos összeadás műveettel, és számmal való szorzással. Ezt a teret  $\mathbb{F}^X$  módon szokás jelölni, és minden nehézség nélkül ellenőrizhető, hogy  $\mathbb{F}^X$  egy  $\mathbb{F}$  feletti vektortér. Hasonlóan látszik, hogy például az összes valós-valós folytonos függvények is egy  $\mathbb{R}$  feletti vektorteret alkotnak, vagy ha ezek közül csak a differenciálható függvényekre szorítkozunk, akkor ezen függvénytér is vektortér az  $\mathbb{R}$  test felett.

Rögzíténünk kell magunkban, hogy a vektortér definíciójában a test is fontos szerepet játszik. Más test felett ugyanaz az Abel-csoport már egy másik vektortérhez tartozik. Világos például, hogy  $\mathbb{R}$  az  $\mathbb{R}$  test felett vektortér a szokásos műveletekkel, de látjuk majd, hogy egészen más tulajdonságai vannak annak a vektortérnek, amit akkor kapunk, ha az  $\mathbb{R}$  valós számok Abel-csoportját, mint a  $\mathbb{Q}$  racionális test feletti vektortérnek tekintjük.

Játékos példaként gondoljuk meg, hogy a pozitív valós számok egy az  $\mathbb{R}$  feletti vektorteret alkot a következő fura műveletekkel: Tetszőleges  $a, b$  pozitív valós szám mellett  $a \# b = a \cdot b$ , majd tetszőleges  $\alpha$  valós szám és  $a$  pozitív valós számra legyen  $\alpha * a = a^\alpha$ .<sup>1</sup>

A vektorteret sokszor csak az additív művelet alaphalmazával jelöljük. Kicsit pontosabb ha az alaphalmaz mellett a testet is konkrétan specifikáljuk, de sokszor feltesszük, hogy a szövegkörnyezetből nyilvánvaló, hogy mely testre gondolunk. Hasonlóan pontosabb lenne a két műveletet is minden kijelölni, mikor egy vektortérre hivatkozunk, de ha világos, hogy mi a vektortérbeli elemek között az additív művelet, és hogy mit jelent egy test elemeivel szorozni, akkor elhagyjuk a műveletek kijelölését. A leg pontosabb, – de persze a legkörülmenyesebb – jelölés az lenne, hogy pl. „tekintsünk egy  $(V, +, \cdot)$  vektorteret az  $\mathbb{F}$  test fölött.” Ehelyett sokszor csak azt mondjuk, hogy „legyen  $V$  egy vektortér”. Ilyenkor a szövegkörnyezetből világosnak kell lennie, hogy mi a test, mit jelent a számmal való szorzás, és mi az összeadás a  $V$  halmazon.

## 2.1. Vektortér altérei

**2.2. definíció** (altér). Legyen  $(V, +, \cdot)$  egy vektortér az  $\mathbb{F}$  test felett. Egy  $M \subseteq V$  részhalmaz a  $V$  vektortér altére, ha  $M$  maga is vektorteret alkot a  $V$ -ben definiált additív műveettel, és a  $V$ -ben definiált számmal való szorzással.

**2.3. állítás.** Legyen  $V$  egy vektortér, és  $M \subseteq V$  egy részhalmaza. Az  $M$  pontosan akkor altér, ha

1.  $0 \in M$ ,
2.  $u, v \in M$  esetén  $u + v \in M$ ,
3.  $u \in M$  és  $\alpha \in \mathbb{F}$  esetén  $\alpha v \in M$ .

Tetszőleges  $V$  vektortérre a  $\{0\}$  és maga  $V$  minden altéreket *triviális altereknek* is szokás mondani.

Most két fontos fogalmat vezetünk be. Egy halmazt tartalmazó legsűrűbb altér fogalmát, és a halmaz lineáris burkának fogalmát. Ki fog derülni, hogy a lineáris burok minden egybeesik a legsűrűbb altérrel.

**2.4. definíció-állítás** (generált altér). Egy vektortérben, akárhány altér közös része altér. Emiatt értelmes a következő definíció. Ha  $H \subseteq V$  egy részhalmaza a  $V$  vektortérnek, akkor jelölje  $\text{gen } H$  a  $H$  halmazt tartalmazó összes alterek metszetét. Ezt az alteret nevezzük a  $H$  halmaz által generált altérnek.

**2.5. állítás.** Legyen  $V$  egy vektortér. Ekkor

1. minden  $H \subseteq V$  halmazra  $H \subseteq \text{gen } H$ ,
2. ha  $H \subseteq K \subseteq V$ , akkor  $\text{gen } H \subseteq \text{gen } K$ ,
3. minden  $H \subseteq V$  mellett  $\text{gen}(\text{gen } H) = \text{gen } H$ .

A  $\text{gen } H$  a  $H$  halmazt tartalmazó alterek között a legsűrűbb. Így  $H \subseteq V$  pontosan akkor altér, ha  $\text{gen } H = H$ .

**2.6. definíció** (lineáris kombináció, lineáris burok). Ha adott a  $V$  vektortérben véges sok  $v_1, \dots, v_r$  vektor, akkor a vektortér minden

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

alakú vektorát a  $v_1, \dots, v_r$  vektorok egy *lineáris kombinációjának* mondjuk.

Legyen  $H \subseteq V$  egy tetszőleges halmaz. Ekkor  $\text{lin } H$  jelöli  $H$  összes véges részhalmazának összes lineáris kombinációinak halmazát, azaz

$$\text{lin } H = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in H, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \right\}$$

Definíció szerint nulla darab vektor lineáris kombinációja a vektortér zérus eleme, tehát  $\text{lin } \emptyset = \{0\}$ . A  $\text{lin } H$  halmazt nevezzük a  $H$  halmaz *lineáris burkának*.

**2.7. állítás.** Egy  $V$  vektortér minden  $H \subseteq V$  részhalmazának lineáris burka, a  $H$  halmazt tartalmazó legsűrűbb altér, azaz

$$\text{lin } H = \text{gen } H.$$

---

<sup>1</sup>Itt  $a * \alpha$  mit jelent?

*Bizonyítás:* Világos, hogy  $H \subseteq \text{lin } H$ , világos hogy  $\text{lin } H$  egy altér, és az is nyilvánvaló, hogy ha  $H \subseteq M$  egy tetszőleges altér, akkor  $\text{lin } H \subseteq M$ .

A  $\text{lin } H$  egy a  $H$ -t tartalmazó altér, és  $\text{gen } H$  az összes ilyen alterek metszete, ezért  $\text{gen } H \subseteq \text{lin } H$ . Másoldalról, a  $\text{lin } H$  altér részhalmaza minden  $H$ -t tartalmazó altérnek, így azok közös részének is, ergo  $\text{lin } H \subseteq \text{gen } H$ .

Ha  $H$  egy véges halmaz, akkor  $\text{lin } H$  kicsit egyszerűbben írható. Mint arról már a definícióban is szó volt  $\text{lin } \emptyset = \{0\}$ . Ha  $H$  egy elemű, akkor  $\text{lin}(\{v_1\}) = \{\alpha v_1 : \alpha \in \mathbb{F}\}$ . Ha  $H = \{v_1, v_2\}$  két elemű, akkor  $\text{lin}(v_1, v_2) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}\}$ . Hasonlóan, ha  $H = \{v_1, \dots, v_r\}$  halmaz  $r$  elemből áll akkor elegendő csak az  $r$  elemből álló lineáris kombinációkat képezni, azaz

$$\text{lin}(\{v_1, \dots, v_r\}) = \left\{ \sum_{j=1}^r \alpha_j v_j : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{F} \right\}.$$

**2.8. definíció** (generátorrendszer, végesen generált vektortér). Egy vektortér egy  $H$  részhalmazáról azt mondjuk, hogy generálja a vektorteret vagy, hogy  $H$  egy generátorrendszer  $V$ -nek, ha

$$\text{lin } H = V.$$

A  $V$  vektorteret végesen generáltnak mondunk, ha létezik véges generátorrendszeré.

A generátorrendszer cseréről szóló 2.9. lemmának kiemelten fontos szerepe van felépítésünkben. Egyrészt használjuk majd a Steinitz-lemma (3) igazolásában, másrészt ennek segítségével tisztázzuk majd azt a kérdést, hogy hogyan alakulnak egy vektor „koordinátái”, ha a vonatkoztatási rendszert változtatjuk.

**2.9. lemma** (generátorrendszer csere). Legyen  $\{x_1, \dots, x_m\}$  egy generátorrendszer valamely vektortérnek, és tegyük fel, hogy valamely  $y$  vektorra

$$y = \sum_{j=1}^m \eta_j x_j,$$

ahol  $\eta_k \neq 0$  valamely  $1 \leq k \leq m$  mellett. Ekkor  $y$  becserélhető a  $k$ -adik helyen a generátorrendszerbe, úgy hogy az generátorrendszer maradjon, azaz a

$$\{x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_m\}$$

vektorrendszer is generátorrendszer.

*Bizonyítás:* Fejezzük ki  $x_k$ -t az  $y$ -ra felírt formulából:  $x_k = \frac{1}{\eta_k} y + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{-1}{\eta_k} \eta_j x_j$ . Ha a eredetileg  $a = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$  alakú, akkor  $x_k$  helyére betéve, a fent kifejezett formulát és bevezetve a  $\delta = \frac{\alpha_k}{\eta_k}$  jelölést, azt kapjuk hogy:

$$\begin{aligned} a &= \alpha_k x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \alpha_j x_j = \\ &= \alpha_k \left( \frac{1}{\eta_k} y + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{-1}{\eta_k} \eta_j x_j \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \alpha_j x_j = \frac{\alpha_k}{\eta_k} y + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \left( \alpha_j - \frac{\alpha_k}{\eta_k} \eta_j \right) x_j = \\ &= \delta y + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m (\alpha_j - \delta \eta_j) x_j. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha egy vektor kifejezhető az eredeti vektorrendszerből az

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

együtt hatókkal, akkor ugyanez a vektor a módosított vektorrendszerből is kifejezhető, még hozzá az

$$\left( \underbrace{\alpha_1 - \delta\eta_1, \alpha_2 - \delta\eta_2, \dots, \alpha_{k-1} - \delta\eta_{k-1}}_{1.}, \underbrace{\delta, \alpha_{k+1} - \delta\eta_{k+1}, \dots, \alpha_m - \delta\eta_m}_{k.}, \underbrace{\alpha_{k+1} - \delta\eta_{k+1}, \dots, \alpha_m - \delta\eta_m}_{k+1.}, \underbrace{\alpha_m - \delta\eta_m}_m. \right)$$

együtt hatókkal.

## 2.2. Elimináció

Szokásos jelölés és a kívánatos szemlélet kialakításában is fontos szerepet játszik a következő táblázat. Ha  $\{x_1, \dots, x_m\}$  egy generátorrendszer az azt jelenti, hogy minden  $a \in V$  vektor előáll mint az  $x_1, \dots, x_m$  vektorok valamelyen együtt hatókkal vett lineáris kombinációja. Ha tehát  $a = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$ , akkor azt a következőképpen fejezzük ki.

	$a$
$x_1$	$\alpha_1$
$\vdots$	$\vdots$
$x_k$	$\alpha_k$
$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	$\alpha_m$

Tekinthető ez egy  $m \times 1$  típusú bekeretezett mátrixnak, ahol a sorok címkéi a generátorrendszer elemei, az egyetlen oszlop címkéje pedig az a vektor, amelynek az előállításáról van szó.

A generátorrendszer csere lemma arról is szól, hogy ha  $y$ -t a  $k$ -adik helyen cseréljük a generátorrendszerbe, akkor a fenti táblázat hogyan változik. Azt kaptuk, hogy a

$$\begin{array}{c|cc} & y & a \\ \hline x_1 & \eta_1 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & \boxed{\eta_k} & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & \eta_m & \alpha_m \\ \hline & \delta & \frac{\alpha_k}{\eta_k} \end{array} \implies \begin{array}{c|cc} & y & a \\ \hline x_1 & 0 & \alpha_1 - \eta_1 \delta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y & 1 & \delta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & 0 & \alpha_m - \eta_m \delta \\ \hline & & \end{array} \quad (2.1)$$

transzformációt kell végrehajtani. Persze ugyanezt azt egyetlen  $a$  vektor helyett kiszámolhatjuk például az  $a, b, c$  vektorokra is. Továbbra is az  $y$ -t cseréljük a generátorrendszerbe, így a

$$\begin{array}{c|cccc} & y & a & b & c \\ \hline x_1 & \eta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & \boxed{\eta_k} & \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & \eta_m & \alpha_m & \beta_m & \gamma_m \\ \hline & \delta & \frac{\alpha_k}{\eta_k} & \frac{\beta_k}{\eta_k} & \frac{\gamma_k}{\eta_k} \end{array} \implies \begin{array}{c|cccc} & y & a & b & c \\ \hline x_1 & 0 & \alpha_1 - \eta_1 \delta_a & \beta_1 - \eta_1 \delta_b & \gamma_1 - \eta_1 \delta_c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & 1 & \delta_a & \delta_b & \delta_c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & 0 & \alpha_m - \eta_m \delta_a & \beta_m - \eta_m \delta_b & \gamma_m - \eta_m \delta_c \\ \hline & & & & \end{array}$$

a transzformációt hajtjuk végre. Most arra figyeljünk, hogy végül is a keretben lévő  $m \times 4$ -es mátrixszal sorműveleteket hajtottunk végre:

- Eldöntöttük, hogy az  $y, a, b, c$  vektorok közül az  $y$ -t cseréljük be a generátorrendszerbe, mégpedig a  $k$ -adik helyen. Ezt jelezük az  $y$  oszlop  $k$ -adik helyen lévő elemének bekeretezésével. A keretben csak nem zéró szám lehet.
- Első lépésként a keretezett számmal osztottuk a  $k$ -adik sort. Ez az új táblázat  $k$ -adik sora. Pusztán segítségképpen ugyanezt a sort mint egy számolási segédsort az első táblázat alá másoltuk.

- Az új táblázat első sorában az eredeti első sornak és a segédsor  $\eta_1$ -szeresének különbsége. A második sorban az eredeti második sornak és a segédsor  $\eta_2$ -szeresének különbsége. Hasonlóan,  $m \neq k$ -ra az  $m$ -edik sorban az eredeti  $m$ -edik sornak és a segédsor  $\eta_m$ -szeresének különbsége.

Látjuk tehát, hogy összesen két fajta sorművelettel alakítottuk a kiindulási mátrixot:

1. Egy sort szoroztunk egy nem zérus számmal,
2. Egy sorhoz hozzáadtuk egy másik sor számszorosát.

Világos, hogy ez ugyanaz, mintha a feladat az lett volna, hogy a fenti két sorművelet használva az  $y$  oszlopban minden számot el kell tüntetni, a  $k$ -adikat pedig 1-re kell beállítani. Ez a *Gauss–Jordan-elimináció*.

### Homogén lineáris egyenletrendszer

Az alábbi feladatot lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 + & \cdots & + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + & \cdots & + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + & \cdots & + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Itt az  $n, m \in \mathbb{N}$ , az  $a_{i,j} \in \mathbb{F}$  testbeli számok előre adottak minden  $i = 1, \dots, m$  és minden  $j = 1, \dots, n$  mellett. Adottak még az egyenletek jobboldalát képező  $b_i \in \mathbb{F}$  számok. A feladat megoldása annyit tesz, hogy keressük az  $x_1, \dots, x_n$  ismeretlenek összes olyan értékét az  $\mathbb{F}$  testből, amelyre fenti egyenletek minden teljesülnek. Ha a jobboldali számokra  $b_i = 0$  minden  $i = 1, \dots, n$  mellett, akkor *homogén lineáris egyenletrendszer*ről beszélünk, egyébként a rendszert *inhomogénnek* mondjuk. A fenti rendszer együtthatóiból álló

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mátrixot *együttható-mátrixnak* mondjuk.

Ha az egyenletek egyikét egy nemzérus számmal szorozzuk, és az egyenletek egyikéhez hozzáadjuk egy másik egyenlet számszorosát, akkor a megoldások nem változnak, azaz ekvivalens átalakítást hajtunk végre.

Egy Gauss–Jordan-eliminációs lépésre tekintethetünk úgy is, mint rögzített  $i, j$  mellett a  $j$ -edik változó kiküszöbölésére – azaz eliminációjára – valamennyi nem az  $i$ -edik sorból, és az  $i$ -edik sorban e  $j$ -edik változó együtthatójának 1-re állítására. Valóban, ha az  $i$ -edik sort osztjuk az  $a_{i,j} \neq 0$  számmal, akkor e sor  $j$ -edik eleme 1-re változik. Ha a  $k$ -adik ( $k \neq i$ ) sorból kivonjuk az imént normált sor  $a_{k,j}$ -szeresét, akkor az eredmény sor  $j$ -edik helyén zérust kapunk. Ha ezt minden  $k = 1, \dots, m$  mellett kiszámoljuk, akkor éppen egy Gauss–Jordan-eliminációt hajtunk végre az  $a_{i,j}$  pivot<sup>2</sup> elem választásával. Az eliminációs lépés hatására az  $j$ -edik változó az  $i$ -edik kivételével minden más sorból eltűnt, és az  $i$ -edik sorban pontosan 1 együtthatóval szerepel.

Ugyan ez egy táblázatban megfogalmazva. Itt a baloldali mátrix az együttható mátrix, amelynek a  $j$ -edik oszlopa van külön kiemelve.  $L_1, \dots, L_m$  jelöli az együttható-mátrix sorait. A jobboldali mátrix az elimináció eredménye, a megfelelő sorműveletekkel az egyes sorok címében:

$$\begin{array}{cc|ccccc|ccccc} \dots & a_{1,j} & \dots & L_1 & \dots & 0 & \dots & L_1 - a_{1,j} \frac{1}{a_{i,j}} L_i \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \boxed{a_{i,j}} & \dots & L_i & \Rightarrow & \dots & 1 & \dots & \frac{1}{a_{i,j}} L_i \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \dots & a_{m,j} & \dots & L_m & \dots & 0 & \dots & L_m - a_{m,j} \frac{1}{a_{i,j}} L_i \end{array}$$

<sup>2</sup>sorok elem

Azt kell látnunk, hogy egy eliminációs lépés az  $a_{i,j}$  pivot elem választásával pontosan ugyanazt eredményezi, mint az együttható-mátrix  $[A]^j$  oszlopának becserélése a generátorrendszer  $i$ -edik helyére.

Az algoritmus célja, hogy a generátorrendszerbe annyi oszlopot cseréljünk be amennyit csak tudunk, de persze egy már korábban becserélt vektort nem cserélünk ki egy újabbra. Az algoritmus akkor áll meg, ha nem tudunk új oszlopot becserélni. Ez pontosan akkor fordul elő, ha a táblázat minden nem zérus sora egy már becserélt vektorhoz tartozik.

A lineáris egyenletrendszer nyelvére átültetve ez azt jelenti, hogy az algoritmus célja a változók eliminálása, de persze egy sorban csak egy eliminált változó szerepelhet. Az algoritmus akkor áll meg, ha a táblázatnak minden nem zérus sorában van eliminált változó.

Az algoritmus utolsó táblájából a homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása könnyen leolvasható: Dobjuk el a zérus sorokat, és foglalkozzunk a maradék táblázattal. minden sor egy és csak egy eliminált változót tartalmaz. A többi változó, ha ilyen van egyáltalán egy nem eliminált változóhoz tartozik. A nem eliminált változók tetszőleges értéket felvehetnek, majd minden sorban ebből már egyértelműen kifejezhető az eliminált változók értéke.

Innen érthető, hogy a szokásos szóhasználat szerint, az eliminált változókat sokszor *kötött változónak* nevezzük, és a többi változót *szabad változónak* mondjuk. A következő téTEL rendkívül fontos, még akkor is ha teljesen nyilvánvaló a most tárgyalt algoritmus alapján.

**2.10. állítás.** *Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben több ismeretlen van mint egyenlet, akkor a rendszernek van nem zéró megoldása.*

**Bizonyítás:** Gauss–Jordan-algoritmus legutolsó táblázatában a kötött változó száma legfeljebb a sorok száma az pedig szigorúan kisebb mint az összes ismeretlenek száma. Van tehát szabad változó, amelynek értéke tetszőleges lehet.

Mivel a változók vagy kötöttek vagy szabadok, ezért a kötött változók számának és a szabad változók számának az összege a változók száma. Ebben a pillanatban még nem látszik, de később ki fog derülni, hogy a kötött így a szabad változók száma is független az algoritmus során választott pivot elemektől. Érdemes a rendszer egy megoldásra úgy gondolni, mint egy  $x \in \mathbb{F}^n$  oszlopvektorra, amelynek  $i$ -edik koordinátája az  $x_i$  változó aktuális értéke. Ilyen módon az  $x_1, \dots, x_n$  pontosan akkor elégíti ki a lineáris egyenletrendszeret, ha

$$Ax = b$$

mátrixegyenlet teljesül, ahol a  $b \in \mathbb{F}^n$  az a vektor melynek  $i$ -edik koordinátája  $b_i$ .

Érdemes itt konkrét példákkal szemléltetni a homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldásának felírását:

1. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} x + 4y + 7z = 0 \\ 2x + 5y + 8z = 0 \\ 3x + 6y + 8z = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszer. A Gauss–Jordan-algoritmus lehet például a következő:

$$\begin{array}{c|ccc} a & b & c \\ \hline 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \\ \hline \delta & 4 & 7 \end{array} \implies \begin{array}{c|ccc} a & b & c \\ \hline 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \\ \hline 0 & \delta & 2 \end{array} \implies \begin{array}{c|ccc} a & b & c \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & \delta \end{array} \implies \begin{array}{c|ccc} a & b & c \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti feladat ekvivalens az

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

feladattal, amelynek nyilvánvalóan csak a zéró vektor a megoldása.

2. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Az elimináció lehet a következő:

$$\begin{array}{c|ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 5 \\ \hline \delta & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -8 & -8 & -16 & 8 \\ \hline 0 & \delta & 1 & 2 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Az eredeti egyenletrendszer tehát ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Itt  $x_1, x_2$  a kötött változók és  $x_3, x_4, x_5$  a szabad változók. Ezek értéke tetszőleges lehet, mondjuk  $x_3 = s, x_4 = r, x_5 = t$  és ekkor  $x_1 = -s + r - 2t$  valamint  $x_2 = -s - 2r + t$ . Az általános megoldás ezért

$$\left\{ \begin{pmatrix} -s + r - 2t \\ -s - 2r + t \\ s \\ r \\ t \end{pmatrix} : s, r, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, r, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

A szabad változók száma tehát 3, és a rendszer megoldáshalmaza a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix oszlopai generált altér.

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek a zérus vektor minden megoldása, ezt nevezzük triviális megoldásnak. A Gauss–Jordan-eliminációs algoritmusból világos a következő gondolat. A rendszernek pontosan akkor nincs nem triviális megoldása, ha nincs szabad változó, azaz minden változó kötött.

**2.11. állítás.** *Egy  $Ax = 0$  homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor a triviális megoldás az egyetlen megoldása, ha az eliminációs algoritmusban minden oszlop a generátorrendszerbe cserélhető.*

## Mátrix faktorizáció

Érdemes a Gauss–Jordan-eliminációs algoritmust az egyenletrendszerek megoldásától függetlenül is szemlélni. Ide másolom az előző feladat megoldásának táblázatát:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ez utolsó táblázat felfedi az eredeti  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  vektorok közti kapcsolatot. A táblázat értelmezése szem előtt:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 \\ a_4 &= -a_1 + 2a_2 \\ a_5 &= 2a_1 - a_2 \end{aligned}$$

Ezt mátrixszorzásként interpretálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

hiszen minden oszlop az  $a_1, a_2$  oszlopok lineáris kombinációja.

**2.12. definíció.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrix. Az  $A$  mátrix oszlop- (sor-) vektorterének nevezzük az  $A$  oszlopai (sorai) generált alterét az  $\mathbb{F}^m$  ( $\mathbb{F}^n$ ) vektortérnek.

Az előző példa szerint az ottani  $4 \times 5$  méretű mátrix oszlopvektorterének az  $\{a_1, a_2\}$  két elemű rendszer egy generátorrendszer. Az alábbi állítás a mátrix szorzás definíciójának következménye.

**2.13. állítás.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  egy nem zérus mátrix.

1. Tegyük fel, hogy  $A$  oszlopvektorterének létezik  $r$ -elemű generátorrendszer. Ekkor a generátorrendszer  $r$  db vektorát a  $B$  mátrix oszlopaiba rendezve egy  $m \times r$  mátrixot kapunk. Ehhez a  $B$  mátrixhoz létezik  $C$  mátrix, amely  $r \times n$  méretű és  $A = B \cdot C$ .
2. Most azt tegyük fel, hogy  $A$  sorvektorterének létezik  $r$ -elemű generátorrendszer. Ekkor a generátorrendszer  $r$  db sorát a  $C$  mátrix soraiiba rendezve egy  $r \times n$  mátrixot kapunk. Ehhez a  $C$  mátrixhoz létezik  $B$  mátrix, amely  $m \times r$  méretű és  $A = B \cdot C$ .

### Inhomogén lineáris egyenletrendszer

Láttuk, hogy egy  $m$  egyenletet és  $n$  ismeretlenetet tartalmazó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az

$$Ax = b$$

feladattal, ahol  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  az együttható-mátrix és  $b \in \mathbb{F}^m$  a jobboldalakból alkotott vektor. A következő egyszerű észrevétel szerint ha az inhomogén rendszernek találunk valahogyan egyetlen megoldását és ismerjük a homogén rendszer általános megoldását, akkor már az inhomogén rendszer általános megoldása is egyszerűen felírható.

**2.14. állítás.** A fenti jelölések megtartása mellett legyen  $x_0 \in \mathbb{F}^m$  egy tetszőlegesen rögzített megoldása az  $Ax = b$  inhomogén lineáris egyenletrendszernek. Ekkor

$$\{x : Ax = b\} = \{x_0 + z : Az = 0\},$$

azaz az inhomogén rendszer megoldáshalmaza, azonos a homogén rendszer megoldás halmazának egy partikuláris megoldással való eltoltjával.

**Bizonyítás:** Legyen először  $x$  egy megoldás, azaz  $Ax = b$ . Mivel  $x_0$  is egy megoldás, ezért  $Ax_0 = b$  is teljesül. Persze  $x = x_0 + (x - x_0) = x_0 + z$ , ahol  $z = x - x_0$  egy olyan vektor, amelyre  $Az = Ax - Ax_0 = b - b = 0$ .

Másodszor tekintsünk egy  $x = x_0 + z$  alakú vektort, ahol  $Az = 0$ . Ekkor persze  $Ax = Ax_0 + Az = b + 0 = b$ .

Egy nem nyilvánvaló következmény, hogy akármelyik partikuláris megoldással toljuk is el az inhomogén rendszer megoldását mindig ugyanazt a halmazt kapjuk, emiatt minden melyik partikuláris megoldást rögzítettük.

Persze a kérdés, hogy hogyan találunk egyáltalán partikuláris megoldást. Máshogyan fogalmazva: mikor van egyáltalán megoldása egy inhomogén rendszernek?

**2.15. állítás.** Az  $Ax = b$  inhomogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha  $b$  előáll mint  $A$  oszlopainak valamelyen lineáris kombinációja, azaz a  $b$  vektor az  $A$  mátrix oszlopvektorteréhez tartozik.

Konkrétan adott  $A$  és  $b$  mellett Gauss–Jordan-algoritmussal el tudjuk dönteni, hogy  $b$  vektor eleme-e az  $A$  mátrix oszlopvektorterének. Egészítsük ki az  $A$  mátrixot az utolsó oszlopában a  $b$  vektorral. Most hajtsuk végre a Gauss–Jordan-eliminációt, de úgy hogy pivot-elemet, csak az első  $n$  oszlobból válasszunk, ugyanúgy mintha csak a homogén rendszert oldanánk meg. Persze minden egyes eliminációs lépésben számoljuk ki az utolsó oszlopvektor elemeit is. Az algoritmus úgy ér véget, hogy az  $A$  mátrixnak megfelelő részben minden nem zérus sor tartalmaz eliminált változót.

Ha van olyan sor ahol az első  $n$  elem zérus, de az utolsó elem nem zérus, akkor nyilván nincs megoldás. minden egyéb esetben van megoldás, hiszen a csupa zéró sorokhoz tartozó egyenletek az ismeretlenek minden értéke mellett fennállnak, de maradék a nem zérus sorok esetén a kötött változót kifejezhetjük a szabad változók tetszőleges – mondjuk zérus – értéke mellett.

Az inhomogén rendszernek tehát pontosan akkor van megoldása, ha az utolsó oszlop minden nem zérus eleme olyan egyenlethez tartozik, ahol szerepel eliminált változó.

Ha a fenti eliminációra, mint a generátorrendszer csere lemma alkalmazására gondolunk, akkor azt kapjuk, hogy a megoldhatóság szükséges és elegendő feltétele, hogy a végső táblában az utolsó, a  $b$ -hez tartozó oszlopnak csak olyan helyeken lehetnek nem zérus tagjai, amely helyek korábban már a generátorrendszerbe becserélt oszlopvektorokhoz tartoznak, ami persze nem jelent többet, mint hogy  $b$  eleme az  $A$  oszlopvektorterének. Az algoritmus annyiban több, mint a korábban megértett feltétel, hogy a megoldható esetben rögtön kapunk egy partikuláris megoldást is.

Nézzünk egy példát.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 & = & 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 & = & -5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 7 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 & = & 10 \end{array}$$

A Gauss–Jordan-algoritmus:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & 4 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 5 & 10 \\ \hline \delta & 3 & 4 & 5 & -1 & 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & -7 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 5 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & -16 & 8 & -8 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -2 & \delta & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a rendszernek tehát van megoldása például  $x_1 = 5, x_5 = -1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ . Az általános megoldás tehát

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : s, t, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

**2.16. állítás.** Az  $Ax = b$  inhomogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha  $b$  az  $A$  képteréhez tartozik és  $A$  minden oszlopa a Gauss–Jordan-eliminációs algoritmussal a generátorrendszerbe cserélhető.

Ebben az esetben persze az algoritmusból adódó partikuláris megoldás az egyetlen megoldás.

A következő állításban azt gondoljuk meg, hogy ha kevesebb ismeretlen mint sora van egy rendszernek, akkor megválasztható olyan jobboldali vektor, amellyel az inhomogén lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása.

**2.17. állítás.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times r}$  olyan mátrix, ahol  $r < m$ . Ekkor létezik  $b \in \mathbb{F}^m$  vektor, amellyel felírt  $Ax = b$  inhomogén lineáris egyenletrendszernek már nincs megoldása.

**Bizonyítás:** Tegyük fel tehát, hogy kevesebb ismeretlen van mint sor. Mikor az  $A$  mátrixra alkalmazott Gauss–Jordan-algoritmus véget ér, akkor minden nem zérus sorban pontosan egy eliminált ismeretlen van. Eszerint minden egyes sor vagy zéró sor, vagy van benne eliminált ismeretlen. Mivel kevesebb ismeretlen van mint sor, ezért legalább egy zéró sornak lennie kell. Ha a  $k$ -adik sor csak nullákat tartalmaz, akkor az a  $b \in \mathbb{F}^m$  vektor, amelynek a  $k$ -adik koordinátája nem zérus, de minden más koordináta zérus meg is felel.

## Inverz mátrix

Gondolunk arra, hogy milyen módszerrel automatizálhatnánk a Gauss–Jordan-algoritmust. Mivel sorműveletekről van szó, természetes gondolat, hogy az  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrix transzformálásához  $m \times m$  méretű mátrixokat használunk, amelyekkel balról szorozzuk  $A$ -t. Valóban, ha  $m \times m$  méretű identitás mátrix

1.  $i$ -edik sorát szorozzuk egy  $\delta$  számmal, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amellyel való balszorzása  $A$ -nak éppen az  $A$  mátrix  $i$ -edik sorát szorozza  $\delta$ -val.
2.  $k$ -adik sorából kivonjuk az  $i$ -edik sor  $\delta$ -szorosát, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amellyel való balszorzása  $A$ -nak éppen az  $A$  mátrix  $k$ -adik sorából vonja ki az  $i$ -edik sor  $\delta$ -szorosát.
3.  $k$ -adik és  $j$ -edik sorát felcseréljük, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amellyel való balszorzása  $A$ -nak éppen az  $A$  mátrix  $k$ -adik és  $j$ -edik sorát cseréli fel.

Tekintsünk most, egy  $m \times m$  méretű négyzetes mátrixot. Tegyük fel, hogy a mátrix minden oszlopát a generátorrendszerbe cserélhetjük a szokásos Gauss–Jordan-eliminációs algoritmus során. Láttuk korábban, hogy ez azt jelenti, hogy az  $Ax = b$  inhomogén lineáris egyenletrendszer minden  $b$  vektor mellett egyértelműen megoldható.

Legyen  $\{e_1, \dots, e_m\}$  az  $\mathbb{F}^m$  szokásos generátorrendszeré, azaz  $e_k$ -nak éppen a  $k$ -adik koordinátája 1, a többi zérus. Ha  $B \in \mathbb{F}^m$  az a mátrix, amelynek  $k$ -edik oszlopa az  $Ax = e_k$  inhomogén lineáris egyenletrendszer egyetlen  $x_k \in \mathbb{F}^m$  megoldása, akkor a mátrix szorzás definíciója szerint

$$AB = I$$

teljesül. A  $B$  mátrixot tehát  $m$  darab  $m$  lépéses Gauss–Jordan-eliminációval meg tudnánk határozni.

Egyszerűbb, ha egyetlen eliminációs algoritmus használunk, de arra az  $m \times 2m$  méretű mátrixra, amelyet úgy kapunk, hogy az a  $A$  mátrix jobboldalához illesztjük az  $I \in \mathbb{F}^{m \times m}$  identitás mátrixot. Az elimináció során,  $A$  minden sorát a generátorrendszerbe cseréljük, de persze a jobbra illesztett identitás mátrix sorait is transzformáljuk. Feltevésünk szerint  $m$  lépés után áll le az algoritmus. Ekkor egy olyan táblázat van előttünk, amelynek első  $m$  oszlopa egy olyan négyzetes mátrixot alkot, amelynek minden oszlopa és minden sora egyetlen 1-est tartalmaz a többi elem zérus. Vegyük észre, hogy egy ilyen mátrix a sorok felcserélésével az identitás mátrixszá transzformálható.

Az  $Ax = e_k$  egyenlet megoldása a jobboldali  $m \times m$  mátrix  $k$ -adik oszlopából olvasható le. Ha például az első sor  $j$ -edik elemén van 1-es, akkor az azt jelenti, hogy az első sorba elimináltuk az  $j$ -edik ismeretlenet, tehát a megoldás  $j$ -edik koordinátáját tartalmazza az  $m + k$ -adik oszlop első eleme.

Ha tehát úgy cseréljük fel a táblázat sorait, hogy a baloldali  $m \times m$  méretű mátrix váljon az identitás mátrixszá, akkor az  $Ax = e_k$  egyenlet egyetlen partikuláris megoldása jelentkezik az egész táblázat  $m + k$  adik oszlopában. Mivel a keresett  $B$  mátrixnak éppen ez a  $k$ -adik oszlopa, ezért maga a  $B$  mátrix áll a táblázat jobboldali  $m \times m$  méretű részén.

Most meggondoljuk, hogy  $BA = I$  is fennáll. Az iménti algoritmussal az  $[A|I]$  mátrixot transzformáltuk a  $[I|B]$  mátrixszá. A transzformáció során a Gauss–Jordan-eliminációt használtuk, amely a szakasz elején említett 1) és 2) típusú mátrixokkal mint balszorzásokkal hajtható végre. Az algoritmus végén még sorokat is felcserélünk, ami egy 3) típusú balszorzást jelent. Ha az 1) vagy 2) vagy 3) típusú mátrixot *elemi mátrixnak* nevezünk, akkor úgy fogalmazhatunk, hogy van véges sok  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}^{m \times m}$  elemi mátrix, amelyre  $(P_r \cdots P_1)[A|I] = [I|B]$ . Ekkor persze  $(P_r \cdots P_1)A = I$  és  $P_r \cdots P_1 = B$ , amiből már következik, hogy

$$BA = I.$$

**2.18. definíció (nem szinguláris mátrix).** Egy  $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$  négyzetes mátrixot *invertálhatónak* vagy *regulárisnak* vagy *nem szingulárisnak* nevezünk, ha létezik  $B \in \mathbb{F}^{m \times m}$  négyzetes mátrix, amelyre

$$AB = BA = I$$

Mivel egy egységelemes gyűrűben ha van inverz, akkor csak egyetlen egy van, ezért adott  $A$  invertálható mátrixhoz csak egy  $B$  mátrix van, amely kielégíti a fenti definíciót. Ezt a  $B$  mátrixot nevezzük az  $A$  inverzének és  $A^{-1} = B$  módon jelöljük.

**2.19. állítás.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$  mátrix. Az alábbi feltevések ekvivalensek:

1.  $A$  invertálható.
2. Létezik  $B \in \mathbb{F}^{m \times m}$  mátrix, amelyre  $AB = I$ .
3. Gauss–Jordan-eliminációval az  $A$  minden oszlopa a generátorrendszerbe cserélhető.

Ha a fenti feltevések egyike (ergo mindegyike) fennáll, akkor az 2)-ben szereplő  $B$  mátrixból csak egy van, mégpedig az  $A^{-1}$  inverz mátrix.

*Bizonyítás:* Körben igazolunk:

1.  $\Rightarrow$  2. Nyilvánvaló.

2.  $\Rightarrow$  3. Tegyük fel – indirekt –, hogy már  $r$  transzformáció után a Gauss–Jordan-algoritmus megáll, ahol  $r < m$ . Ez azt jelenti, hogy az  $A$  oszlop-vektortérének van  $r$  elemű generátorrendszeré. E generátorrendszer vektorait mint oszlopokat egy  $A_1$  mátrixba téve egy  $m \times r$  mátrixot kapunk. Mivel az oszlopok lineáris burkában az  $A$  valamennyi oszlopa szerepel, van olyan  $r \times m$  méretű  $A_2$  mátrix, amelyre  $A_1 A_2 = A$ . Azt kaptuk tehát, hogy

$$A_1 (A_2 B) = (A_1 A_2) B = AB = I.$$

Ebből az következik, hogy tetszőleges  $b \in \mathbb{F}^m$  vektor mellett az  $x = A_2 B b \in \mathbb{F}^r$  vektor megoldása az  $A_1 x = b$  inhomogén lineáris egyenletrendszernek, ami ellentmondás, hiszen  $A_1$  mátrixnak kevesebb oszlopa van mint sora.

3.  $\Rightarrow$  1. Éppen ezt igazoltuk a szakasz elején.

Ha a feltevések fennállnak, akkor

$$A^{-1} = A^{-1} I = A^{-1} (AB) = (A^{-1} A) B = IB = B.$$

Ha tehát  $A$  és  $B$  négyzetes mátrixok, amelyekre  $AB = I$ , akkor 2) szerint  $A$  invertálható, és  $A^{-1} = B$ , ezért  $BA = A^{-1} A = I$  is fennáll. Ahogyan azt a mátrixok bevezetésekor a 25. oldalon megígértük, most megmutattuk azt, hogy a négyzetes mátrixok gyűrűjében ha két mátrix szorzata a gyűrű egységeleme, akkor ezek a mátrixok kommutálnak.

Egy konkrét példa megoldásával ismételjük át a szakasz elején megértett algoritmust. A feladat, hogy

keressük meg az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzét! Az inverz létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy 4 lépést tudunk végrehajtani az eliminációs algoritmusban. Egy lehetséges megoldás a következő:

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \delta & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \delta & -1 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \Rightarrow
 \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \\
 0 & 5 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 2 \\
 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
 \hline
 0 & -5 & \delta & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & \delta & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}
 \end{array} \Rightarrow
 \begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Kaptuk hát, hogy az  $A$  mátrix inverze az  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -12 & -2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 12 & 1 & -5 & -2 \\ -12 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$  mátrix.

Picit kevesebb helyet foglal az algoritmus, ha lusták vagyunk a generátorrendszerbe már becserélt oszlopok kiírására. Ekkor érdemes kiírni a sorok és oszlopok címkéjét, nehogy eltévedjünk. Az előző feladat így alakul:

$$\begin{array}{c|ccccc|ccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\
 \hline
 e_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 e_2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 e_3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 e_4 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 \delta & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccccc|ccccc}
 & a_2 & a_3 & a_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\
 \hline
 a_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 e_2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 e_3 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & \\
 e_4 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 -1 & 1 & \delta & & -1 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccccc|ccccc}
 & a_2 & a_3 & a_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\
 \hline
 a_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 a_2 & 5 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & \\
 e_3 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & \\
 a_4 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\
 \hline
 -5 & \delta & & -2 & -1 & 0 & 2 &
 \end{array} \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccccc|ccccc}
 & a_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & & & \\
 \hline
 a_1 & 6 & 3 & 1 & 0 & -2 & & & \\
 a_3 & -5 & -2 & -1 & 0 & 2 & & & \\
 e_3 & -4 & -4 & -1 & 1 & 2 & & & \\
 a_4 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & & & \\
 \hline
 \delta & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & & & &
 \end{array} \Rightarrow
 \begin{array}{c|ccccc|ccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & & & & \\
 \hline
 a_1 & -3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\
 a_3 & 3 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & & & & \\
 a_2 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & & & & \\
 a_4 & -3 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 \hline
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \\
 & -3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \\
 & 3 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \\
 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \\
 & -3 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 1 &
 \end{array}$$

### 2.3. Lineárisan független rendszerek

**2.20. definíció** (lineárisan összefüggő vektorrendszer). Egy véges  $\{y_1, \dots, y_n\}$  vektorrendszeret *lineárisan összefüggőnek* mondunk, ha van olyan vektor, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Úgy is fogalmazhatnánk, hogy az  $\{y_1, \dots, y_n\}$  rendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha létezik  $1 \leq k \leq n$  index, amelyre

$$y_k \in \text{lin} \{y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n\}.$$

Nyilvánvaló példa, hogy ha a vektorrendszer a 0 vektort tartalmazza, akkor lineárisan összefüggő. Hasonlóan, ha ugyanaz a vektor többször szerepel a vektorrendszerben, a rendszer szintén összefüggő. Olyan vektorrendszerre, amelyre nem igaz a lineárisan összefüggőség definíciója példa egy egyedüli nem zérus vektor, de az  $\{\}$  üres rendszer is.

**2.21. állítás.** Legyen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  vektorrendszer rögzítve a  $V$  vektortérben. A vektorrendszerre tett alábbi feltevések egymással ekvivalensek.

1. Lineárisan összefüggő;
2. Van olyan elem a vektortérben, amely nem csak egyféleképpen áll elő mint az  $y_1, \dots, y_n$  vektorok lineáris kombinációja, azaz formálisabban: létezik  $z \in V$ , amelyre  $z = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j$  és  $z = \sum_{j=1}^n \eta_j y_j$  és létezik  $1 \leq k \leq n$ , amelyre  $\xi_k \neq \eta_k$ .
3. Vannak olyan nem mind zérus  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  skalárok, amelyekkel

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j = 0.$$

Bizonyítás: Körben bizonyítunk.

1.  $\Rightarrow$  2. Tegyük fel, hogy  $y_k = \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j y_j + \sum_{j=k+1}^n \eta_j y_j$ . Ekkor az alábbi együttható rendszerek

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \quad (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a  $k$ -adik helyen biztosan különbözik, hiszen  $0 \neq 1$ , és mind a két együttható rendszerrel képzett lineáris kombináció ugyanazt az  $y_k$  vektort eredményezi.

2.  $\Rightarrow$  3. Világos, hogy

$$0 = z - z = \sum_{j=1}^n (\xi_j - \eta_j) y_j$$

és a  $k$ -adik skalár nem zérus.

3.  $\Rightarrow$  1. Tegyük fel most, hogy  $\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j = 0$ , és, hogy  $\alpha_k \neq 0$ . Ekkor

$$y_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n -\frac{1}{\alpha_k} \alpha_j y_j$$

azaz a  $k$ -adik vektor tekinthető mint a többi vektor valamely lineáris kombinációja.

Ezt kellett belátni.

Fontos észrevétel a következő.

**2.22. állítás.** *Minden, valamely lineárisan összefüggő vektorrendszeret tartalmazó vektorrendszer maga is lineárisan összefüggő.*

**2.23. definíció.** Egy nem feltétlen véges vektorrendszeret lineárisan összefüggőnek nevezünk, ha van véges részrendszer, amely lineárisan összefüggő.

**2.24. definíció** (lineárisan független vektorrendszer). Egy vektorrendszer *lineárisan független*, ha nem lineárisan összefüggő.

Így egy nem véges vektorrendszer akkor lineárisan független, ha minden véges részrendszer is az. Egy véges vektorrendszer lineárisan függetlenségét, pedig a következő egymással ekvivalens állítások karakterizálják.

**2.25. állítás.** *Legyen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  vektorrendszer rögzítve a  $V$  vektortérben. A vektorrendszerre tett alábbi feltevések egymással ekvivalensek.*

1. *Lineárisan független;*
2. *A vektorrendszer lineáris burkában minden elem egyetlen egyféléképpen áll elő, mint az  $y_1, \dots, y_n$  vektorok lineáris kombinációja.*
3. *Az  $y_1, \dots, y_n$  vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja zérus, azaz*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j = 0 \text{ esetén } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

*Bizonyítás:* Nyilvánvaló a lineáris összefüggés karakterizációjából.

A lehető legszűkebb lineárisan független rendszer az  $\{\}$  üres vektorrendszer, amelynek egyetlen eleme sincs. A lehető legbővebb generátorrendszer az egész vektortér. Ennél sokkal érdekesebb és fontosabb a lineárisan független rendszerek közül a lehető legbővebbet keresni, és generátorrendszerök közül a lehető legszűkebbet keresni.

**2.26. definíció** (maximális lineárisan független– és minimális generátorrendszer). Egy lineárisan független rendszert *maximális lineárisan független rendszernek* nevezünk, ha nem lehet bővíteni úgy, hogy lineárisan független maradjon.

Egy generátorrendszeret *minimális generátorrendszernek* mondunk, ha nem lehet szűkíteni úgy, hogy generátorrendszer maradjon.

**2.27. állítás.** Legyen  $\{x_1, \dots, x_m\}$  egy vektorrendszer a  $V$  vektortérnek. Az alábbi feltevések ekvivalensek.

1. A vektorrendszer maximális lineárisan független rendszer.
2. A vektorrendszer egyszerre lineárisan független és generátorrendszer.
3. A vektorrendszer minimális generátorrendszer.

Bizonyítás: Az alábbi lépéseket követjük.

1.  $\Rightarrow$  2. Ha a vektorrendszer nem lenne generátorrendszer is, akkor a lineáris burkán kívül lenne egy vektor. Ezt a vektorrendszerhez illesztve, a vektorrendszer egy valódi lineárisan független bővítését kapjuk, ami ellentmond a maximalitás feltételének.
3.  $\Rightarrow$  2. Ha a vektorrendszer egyik eleme a többi elem lineáris kombinációja, akkor azt az elemet elhagyva is generátorrendszert kapunk, ami ellentmond a minimalitás feltételének.
2.  $\Rightarrow$  1. Ha nem lenne maximális a lineárisan független tulajdonságra nézve, akkor létezne egy vektor a lineáris burkán kívül is, ami ellentmond a generátorrendszer tulajdonságának.
2.  $\Rightarrow$  3. Mivel a vektorrendszer egyik eleme, sincs a többi lineáris burkában, ezért egyetlen elemet sem hagyhatunk el a generátorrendszer tulajdonság megtartásával, ami azt jelenti, hogy ez egy minimális generátorrendszer.

Egy a zéró vektort tartalmazó vektorrendszer persze lineárisan összefüggő, és egy nem zérus vektorból álló egyelemű vektorrendszer lineárisan független. A következő állítás sokszor teszi kényelmessé a gondolatmenetünket.

**2.28. állítás.** Legyen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  egy olyan legalább két elemű vektorrendszer, amelynek első eleme nem a zérus vektor, tehát  $y_1 \neq 0$ . A vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha létezik olyan eleme, amely pusztán az előző elemek lineárisan kombinációja.

Formálisabban: akkor és csak akkor, ha  $\exists k \quad 2 \leq k \leq n : y_k \in \text{lin} \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a vektorrendszer lineárisan összefüggő. Ekkor van olyan a zérus vektort eredményező lineáris kombinációja  $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ , ahol nem az összes együttható nulla. Legyen  $k$  a lineáris kombinációban a legnagyobb nem nulla együttható indexe. Világos, hogy  $k \neq 1$ , hiszen  $y_1 \neq 0$ . Persze a  $k$  feletti együtthatók minden nullák, emiatt

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k = 0.$$

Itt már  $\alpha_k \neq 0$ , tehát  $y_k$  kifejezhető az előző vektorok segítségével:

$$y_k = \frac{-1}{\alpha_k} \alpha_1 y_1 + \dots + \frac{-1}{\alpha_{k-1}} \alpha_{k-1} y_{k-1}.$$

**2.29. lemma** (független rendszer csere). Legyen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  egy lineárisan független rendszere valamely vektortérnek, és tegyük fel, hogy a tér valamely  $x$  vektorára

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j,$$

ahol  $\xi_k \neq 0$  az egyik  $1 \leq k \leq n$  mellett. Ekkor  $y$  becserélhető a  $k$ -adik helyen a független rendszerbe úgy, hogy az független maradjon, azaz az

$$\{y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n\}$$

vektorrendszer is lineárisan független.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy a cserélt rendszernek egyedül a triviális lineáris kombinációja zérus. Legyen tehát

$$0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \eta_j y_j + \eta_k x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \eta_j y_j + \sum_{j=1}^n \eta_k \xi_j y_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\eta_j + \eta_k \xi_j) y_j + \eta_k \xi_k y_k.$$

Mivel az eredeti rendszer lineárisan független, ezért az utóbbi lineáris kombináció minden együtthatója a test null eleme. A  $k$ -adikkal kezdve  $\eta_k \xi_k = 0$ ,  $\xi_k \neq 0$ , így  $\eta_k = 0$ . Ezt a nem  $k$ -adik együtthatókba visszahelyettesítve már azt kapjuk, hogy  $\eta_j = 0$  minden  $j \neq k$  mellett is.

### 3. fejezet

## A Steinitz-lemma

FÜGGETLEN- ÉS GENERÁTORRENDSZEREK elemszáma közti kapcsolat vezet a a bázis és a dimenzió fogalmához. A félév legfajsúlyosabb állítása, az egyszerű bizonyítás ellenére. A pontos megfogalmazás előtt emlékezzünk a generátorrendszer cseréjére vonatkozó a 2.9. lemmára.

**Steinitz-lemma.** *Legyenek  $n$  és  $m$  nem negatív egészek. Tegyük fel, hogy az  $\{y_1, \dots, y_n\}$  egy lineárisan független rendszer, és az  $\{x_1, \dots, x_m\}$  egy generátorrendszer. Ekkor*

1.  $n \leq m$  és;
2. az  $x_1, \dots, x_m$  vektorok alkalmaz átindexelésével kapott  $\{y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}$  vektorrendszer is generátorrendszer.<sup>1</sup>

*Bizonyítás:* Legyen  $k$  a legnagyobb a  $\{0, \dots, n\}$  egészek közül, amelyre

1.  $k \leq m$ , és
2. az  $x_1, \dots, x_m$  vektorok alkalmaz átindexelésével az

$$\{y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m\} \quad (\dagger)$$

vektorrendszer is generátorrendszer.

Ilyen  $k$  biztosan van van, hiszen  $k = 0$  triviálisan jó. Összesen azt kell meggondolnunk, hogy  $k = n$ . Ha  $k < n$  lenne,

- akkor létezne  $y_{k+1}$  vektor. No de, ez az  $y_{k+1}$  nem szerepel az  $\{y_1, \dots, y_k\}$  lineáris burkában, ami  $(\dagger)$  generátorrendszer volta miatt csak úgy lehetséges, hogy  $k \neq m$ , azaz  $k < m$ , ergo  $k + 1 \leq m$ .
- A 2.9. lemma szerint a  $(\dagger)$  vektorrendszerben az  $y_{k+1}$  vektor avval az  $x$ -el — a generátorrendszer tulajdonság megtartásával is — kicsérélhető, amely  $x$  szerepel az  $y_{k+1}$  vektornak a  $(\dagger)$ -beli vektorokkal képzett lineáris kombinációjában.

Ez ellentmondás, hiszen  $k$  a legnagyobb olyan szám, amelyre a bizonyítás elején szereplő 1. és 2. feltételek egyszerre állnak fenn.

### 3.1. Rang-tétel

**3.1. definíció** (mátrix feszítőrangja). Legyen  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  egy tetszőleges nem zérus mátrix. Azt mondjuk, hogy feszítő rangja  $r$ , ha  $r$  a legkisebb olyan pozitív egész, amelyre  $A$  előáll

$$A = BC$$

alakban, ahol  $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$  és  $C \in \mathbb{F}^{r \times n}$ .

<sup>1</sup>Úgy kell a jelöléseket érteni, hogy az  $n = 0$ , de az  $n = m$  eset is lehetséges. Az  $n = 0$  esetben az  $y$ -okkal jelölt vektorok egyike sem, míg az  $n = m$  esetben az  $x$ -el jelölt vektorok egyike sem szerepel az  $\{y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}$  vektorrendszer elemei közt.

Világos, hogy tetszőleges nemzérus négyzetes mátrixra ez jól definiált és  $1 \leq r \leq \min\{n, m\}$ . A rang-tételnek a szokásosnál egy kicsit erősebb formája következik.

**3.2. állítás** (Rang-tétel). *Minden nemzérus mátrixban a maximális lineárisan független oszloprendszer és a maximális lineárisan független sorrendszer azonos elemszámúak, és ez a szám azonos a mátrix feszítőrangjával.*  $\square$

*Bizonyítás:* Jelölje  $r$  az  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  mátrix feszítőrangját. Legyen  $r_c$  a mátrix egyik rögzített maximális lineárisan független oszloprendszerének elemszáma.

- Ezen oszlopokat egy  $B \in \mathbb{F}^{n \times r_c}$  mátrixba téve – a maximalitás miatt – létezik olyan  $C \in \mathbb{F}^{r_c \times m}$  mátrix, amelyre  $A = BC$ , azaz  $r \leq r_c$ .
- Most tekintsünk egy tetszőleges olyan  $A = BC$  felbontást, ahol  $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$  és  $C \in \mathbb{F}^{r \times m}$ . Jelölje  $W$  a  $B$  mátrix oszlopai lineáris burkát. Az  $A$  mátrix fent rögzített maximális lineárisan független oszloprendszer egy lineárisan független rendszer a  $W$  vektortérben, és  $B$  oszlopai pedig egy generátorrendszer ugyanebben a vektortérben, így a Steinitz-lemma szerint  $r_c \leq r$ .

Evvel megmutattuk, hogy bármely két maximális lineárisan független oszloprendszer azonos elemszámú, és számuk megegyezik a mátrix feszítőrangjával.

Legyen  $r_w$  az  $A$  mátrix egyik rögzített maximális lineárisan független sorrendszerének elemszáma.

- Ezen sorokat egy  $C \in \mathbb{F}^{r_w \times m}$  mátrixba téve – a maximalitás miatt – létezik olyan  $B \in \mathbb{F}^{n \times r_w}$  mátrix, amelyre  $A = BC$ , azaz  $r \leq r_w$ .
- Most tekintsünk egy tetszőleges olyan  $A = BC$  felbontást, ahol  $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$  és  $C \in \mathbb{F}^{r \times m}$ . Jelölje most  $V$  a  $C$  mátrix sorai lineáris burkát. Az  $A$  mátrix fent rögzített maximális lineárisan független sorrendszer egy lineárisan független rendszer a  $V$  vektortérben, és  $C$  sorai pedig egy generátorrendszer alkotnak ugyanebben a  $V$  vektortérben, így a Steinitz-lemma szerint  $r_w \leq r$ .

Evvel azt is megmutattuk, hogy bármely két maximális lineárisan független sorrendszer azonos elemszámú, és számuk megegyezik a mátrix feszítőrangjával.  $\square$

Ha  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  mátrix, amelynek feszítőrangja  $r$ , akkor  $A$  bármelyik maximális lineárisan független oszloprendszerének  $r$  az elemszáma. Ezeket az oszlopokat egy  $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$  mátrixba rendezve az  $A$  oszlopvektortének egy generátorrendszerét kapjuk, így létezik  $B \in \mathbb{F}^{r \times m}$  mátrix, amelyre  $AB = A$  teljesül. Mivel két mátrix szorzata diádok összegeként is felírható, úgy azt kaptuk, hogy egy  $r$  feszítőrangú mátrix felírható mint  $r$  darab diád, tehát 1 rangú mátrix, összegeként. Itt a diádokat alkotó oszlop rendszer és sorrendszer is lineárisan független. A következő gondolat szerint több is igaz.

**3.3. állítás.** *Tegyük fel, hogy az  $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$  mátrix, amelynek feszítőrangja  $r$  előáll*

$$A = \sum_{j=1}^r b_j \cdot c_j$$

*r darab diád összegének alakjában, ahol  $b_j \in \mathbb{F}^n$  oszlopvektorok és  $c_j \in \mathbb{F}^m$  sorvektorok. Ekkor a diádok oszlopainból illetve sorainból alkotott*

$$\{b_j : j = 1, \dots, r\} \text{ és } \{c_j : j = 1, \dots, r\}$$

*rendszer lineárisan független rendszereket alkotnak.*  $\square$

*Bizonyítás:* Legyen a  $B$  mátrix  $j$ -edik oszlopa  $b_j$  és a  $C$  mátrix  $j$ -edik sora  $c_j$ . Világos, hogy  $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{F}^{r \times m}$  és  $A = BC$ . Ha  $B$  oszlopai nem alkotnának lineárisan független rendszert, akkor lenne  $B = B_1 B_2$  előállítás, ahol  $B_1 \in \mathbb{F}^{n \times s}$ ,  $B_2 \in \mathbb{F}^{s \times r}$ , ahol  $s < r$ . Ekkor persze

$$A = BC = (B_1 B_2) C = B_1 (B_2 C)$$

Itt  $B_1$  mátrixnak  $s$  oszlopa van, a  $B_2 C$  mátrixnak  $s$  sora van, ami ellentmond annak, hogy  $A$  feszítőrangja  $r$ . A sorrendszer lineárisan függetlensége is hasonlóan adódik.

## 3.2. Dimenzió

A Steinitz-lemma következményeképpen:

**3.4. következmény.** Egy vektortérben bármely két véges egyszerre lineárisan független és egyszerre generátorrendszer elemszáma azonos. Konkrétabban, ha

$$\{x_1, \dots, x_m\} \text{ és } \{y_1, \dots, y_n\}$$

lineárisan független generátorrendszerek, akkor  $n = m$ .

**3.5. definíció** (végesen generált vektortér). Egy vektorteret *végesen generáltnak* nevezünk, ha létezik véges elemszámú generátorrendszere.

Teljesen világos, hogy ha van egy vektortérben véges generátorrendszer, akkor van minimális generátorrendszer is, azaz van a térben lineárisan független generátorrendszer. Ezt rögzítjük a következőkben.

**3.6. állítás.** *Minden végesen generált vektortérnek van olyan vektorrendszere, amely egyszerre lineárisan független és generátorrendszer.*

*Bizonyítás:* Tekintsünk egy véges generátorrendszert. Ha minden elem kívül esik a többi elem lineáris burkában, akkor a rendszer lineárisan független, és készen is vagyunk. Ha van olyan elem, amely a többi elem lineáris burkában van, akkor dobjuk el ezt az elemet, és tekintsük, a most már egygyel kevesebb elemből álló vektorrendszert. Világos, hogy ez is generátorrendszer marad.

Folytassuk az eljárást. Mivel véges sok vektor van az eredeti generátorrendszerben az algoritmus előbb-utóbb megáll, ami azt jelenti, hogy olyan generátorrendszert kapunk, ahol már minden elem a többi lineáris burkán kívül van, ergo lineárisan független.

A lineárisan független generátorrendszerek olyan sűrűn fordulnak elő a tárgyalásban, hogy rövidebb külön nevet adni nekik.

**3.7. definíció** (bázis). Egy vektorrendszert *bázisnak* nevezünk, ha ez egyszerre lineárisan független és generátorrendszer.

A 3.6. állítást tehát úgy fogalmazhatjuk, hogy végesen generált vektortérnek van bázisa, és hasonlóan a 3.4. következmény pedig azt jelenti, hogy egy vektortérben bármely két bázis azonos elemszámú. Ez utóbbi tény ad értelmet a következő definíciónak:

**3.8. állítás.** *Egy végesen generált vektortérrel azt mondjuk, hogy  $n$  dimenziós, vagy  $n$  a dimenzió száma, ha a vektortérben van  $n$  elemű bázis.*

Fontos látni, hogy éppen azt gondoltuk meg, hogy minden végesen generált vektortérben van bázis,<sup>2</sup> és bármely két bázis pontosan annyi vektorból áll mint a tér dimenziója. A végesen generált vektortereket sokszor szinonimaként véges dimenziósnak is mondjuk.

Az eddigiek összefoglalásaként is tekinthető a következő állítás.

**3.9. állítás.** *Tekintsünk egy  $m$ -dimenziós vektorteret, és abban egy  $m$ -elemű  $\{x_1, \dots, x_m\}$  vektorrendszert. E vektorrendszerre tett alábbi feltévések ekvivalensek.*

1. Lineárisan független;
2. Maximális lineárisan független rendszer;
3. Generátorrendszer;
4. Minimális generátorrendszer;
5. Bázis.

*Bizonyítás:* Az első négy feltétel ekvivalenciájával kezdünk.

1.⇒2. Mivel a tér  $m$ -dimenziós, ezért van  $m$ -elemű generátorrendszer, így a Steinitz-lemma szerint nincs  $m$ -nél több elemet tartalmazó lineárisan független rendszere, ergo bármely  $m$  elemet tartalmazó lineárisan független rendszer maximális is.

<sup>2</sup>Ez nem végesen generált vektorterekre is igaz, de itt nem igazoljuk, viszont később sem használjuk.

2.⇒3. Láttuk korábban.

3.⇒4. Mivel a tér  $m$ -dimenziós, ezért van  $m$ -elemű lineárisan független rendszere, így a Steinitz-lemma szerint nincs  $m$ -nél kevesebb elemet tartalmazó generátorrendszer, ergo bármely  $m$  elemet tartalmazó generátorrendszer rendszer minimális is.

4.⇒1. Láttuk korábban.

Az első négy feltétel tehát ugyanazt jelenti. Így ha 1.-et feltesszük, akkor 3. is fennáll, ami azt jelenti, hogy 1. feltétel és 5. feltétel is ekvivalensek.

A Steinitz-lemma kulcs szerepet játszott dimenzió fogalmának megértésében, hiszen a bázis elemszáma nem lehetne a tér dimenziója, anélkül hogy tudnánk a tényt: bármely két bázis azonos elemszámú! Márpedig egy vektortérben nagyon sok bázis van. A Steinitz-lemma 2. pontja segít ennek megértéséhez.

**3.10. állítás.** *Egy végesen generált vektortér bármely lineárisan független rendszere kiegészíthető bázissá.*

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy a tér  $m$  dimenziós, ami azt jelenti, hogy van

$$\{x_1, \dots, x_m\}$$

$m$  elemű lineárisan független generátorrendszer. Legyen  $\{y_1, \dots, y_n\}$  egy lineárisan független. A Steinitz-lemma szerint ez a rendszer kiterjeszhető egy

$$\{y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}$$

generátorrendszerre, ami persze bázis is. Ezt kellett belátni.

Meggondoltuk tehát, hogy bármely véges generátorrendszerből elhagyható néhány elem úgy, hogy a rendszer lineárisan független generátorrendszerre váljon, és hasonlóan bármely lineárisan független rendszerhez, hozzátehető néhány elem úgy, hogy a rendszer lineárisan független generátorrendszerre váljon.

A független rendszerek cseréjéről (2.29.) és a generátor rendszerek cseréjéről (2.9.) szóló lemmák együttes alkalmazásaként kapjuk a következő lemmát.

**3.11. lemma** (bázis csere). *Legyen  $\{x_1, \dots, x_m\}$  egy bázisa valamely vektortérnek, és tegyük fel, hogy egy  $y$  vektorra*

$$y = \sum_{j=1}^m \eta_j x_j,$$

ahol  $\eta_k \neq 0$  valamely  $1 \leq k \leq m$  mellett. Ekkor  $y$  becserélhető a  $k$ -adik helyen a bázisba, úgy hogy az is bázis maradjon, azaz az

$$\{x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_m\}$$

vektorrendszer is egy bázis.

**3.12. állítás.** *Egy végesen generált altér minden altere is végesen generált. Ha  $M \subseteq V$  egy altér és  $V$  végesen generált, akkor  $\dim M \leq \dim V$ .*

*Bizonyítás:* Mivel  $V$ -ben nincs tetszőleges nagy lineárisan független rendszer, ezért  $M$ -ben van véges elemszámú maximális lineárisan független rendszer, amiről tudjuk, hogy egyben generátorrendszer is.

Van tehát  $V$ -ben is  $M$ -ben is bázis. Mivel az  $M$ -beli bázis egyben lineárisan független rendszer  $V$ -ben, ezért a Steinitz-lemma szerint  $\dim M \leq \dim V$ .

## 4. fejezet

# Koordinátázás

A KOORDINÁTA-TÉR FOGALMÁT vezetjük be. Látni fogjuk, hogy véges dimenziós vektortérre „lényegében” az egyetlen példa, az  $\mathbb{F}^n$  tér.

### 4.1. Lineáris operátor fogalma

**4.1. definíció** (lineáris operátor). Legyenek  $V, W$  ugyanazon  $\mathbb{F}$  test feletti vektorterek. Az  $A : V \rightarrow W$  függvényt *lineáris operáció*nak mondjuk, ha az

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

azonosság teljesül minden  $x, y \in V$  és minden  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  mellett.

Ha  $V = W$ , akkor a *lineáris transzformáció* kifejezést is használjuk, ha pedig  $W = \mathbb{F}$ , akkor szokásos még a *lineáris funkcionál* szó összetétel is.

A  $V \rightarrow W$  összes lineáris operációk halmazát  $L(V, W)$  módon jelöljük. A  $V = W$  esetben a rövidség kedvéért csak  $L(V)$ -t írunk.  $\square$

Láttuk korábban, hogy ha  $A$  egy  $m \times n$  méretű mátrix, akkor  $x \in \mathbb{F}^n$  oszlopvektor mellett az

$$x \mapsto A \cdot x,$$

mátrix szorzás egy  $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  lineáris operációt definiál. Hasonlóan, ha most  $x \in \mathbb{F}^m$  sorvektort jelöl akkor az

$$x \mapsto x \cdot A$$

szorzás egy  $\mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineáris operációt jelent.

**4.2. definíció-állítás.** Legyen  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Ennek értékkészlete egy altér, amelyet  $\text{Im } A$  módon jelölünk. Azon pontok halmaza, amelyeket  $A$  operátor a  $W$  tér zérus elemébe képez egy alteret alkotnak, amelyet ker  $A$  módon jelölünk.

Az  $L(V, W)$  lineáris operációk halmaza a szokásos függvény műveletekkel vektorteret alkot.  $\square$

A jelölések tehát:

$$\text{Im } A = \{y \in W : \text{létezik } x \in V, A(x) = y\}, \quad \ker A = \{x \in V : A(x) = 0\}.$$

**4.3. állítás.** Egy lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha  $\ker A = \{0\}$ . Egy injektív lineáris leképezés inverz függvénye egy  $\text{Im } A \rightarrow V$  lineáris operátor. Az  $A \in L(V, W)$  injektív lineáris leképezés inverzét  $A^{-1}$  módon jelöljük.

Lineáris leképezések kompozíciója is lineáris.  $\square$

Tekinthetünk az  $A$  mátrixra mint az  $x \mapsto A \cdot x$  lineáris operátorra. Ennek inverze az  $x \mapsto A^{-1} \cdot x$  operátor, ahol  $A^{-1}$  az inverz mátrixot jelöli, hiszen  $Ax = y$  pontosan akkor teljesül, ha  $x = A^{-1}y$ .

Itt jegyezem meg, hogy a tradíciókat követve egy  $A$  lineáris operáció esetén az  $x$  vektor  $A(x)$  képét a zárójeleket elhagyva  $Ax$  módon írjuk. Hasonlóan az  $A \circ B$  kompozíciót is  $AB$  módon jelöljük.

**4.4. állítás.** Legyen  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Ekkor

1. ha  $A$  injektív és  $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq V$  lineárisan független, akkor  $\{Ay_1, \dots, Ay_m\}$  is lineárisan független.
2. ha  $A$  szürjektív és  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$  generátorrendszer, akkor  $\{Ax_1, \dots, Ax_n\}$  is generátorrendszer  $W$ -nek.
3. ha  $A$  bijekció és  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$  bázis, akkor  $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$  is bázis  $W$ -ben.  $\square$

**4.5. definíció** (izomorf vektorterek). Egy  $A : V \rightarrow W$  függvényt *izomorfizmusnak* mondunk, ha  $A$  lineáris bijekció. Az ugyanazon test feletti  $V, W$  vektortereket egymással *izomorf vektortérnek* mondjuk, ha létezik  $A : V \rightarrow W$  izomorfizmus.  $\square$

Gondoljuk meg, hogy az azonos test feletti vektorterek izomorfizmusa egy ekvivalencia reláció, azaz (1) minden vektortér izomorf saját magával; (2) ha  $V$  izomorf  $W$ -vel, akkor  $W$  is  $V$ -vel; (3) ha  $V_1$  és  $V_2$  izomorfak, továbbá ha  $V_2$  és  $V_3$  izomorfak, akkor  $V_1$  és  $V_3$  is izomorfak.

**4.6. állítás.** minden az  $\mathbb{F}$  test feletti véges dimenziós  $V$  vektortér izomorf az  $\mathbb{F}^{\dim V}$  koordináta-térrel.  $\square$

*Bizonyítás:* Rögzítsünk egy  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázist  $V$ -ben. Definiálja  $\Psi : \mathbb{F}^n \rightarrow V$  a következő függvényt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$$

Könnyű számolással ellenőrizhető, hogy  $\Psi$  egy lineáris operáció, a bázis lineárisan függetlenségét használva adódik  $A$  injektivitása, a szürjektivitás pedig a bázis generátorrendszer tulajdonságát használva igazolható.

**4.7. definíció** (koordináta). Legyen  $\{e_1, \dots, e_n\}$  egy bázisa a  $V$  vektortérnek. Tudjuk, hogy minden  $v \in V$  vektor egyetlen egyféléképpen, de előáll mint a bázisvektorok egy lineáris kombinációja. Ha ez  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ , akkor az  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$  vektort az  $x$  vektor  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázisban felírt koordináta-vektorának nevezzük.  $\square$

Pont azt mutattuk meg, hogy egy rögzített bázis mellett az a leképezés, amely egy vektorhoz hozzárendeli a bázisban felírt koordinátáit, egy izomorfizmus a vektortér és a koordináta-tere közt. Az eddigiek összefoglalásaként kapjuk az alábbi állítást.

**4.8. állítás.** Legyenek  $V$  és  $W$  ugyanazon test feletti végesen generált vektorterek. E két vektortér pontosan akkor izomorf, ha azonos dimenziósak.  $\square$

*Bizonyítás:* Ha  $V$  izomorf  $W$ -vel, akkor létezik köztük izomorfizmus. No de izomorfizmus bázisra visz, ami azt jelenti, hogy azonos elemszámú bázisa van minden két téren.

Ha  $\dim V = \dim W = n$ , akkor minden két vektortér izomorf  $\mathbb{F}^n$  vektortérrel, ergo egymással is izomorfak.

Fontos látni, hogy a vektor koordináta-vektora függ a bázis megválasztásától. Akár ha csak a bázisban az elemek sorrendjét megváltoztatjuk, már akkor változik a vektor koordináta-vektora. A 2.9., a 2.29. és a 3.11. lemmák összefoglalásaként kapjuk, hogy milyen módon változnak egy rögzített vektor koordinátái, ha a bázisban egy elemet megváltoztatunk.

**4.9. lemma** (bázis transzformáció). Legyen  $\{x_1, \dots, x_m\}$  egy bázisa valamely vektortérnek, és tegyük fel, hogy egy  $y$  olyan vektor  $y = \sum_{j=1}^m \eta_j x_j$ , ahol  $\eta_k \neq 0$  valamely  $1 \leq k \leq m$  mellett. Láttuk, hogy a  $k$ -adik helyen a bázisba, tehát az  $\{x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_m\}$  vektortrendszer is bázis marad. Tegyük fel továbbá, hogy  $a \in V$  vektor koordinátái ismertek az eredeti bázisban,  $a = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$ . Ekkor ugyanez az a vektor az új bázisban kifejezve  $a = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\alpha_j - \eta_j \delta) x_j + \delta y_k$ , ahol  $\delta = \frac{\alpha_k}{\eta_k}$ .

Egy táblázatban összefoglalva:

$$\begin{array}{c|cc} & y & a \\ \hline x_1 & \eta_1 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & \boxed{\eta_k} & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & \eta_m & \alpha_m \\ \hline & \delta & \frac{\alpha_k}{\eta_k} \end{array} \implies \begin{array}{c|c} & a \\ \hline x_1 & \alpha_1 - \eta_1 \delta \\ \vdots & \vdots \\ y & \delta \\ \vdots & \vdots \\ x_m & \alpha_m - \eta_m \delta \end{array} \quad (4.1)$$

↓



## 5. fejezet

# Alterekek Minkowski-összege és direkt összege

Az ALTEREK STRUKTÚRÁJÁT vizsgáljuk a fejezetben.

### 5.1. Minkowski-összeg

**5.1. definíció.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{F}$  test feletti vektortér és  $H_1, H_2 \subseteq V$  részhalmazok. E két halmaz összegén vagy Minkowski-összegén az

$$H_1 + H_2 = \{a + b : a \in H_1, b \in H_2\}$$

halmazt értjük. Hasonlóan,  $\alpha \in \mathbb{F}$  szám mellett jelölje

$$\alpha H_1 = \{\alpha a : a \in H_1\}$$

az  $\alpha$  szám és  $H_1$  halmaz szorzatát. □

Világos, hogy ha például  $H_1$  üres, akkor  $H_1 + H_2$  is, és a  $\alpha H_1$  halmazok is üresek.

Az alábbi tulajdonságok, a vektortér axiómák közvetlen következményei. Azokat a tulajdonságokat foglaljuk össze, amelyeket a vektortér axiómákból meg tudunk menteni a Minkowski-összegre és a számmal való szorzásra.

**5.2. állítás.** Legyenek  $A, B \subseteq V$  a  $V$  vektortér részhalmazai, továbbá  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  számok. Ekkor

1.  $A + B = B + A$ ;
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
3.  $A + \{0\} = A$ ;
4.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$ ;
5.  $(\alpha + \beta)A \subseteq \alpha A + \beta A$ ;
6.  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ ;
7.  $1 \cdot A = A$ ;

Igaz továbbá, hogy ha  $A \neq \emptyset$ , akkor  $A + V = V$  és  $0 \cdot A = \{0\}$ . □

Ha  $A \subseteq V$  legalább két elemű, akkor  $A + (-A) \neq \{0\}$ , ami azt mutatja hogy a fenti 5. tartalmazás általában nem teljesülhet egyenlőségre.

Az alábbi állítás csak átfogalmazása az altér definíciójának.

**5.3. állítás.** A  $V$  vektortér  $N \subseteq V$  részhalmaza pontosan akkor altér  $V$  a vektortérben, ha (a)  $N \neq \emptyset$  és az (b)  $\alpha N + \beta N \subseteq N$  tartalmazás minden  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  mellett fennáll. □

<sup>1</sup>Egy  $A \subseteq V$  halmazt *affin halmaznak* szokás mondani, ha zárt az 1 összegű lineáris kombinációra (*affin kombinációra*) nézve, tehát ha a  $\lambda A + (1 - \lambda)A \subseteq A$  tartalmazás teljesül minden  $\lambda \in \mathbb{F}$  mellett. Ha  $A$  affin halmaz, akkor a fordított egyenlőség is igaz feltéve, hogy  $\alpha + \beta \neq 0$ . Ugyanis  $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) \left( \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha A + \beta A) \right) = (\alpha + \beta) \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} A \right) \subseteq (\alpha + \beta) A$ .

Látható, hogy egy affin halmaz eltoltja affin marad, hiszen ha  $N$  egy altér  $v \in V$  egy vektor, akkor  $\lambda(x + N) + (1 - \lambda)(x + N) = x + \lambda N + (1 - \lambda)N \subseteq x + N$ . Mivel egy altér nyilvánvalóan affin halmaz is, ezért egy altér eltoltja is affin halmaz. Még speciálisabban egy lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza is fontos példa affin halmazra.

Láttuk korábban, hogy alterek közös része is altér. Ezt úgy interpretálhatjuk, hogy a legbővebb olyan altér, amelyet két előre megadott altér tartalmaz ezen alterek halmazelméleti közös része. Felmerül, hogy mi a legszűkebb olyan altér, amely minden két előre megadott altér tartalmazza. A válasz kézenfekvő, hiszen éppen ez a generált altér fogalma. Ha  $H_1, H_2 \subseteq V$  tetszőleges halmazok, akkor  $\text{lin}\{H_1 \cup H_2\}$  a  $H_1$  és  $H_2$  halmazokat tartalmazó legszűkebb altér. Amennyiben altereket tartalmazó legszűkebb altér keresünk, akkor többet is állíthatunk.

**5.4. állítás.** Legyenek  $M, N \subseteq V$  alterek. Ekkor  $\text{lin}(M \cup N) = M + N$ , tehát az alterek Minkowski-összege is altér, sőt ez az  $M$  és  $N$  altereket tartalmazó legszűkebb altér.  $\square$

**Bizonyítás:** Ha  $R$  egy altér, amelyre  $M \subseteq R$  és  $N \subseteq R$  is fennáll, akkor  $M + N \subseteq R + R \subseteq R$ , emiatt  $M + N \subseteq \text{gen}(M \cup N)$ . Másrészt világos, hogy  $M + N$  egy az  $M \cup N$  halmazt tartalmazó altér. Így azt kaptuk, hogy  $\text{gen}(M \cup N) \subseteq M + N$ . Figyelembe véve, hogy  $\text{gen}(M \cup N) = \text{lin}(M \cup N)$ , készen is vagyunk.  $\square$

A következő állítás szerint, ha előre adott két altér, akkor ezek összegének dimenziója minden azonos a két altér tartalmazó legszűkebb altér dimenziójának, és a két altér által tartalmazott legbővebb altér dimenziójának összegével.

**5.5. állítás.** Legyenek  $M$  és  $N$  a  $V$  vektortér végesen generált alterei. Ekkor az  $M + N$  altér is végesen generált, továbbá

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N - \dim(M \cap N). \quad \square$$

**Bizonyítás:** Világos, hogy  $M$  egy generátorrendszerének és  $N$  egy generátorrendszerének egyesítése generátorrendszer az  $M + N$  altérnek is.

Legyen most  $\{p_1, \dots, p_r\}$  bázis  $M \cap N$ -ben. Mivel egy lineárisan független rendszer kiegészíthető egy bázissá, ezért legyen  $\{m_1, \dots, m_s, p_1, \dots, p_r\}$  bázis  $M$ -ben, és  $\{p_1, \dots, p_r, n_1, \dots, n_t\}$  bázis  $N$ -ben, ahol  $r, s, t$  nem negatív egészek.<sup>2</sup> Nyilvánvaló, hogy az

$$\{m_1, \dots, m_s, p_1, \dots, p_r, n_1, \dots, n_t\} \quad (\dagger)$$

rendszer egy véges generátorrendszer az  $M + N$  altérnek. Most megmutatjuk, hogy a  $(\dagger)$  rendszer lineárisan független is. Legyen ehhez

$$\sum_{j=1}^s \alpha_j m_j + \sum_{j=1}^r \gamma_j p_j + \sum_{j=1}^t \beta_j n_j = 0. \quad (\ddagger)$$

Ekkor persze  $\sum_{j=1}^s \alpha_j m_j = -\sum_{j=1}^r \gamma_j p_j - \sum_{j=1}^t \beta_j n_j \in M \cap N$ . Léteznek tehát  $\delta_1, \dots, \delta_r$  számok, amelyekre  $\sum_{j=1}^s \alpha_j m_j = \sum_{j=1}^r \delta_j p_j$ , emiatt a  $(\ddagger)$  egyenlőség a következő módon alakul:

$$\sum_{j=1}^r (\delta_j + \gamma_j) p_j + \sum_{j=1}^t \beta_j n_j = 0.$$

No de,  $\{p_1, \dots, p_r, n_1, \dots, n_t\}$  lineárisan független, ezért itt minden együttható zérus. Speciálisan  $\beta_j = 0$  minden  $j = 1, \dots, t$  mellett. Ezt  $(\ddagger)$ -be visszáírva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^s \alpha_j m_j + \sum_{j=1}^r \gamma_j p_j = 0,$$

amiiből az  $\{m_1, \dots, m_s, p_1, \dots, p_r\}$  rendszer lineárisan függetlenségét használva kapjuk, hogy  $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$ .

Megmutattuk tehát, hogy  $(\dagger)$  vektorrendszer bázisa  $M + N$ -nek. Mivel ennek elemszáma  $s + r + t = (s + r) + (r + t) - r$ , ezért készen is vagyunk.

<sup>2</sup>Figyeljünk arra, hogy  $r = 0$  is lehet, ha  $M$  és  $N$  diszjunktak. Ekkor  $\{\}$  a bázis a  $\{0\}$  altérben, azaz nincs egyetlen  $p$ -sem. Az összes  $r$  elemet tartalmazó szumma ilyenkor üres, tehát értéke zérus.

## 5.2. Direkt összeg

Szokásos szóhasználat alterek esetén, hogy két alteret *diszjunktak* mondunk, ha metszetük csak a vektortér zérus elemét tartalmazza.

**5.6. definíció** (direkt összeg). Legyenek az  $M_1, \dots, M_s \subseteq V$  alterek a  $V$  vektortér alterei ( $s \geq 2$ ). Azt mondjuk, hogy az  $N \subseteq V$  altér az  $M_1, \dots, M_s$  alterek *direkt összege*, ha

1.  $\sum_{j=1}^s M_j = N$ ,
2.  $\left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s M_j \right) \cap M_k = \{0\}$  minden  $k = 1, \dots, s$  mellett.

Ekkor a  $N$ -et  $N = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$  módon jelöljük.  $\square$

Külön érdemes figyelni az  $s = 2$ , tehát csak két altér direkt összegének esetére. Ilyenkor a fenti definíció azt jelenti, hogy az  $M_1$  és  $M_2$  diszjunkt alterekre  $N = M_1 + M_2$ .

**5.7. állítás.** Legyen az  $M_1, \dots, M_s, N \subseteq V$  a  $V$  vektortér altere. Az  $N = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$  pontosan akkor teljesül, ha

1. minden  $k = 1, \dots, s$  mellett  $M_k \subseteq N$ , és
2. minden  $v \in N$  vektorhoz létezik egyetlen  $v_j \in M_j, j = 1, \dots, s$  vektor, amelyre

$$v = \sum_{j=1}^s v_j.$$

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $M$  direkt összege az  $M_1, \dots, M_s$  altereknek. minden szóba jövő  $k$ -ra  $M_k \subseteq \sum_{j=1}^s M_j = M$ . Mivel  $M = M_1 + \dots + M_s$ , ezért minden  $v \in M$ -hez létezik  $v_j \in M_j$ , hogy  $v = v_1 + \dots + v_s$ . Most tegyük fel, hogy  $v$  előáll  $v = u_1 + \dots + u_s$  alakban is, ahol  $u_j \in V_j$  minden  $j = 1, \dots, s$  mellett. Ekkor minden rögzített  $k = 1, \dots, s$  mellett

$$u_k - v_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s (v_j - u_j).$$

No de, a baloldali vektor  $M_k$ -beli, míg a jobboldali vektor  $\sum_{j=1}^s M_j$ -beli. A feltétel szerint ilyen vektor egyedül a zérus vektor, amiből  $u_k = v_k$  következik. Mivel ezt minden  $k = 1, \dots, s$  mellett elismételhetjük, ezért az előállítás egyértelműségét be is láttuk.

Megfordítva, most azt tegyük fel, hogy a két feltétel fennáll. Ekkor 1. szerint  $M_1 + \dots + M_s \subseteq N + \dots + N = N$ , és 2. szerint  $N \subseteq M_1 + \dots + M_s$ , amiből már  $\sum_{j=1}^s M_j = N$  következik is. Most képzeljük el, hogy valamely  $k$  mellett  $v_k \neq 0, v_k \in M_k$  és  $v_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s v_j$ , ahol  $v_j \in M_j$  minden  $j = 1, \dots, s$  mellett. Ekkor

$$v_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s v_j = 0 = \sum_{j=1}^s 0$$

az  $N$  vektortér zérus elemének két különböző előállítása, hiszen a  $k$ -adik vektortérbeli elem a baloldalon a  $v_k$  nem zérus vektor a  $M_k$ -nak, míg a jobboldalon a zérus vektor szerepel  $M_k$ -ból (is).  $\square$

Érdemes észrevenni, hogy a fenti állítás 2. feltétele nem más mint az alábbi két feltétel együttesének tömör megfogalmazása:

- 2a.  $N = M_1 + \dots + M_s$ ,
- 2b.  $\sum_{j=1}^s v_j = 0, v_j \in M_j$  esetén minden  $j = 1, \dots, s$  mellett  $v_j = 0$ .

Így a következő állítást is meggondoltuk:

**5.8. állítás.** Legyen az  $M_1, \dots, M_s, N \subseteq V$  a  $V$  vektortér altere. Az  $N = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$  pontosan akkor teljesül, ha

1.  $M_k \subseteq N$  minden  $k = 1, \dots, s$  mellett;
- 2a.  $N = M_1 + \dots + M_s$ ;
- 2b.  $\sum_{j=1}^s v_j = 0$ ,  $v_j \in M_j$  esetén minden  $j = 1, \dots, s$  mellett  $v_j = 0$ .

Ha tehát csak az  $M_1, \dots, M_s$  alterek adottak, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy ezeknek a direktösszege értelmezhető legyen éppen a fenti 2b feltétel. Ebben az esetben az  $N = \sum_{j=1}^s M_j$  altér lesz az  $M_1, \dots, M_s$  alterek

$$N = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$$

direktösszege.

Megint csak a két vektortér speciális esetére figyelve azt igazoltuk, hogy  $N$  pontosan akkor az  $M_1$  és  $M_2$  direkt összege, ha  $M_1$  és  $M_2$  olyan alterei  $N$ -nek, hogy  $N$  minden eleme előáll, de csak egyféléképpen egy  $M_1$  és egy  $M_2$ -beli vektor összegeként.

**5.9. állítás.** Legyenek az  $M_1, \dots, M_s \subseteq V$ , ( $s \geq 2$ ) alterek a  $V$  vektortér olyan végesen generált alterei, amelyekre  $N = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ . Ekkor  $\dim N = \dim M_1 + \dots + \dim M_s$ .

*Bizonyítás:* Az  $s = 2$  eset éppen az 5.5. állítás, hiszen a  $\{0\}$  triviális altér nulla dimenziós. Most tegyük fel, hogy  $s$ -nél kisebb számokra igaz az állítás, és lássuk be  $s$ -re.  $s > 2$ . Legyen  $M = \sum_{j=1}^{s-1} M_j$ . Világos, hogy  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_{s-1}$  és  $M \oplus M_s = N$ . A már igazolt  $s = 2$  eset és az indirekt feltevés szerint

$$\dim N = \dim M + \dim M_s = \sum_{j=1}^{s-1} \dim M_j + \dim M_s = \sum_{j=1}^s \dim M_j. \quad \square$$

Az állításból azonnal adódik, hogy ha az  $M_1, M_2, \dots, M_s$  alterek bázisait, egy közös vektorrendszerbe tesszük, akkor az így kapott vektorrendszer az  $N$  tér egy bázisává válik. Világos ugyanis, hogy az egyesített rendszer  $N$ -nek generátorrendszeré, és az elemeinek száma az 5.9. állítás szerint éppen  $\dim N$ . Azt kaptuk tehát, hogy ez egy minimális generátorrendszer  $N$ -nek, ergo egy bázis.

A fenti állítás konkrét alkalmazhatóságához nagy segítség a most következő észrevétel.

**5.10. állítás.** Adottak az  $M_1, \dots, M_s \subseteq V$  alterek, ahol  $s \geq 2$ . Az alábbi feltételek ekvivalensek:

1. minden  $k = 1, \dots, s$  mellett  $M_k \cap \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s M_j \right) = \{0\}$ .
2. minden  $k = 2, \dots, s$  mellett  $M_k \cap \left( \sum_{j=1}^{k-1} M_j \right) = \{0\}$ .

*Bizonyítás:* Mivel  $k \geq 2$  mellett  $\sum_{j=1}^{k-1} M_j \subseteq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s M_j$ , ezért 1.  $\Rightarrow$  2. nyilvánvaló.

Most azt mutatjuk meg, hogy ha 1. feltétel nem igaz, akkor 2. feltétel sem áll. Tegyük fel tehát, hogy van olyan  $1 \leq k \leq s$ , amelyre  $M_k \cap \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s M_j \right) \neq \{0\}$ . Ha  $k = s$ , akkor készen is vagyunk. Legyen emiatt a továbbiakban  $k < s$ . Eszerint léteznek  $v_j \in M_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) vektorok, amelyekre

$$0 \neq v_k = \sum_{j=1}^{k-1} v_j + \sum_{j=k+1}^s v_j.$$

Legyen  $t$  a legnagyobb olyan szám, amelyre  $k \leq t \leq s$  és  $v_t \neq 0$ . Ha  $k = 1$ , akkor a jobboldali első szumma üres, emiatt  $t > 1$ . Ha viszont  $k > 1$ , akkor  $1 < k \leq t$ . Mindkét esetben látjuk tehát, hogy  $t > 1$ . Ekkor az

$$v_k = \sum_{j=1}^{k-1} v_j + \sum_{j=k+1}^t v_j.$$

azonosságot átrendezve kapjuk, hogy

$$-v_t = \sum_{j=1}^{k-1} v_j - v_k + \sum_{j=k+1}^{t-1} v_j.$$

Itt a baloldali nem zérus vektor  $M_t$ -beli, a jobboldali vektor  $\sum_{j=1}^{t-1} M_j$ -beli, ergo valamely  $1 < t \leq s$  mellett találtunk az  $M_t \cap \left( \sum_{j=1}^{t-1} M_j \right)$  altérben is egy nem zérus elemet.  $\blacksquare$

Az 1. feltétel előnye, hogy ennek alapján teljesen világos, hogy az  $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$  direkt összeg nem függ az alterek sorrendjétől, 2. előnye pedig, hogy ha képeznünk kell az  $M_1, \dots, M_s$  alterek direkt összegét, akkor rekurzívan járhatunk el: ha a korábbi lépésekben ellenőriztük, hogy az  $M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1}$  értelmes, akkor a következő lépésekben csak azt kell ellenőriznünk, hogy  $M_n$  diszjunkt az első  $n-1$  altér direkt összegétől.

### 5.3. Direkt kiegészítő

**5.11. állítás.** Legyen  $V$  egy véges dimenziós vektortér, és  $M \subseteq V$  egy altér. Ekkor létezik  $N \subseteq V$  altér, amelyre  $M \oplus N = V$ . Egy ilyen alteret az  $M$  altér direkt kiegészítőjének nevezünk. Az  $N$  altér valamennyi direkt kiegészítője egymással izomorf.  $\blacksquare$

Egy altérnek sok-sok direkt kiegészítője lehet. Például tekintsük a folytonos függvények  $C[0, 1]$  vektortérét  $\mathbb{R}$  felett, és legyen  $N$  az az altér, amely azon  $f \in C[0, 1]$  függvényeket tartalmazza, amelyekre  $f(0) = 0$ . Látható, hogy tetszőleges  $g \in C[0, 1]$ , függvényre, amelyre  $g(0) \neq 0$ , az  $g$  által generált egydimenziós altér direkt kiegészítője az  $N$  altérnek.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Ha véges dimenziós példára vágyunk, helyettesítsük  $C[0, 1]$ -et a legfeljebb  $n$ -ed fokú  $\mathbb{R}$  feletti polinomok  $n+1$  dimenziós vektorterével.



## 6. fejezet

# Vektortér faktortere

A VEKTORTÉR KONSTRUKCIÓK végéhez érkeztünk. Láttuk, hogy alerek közörsrésze, összege is vektorteret alkot. A faktortér az utolsó vektortér konstrukciós eljárásunk.

**6.1. definíció.** Legyen  $V$  egy vektortér és  $M \subseteq V$  egy adott altér. Definiáljuk a  $\sim$  relációt a vektortér elemei felett:  $x \sim y$  pontosan akkor, ha  $x - y \in M$ .

Látható, hogy  $\sim$  ekvivalencia reláció, hiszen

1. reflexív, ugyanis  $x - x = 0 \in M$  minden  $x \in V$ -re,
2. szimmetrikus, ugyanis  $x - y \in M$  mellett  $y - x = -(x - y) \in -M = M$ ,
3. tranzitív, ugyanis  $x - y \in M$  és  $y - z \in M$  esetén  $x - z = (x - y) + (y - z) \in M + M = M$

Legyen adott  $x \in V$  mellett az  $x$  elemet tartalmazó ekvivalencia osztály  $M_x$ , azaz

$$M_x = \{u \in V : u \sim x\}.$$

Tudjuk, hogy az összes ekvivalencia osztályok  $\{M_x : x \in V\}$  halmazrendszere a  $V$  egy partícióját alkotja, ami azt jelenti, hogy  $V = \bigcup_{x \in V} M_x$ ; ha valamely  $x, y \in V$  mellett  $M_x \cap M_y \neq \emptyset$ , akkor  $M_x = M_y$ ; és minden  $x \in V$  mellett  $M_x \neq \emptyset$ .

Most azt gondoljuk meg, hogy minden egyes ekvivalencia osztály tekinthető úgyis mint, bármelyik elemével való eltoltja az  $M$  vektortérnek. Speciálisan az is adódik, hogy az ekvivalencia osztályok affin halmazok.

**6.2. állítás.** A fenti jelölések mellett  $M_x = u + M$  minden  $u \in M_x$  mellett. Speciálisan, minden  $x \in V$  mellett  $M_x = x + M$ .

*Bizonyítás:* Megmutatjuk, hogy  $M_x \subseteq u + M$ . Legyen  $v \in M_x$  tetszőleges. Ekkor  $v \sim x$ ,  $u \sim x$ , ezért  $v \sim u$ . Ez azt jelenti, hogy  $v - u \in M$ , amiből már adódik, hogy  $v \in u + M$ .

Megfordítva, most igazoljuk, hogy  $u + M \subseteq M_x$ . Legyen tehát  $v \in u + M$ . Ekkor  $v - u \in M$ , ergo  $v \sim u$ . No de  $u \sim x$  is fel van téve, emiatt  $v \sim x$ , azaz  $v \in M_x$ .

Most definiálni szeretnénk az ekvivalencia osztályok halmazán összeadás és egy testbeli elemmel való szorzás műveletet. Az összeadás művelet legyen a korábban definiált Minkowski-összeg. Ez valóban művelet az ekvivalencia osztályokra megszorítva, hiszen ha  $M_{x_1}$  és  $M_{x_2}$  két ekvivalencia osztály, akkor

$$M_{x_1} + M_{x_2} = (x_1 + M) + (x_2 + M) = x_1 + x_2 + M + M = (x_1 + x_2) + M = M_{x_1 + x_2}, \quad (\dagger)$$

azaz két ekvivalencia osztály Minkowski-összege is egy ekvivalencia osztály. Sőt, az is adódik, hogy *egy-egy vektorhoz tartozó ekvivalencia osztályok Minkowski-összege azonos e két vektor összegéhez tartozó ekvivalencia osztállyal*.

A skalárral való szorzás már nem ilyen egyszerű, hiszen  $0 \cdot M_x = \{0\}$ , de ez utóbbi halmaz általában nem egy ekvivalencia osztály, ezért az ekvivalencia osztályok halmazán a skalárral való szorzás nem egy művelet.

**6.3. definíció** (ekvivalencia osztály számszorosa). Legyen  $\alpha \in \mathbb{F}$  egy szám és  $M_x$  egy ekvivalencia osztály. Definiálja

$$\alpha * M_x = \begin{cases} \alpha M_x & , \text{ha } \alpha \neq 0 \\ M & , \text{ha } \alpha = 0. \end{cases}$$

Egyrészt vegyük észre, hogy  $\alpha \neq 0$  mellett  $\alpha M_x = \alpha(x + M) = \alpha x + \alpha M = \alpha \cdot x + M = M_{\alpha \cdot x}$ , másrészt azt lássuk, hogy az  $\alpha = 0$  esetben  $M = 0 + M = M_0 = M_{0 \cdot x}$ , ami azt jelenti, hogy a fenti definícióra az

$$\alpha * M_x = M_{\alpha \cdot x} \quad (\ddagger)$$

azonosság is teljesül minden  $x \in V$  vektorra és minden  $\alpha \in \mathbb{F}$  számra. Kiderült tehát, hogy a most bevezetett  $*$  skalárral való szorzást alkalmazva egy ekvivalencia osztálynak egy számmal való szorzata egy ekvivalencia osztály lesz, sőt egy vektorhoz tartozó ekvivalencia osztály  $\alpha$  szorosa azonos a vektor  $\alpha$ -szorosához tartozó ekvivalencia osztállyal.

**6.4. állítás** (faktortér). Legyen  $V$  egy az  $\mathbb{F}$  test feletti vektortér, és  $M \subseteq V$  egy rögzített altér. Legyen  $\sim$  a  $V$  vektortér elemein értelmizett reláció, amelyre  $x \sim y$ , ha  $x - y \in M$  ekvivalencia reláció. Láttuk, hogy ez ekvivalencia reláció. Jelölje

$$V/M = \{M_x : x \in V\}$$

az ekvivalencia osztályok halmazát. Definiáljuk a  $V/M$  halmazrendszer elemei mint halmazok között a Minkowski-összeget és a skalárral való szorzást:

$$M_{x_1} + M_{x_2} = M_{x_1+x_2}, \quad \text{és} \quad \alpha * M_x = M_{\alpha \cdot x}.$$

Ekkor az itt bevezetett  $(V/M, +, *)$  struktúra az  $\mathbb{F}$  test feletti vektorteret alkot. Ezt a vektorteret nevezzük a  $V$  vektortér  $M$  szerinti faktorterének.

Bizonyítás: Meggondoltuk már, hogy a Minkowski-összeg és a  $*$  szorzás eredménye egy ekvivalencia osztály. Most vegyük sorra a vektortér axiómákat: Az

1.  $M_{x_1} + M_{x_2} = M_{x_2} + M_{x_1}$ ;
2.  $(M_{x_1} + M_{x_2}) + M_{x_3} = M_{x_1} + (M_{x_2} + M_{x_3})$ ;

axiómák tetszőleges halmazokra, nem csak ekvivalencia osztályokra is fennállnak.

Az ekvivalencia osztályok között  $M_0 = M$  neutrális elem, hiszen minden  $x \in V$  mellett  $M_x + M = (x + M) + M = x + (M + M) = x + M = M_x$ .

3. minden  $M_x$  ekvivalencia osztályra  $M_x + M = M_x$ ;
4. minden  $M_x$  ekvivalencia osztályra  $M_x + M_{-x} = M$ , hiszen  $M_x + M_{-x} = M_{x+(-x)} = M_0 = M$ , felhasználva a már igazolt  $\dagger$  azonosságot.

A  $*$  szorzás és az összeadás kapcsolatát leíró aximák ellenőrzéséhez használjuk  $(\dagger)$  és  $(\ddagger)$  azonosságokat:

5.  $(\alpha + \beta) * M_x = \alpha * M_x + \beta * M_x$ , hiszen  $(\alpha + \beta) * M_x = M_{(\alpha+\beta)x} = M_{\alpha x + \beta x} = M_{\alpha x} + M_{\beta x} = \alpha * M_x + \beta * M_x$ ;
6.  $\alpha * (M_{x_1} + M_{x_2}) = \alpha * M_{x_1} + \alpha * M_{x_2}$ , hiszen  $\alpha * (M_{x_1} + M_{x_2}) = \alpha * (M_{x_1+x_2}) = M_{\alpha(x_1+x_2)} = M_{\alpha x_1 + \alpha x_2} = M_{\alpha x_1} + M_{\alpha x_2} = \alpha * M_{x_1} + \alpha * M_{x_2}$ ;
7.  $(\alpha\beta) * M_x = \alpha * (\beta * M_x)$ , hiszen  $(\alpha\beta) * M_x = M_{(\alpha\beta)x} = M_{\alpha(\beta x)} = \alpha * M_{\beta x} = \alpha * (\beta * M_x)$ ;
8.  $1 * M_x = M_x$ , hiszen  $1 * M_x = M_{1 \cdot x} = M_x$ .

Ezt kellett belátni.

**6.5. állítás.** Legyen  $M$  a  $V$  vektortér egy altere. Definiálja  $\varphi : V \rightarrow V/M$  az  $x \mapsto M_x$  függvényt.

1. Ekkor  $\varphi : V \rightarrow V/M$  egy szürjektív lineáris operáció.

2. Legyen most  $N$  az  $M$  egy direkt kiegészítője, azaz  $M \oplus N = V$ . Definiálja  $\Phi$  a  $\varphi$  megszorítását az  $N$  direkt kiegészítőre. Ekkor  $\Phi : N \rightarrow V/M$  egy izomorfizmus.

Bizonyítás: 1. A (†) és (‡) szerint  $\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = M_{\alpha x_1 + \beta x_2} = M_{\alpha x_1} + M_{\beta x_2} = \alpha * M_{x_1} + \beta * M_{x_2} = \alpha * \varphi(x_1) + \beta * \varphi(x_2)$ , ami éppen azt jelenti, hogy  $\varphi$  egy lineáris operáció. Ha  $A \in V/M$  egy ekvivalencia osztály, és  $x \in A$  tetszőleges eleme, akkor  $\varphi(x) = M_x = A$ , ergo  $\varphi$  szürjekció.

2. Világos, hogy  $\Phi$  lineáris leképezés leszűkítéseként maga is lineáris.

Most nézzük, hogy  $\Phi$  is szürjekció marad. Ha  $A \in V/M$  egy ekvivalencia osztály, akkor létezik  $x \in V$ , amelyre  $\varphi(x) = A$ . No de  $x = u + v$  alakú, ahol  $u \in M$  és  $v \in N$ , és  $M = M_0$  az  $V/M$  vektortér neutrális eleme. Így  $A = \varphi(x) = \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = M + \varphi(v) = \varphi(v)$ .

Az injektív tulajdonsághoz legyen  $v \in \ker \Phi$ , azaz  $v \in N$ , amelyre  $\varphi(v) = M$ . Ez a  $\varphi$  definíciója miatt azt jelenti, hogy  $M_v = M$ , azaz  $v \in M$ . Azt kaptuk tehát, hogy  $v \in N \cap M = \{0\}$ , ami csak úgy lehetséges, hogy  $v = 0$ . Megmutattuk tehát, hogy  $\ker \Phi = \{0\}$ , ami  $\Phi$  injektivitását jelenti.

Az állítás legelső következménye, hogy az  $M$  altér bármely direkt kiegészítője izomorf a  $V/M$  faktortérrrel, emiatt bármely direkt kiegészítő izomorf bármely direkt kiegészítővel is. Feltéve, hogy létezik direkt kiegészítő, izomorfiától eltekintve csak egyetlen egy létezik. De van-e, minden direkt kiegészítő? Véges dimenziós esetben már láttuk az igenlő választ. Nem véges dimenziós vektorterekre is igaz az állítás, de itt nem igazoljuk.

**6.6. definíció** (co-dimenzió). Azt mondjuk, hogy a  $V$  vektortér  $M$  altere  $k$  co-dimenziós, ha létezik  $k$ -dimenziós direkt kiegészítője  $M$ -nek, azaz létezik olyan  $N$  altere  $V$ -nek, amelyre  $M \oplus N = V$  és  $\dim N = k$ . A tényt, hogy  $M$  altérnek létezik  $k$ -dimenziós direkt kiegészítője codim  $M = k$  módon jelöljük.

**6.7. állítás.** Tegyük fel, hogy  $M$  a  $V$  vektortér olyan altere, amelynek van véges dimenziós direkt kiegészítője. Ekkor

$$\text{codim } M = \dim(V/M).$$

Bizonyítás: Válasszunk  $N$  véges dimenziós alterét  $V$ -nek, amelyre  $V = M \oplus N$ . Láttuk, hogy  $V/M$  és  $N$  izomorf vektorterek, emiatt  $V/M$  is végesen generált, és  $\dim V/M = \dim N = \text{codim } M$ .

**6.8. állítás.** Legyenek  $V, W$  vektorterek, továbbá  $A \in L(V, W)$  egy olyan lineáris operáció, amelyre az  $\text{Im } A \subseteq W$  végesen generált. Ekkor a  $\ker A$  altérnek van végesen generált direkt kiegészítője, és

$$\text{codim}(\ker A) = \dim(\text{Im } A).$$

Bizonyítás: Legyen  $\text{Im } A$  egy bázisa  $\{Ax_1, \dots, Ax_r\}$ . Definiálja  $N = \text{lin}\{x_1, \dots, x_r\}$ . Ha  $x \in \ker A \cap N$ , akkor valamely  $\alpha_j$  skalárokkal  $x = \sum_{j=1}^r \alpha_j x_j$  és  $Ax = 0$ . Így  $0 = \sum_{j=1}^r \alpha_j Ax_j$ , ami csak  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$  esetben lehetséges az  $\{Ax_1, \dots, Ax_r\}$  rendszer lineárisan függetlensége szerint.

Ha  $x \in V$  tetszőleges vektor, akkor  $Ax \in \text{Im } A$ , emiatt  $Ax$  valamely skalárokkal  $Ax = \sum_{j=1}^r \alpha_j Ax_j$  alakú. Világos, hogy így  $x - \sum_{j=1}^r \alpha_j x_j \in \ker A$ , ami igazolja, hogy  $V = \ker A + N$ .

Láttuk tehát, hogy  $V = \ker A \oplus N$ , azaz  $\ker A$ -nak valóban találtunk véges dimenziós direkt kiegészítőjét. Az is világos, hogy  $\text{codim}(\ker A) = \dim N = r = \dim(\text{Im } A)$ .

Magától értetődik a következő észrevétel.

**6.9. állítás.** Ha  $A \in L(V, \mathbb{F})$  egy nem zérus lineáris funkcionál a  $V$  vektortéren, akkor  $\ker A$  egy 1 co-dimenziós altere  $V$ -nek.

Nyilvánvaló következmény még a rang-defektus-tétel is.

**6.10. állítás** (rang-defektus-tétel). Legyen  $V$  egy véges dimenziós vektortér, és  $W$  egy tetszőleges vektortér, továbbá  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Ekkor  $\text{Im } A$  is véges dimenziós, és

$$\dim(\ker A) + \dim(\text{Im } A) = \dim V.$$

Ha  $V$  véges dimenziós és  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció, akkor láttuk, hogy

$$\dim(\text{Im } A) = \text{codim}(\ker A) = \dim(V/\ker A).$$

Tudjuk, hogy azonos dimenziójú vektorterek egy mással izomorfak, emiatt  $\text{Im } A$  izomorf  $V/\ker A$  faktortérrrel. A következő állítás ennek a gondolatnak a nem véges dimenziós esetre vonatkozó általánosítása, de véges dimenzióban is érdekes, hiszen konkrét izomorfiát mutatunk.

**6.11. állítás.** Legyenek  $V, W$  ugyanazon test feletti vektorterek, és  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Ekkor a  $V/\ker A$  faktortér izomorf az  $\text{Im } A$  vektortérrel.

*Bizonyítás:* Jelölje  $M = \ker A$  a  $V$  vektortér alterét. Definiálni szeretnénk egy  $\Omega : \text{Im } A \rightarrow V/M$  izomorfizmust. Ha  $Ax_1 = y = Ax_2$ , akkor  $x_1 - x_2 \in M$ , azaz  $x_1 \sim x_2$ , ergo  $M_{x_1} = M_{x_2}$ . Emiatt  $y \in \text{Im } A$  mellett

$$y \mapsto M_x, \text{ ahol } Ax = y$$

jól definiálja az  $\Omega : \text{Im } A \rightarrow V/M$  függvényt.

1.  $\Omega$  lineáris operáció: Legyen  $Ax_1 = y_1$  és  $Ax_2 = y_2$ . Ekkor  $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ , így

$$\Omega(\alpha y_1 + \beta y_2) = M_{\alpha x_1 + \beta x_2} = \alpha * M_{x_1} + \beta * M_{x_2} = \alpha * \Omega(y_1) + \beta * \Omega(y_2).$$

2.  $\Omega$  szürjekció: Ha  $H \in V/M$  egy ekvivalencia osztály, akkor tetszőleges  $x \in H$  mellett legyen  $y = Ax$ . Ekkor

$$\Omega(y) = M_x = H,$$

amivel azt igazoltuk, hogy minden ekvivalencia osztály egy  $\text{Im } A$ -beli vektor  $\Omega$  képe.

3.  $\Omega$  injekció: Legyen  $y \in \ker \Omega$ , azaz  $y \in W$ , amelyre  $\Omega(y)$  a  $V/M$  faktortér neutrális eleme, azaz  $\Omega(y) = M$ . Ez  $\Omega$  definíciója szerint csak úgy lehet, ha  $M = M_x$ , ahol  $Ax = y$ . No de  $M = M_0$ , így  $y = A0 = 0$ . Megmutattuk tehát, hogy  $\ker \Omega = \{0\}$ , ami éppen  $\Omega$  injektivitása.

## **II. rész**

### **Tavasz**



## 7. fejezet

# Mátrixok és lineáris operációk

MÁTRIXOK ÉS LINEÁRIS operációk kapcsolatát vizsgáljuk. Azt már a mátrixok bevezetésekor is láttuk, hogy egy  $n \times m$  méretű mátrix egyben tekinthető valamely  $\mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineáris operációnak olyan módon, hogy az egy  $x \in \mathbb{F}^m$  oszlopvektorhoz a mátrix szorzás definíójának megfelelően az  $A \cdot x \in \mathbb{F}^n$  oszlopvektort rendeli. Ebben a fejezetben a mátrixok ezen interpretációját erősítjük tovább.

### 7.1. Rang-defektus-tétel következménye

Láttuk, hogy tetszőleges  $A \in L(V, W)$  lineáris operáció mellett

$$\nu(A) + \rho(A) = \dim V,$$

ahol  $\nu(A) = \dim(\ker A)$  az  $A$  defektusa,  $\rho(A) = \dim(\text{Im } A)$  az  $A$  rangja. Ebből adódóan, ha  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció, akkor  $\nu(A) = 0$  és  $\rho(A) = \dim V$  egymással ekvivalens feltévések.

Itt az első feltétel pontosan  $A$  injektivitását, míg a második feltétel pontosan  $A$  szürjektivitását jelenti. Azt látjuk tehát, hogy lineáris transzformációk esetén a transzformáció injektivitása és szürjektivitása egyszerre teljesül, vagy egyszerre nem teljesül:

**7.1. állítás.** Legyen az  $V$  egy véges dimenziós vektortér, és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció.

1. Ekkor az alábbi feltételek egymással ekvivalenek.
  - a)  $A$  injektív;
  - b)  $A$  szürjektív;
  - c)  $A$  vektortér-izomorfizmus.
  - d) Létezik  $B \in L(V)$  lineáris transzformáció, amelyre  $A \circ B = I$ .
2. Ha a fenti d) fennáll, akkor  $B \circ A = I$  is teljesül.

*Bizonyítás:* Az első három pont ekvivalens voltát már megmondottuk.

Ha  $A \circ B = I$ , akkor  $A$  szürjektív, hiszen az  $y \in V$  vektor elő áll, mit a  $By$  vektor  $A$  képe.

Megfordítva, ha  $A$  szürjektív, akkor a) szerint injektív is, van tehát  $V \rightarrow V$  inverze. De lineáris függvény inverze is lineáris, így a  $B = A^{-1}$  jelölést bevezetve találtunk  $B \in L(V)$  transzformációt, amelyre  $B \circ A = I$ .

Most tegyük fel, hogy valamely  $B \in L(V)$ -re  $A \circ B = I$ . Ekkor a) szerint  $A$  injektív is, ergo  $\ker A = \{0\}$ . No de minden  $x \in V$  mellett

$$A((B \circ A)x - x) = A(B(Ax)) - Ax = (A \circ B)(Ax) - Ax = I(Ax) - Ax = Ax - Ax = 0,$$

ezért  $(B \circ A)x - x \in \ker A = \{0\}$ .  $(B \circ A)x = x$  minden  $x \in V$  mellett, ami éppen azt jelenti, hogy  $B \circ A = I$  is fennáll.

Kiderült tehát, hogy ugyanúgy mint amikor mátrixok regularitásáról volt szó, az  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció pontosan akkor injektív, ha van olyan  $B \in L(V)$  lineáris transzformáció, amelyre  $AB = I$  (vagy  $BA = I$ ) teljesül. Ekkor  $A^{-1} = B$ .

## 7.2. Mátrixok tere mint koordináta-tér

Világos, hogy adott  $\mathbb{F}$  test feletti  $n \times m$  méretű mátrixok az  $\mathbb{F}$  feletti vektorteret alkotnak. Az is világos, hogy ha  $A_{i,j}$  jelöli azt az  $n \times m$  méretű mátrixot, amelynek minden helyén 0 van az  $i$ -edik sor  $j$ -edik helyének kivételével, ahol 1 szerepel, akkor az

$$\{A_{i,j} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

mátrixok rendszere bázisa az  $\mathbb{F}^{n \times m}$  térben. Így persze  $\dim \mathbb{F}^{n \times m} = n \cdot m$ .

Most átérünk az  $L(V, W)$  lineáris operációk vektorterének vizsgálatára. Először azt gondoljuk meg, hogy lineáris transzformáció egy bázison tetszőlegesen és egyértelműen előírható.

**7.2. állítás.** Legyenek  $V$  és  $W$  ugyanazon test feletti vektorterek. Legyen  $V$ -ben a  $\{v_1, \dots, v_m\}$  egy bázis, és rögzítünk  $W$ -ben egy tetszőleges  $m$  elemű  $\{w_1, \dots, w_m\}$  vektorrendszert.

Ekkor létezik egyetlen egy  $A \in L(V, W)$  lineáris operáció, amelyre  $Av_j = w_j$  minden  $j = 1, \dots, m$  esetén.  $\square$

**Bizonyítás:** Definiáljuk az  $A : V \rightarrow W$  függvényt a következőképpen. minden  $v \in V$  egyértelműen áll elő mint  $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j$  alakban. Egy ilyen  $v$  mellett legyen

$$A(v) = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j.$$

Világos, hogy  $A : V \rightarrow W$  függvény jól definiált, hiszen a rögzített bázisban minden elem előáll és egyetlen egyféleképpen áll elő mint a bázis elemek egy lineáris kombinációja. Megmutatjuk, hogy az így definiált  $A$  függvény egy lineáris operáció. Legyen  $x_1 = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j$  és  $x_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$ . Tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  mellett

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_j + \beta \beta_j) v_j,$$

tehát  $A$  definíciója szerint

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_j + \beta \beta_j) w_j = \alpha \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j + \beta \sum_{j=1}^m \beta_j w_j = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2).$$

Ez éppen  $A$  függvény linearitását jelenti. Az is világos, hogy  $v_j = 0v_1 + \dots + 1v_j + \dots + 0v_m$ , tehát az  $A$  függvény definíciója értelmében

$$Av_j = w_j$$

valóban fennáll minden  $j = 1, \dots, m$  mellett.

Most tegyük fel, hogy  $B \in L(V, W)$  szintén teljesíti a  $Bv_j = w_j$  feltételeket. Ekkor tetszőleges  $v \in V$  mellett, ha  $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j$  alakú, akkor az  $A$  definíciója és  $B$  linearitása miatt

$$Av = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j Bv_j = B \left( \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j \right) = Bv,$$

ami éppen azt jelenti, hogy  $A = B$ .

**7.3. állítás.** Legyenek az  $\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V$  és az  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq W$  bázisok rögzítve. Definiáljuk valamely rögzített  $i \in \{1, \dots, n\}$  és valamely rögzített  $j \in \{1, \dots, m\}$  mellett az  $A_{i,j} \in L(V, W)$  lineáris operációt az

$$A_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} f_i \tag{7.1}$$

azonosságokkal, ahol  $k = 1, \dots, m$ . Ekkor az  $\{A_{i,j} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  lineáris operációk rendszere egy bázisa az  $L(V, W)$  vektortérnek, ezért

$$\dim L(V, W) = n \cdot m. \quad \square$$

**Bizonyítás:** Azt kell először is látni, hogy (7.1.) azonosságok összesen az előző 7.2. állítás alkalmazását írják elő rögzített  $i, j$  mellett az  $\{e_1, \dots, e_j, \dots, e_m\}$  és az  $\{0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0\}$  két pontosan  $m$  elemű vektorrendszerre. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az  $A_{i,j}$  az a lineáris operáció, amely a bázis minden nem  $j$ -edik elemét zérusra viszi, és a  $j$ -edik bázis elemet pedig  $f_i$ -re. A 7.2. állítás szerint vannak ilyen  $A_{i,j}$  lineáris transzformációk, és minden  $i, j$  pár mellett csak egyetlen ilyen van.

Most megmutatjuk, hogy az  $\{A_{i,j} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  lineárisan független rendszer. Legyenek az  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{F}$  számok olyanok, amelyekre  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j} = 0$ . Ekkor tetszőleges  $k \in \{1, \dots, m\}$  esetén

$$0 = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j} \right) e_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j} e_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} \delta_{j,k} f_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} f_i.$$

No de az  $\{f_1, \dots, f_n\}$  egy lineárisan független rendszer, ergo csak a triviális lineáris kombinációja zérus, ergo  $\alpha_{i,k} = 0$  minden  $i = 1, \dots, n$  mellett. Persze ez minden  $k$  mellett megismételhető, tehát azt kaptuk, hogy valamennyi  $\alpha_{i,j}$  együttható zérus.

Most azt mutatjuk meg, hogy az  $\{A_{i,j} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$  egy generátorrendszer az  $L(V, W)$  vektortérnek. Legyen  $A \in L(V, W)$  egy rögzített lineáris operáció. Definiáljuk az  $\alpha_{i,j}$  számokat, mint az  $Ae_j \in W$  vektor  $\{y_1, \dots, y_n\}$  bázisban felírt koordináta-vektorának  $j$ -edik elemét. Magyarul

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} f_i.$$

Ekkor minden  $k \in \{1, \dots, m\}$  mellett

$$\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j} \right) e_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j} e_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} \delta_{j,k} f_i = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} f_i = Ae_k.$$

Ez azt jelenti, hogy az  $A$  és az  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j}$  lineáris operátorok az  $\{e_1, \dots, e_m\}$  bázis minden elemén megegyeznek. Láttuk, egy bázison felvett értékek már egyértelműen meghatározzák a lineáris operációt, ezért e két lineáris operáció is azonos. Találtunk tehát  $\alpha_{i,j}$  számokat, amelyekre  $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j}$ , ami azt jelenti, hogy  $A$  előáll mint az  $A_{i,j}$  függvények valamely lineáris kombinációja.

Érdemes későbbre is eltennünk magunkban, hogy hogyan találtunk az adott  $A$  operátorhoz azon  $\alpha_{i,j}$  számokat, amelyekre az

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} A_{i,j}$$

egyenlőség teljesül:  $\alpha_{i,j}$  a  $j$ -edik bázis elem  $A$  képének  $i$ -edik koordinátája. Ugyanez a koordináta-vektor fogalmával: Az  $Ae_j \in W$  vektornak az  $\{y_1, \dots, y_n\}$  bázisban felírt koordináta-vektorának az elemei adják az  $\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j}$  számokat, formálisabban:

$$[Ae_j]_{\{y_1, \dots, y_n\}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \alpha_{2,j} \\ \vdots \\ \alpha_{n,j} \end{pmatrix}.$$

A következő gondolat előtt arra kell emlékeznünk, hogy minden véges dimenziós vektortér izomorf a koordináta-terével. Láttuk, hogy  $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ . De mi lesz  $L(V, W)$  koordináta-tere? A válaszhoz rögzítenünk kell a bázis elemek egy sorrendjét.

**7.4. definíció** (lineáris operátor mátrixa). (A 7.1.) azonosságokkal definiált  $A_{i,j}$  lineáris operátorokat állítuk a következő sorrendbe:

$$\{\underbrace{A_{1,1}, A_{2,1}, \dots, A_{n,1}}_{j=1}, \underbrace{A_{1,2}, A_{2,2}, \dots, A_{n,2}}_{j=2}, \underbrace{A_{1,3}, A_{2,3}, \dots, A_{n,3}}_{j=3}, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \underbrace{A_{1,m}, A_{2,m}, \dots, A_{n,m}}_{j=m}\}$$

Láttuk, hogy a fent konstruált  $\alpha_{i,j}$  számokkal

$$A = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} A_{i,j}.$$

Ez azt jelenti, hogy az  $A \in L(V, W)$  függvénynek a fenti bázisban felírt koordináta-vektora az  $\alpha_{i,j}$  elemekből a fenti sorrendben képzett oszlopvektor, azaz

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \\ \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,3} \\ \vdots \\ \alpha_{n,3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,m} \\ \vdots \\ \alpha_{n,m} \end{pmatrix} \quad (\dagger)$$

Mint minden vektortér így az  $L(V, W)$  is izomorf a koordináta-terével, ergo  $L(V, W)$  izomorf az  $\mathbb{F}^{n \cdot m}$  vektortérrel.

Érdemes a koordinátatér elemeit, azaz az  $n \cdot m$  elemből álló oszlopvektorokat  $n$  koordinátánként megtörni, és evvel egy  $n \times m$ -es mátrixba rendezni. Ezt a jelölést alkalmazva az  $A$  lineáris operációnak a fenti bázisban felírt koordináta vektorára az  $n \times m$ -es mátrixra, amelyre

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,m} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \dots & \alpha_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3} & \dots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Ezt a mátrixot nevezzük az  $A \in L(V, W)$  lineáris operáció mátrixának az előre rögzített  $\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V$  és  $\{f_1, \dots, f_n\}$  bázisok mellett.  $\dashv$

Meggondoltuk tehát, hogy a kapcsolat lineáris operáció és mátrixa között azonos avval a kapcsolattal, ami általában egy vektor és koordinátái közt van.

Nagyon fontos, hogy egy lineáris operáció mátrixát fel tudjuk írni, emiatt összefoglalom az eddigieket.

**7.5. állítás.** *Tegyük fel, hogy  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Rögzítsük a  $V$  és a  $W$  vektortér egy-egy bázisát. Legyen tehát  $\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V$  egy bázis és  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq W$  egy bázis. Az  $A$  operációnak a fenti rögzített bázisokban felírt mátrixa az az  $n \times m$  méretű  $[A]_{\{e_1, \dots, e_m\} \{f_1, \dots, f_n\}}$  mátrix,<sup>1</sup> amelynek  $j$ -edik oszlopa az  $Ae_j$  vektor  $\{y_1, \dots, y_n\}$  bázisban felírt koordinátája. Formálisan:*

$$[A]_{\{e_1, \dots, e_m\} \{f_1, \dots, f_n\}}^j = [Ae_j]_{\{y_1, \dots, y_n\}}.$$

<sup>1</sup>Ha világos, hogy mely bázisokat rögzítjük akkor a nehézkes  $[A]_{\{e_1, \dots, e_m\} \{f_1, \dots, f_n\}}$  jelölés helyett csak  $[A]$ -t frunk. Persze minden tudnunk kell, hogy az  $A$  lineáris operátor mely bázisokban felírt mátrixáról van szó.

Speciálisan, ha  $V = W$ , akkor  $A : V \rightarrow V$  lineáris transzformációról beszélünk. Amikor egy lineáris transzformáció mátrixáról van szó, akkor az minden úgy értendő, hogy a  $V$  vektortérnek mint az értelmezési tartománynak és a  $V$  vektortérnek mint értékkészletnek is ugyanazt a bázisát választjuk. Ekkor tehát  $A$  lineáris transzformáció  $[A]_{\{e_1, \dots, e_m\}}_{\{e_1, \dots, e_m\}}$  mátrixára:<sup>2</sup>

$$[A]_{\{e_1, \dots, e_m\}}^j = [Ae_j]_{\{e_1, \dots, e_m\}}.$$

Meggondoltuk tehát, hogy az  $L(V, W)$  lineáris operátorok vektortere izomorf az  $\mathbb{F}^{\dim W \times \dim V}$  mátrixok vektorterével. Az izomorfizmus tehát az a leképezés, amely egy lineáris transzformációhoz hozzárendeli annak – valamely előre megadott bázisokban felírt – mátrixát. Emiatt persze  $A, B \in L(V, W)$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  mellett

$$[\alpha A + \beta B] = \alpha [A] + \beta [B]. \quad (7.2)$$

Izomorf struktúrák között nem érdemes különbözetet tenni, viszont vigyáznunk kell arra, hogy olyan fogalmakat definiálunk, amelyek invariánsak az izomorfíára. Például lineáris operáció rangja definíció szerint a képtere dimenziója, mátrix rangja definíció szerint a feszítőrang, azaz a legkisebb  $r$  szám amelyre a mátrix felírható  $n \times r$  és egy  $r \times m$  méretű mátrix szorzataként. Látni fogjuk, hogy lineáris operátoroknak és mátrixának rangja azonos.

**7.6. állítás.** Legyen  $A \in L(V, W)$  lineáris operátor és  $x \in V$  egy vektor. Rögzítsük az  $\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V$  és az  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq W$  bázisokat. Ekkor

$$[Ax]_{\{f_1, \dots, f_n\}} = [A]_{\{e_1, \dots, e_m\}} \cdot [x]_{\{e_1, \dots, e_m\}}.$$

Emiatt  $\text{Im } A$  és  $\text{Im } [A]$  egymással izomorf alterek, hasonlóan  $\ker A$  és  $\ker [A]$  egymással izomorf vektorterek, így dimenziójuk is azonos. Konkrétan  $A$  lineáris operátorának és az  $[A]$  mátrixának a rangja is defektusa is azonos. □

**Bizonyítás:** Legyen  $[x]_{\{e_1, \dots, e_m\}} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$ . Ez azt jelenti, hogy  $x = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j$ , így  $Ax = \sum_{j=1}^m \xi_j Ae_j$ . Véve az  $Ax$  vektor  $\{f_1, \dots, f_n\}$  bázisban felírt koordináta-vektorát

$$[Ax]_{\{f_1, \dots, f_n\}} = \left[ \sum_{j=1}^n \xi_j Ae_j \right]_{\{f_1, \dots, f_n\}} = \sum_{j=1}^n \xi_j [Ae_j]_{\{f_1, \dots, f_n\}} = \sum_{j=1}^n \xi_j [A]_{\{e_1, \dots, e_m\}}^j_{\{f_1, \dots, f_n\}} = [A]_{\{e_1, \dots, e_m\}} \cdot [x]_{\{e_1, \dots, e_m\}}.$$

Ebből persze már könnyen adódik, ahogy  $Ax = 0$  ekvivalens  $[A][x] = 0$  feltétellel, emiatt  $\ker A$  és  $\ker [A]$  izomorfak, így  $\nu(A) = \nu([A])$ .

Hasonlóan  $\text{Im } A$  és  $\text{Im } [A]$  is izomorfak. A rangtétel szerint  $[A]$  mátrix rangja megegyezik az oszlopvektorai generálta altérben lévő maximális lineárisan független rendszer elemszámával. Mivel egy vektor pontosan akkor van  $[A]$  képterében, ha előáll mint az oszlopai lineáris kombinációja, ezért  $[A]$  rangja azonos  $[A]$  képterének dimenziójával, így  $\rho(A) = \rho([A])$ . □

### 7.3. Lineáris operátorok szorzata

Emlékezzünk arra, hogy a lineáris operáció mátrixát úgy kaptuk, hogy a koordinátait  $n$  elemenként megtörve az oszlopvektort egy mátrixszá rendeztük át. Ennek az átrendezésnek az igazi értelme, hogy ilyen módon a mátrix szorzás művelet a lineáris operátorok kompozíciójával kapcsolódik össze.

<sup>2</sup> A nehézkes  $[A]_{\{e_1, \dots, e_m\}}_{\{e_1, \dots, e_m\}}$  helyett egyszerűbben  $[A]_{\{e_1, \dots, e_m\}}$ , vagy még inkább ha a szövegkörnyezetből nyilvánvaló, hogy mely bázisra gondolunk, akkor csak a  $[A]$  jelölést használjuk.

**7.7. állítás.** Legyenek  $V, Z, W$  ugyanazon test feletti véges dimenziós vektorterek,  $B \in L(V, Z)$  és  $A \in L(Z, W)$ . Rögzítsük az

$$\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V, \quad \{z_1, \dots, z_r\} \subseteq Z, \quad \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq W$$

bázisokat. Jelölje  $C = A \circ B$  a kompozíció lineáris operátort.

Ekkor  $C$  mátrixa az  $A$  és  $B$  mátrixának szorzata. Formálisabban:

$$[C]_{\{e_1, \dots, e_m\}} = [A]_{\{z_1, \dots, z_r\}} \cdot [B]_{\{e_1, \dots, e_m\}}_{\{z_1, \dots, z_r\}}.$$

**Bizonyítás:** Először is ellenőrizzük, hogy értelmes-e az állításban felírt formula.  $[A]$  mérete  $n \times r$ ,  $[B]$  mérete  $r \times m$ . Így az  $[A] \cdot [B]$  szorzat értelmes és a szorzás eredménye egy  $n \times m$  mátrix. A  $[C]$  szintén egy  $n \times m$  méretű mátrix, így a bal és a jobboldal összehasonlítása is értelmes.

Már csak azt kell meggondolni, hogy a baloldali mátrix minden eleme azonos a jobboldali szorzatmátrix megfelelő elemével. Az  $\alpha, \beta, \gamma$  szimbólumokkal jelöljük az  $[A], [B], [C]$  mátrixok megfelelő elemeit. Ez azt jelenti, hogy

$$Be_j = \sum_{k=1}^r \beta_{k,j} z_k, \quad Az_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} f_i, \quad Ce_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{i,j} f_i.$$

Így azt kapjuk, hogy minden  $j = 1, \dots, m$  mellett

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \gamma_{i,j} f_i &= Ce_j = A(Be_j) = \sum_{k=1}^r \beta_{k,j} Az_k = \sum_{k=1}^r \beta_{k,j} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} f_i \right) = \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \beta_{k,j} \alpha_{i,k} f_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \alpha_{i,k} \beta_{k,j} f_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^r \alpha_{i,k} \beta_{k,j} \right) f_i. \end{aligned}$$

No de az  $\{f_1, \dots, f_n\}$  rendszer lineárisan független, tehát a lineáris burkában minden elem előállítása egyértelmű, ami éppen azt jelenti, hogy minden  $i = 1, \dots, n$  és minden  $j = 1, \dots, m$  mellett

$$[C]_{i,j} = \gamma_{i,j} = \sum_{k=1}^r \alpha_{i,k} \beta_{k,j} = ([A] \cdot [B])_{i,j}.$$

Azért, hogy teljes legyen az analógia a lineáris operátorok kompozíciója és a mátrixok szorzása műveletek közt, a lineáris operátorok  $A \circ B$  kompozícióját is  $A \cdot B$  módon, vagy még egyszerűbben  $AB$  módon jelöljük. A jelölést a szóhasználat is követi:

**7.8. definíció** (lineáris transzformációk szorzata). A lineáris operátorok kompozíció műveletét **szorzatnak** is mondjuk.

Ilyen módon ha  $A$  és  $B$  két olyan lineáris operátor, amelynek kompozíciója – azaz szorzata – értelmes, akkor a mátrixaik szorzata is értelmes, továbbá

$$[AB] = [A][B]. \quad (7.3)$$

**7.9. definíció** (lineáris operátor hatványai). A lineáris transzformációk a bevezetett szorzás művelettel egységelemes gyűrűt alkotnak, ahol az egységelem az  $I : V \rightarrow V$  az identitás operáció.

Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Ennek 0-dik hatványát definiálja  $A^0 = I$ , Ha valamely  $n$  nem negatív egész mellett  $A^n$  már definiált, akkor legyen  $A^{n+1} = AA^n$ .

Világos, hogy ha  $n, m$  nem negatív egészek, akkor  $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$ . Az is nyilvánvaló, hogy az  $I$  identitás operációkak által minden elem zérus, kivéve a diagonális elemek, amelyek értéke 1.)

**7.10. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció, és legyen rögzítve a tér egy bázisa, amelyben felírjuk  $A$  transzformáció  $[A]$  mátrixát. Ekkor  $[A^n] = [A]^n$ , továbbá  $A$  pontosan akkor izomorfizmus, ha  $[A]$  reguláris és  $[A^{-1}] = [A]^{-1}$ .

*Bizonyítás:* A (7.3.) azonosságot alkalmazva  $B = A$  mellett nyilvánvaló indukcióval kapjuk az  $[A^n] = [A]^n$  azonosságot.

Világos, hogy  $A$  pontosan akkor izomorfizmus, ha létezik  $B \in L(V)$ , amelyre  $AB = I$ . No de ez ekvivalenss avval, hogy  $[A][B] = [I]$ , ami pedig a szükséges és elegendő feltétele  $[A]$  mátrix invertálhatóságának. Ekkor  $[A]^{-1} = [B] = [A^{-1}]$ .

A (7.2.) és a (7.3.) szerint egy lineáris operátorhoz hozzárendeli valamely báziskban felírt mátrixát egy olyan bijekció, ami tartja a gyűrű műveleteket. Az  $L(V)$  és a  $F^{\dim V \times \dim V}$  tehát olyan egységelemes (nem kommutatív) gyűrűk, amelyek között van a gyűrű műveleteket tartó bijekció (gyűrű-izomorfizmus).



## 8. fejezet

# Általános bázis-transzformáció

EGY VEKTOR KOORDINÁTÁI függnek a bázis megválasztásától. Az elemi bázistranszformáció arra szolgál hogy felírjuk az új bázisban a vektor koordinátáit, amikor az új bázis és a régi bázis csak egyetlen vektorban különbözik. A fejezetben általánosabban oldjuk meg a problémát, mikor az új bázis és a régi bázis elemei tetszőlegesen különbözők.

Vegyük fel a  $V$  vektortér egy-egy bázisát. Nevezzük az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázist régi bázisnak, és nevezzük az  $\{f_1, \dots, f_n\}$  bázis elemeit új bázisnak. A kérdések a következők:

1. Ha ismerjük egy  $x \in V$  vektor régi bázisra vonatkozó koordinátáit, akkor hogyan számítható ugyanennek a vektornak az új bázisban felírt koordináta-vektora?
2. Ha ismerjük egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt a régi bázisban felírt mátrixát, akkor hogyan számolható ki az  $A$ -nak valamely új bázisban felírt mátrixa?
3. Ha ismerjük egy  $A \in L(V, W)$  lineáris operációt a régi bázis páron felírt mátrixát, akkor hogyan számítható  $A$ -nak az valamely új bázis páron felírt mátrixa?

**8.1. definíció.** Legyenek az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  és  $\{f_1, \dots, f_n\}$  bázisok rögzítve. Tekintsük azt a  $B$  lineáris transzformációt, amelyre  $B e_j = f_j$  teljesül minden  $j = 1, \dots, n$  mellett. Ezt a lineáris transzformációt nevezzük az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázisról az  $\{f_1, \dots, f_n\}$  bázisra való áttérés transzformációjának.

Világos, hogy ha  $B$  az áttérés transzformáció, akkor ennek a régi bázisban felírt  $[B]$  mátrixa egy olyan  $n \times n$  méretű mátrix, amelynek  $j$ -edik oszlopa a  $B e_j = f_j$  vektornak a régi bázisban felírt koordinátája. Mivel  $B$  szürjektív, ergo injektív is, tehát  $B$  egy izomorfizmus, ennek megfelelően a  $[B]$  mátrix reguláris mátrix, azaz létezik  $[B]^{-1}$  inverze.<sup>1</sup>

### 8.1. Vektor koordinátái az új bázisban

**8.2. állítás.** Legyen az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a régi bázis, és  $\{f_1, \dots, f_n\}$  az új bázis. Jelölje  $B$  a régi bázisról az új bázisra való áttérést. Ekkor tetszőleges  $x \in V$  vektor mellett

$$[x]_{\text{új}} = [B]_{\text{régi}}^{-1} \cdot [x]_{\text{régi}}.$$

Bizonyítás: Legyen  $[x]_{\text{új}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ . Ez azt jelenti, hogy  $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$ . Így felírva az  $x$  vektornak a régi bázisra vonatkozó koordináta-vektorát

$$[x]_{\text{régi}} = \left[ \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right]_{\text{régi}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j [f_j]_{\text{régi}} = \sum_{j=1}^n \alpha_j [B]_{\text{régi}}^j = [B]_{\text{régi}} \cdot [x]_{\text{új}}.$$

A kívánt azonosságot kapjuk, ha balról szorozzuk minden két oldalt  $[B]_{\text{régi}}^{-1}$  inverz mátrixszal.

<sup>1</sup>Könnyen látható, hogy  $B$ -nek a régi és az új bázisban felírt mátrixa azonos, de ez később egyszerű következményként is adódik.

## 8.2. Lineáris operátorok mátrixa új bázis párbán

**8.3. állítás.** Legyen  $A \in L(V, W)$  lineáris operáció és tegyük fel, hogy ismerjük  $A$  mátrixát az  $\{e_1, \dots, e_m\} \subseteq V$  és az  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq W$  régi bázisokban. Legyenek az  $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$  és a  $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$  az új bázisok. Definiálja  $B \in L(V)$  a  $V$  tér áttérés lineáris transzformációját és  $D \in L(W)$  a  $W$  tér áttérés transzformációját. Ekkor

$$[A]_{uj} = [D]_{régi}^{-1} [A]_{régi} [B]_{régi}.$$

*Bizonyítás:* Azt mutatjuk meg, hogy a baloldali mátrix és a jobboldali szorzat mátrix megfelelő oszlopai megegyeznek. A  $j$ -edik oszlopra:

$$\begin{aligned} [A]_{uj}^j &= [A]_{\{v_1, \dots, v_m\}}^j = [Av_j]_{\{w_1, \dots, w_n\}} \\ &= [D]_{\{f_1, \dots, f_n\}}^{-1} \cdot [Av_j]_{\{f_1, \dots, f_n\}} = [D]_{\{f_1, \dots, f_n\}}^{-1} \cdot [A]_{\{e_1, \dots, e_m\}} \cdot [v_j]_{\{e_1, \dots, e_m\}} \\ &= [D]_{\{f_1, \dots, f_n\}}^{-1} \cdot [A]_{\{e_1, \dots, e_m\}} \cdot [B]_{\{e_1, \dots, e_m\}}^j \\ &= [D]_{régi}^{-1} [A]_{régi} [B]_{régi}^j = \left( [D]_{régi}^{-1} [A]_{régi} [B]_{régi} \right)^j. \end{aligned}$$

Közben használtuk a mátrix szorzás művelet asszociativitását, és azt a tényt, hogy tetszőleges  $[E], [F]$  mátrixok mellett  $([E] [F])^j = [E] \left( [F]^j \right)$ .

## 8.3. Lineáris transzformáció mátrixa az új bázisban

**8.4. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Ekkor

$$[A]_{uj} = [B]_{régi}^{-1} [A]_{régi} [B]_{régi}.$$

*Bizonyítás:* A lineáris operátorokra vonatkozó állítás speciális esete, mikor  $W = V$  és  $D = B$ .

A fenti állítás minden  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció mellett igaz. Speciálisan, ha alkalmazzuk az  $A = B$  esetre, akkor látjuk, hogy az áttérés mátrixa azonos, ha az új bázisban, vagy a régi bázisban írjuk fel.

**8.5. állítás.** Legyen  $B$  az áttérés lineáris transzformáció. Ekkor

$$[B]_{régi} = [B]_{uj} \quad \text{és persze} \quad [B^{-1}]_{régi} = [B^{-1}]_{uj}.$$

## 9. fejezet

# Invariáns alterek

**9.1. definíció.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformációja a  $V$  vektortérnek, és  $M \subseteq V$  a térfelület egy altere. Az mondjuk, hogy  $M$  egy *invariáns altere*  $V$ -nek, ha minden  $v \in M$  mellett  $Av \in M$  is teljesül.

Ha nem világos, hogy mely lineáris transzformációról van szó, akkor azt is mondjuk, hogy az  $M$  altér  $A$ -invariáns, vagy azt, hogy az  $M$  altér invariáns az  $A$  transzformációra nézve.

Úgy is fogalmazhatnánk, hogy az  $M$  altér akkor invariáns altér, ha az  $A$  transzformációnak az  $M$ -re való  $A|_M$  megszorítása az  $M$  altér egy lineáris transzformációja, azaz

$$A|_M \in L(M).$$

Nyilvánvaló példa invariáns alterekre  $M$  és  $\{0\}$ . Tetszőleges  $A$  lineáris transzformáció mellett ker  $A$  és  $\text{Im } A$  minden invariáns alterek. Ugyanis, ha  $u \in \text{ker } A$ , akkor  $A(u) = A0 = 0$ , tehát  $u \in \text{ker } A$ . Az  $\text{Im } A$  altér esete még egyszerűbb: A térfelület minden elemének képe  $\text{Im } A$ -ban van, speciálisan persze ez  $\text{Im } A$  elemeire is igaz.

A célunk, hogy a teret előállítsuk lehetőleg minél alacsonyabb dimenziós terek direktösszegeként.

**9.2. definíció** (legszűkebb invariáns altér). Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Világos, hogy akárhány  $A$ -ra nézve invariáns altér metszete is  $A$ -invariáns altér, így egy  $H \subseteq V$  halmazt tartalmazó legszűkebb  $A$ -invariáns altér a  $H$  halmazt tartalmazó  $A$ -invariáns alterek közös része. Formálisan

$$\text{lin}(H; A) = \bigcap_{\substack{H \subseteq N \\ N \text{ altér} \\ N \text{ invariáns}}} N.$$

A legérdekesebb eset, amikor  $H$  egy elemű halmaz. A  $H = \{v\}$  esetben a kissé nehézkes  $\text{lin}(\{v\}; A)$  helyett egyszerűbben  $\text{lin}(v; A)$ -t írunk.

**9.3. állítás.** Egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációra és egy  $v \in V$  vektorra

$$\text{lin}(v; A) = \text{lin}\{v, Av, A^2v, \dots\}.$$

*Bizonyítás:* Mivel  $\text{lin}(v; A)$  egy  $v$ -t tartalmazó  $A$ -invariáns altér, ezért  $\{v, Av, \dots, A^k v, \dots\} \subseteq \text{lin}(v; A)$ , amiatt

$$\text{lin}\{v, Av, A^2v, \dots\} \subseteq \text{lin}(v; A).$$

Most vegyük észre, hogy  $\text{lin}\{v, Av, A^2v, \dots\}$  is egy  $v$ -t tartalmazó  $A$ -invariáns altér és  $\text{lin}(v; A)$  ilyenek között a legszűkebb, ezért

$$\text{lin}(v; A) \subseteq \text{lin}\{v, Av, A^2v, \dots\}.$$

**9.4. lemma.** Tegyük fel, hogy egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációra és egy  $v \in V$  vektorra a

$$\{v, Av, \dots, A^k v\}$$

lineárisan összefüggő ( $k \geq 1$ ). Ekkor minden  $n \geq k$  mellett

$$A^n v \in \text{lin} \{v, Av, \dots, A^{k-1} v\}.$$

**Bizonyítás:** Ha  $v = 0$  akkor az állítás nyilvánvaló. Ha  $v \neq 0$ , akkor a  $\{v\}$  rendszer lineárisan független. Legyen  $t$  a legkisebb olyan szám, hogy a rendszerhez  $A^t v$ -t hozzávéve az lineárisan összefüggővé válik. Ilyen módon tehát

$$\{v, Av, \dots, A^{t-1} v\} \text{ lineárisan független} \quad (\dagger)$$

de

$$\{v, Av, \dots, A^{t-1} v, A^t v\} \text{ lineárisan összefüggő.} \quad (\ddagger)$$

Világos, hogy  $1 \leq t \leq k$ . Jelölje  $N = \text{lin} \{v, Av, \dots, A^{t-1} v\}$ .

Most indukcióval megmutatjuk, hogy minden  $m \geq 0$  számra

$$A^{t+m} v \in N.$$

Ha  $m = 0$ , akkor  $A^t v \in N$ , hiszen a fenti ( $\ddagger$ ) lineárisan összefüggő rendszerre, az egyik elem előáll mint az előző elemek lineáris kombinációja. No de ez elem csak az utolsó lehet, hiszen az utolsó elem nélküli ( $\dagger$ ) rendszer még lineárisan független.

Most tegyük fel, hogy  $A^{t+m} v \in N$  és lássuk be, hogy  $A^{t+m+1} v \in N$  is teljesül. Ezek szerint  $A^{t+m} v = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_j A^j v$  alakú. Erre  $A$ -t alkalmazva

$$A^{t+m+1} v = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_j A^{j+1} v = \sum_{j=1}^t \alpha_{j-1} A^j v = \left( \sum_{j=1}^{t-1} \alpha_{j-1} A^j v \right) + \alpha_{t-1} A^t v \in N + N = N.$$

**9.5. állítás.** Legyen  $V$  egy véges dimenziós vektortér.  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció, és  $v \in V$  egy  $v \neq 0$  vektor. Ekkor létezik egyetlen  $1 \leq k \leq \dim V$  szám, amelyre

$$\{v, Av, \dots, A^{k-1} v\} \text{ lineárisan független} \quad (\dagger)$$

de

$$\{v, Av, \dots, A^{k-1} v, A^k v\} \text{ lineárisan összefüggő.} \quad (\ddagger)$$

A fenti ( $\dagger$ ) rendszer bázisa  $\text{lin} (v; A)$ -nak.

**Bizonyítás:** Először a  $k$  szám konstrukciója: Mivel  $v \neq 0$ , ezért  $\{v\}$  lineárisan független. Ha  $\{v, Av\}$  lineárisan összefüggő, akkor  $k = 1$  és készen vagyunk. Egyébként tekintsük a  $\{v, Av, A^2 v\}$  rendszert. Ha ez lineárisan összefüggő, akkor  $k = 2$ -vel készen vagyunk. Ha ez lineárisan független, akkor tekintsük a  $\{v, Av, A^2 v, A^3 v\}$  vektorrendszert. Ha lineárisan összefüggő, akkor  $k = 3$  és készen vagyunk, ha lineárisan független, akkor folytatjuk egy újabb elem hozzá vételével. Az eljárás előbb-utóbb megáll a vektorrendszer összefüggővé válásával, hiszen a Steinitz-lemma szerint egy véges dimenziós vektortérben legfeljebb  $\dim V$  elemszámú lineárisan független vektorrendszer van.

Mivel  $\text{lin} (v; A)$  egy  $v$ -t tartalmazó  $A$ -invariáns altér, ezért

$$\{v, Av, \dots, A^{k-1} v\} \subseteq \text{lin} (v; A).$$

Az előző lemma szerint

$$\{v, Av, A^2 v, \dots\} \subseteq \text{lin} \{v, Av, \dots, A^{k-1} v\}$$

ezért

$$\text{lin} (v; A) = \text{lin} \{v, Av, A^2 v, \dots\} \subseteq \text{lin} \{v, Av, \dots, A^{k-1} v\} \subseteq \text{lin} (v; A).$$

Ez azt jelenti, hogy a ( $\dagger$ ) vektorrendszer egy lineárisan független generátorrendszer a  $\text{lin} (v; A)$  térféknél, tehát valóban bázisa is.

$A \operatorname{lin}(v; A)$  tehát a fenti  $k$ -ra egy  $k$ -dimenziós altér, amelynek bázisa  $\{A^{k-1}v, \dots, Av, v\}$ . A játék kedvéért írjuk fel az  $A|_{\operatorname{lin}(v; A)}$  transzformáció mátrixát ebben a bázisban:

$$\begin{array}{c|ccccc} & A^k v & A^{k-1} v & A^{k-2} v & \dots & Av \\ \hline A^{k-1} v & \alpha_{k-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A^{k-2} v & \alpha_{k-2} & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ Av & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ v & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}, \text{ ahol } A^k v = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j v.$$

## 9.1. Transzformációk sajátértéke

A célunk, hogy a lehető legalacsonyabb dimenziós invariáns altereket találjunk. Így persze az 1 dimenziós invariáns alterek a legérdekesebbek. Ez vezet a sajátérték fogalmához.

**9.6. definíció** (sajátérték, sajátvektor, spektrum). Legyen  $A \in L(V)$ . Azt mondjuk, hogy a  $\lambda \in \mathbb{F}$  szám az  $A$  lineáris transzformáció *sajátértéke*, ha létezik  $v \in V, v \neq 0$  vektor, amelyre

$$Av = \lambda v$$

teljesül.

Ha  $\lambda$  egy sajátértéke  $A$ -nak, akkor az összes olyan nem zérus  $v$  vektort, amelyre  $Av = \lambda v$  fennáll az  $A$  transzformáció  $\lambda$  sajátértékéhez tartozó *sajátvektorainak* nevezzük.

Egy  $A$  lineáris transzformáció összes sajátértékeinek halmazát az  $A$  *spektrumának* nevezzük, és  $\sigma(A)$ -val jelöljük.

A spektrum tehát az  $\mathbb{F}$  test azon részhalmaza, amelyre

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists v \in V, v \neq 0, Av = \lambda v\}$$

teljesül. Világos, hogy ha  $\lambda$  egy sajátértéke  $A$ -nak, akkor a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektorok halmaza éppen a

$$\ker(A - \lambda I)$$

altér nem zérus elemei. Emiatt a fenti alteret a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó *sajátaltérnek* mondjuk.

Vegyük észre, hogy  $v \in V$  vektor pontosan akkor sajátvektora  $A$ -nak, ha  $\dim(\operatorname{lin}(v; A)) = 1$ . Hasonlóan az is könnyű, hogy  $\lambda$  pontosan akkor sajátértéke  $A$ -nak, ha az  $A - \lambda I$  transzformáció szinguláris.



## 10. fejezet

# Transzformációk polinomjai

**10.1. definíció** (transzformáció polinomja). Legyen  $V$  az  $\mathbb{F}$  test feletti vektortér,  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció, és legyen  $p \in \mathbb{F}[t]$  egy az  $\mathbb{F}$  test feletti polinom, amely  $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$  alakú. Definiálja  $p(A) \in L(V)$  az  $A$  transzformáció  $p$  polinomját

$$p(A) = \sum_{j=0}^n \alpha_j A^j.$$

**10.2. állítás** (Számolási szabályok). Legyen  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok,  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció.

1. Ha  $r = p + q$ , akkor  $r(A) = p(A) + q(A)$ .
2. Ha  $r = pq$ , akkor  $r(A) = p(A)q(A)$ .

*Bizonyítás:* Az első állítás azért teljesül, mert  $(\alpha A^k + \beta A^l) = (\alpha + \beta) A^k$ .

A második állításhoz azt vegyük észre, hogy  $A^k A^l = A^{k+l}$ . Így, amikor összegyűjtjük, hogy a  $q(A)p(A)$  kompozícióban, mi lesz  $A^j$  együtthatója, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left( \sum_{\substack{k,l \\ k+l=j}} \alpha_k \beta_l \right) A^j = \left( \sum_{k=0}^j \alpha_k \beta_{j-k} \right) A^j.$$

Vegyük észre, hogy az 1.19. definíció szerint az  $r$  szorzat polinomban is a fenti zárójelben lévő szám a  $t^j$  tag együtthatója.

Tudjuk, hogy lineáris transzformációk szorzata függ azok sorrendjétől. Ugyanúgy mint mátrixokra, két lineáris transzformációt *kommutálónak* mondunk, ha szorzatuk a szorzás sorrendjétől független. Például az  $I$  identitás minden transzformációval kommutál. Azt is láttuk, hogy ha  $AB = I$ , akkor  $BA = I$  is fennáll, azaz  $A$  és  $B$  kommutálnak. Nagyon fontos, de nyilvánvaló következménye a fenti számolási szabálynak, hogy ha  $p, q$  tetszőleges polinomok, akkor a  $p(A)$  és  $q(A)$  egymással kommutáló lineáris transzformációk lesznek, hiszen az  $\mathbb{F}[t]$  egy kommutatív gyűrű, azért ha  $r = pq$ , akkor  $qp = r$ , ergo

$$p(A)q(A) = r(A) = q(A)p(A).$$

Tehát meggondoltuk, hogy

**10.3. állítás.** Lineáris transzformáció polinomjai egymással kommutálnak.

Polinomok segítségével sok-sok új invariáns alteret kapunk.

**10.4. állítás.** Tetszőleges  $p$  polinomra és  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció mellett ker  $p(A)$  és  $\text{Im } p(A)$  is invariáns alterek.

*Bizonyítás:* Legyen először  $v \in \ker p(A)$ . Ekkor, mivel  $A$  és  $p(A)$  kommutálnak

$$p(A)Av = Ap(A)v = A0 = 0,$$

ami pont azt jelenti, hogy  $Av \in \ker p(A)$ .

Legyen most  $v \in \text{Im } p(A)$ , azaz  $v = p(A)x$  valamely  $x \in V$  mellett. Ekkor, mivel  $A$  és  $p(A)$  kommutálnak

$$Av = Ap(A)x = p(A)(Ax),$$

amiből már látszik, hogy  $Av \in \text{Im } p(A)$ .

Speciálisan ez igaz az  $t - \lambda$  polinomra is, amikor  $\lambda$  egy sajátértéke  $A$ -nak. Tehát a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó  $\ker(A - \lambda I)$  sajátaltér egy 1 dimenziós invariáns altere  $A$ -nak.

**10.5. definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $A$  lineáris transzformáció a  $p$  polinom gyöke, ha  $p(A) = 0$ .  $\square$

Mielőtt tovább lépünk érdemes visszagondolnunk arra, hogy egy test feletti polinomgyűrű egy főideálgyűrű. Láttuk ugyanis – 1.24. állítás –, hogy minden nem csak a  $\{0\}$  elemet tartalmazó ideálnak van egyetlen legkisebb fokú és normált eleme, ami egyben az ideál generáló eleme is.

## 10.1. Kis minimálpolinom

**10.6. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  a  $V$  véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációja, és legyen  $v \in V$  egy rögzített vektor. Tekintsük az  $\mathbb{F}[t]$  polinom gyűrű következő részhalmazát.

$$J_{A,v} = \{p \in \mathbb{F}[t] : p(A)v = 0\}$$

Ez a halmaz egy ideálja  $\mathbb{F}[t]$ -nek, amelynek van legfeljebb dim  $V$ -ed fokú, de nem konstans zérus polinomja.  $\square$

*Bizonyítás:* Ha  $p, q \in J_{A,v}$ , akkor  $(p + q)(A)v = p(A)v + q(A)v = 0 + 0 = 0$ , azaz  $p + q \in J_{A,v}$ . Ha most  $p \in J_{A,v}$  és  $h$  egy tetszőleges polinom, akkor  $(hp)(A)v = h(A)p(A)v = h(A)0 = 0$ , azaz  $hp \in J_{A,v}$ . Megmutattuk tehát, hogy  $J_{A,v}$  egy ideálja a polinom gyűrűnek.

Jelölje  $n = \dim V$  és tekintsük az  $n+1$  elemű  $\{v, Av, \dots, A^n v\}$  vektorrendszert. Mivel a Steinitz-lemma szerint  $n+1$  vektor egy  $n$ -dimenziós vektortérben lineárisan összefüggő, ezért van  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  nem minden zérus szám, hogy  $\sum_{j=0}^n \alpha_j A^j v = 0$ . Ha tehát  $p$  jelöli a  $p(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_j t^j$  polinomot, akkor  $p(A)v = 0$ , azaz  $p \in J_{A,v}$  és  $-\infty < \deg p \leq n$ .  $\square$

Ha például  $v = 0$ , akkor  $J_{A,0} = \mathbb{F}[t]$ , azaz minden polinom az ideálhoz tartozik. Ha  $v \neq 0$ , akkor a  $J_{A,v}$  ideálnak nincs nulladfokú polinomja, hiszen  $p(t) = c, (c \neq 0)$  mellett  $p(A)v = (cI)v = cv \neq 0$ .

**10.7. definíció.** Legyen  $A \in L(V)$  a  $V$  véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációja, és legyen  $v \in V$  egy rögzített vektor. Láttuk, hogy

$$J_{A,v} = \{p \in \mathbb{F}[t] : p(A)v = 0\}$$

az  $\mathbb{F}[t]$  gyűrű egy ideálja, amely nem csak a konstans zéruspolinomot tartalmazza. Tudjuk, hogy az  $\mathbb{F}[t]$  polinomgyűrű egy főideál-gyűrű, van tehát egyetlen normált polinomja  $J_{A,v}$ -nek, amely generálja  $J_{A,v}$ . Ez a  $J_{A,v}$  legkisebb fokú, normált polinomja. Ezt a polinomot nevezzük az  $A$  transzformáció,  $v$  vektorhoz tartozó *kis minimálpolinomjának*.  $\square$

**10.8. állítás.** Ha  $n$  az  $A$  transzformáció  $v$  vektorhoz tartozó *kis minimálpolinomja*, akkor

1.  $n$  normált polinom,
2.  $n(A)v = 0$ ,
3. ha  $p \in \mathbb{F}[t], p \neq 0$ , amelyre  $p(A)v = 0$ , akkor  $n|p$ ,
4.  $\deg n \leq \dim V$ .

**Bizonyítás:** Definíció szerint  $n$  azon  $p$  polinomok közül, amelyek normáltak, és  $p(A)v = 0$ , a legalacsonyabb fokú. Láttuk hogy ilyen polinom csak egy van, es erre a polinomra

$$J_{A,v} = J(n) = \{hn : h \in \mathbb{F}[t]\}.$$

Ezt kellett belátni.

**10.9. állítás.** Legyen  $v \neq 0$  és tegyük fel, hogy  $p(A)v = 0$  valamely normált, irreducibilis  $p$  polinomra. Ekkor  $p$  a vektorhoz tartozó kis minimálpolinom.

**Bizonyítás:** Ha maga  $\deg p = 1$ , akkor készen vagyunk, hiszen nem zérus vektornak minimálpolinomja legalább első fokú. Ha  $\deg p > 1$  és  $p$  nem egyezne az  $n$  kis minimálpolinommal, akkor  $\deg n < \deg p$  lenne, és mivel  $n$  generálja a  $J_{A,v}$  ideált, ezért  $p = nh$  alakú lenne, ahol  $h$  is legalább első fokú. Így  $p$  két legalább első fokú polinom szorzata, azaz reducibilis lenne.

A következő állítás módszert ad a kis minimálpolinom meghatározására, amely minden használható.

**10.10. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  és  $v \neq 0$ . Mivel  $V$  egy véges dimenziós altér, ezért létezik  $1 \leq k \leq \dim V$ , hogy  $\{v, Av, \dots, A^{k-1}v\}$  lineáris független, de  $\{v, Av, \dots, A^{k-1}v, A^k v\}$  lineárisan összefüggő. Ekkor léteznek  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{F}$  számok, amelyekre

$$A^k v = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j v$$

Az  $A$  operátor ezen  $v$  vektorhoz tartozó kis minimálpolinomja

$$n(t) = t^k - \alpha_{k-1}t^{k-1} - \dots - \alpha_1 t - \alpha_0.$$

**Bizonyítás:** Láttuk, hogy  $\{v, Av, \dots, A^{k-1}v\}$  bázisa  $\text{lin}(v; A)$  altérnek. Világos, hogy  $A^k v \in \text{lin}(v; A)$ , emiatt a kívánt előállítás valóban létezik. Ezt átrendezve kapjuk, hogy  $n$  valóban olyan normált polinom, amelyre  $n(A)v = 0$  fennáll. No de  $k$ -nál alacsonyabb fokú ilyen polinom csak a konstans zérus polinom lehet, hiszen  $\{v, Av, \dots, A^{k-1}v\}$  lineárisan független. Azt láttuk tehát, hogy  $n$  a legalacsonyabb fokú nem zérus eleme  $J_{A,v}$ -nek, tehát  $n$  generálja a főideált.

## 10.2. Minimál polinom

**10.11. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  a  $V$  véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációja. Tekintsük az  $\mathbb{F}[t]$  polinom gyűrű következő részhalmazát.

$$J_A = \{p \in \mathbb{F}[t] : p(A) = 0\}$$

Ez a halmaz egy ideálja  $\mathbb{F}[t]$ -nek, amelynek van legfeljebb  $(\dim V)^2$ -ed fokú, de nem konstans zérus polinomja.

**Bizonyítás:** Ha  $p, q \in J_A$ , akkor  $(p+q)(A) = p(A) + q(A) = 0 + 0 = 0$ , azaz  $p+q \in J_A$ . Ha most  $p \in J_A$  és  $h$  egy tetszőleges polinom, akkor  $(hp)(A) = h(A)p(A) = h(A)0 = 0$ , azaz  $hp \in J_A$ . Megmutattuk tehát, hogy  $J_A$  egy ideálja a polinom gyűrűnek.

Jelölje  $n = \dim V$  és tekintsük az  $n^2 + 1$  elemű  $\{I, A, \dots, A^{n^2}\}$  rendszerét az  $L(V)$  vektortérnek. Mivel a Steinitz-lemma szerint  $n^2 + 1$  vektor egy  $n^2$ -dimenziós vektortérben lineárisan összefüggő, ezért van  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2} \in \mathbb{F}$  nem minden zérus szám, hogy  $\sum_{j=0}^{n^2} \alpha_j A^j = 0$ . Ha tehát  $p$  jelöli a  $p(t) = \sum_{j=0}^{n^2} \alpha_j t^j$  polinomot, akkor  $p(A) = 0$ , azaz  $p \in J_A$  és  $-\infty < \deg p \leq n^2$ .

**10.12. definíció** (minimálpolinom). Legyen  $A \in L(V)$  a  $V$  véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációja. Láttuk, hogy

$$J_A = \{p \in \mathbb{F}[t] : p(A) = 0\}$$

az  $\mathbb{F}[t]$  gyűrű egy ideálja, amely nem csak a konstans zéruspolinomot tartalmazza. Tudjuk, hogy az  $\mathbb{F}[t]$  polinomgyűrű egy főideál-gyűrű, van tehát egyetlen normált polinomja  $J_A$ -nek, amely generálja  $J_A$ . Ez a  $J_A$  legkisebb fokú, normált polinomja, amit  $A$  transzformáció *minimálpolinomjának* nevezünk.

Ha  $V \neq \{0\}$ , ergo  $\dim V \geq 1$ , akkor a  $J_A$  ideálnak nincs nulladfokú polinomja, hiszen  $p(t) = c$ , ( $c \neq 0$ ) mellett  $p(A) = cI \neq 0$ , tehát legalább egy dimenziós tér egy lineáris transzformációjának a minimálpolinom legalább első fokú.

**10.13. állítás.** *Ha  $m \in \mathbb{F}[t]$  polinom akkor és csak akkor az  $A \in L(V)$  transzformáció minimálpolinomja, ha*

1.  *$m$  normált polinom,*
2.  *$m(A) = 0$ ,*
3. *ha  $p \in \mathbb{F}[t]$ ,  $p \neq 0$ , amelyre  $p(A) = 0$ , akkor  $m|p$ .*

*A minimálpolinom fokszámára:*<sup>1</sup>  $\deg m \leq (\dim V)^2$ .

**Bizonyítás:** Definíció szerint  $m$  azon  $p$  polinomok közül, amelyek normáltak, és  $p(A) = 0$ , a legalacsonyabb fokú. Láttuk hogy ilyen polinom csak egy van, es erre a polinomra

$$J_A = J(m) = \{hm : h \in \mathbb{F}[t]\}.$$

Ezt kellett belátni.

**10.14. állítás.** *Legyen  $V$  legalább 1 dimenziós, és tegyük fel, hogy  $p(A) = 0$  valamely normált, irreducibilis  $p$  polinomra. Ekkor  $p$  az  $A$  minimálpolinomja.*

**Bizonyítás:** Ha maga  $\deg p = 1$ , akkor készen vagyunk, hiszen a minimálpolinom legalább első fokú. Ha  $\deg p > 1$  és  $p$  nem egyezne az  $m$  minimálpolinommal, akkor  $\deg m < \deg p$  lenne, és mivel  $m$  generálja a  $J_A$  ideált, ezért  $p = mh$  alakú lenne, ahol  $h$  is legalább első fokú. Így  $p$  két legalább első fokú polinom szorzata, azaz reducibilis lenne.

A következő állítás módszert ad a minimálpolinom meghatározására.

**10.15. állítás.** *Legyen  $A \in L(V)$ , ahol  $\dim V \geq 1$ . Mivel  $\dim L(V) = (\dim V)^2$  egy véges dimenziós vektortér, ezért létezik  $1 \leq k \leq (\dim V)^2$ , hogy  $\{I, A, \dots, A^{k-1}\}$  lineárisan független, de  $\{I, A, \dots, A^{k-1}, A^k\}$  lineárisan összefüggő. Ekkor léteznek  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{F}$  számok, amelyekre*

$$A^k = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j.$$

*Ekkor az  $A$  operátor minimálpolinomja.*

$$m(t) = t^k - \alpha_{k-1}t^{k-1} - \dots - \alpha_1t - \alpha_0.$$

**Bizonyítás:** Mivel a  $k+1$  elemű rendszer lineárisan összefüggő és a  $k$  elemű rendszer lineárisan független, ezért a kívánt előállítás valóban létezik. Ezt átrendezve kapjuk, hogy  $m$  valóban olyan normált polinom, amelyre  $m(A) = 0$  fennáll. No de  $k$ -nál alacsonyabb fokú ilyen polinom csak a konstans zérus polinom lehet, hiszen  $\{I, A, \dots, A^{k-1}\}$  lineárisan független. Azt láttuk tehát, hogy  $m$  a legalacsonyabb fokú nem zérus eleme  $J_A$ -nek, tehát az  $m$  polinom generálja a főideált.

A minimálpolinom algoritmikus meghatározásához a kis minimálpolinom is használhatók.

**10.16. állítás.** *Legyen az  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció minimálpolinomja  $m$ . Tegyük fel, hogy az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  egy bázisa  $V$ -nek, és  $p_1, \dots, p_n$  rendre a bázis elemekhez tartozó kis minimálpolinomok. Ekkor a  $p_1, \dots, p_n$  polinomok legkisebb közös többszöröse az  $m$  minimal polinom.*

**Bizonyítás:** Tetszőleges  $v \in V$  mellett, ha  $p_v$  a kis minimálpolinom, akkor  $p_v|m$ , hiszen  $m(A)$  a konstans zérus transzformáció. Emiatt  $m$  egy közös többszöröse a  $p_j$  kis minimálpolinomoknak. Most tegyük fel, hogy egy  $p$  polinom többszöröse a  $p_j$  kis minimálpolinomoknak. Világos, hogy minden  $j$  mellett

$$p(A)e_j = h_j(A)(p_j(A)e_j) = h_j(A)0 = 0.$$

Mivel egy lineáris transzformáció egy bázison egyértelműen meghatározott, ezért  $p(A) = 0$ . Ekkor persze  $m|p$ , azaz  $m$  valóban a kis minimálpolinomok legkisebb közös többszöröse.

<sup>1</sup>Kis vártatva kiderül, hogy  $\deg m \leq \dim V$  is igaz.

*Egy másik bizonyítás:* Mivel a  $p(A)$  lineáris transzformáció a bázison egyértelműen meghatározott, ezért  $p \in J_A$  pontosan akkor teljesül, ha  $p \in J_{A,e_i}$  a bázis minden  $e_i$  elemére. Így

$$J(d) = \bigcap_{i=1}^n J(p_i) = \bigcap_{i=1}^n J_{A,e_i} = J_A = J(m).$$

No de, a baloldali ideál  $d$  generáló eleme – az 1.26. állítás szerint – a  $p_1, \dots, p_n$  polinomok legkisebb közös többszöröse. Mivel egy főidálnak csak egy normált generáló eleme van, ezért a  $d$  legkisebb közös többszörös azonos a jobboldali ideál generáló  $m$  minimálpolinommal.

### 10.3. Sajátvektorok és diagonalizálhatóság

**10.17. állítás.** *Tegyük fel, hogy  $p$  legalább elsőfokú osztója az  $A$  transzformáció minimálpolinomjának. Ekkor  $p(A)$  szinguláris.*

*Bizonyítás:* Jelölje  $m$  a minimálpolinomot, és  $m = pq$ . Így  $\deg q < \deg m$ . Persze  $m(A) = p(A)q(A)$ , így ha  $p(A)$  reguláris lenne, akkor

$$q(A) = p(A)^{-1}m(A) = 0$$

Ebből persze  $m|q$ , így  $\deg m \leq \deg q$ , ami ellentmondás.

**10.18. állítás** (sajátérték és minimálpolinom). *Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformációja a  $V$  véges dimenziós vektortérnek, és  $\lambda \in \mathbb{F}$  egy szám, valamint  $m$  az  $A$  minimál polinomja. Az alábbi feltevések ekvivalensek:*

1.  $\lambda$  sajátértéke  $A$ -nak,
2.  $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ ,
3.  $A - \lambda I$  szinguláris,
4. létezik  $v \in V$ , amelyre a  $v$ -hez tartozó kis minimálpolinomja  $A$ -nak  $p_v(t) = t - \lambda$ .
5.  $t - \lambda|m(t)$ ,
6.  $m(\lambda) = 0$ .

*Bizonyítás:* Az első három pont ekvivalenciája nyilvánvaló, majd a  $3 \implies 4 \implies 5 \implies 6 \implies 5 \implies 3$  utat érdemes követni. Az utolsó lépéshez mutattuk meg az előző állítást.

Az egyik legfontosabb definícióhoz érkeztünk.

**10.19. definíció** (diagonalizálható transzformáció). Az  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt *diagonalizálhatónak* mondjuk, ha van a térfelületen olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixája diagonális alakú, azaz a fődiagonálisán kívül minden elem zérus.

Az  $[A]$  négyzetes mátrix tehát pontosan akkor diagonális alakú, ha minden  $i \neq j$  mellett  $[A]_{i,j} = 0$ . Ez azt jelenti hogy a  $j$ -edik bázis elem képének a nem  $j$ -edik koordinátája zérus, azaz az  $e_j$  bázis vektorra  $Ae_j = \lambda e_j$  áll fenn, valamely  $\lambda \in \mathbb{F}$  számmal. Ez éppen azt jelenti, hogy az  $e_j$  bázisvektor egy sajátvektor. Nyilvánvaló tehát, hogy diagonalizálhatóság szükséges és elegendő módon megragadható a sajátvektor fogalmának segítségével.

**10.20. állítás** (diagonalizálhatóság). *Az  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha van térfelületen csupa sajátvektorokból álló bázisa.*

*Ebben az esetben a transzformációnak a  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sajátvektorokban felírt mátrixának  $j$ -edik diagonális eleme, éppen az a  $\lambda_j$  sajátértéke  $A$ -nak, amelyre  $Av_j = \lambda_j v_j$ .*

Mivel a  $\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}$  valós test feletti mátrix minden valós  $t$  mellett reguláris, ezért a  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrix egy nagyon egyszerű példa olyan mátrixra, amelynek spektruma üres, így persze nem diagonalizálható.

Csak a játék kedvéért, ha az  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  mátrixot tekintjük  $\mathbb{R}$  felett, azt kapjuk, hogy ez sem diagonalizálható. Van ugyan egyetlen sajátértéke  $\lambda = 0$ , de az ehhez a sajátértékhez tartozó ker  $A$  sajátaltér egydimenziós, emiatt nincs a térfelületen két lineárisan független sajátvektor.

A pozitív példa kedvéért nézzük az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixot. Mind az  $\mathbb{R}$ , mind a  $\mathbb{C}$  test felett diagonalizálható, hiszen  $\sigma(A) = \{0, 2\}$ , továbbá a  $\lambda = 0$ -hoz tartozó sajáteltérre  $\ker A = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ , míg a  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó sajáteltérre  $\ker(A - 2I) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Világos, hogy a  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  vektorrendszer egy sajátvektorokból álló bázisa a két dimenziós vektortérnek. A fenti bázisban a transzformáció mátrixa  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Mivel az erre a bázisra való áttérés mátrixa  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , ezért az új bázisra való áttérést formuláját használva

$$[B]^{-1}[A]_{\text{régi}}[B] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = [A]_{\text{új}}.$$

Ezt úgy fejezzük ki, hogy az  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  izomorfizmus diagonalizálja az  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixot.

**10.21. állítás.** *Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok rendszere lineárisan független.*

Formálisabban: Legyen  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \sigma(A)$  a sajátérékek páronként különböző elemekből álló rendszere, és legyen  $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq V$  sajátvektorok olyan rendszere, amelyre  $v_j \in \ker(A - \lambda_j I)$  minden  $j = 1, \dots, s$  mellett. Ekkor a sajátvektorok rendszere lineárisan független.  $\square$

*Bizonyítás:* A sajátvektorok száma, azaz  $s$  szerinti indukció. Ha  $s = 1$ , akkor készen is vagyunk, hiszen egy sajátvektor egy nem zérus vektor.

Most tegyük fel, hogy igaz az állítás sajátvektorok  $s$ -nél kevesebb elemből álló rendszerére, és lássuk be sajátvektorok olyan  $s$  elemű rendszerére, amelyek különböző sajátértékhez tartoznak. Az indukciós feltevés szerint tehát  $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$  lineárisan független. Ha  $\{v_1, \dots, v_{s-1}, v_s\}$  lineárisan összefüggő lenne, akkor valamely  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$  számokkal

$$v_s = \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j v_j$$

lenne. No de

$$\sum_{j=1}^{s-1} \lambda_s \alpha_j v_j = \lambda_s v_s = Av_s = \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j Av_j = \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j \lambda_j v_j,$$

ami a az első  $s - 1$  elem lineárisan függetlensége szerint csak úgy lehetséges, ha minden  $j = 1, \dots, s - 1$  mellett  $\lambda_s \alpha_j = \alpha_j \lambda_j$ , ergo  $\alpha_j (\lambda_s - \lambda_j) = 0$ . Mivel itt különböző sajátértékekkel van szó, ezért minden szóba jövő  $j$  mellett  $\alpha_j = 0$ . Ebből  $v_s = 0$  következik, ami ellentmond annak, hogy  $v_s$  egy sajátvektor.  $\square$

Egy  $n$ -dimenziós térben  $n$ -elemű lineárisan független rendszer generátorrendszer is, így azonnali következmény a diagonalizálhatóság egy elegendő feltétele:

**10.22. állítás** (diagonalizálhatóság elegendő feltétele). *Tegyük fel, hogy az  $A \in L(V)$  lineáris transzformációnak annyi különböző sajátértéke van, mint a  $V$  vektortér dimenziója. Ekkor  $A$  diagonalizálható.*  $\square$

Az identitás mátrix példája mutatja, hogy a feltétel elegendő, de nem szükséges. Mivel  $n$ -dimenziós térben legfeljebb  $n$  elemű linárisan független rendszer van, ezért kapjuk, hogy a spektrumnak több eleme nem lehet, mint a tér dimenziója:

**10.23. állítás.** *Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció. Ekkor  $A$ -nak legfeljebb  $\dim V$  darab különböző sajátértéke lehet.*  $\square$

**10.24. definíció** (geometriai multiplicitás). Ha  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció, és  $\lambda \in \sigma(A)$  annak egy sajátérétke, akkor az  $A - \lambda I$  sajátaltér defektusát, tehát az  $\ker(A - \lambda I)$  altér dimenzióját, a  $\lambda$  sajátérték geometriai multiplicitásának mondjuk.  $\square$

**10.25. állítás.** *Legyen  $A \in L(V)$  transzformáció, és  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \sigma(A)$ , a spektrum különböző elemei. Jelölje  $M_j = \ker(A - \lambda_j I)$ . Ekkor értelmes az  $M_1 \oplus \dots \oplus M_s$  direktösszeg.*  $\square$

**Bizonyítás:** Megmutatjuk, hogy a  $\sum_{j=1}^s M_j$  összegben minden elem előállítása egyértelmű. Ehhez elég azt belátni, hogy  $\sum_{j=1}^s v_j = 0$ ,  $v_j \in M_j$  csak úgy lehetséges, ha minden  $j = 1, \dots, s$  mellett  $v_j = 0$ . Tegyük fel tehát, hogy valamely  $v_j \in M_j$  vektorokra

$$\sum_{j=1}^s v_j = 0.$$

Ez egy olyan lineáris kombináció, amelyben minden vektor együtthatója 1. Emiatt a  $\{v_1, \dots, v_s\}$  vektorrendszer nem zérus vektorai is összefüggő rendszert alkotnak, feltéve hogy vannak ilyenek. No de egy  $v_j \in M_j$  vektor ha nem zérus, akkor egy sajátvektor. Tehát ha a vektorrendszerben lenne nem zérus elem, akkor talánk különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok egy lineárisan összefüggő rendszerét, ami a 10.21. állítás szerint nem lehetséges.

Meggondoltuk tehát, hogy ha páronként különböző  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \sigma(A)$  sajátértékekkel indulunk ki, és egyesítjük a  $\ker(A - \lambda_j I)$  sajátalerek egy-egy bázisait, akkor az így összetett vektorrendszer az

$$\ker(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_s I)$$

altér egy – sajátvektorokból álló – bázisa. Rögzítsük is ezt a fontos gondolatot, amelyet a feladatok megoldása során sokszor használjuk majd.

**10.26. állítás.** A különböző sajátértékekhez tartozó sajátalerek bázisainak egyesítése a sajátalerek direktösszegének egy bázisa.

**10.27. állítás** (diagonalizálhatóság). Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció. Jelölje  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \sigma(A)$  az  $A$  spektrumát, azaz valamennyi különböző sajátértékét. Az alábbi feltevések ekvivalensek.

1. Az  $A$  sajátértékei geometriai multiplicitásának összege  $\dim V$ ,
2.  $\ker(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_s I) = V$ ,
3. minden vektor előáll mint sajátvektorok összege,
4. Az  $A$  diagonalizálható lineáris transzformáció.

**Bizonyítás:** Mivel a  $\ker(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_s I) \subseteq V$  tartalmazás minden fennáll, ezért a 2. feltétel ekvivalens avval, hogy

$$\sum_{j=1}^s \dim(\ker(A - \lambda_j I)) = \dim(\ker(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_s I)) = \dim V,$$

ami éppen a geometriai multiplicitásra vonatkozó feltétel. Így az első két feltevés ekvivalenciáját megértettük.

Mivel a  $\ker(A - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_s I) \subseteq V$  tartalmazás minden fennáll, ezért a 2. feltétel ekvivalens avval, hogy

$$\sum_{j=1}^s \ker(A - \lambda_j I) = V,$$

ami éppen a 3. feltétel. Így a 2. és a 3. feltételek ekvivalenciáját is megértettük.

Ha 3., ezért 2. fennáll, akkor az egyes  $\ker(A - \lambda_j I)$  sajátalerek bázisait egyesítve a  $V$  térfelület egy sajátvektorokból álló bázisát kapjuk, ergo az  $A$  diagonalizálható transzformáció. Megfordítva, ha  $A$  diagonalizálható, akkor van sajátvektorokból álló bázisa, így minden vektor előáll mint sajátvektorok összege. Evvel a 3. és a 4. feltételek ekvivalenciáját is igazoltuk.



## 11. fejezet

# Transzformációk redukálása

**11.1. állítás.** Tekintsünk egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt, amelynek minimálpolinomja  $m \in \mathbb{F}[t]$ . Tegyük fel, hogy  $m$  előáll mint a  $p, q$  egymással relatív prím, normált polinomok

$$m = pq$$

szorzata. Ekkor a tér szétesik a  $\ker p(A)$  és a  $\ker q(A)$  invariáns alterei direktösszegére, azaz

$$\ker p(A) \oplus \ker q(A) = V.$$

Ha  $A_1 = A|_{\ker p(A)}$  és  $A_2 = A|_{\ker q(A)}$ , akkor  $A_1$  minimálpolinomja  $p$  és  $A_2$  minimálpolinomja  $q$ . □

*Bizonyítás:* Mivel  $p$  és  $q$  relatív prímek, ezért a Bezout-azonosság szerint van  $f, g \in \mathbb{F}[t]$  polinom, amelyekre

$$fp + gq = 1.$$

Emiatt persze minden  $x \in V$  mellett

$$f(A)p(A)x + g(A)q(A)x = Ix = x. \quad (\dagger)$$

Ha  $x \in \ker p(A) \cap \ker q(A)$ , akkor  $p(A)x = 0 = q(A)x$ , tehát  $x = 0$ , ami azt jelenti, hogy  $\ker p(A)$  és  $\ker q(A)$  diszjunkt alterek.

Vegyük észre, hogy a  $f(A)p(A)x \in \ker q(A)$ , és hasonlóan  $g(A)q(A)x \in \ker p(A)$ . Ez azt jelenti, hogy  $\ker q(A) + \ker p(A) = V$  azonosság is fennáll. Megmutattuk tehát, hogy  $V$  előáll mint a  $\ker p(A)$  és a  $\ker q(A)$  alterek direktösszegére.

Világos, hogy minden  $u \in \ker p(A)$  mellett  $p(A_1)u = p(A)u = 0$ .

Ha  $h$  egy másik olyan polinom, amelyre  $h(A_1) = 0 \in L(\ker p(A))$ , akkor mivel a direktösszegre vonatkozó állítást már igazoltuk

$$(hq)(A)x = h(A)q(A)(x_1 + x_2) = q(A)h(A)x_1 + h(A)q(A)x_2 = 0 + 0 = 0,$$

ahol  $x = x_1 + x_2$ ,  $x_1 \in \ker p(A)$  és  $x_2 \in \ker q(A)$ . Látjuk tehát, hogy az  $A$  transzformáció a  $hq$  polinomnak is gyöke, emiatt  $m|hq$ . Mivel  $p|m$ , ezért

$$p|hq$$

is fennáll. Most újra használjuk, hogy a  $p$  és a  $q$  polinomok relatív prímek, így azt kapjuk, hogy  $p|h$ . Megmutattuk, hogy a  $J_{A_1}$  ideált a  $p$  normált polinom generálja, ami éppen azt jelenti, hogy  $p$  az  $A_1$  transzformáció minimálpolinomja. Az  $A_2$  minimálpolinomja  $q$  állítás igazolása a fentivel analóg. ▪

**11.2. állítás.** Tekintsünk egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt, amelynek minimálpolinomja  $m \in \mathbb{F}[t]$ . Tegyük fel, hogy  $m$  előáll mint a páronként relatív prím normált polinomok

$$m = p_1 p_2 \dots p_n$$

szorzata. Jelölje minden  $i = 1, \dots, n$  mellett  $V_i = \ker p_i(A)$  invariáns alteret, és  $A_i = A|_{V_i}$  megszorítást. Világos, hogy  $A_i \in L(V_i)$ . Ekkor

1.  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ ;
2.  $p_i$  az  $A_i$  transzformáció minimálpolinomja minden szóba jövő  $i = 1, \dots, n$  mellett.

**Bizonyítás:** A polinomok  $n$  száma szerinti teljes indukcióval igazolunk. Az  $n = 1$  eset triviális, de  $n = 2$  éppen az előző állítás.

Most tegyük fel, hogy az állítás  $n$ -nél kevesebb polinom szorzatára igaz, és lássuk be  $n$ -re. Feltehető tehát, hogy  $n \geq 3$ . Legyen  $p = p_1, \dots, p_{n-1}$ . Világos, hogy  $p$  és  $p_n$  relatív prímek, hiszen ha  $d$  irreducibilis osztója  $p$ -nek és  $p_n$ -nek, akkor  $d$  prím tulajdonsága szerint  $d|p_i$  valamely  $i < n$ -re, tehát  $d|p_i$  és  $d|p_n$ . A feltevés szerint ilyen csak a konstans polinom lehetséges, ami valóban igazolja, hogy  $p$  és  $p_n$  relatív prímek. Persze

$$m = pp_n.$$

Alkalmazhatjuk tehát az előző állítást, azaz

$$V = \ker p(A) \oplus V_n,$$

továbbá  $p$  a minimálpolinomja az  $A|_{\ker p(A)}$ -nak és persze  $p_n$  minimálpolinomja  $A_n$ -nek.

Alkalmazzuk most az indukciós feltevést a  $\ker p(A)$  vektortérre. Ott az  $A|_{\ker p(A)}$  lineáris transzformáció  $p$  minimálpolinomja előáll mint  $n - 1$  páronként relatív prím polinom szorzata:

$$p = p_1, \dots, p_{n-1}.$$

Világos tehát, hogy

1.  $\ker p(A) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$  és
2.  $p_i$  az  $A_i$  minimálpolinomja minden  $i = 1, \dots, n - 1$  mellett.

Teljesül tehát a  $V_1, \dots, V_{n-1}, V_n$  alterekre, hogy minden diszjunkt – az itt adott sorrendben – az előzőek összegétől, és a Minkowski-összegük az egész  $V$  vektortér. Az 5.10. állítás szerint tehát  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ .

## 11.1. Sajátvektorok, minimálpolinom és diagonalizálhatóság

Alkalom nyílik, hogy a lineáris transzformáció diagonalizálhatóságát karakterizáló a 10.27. állítást tovább bővítsük, a minimálpolinom szerepének hangsúlyozásával.

**11.3. állítás (diagonalizálhatóság).** Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció. Jelölje  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} = \sigma(A)$  az  $A$  spektrumát, azaz valamennyi különböző sajátértékét. Az alábbi feltevések ekvivalensek.

1. Az  $A$  sajátértékei geometriai multiplicitásának összege  $\dim V$ ;
2.  $\ker(A - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_s I) = V$ ;
3. minden vektor előáll mint sajátvektorok összege;
4. Az  $A$  diagonalizálható lineáris transzformáció;
5. Az  $A$  transzformáció minimálpolinomja

$$m(t) = \prod_{j=1}^s (t - \lambda_j).$$

**Bizonyítás:** Ha az  $A$  transzformáció diagonalizálható, akkor a diagonálisában a sajátértékei vannak. Írjuk fel tehát a  $\prod_{j=1}^s (A - \lambda_j I)$  transzformáció mátrixát abban a bázisban, amelyben  $A$  mátrix is diagonális. Az eredmény egy diagonális mátrix, és ha felírjuk ezt mint az  $[A - \lambda_j I]$  mátrixok szorzatát, akkor minden diagonális pozíció az egyik szorzó mátrixban zérus, ergo a szorzat mátrix is a zéró mátrix. A fenti polinomnak tehát az  $A$  transzformáció gyöke. Mivel minden sajátérték a minimálpolinom gyöke, ezért a fenti polinom a legalacsonyabb fokú normált polinom, amelynek gyöke  $A$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Egy másik érv:  $t - \lambda_j$  a  $\lambda_j$  sajátértékhez tartozó sajátvektor kis minimálpolinomja. Mivel a sajátvektorok egy bazist alkotnak, ezért ezen polinomok legkisebb közös többszöröse a minimálpolinom. Persze  $\dim V$  darab elsőfokú polinom normált polinom legkisebb közös többszöröse, ezek közül a különbözők szorzata.

Megfordítva, legyen  $p_j(t) = t - \lambda_j$  minden  $j = 1, \dots, s$ . Ekkor  $m = p_1 \cdots p_s$  páronként relatív prím, normált polinomok szorzata, ezért az éppen igazolt 11.2. állítás szerint

$$V = \ker p_1(A) \oplus \cdots \oplus \ker p_s(A) = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_s I)$$

Ezt kellett belátni.

## 11.2. Redukálás: az általános eset

Mivel minden polinom előáll mint néhány irreducibilis polinom szorzata, ezért 11.2. állítás így is fogalmazható.

**11.4. állítás.** *Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció minimálpolinomja  $m$ . Tudjuk, hogy  $m$  egyértelműen áll elő*

$$m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r},$$

*alakban, ahol  $p_1, \dots, p_r$  egymástól páronként különböző normált, irreducibilis polinomok. Jelölje  $V_i = \ker p_i^{m_i}(A)$  jelölje  $A_i = A|_{V_i}$  minden  $i = 1, \dots, r$  mellett. Ekkor*

1.  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  és,
2.  $A_i$  minimálpolinomja  $p_i^{m_i}$  minden  $i = 1, \dots, r$  mellett.

A konklúzió tehát az, hogy elég olyan transzformációkkal foglalkoznunk, amelyek minimálpolinoma egy irreducibilis polinom valamely egész kitevős hatványa. Az algebra alaptétele szerint a komplex számtest feletti irreducibilis polinom csak elsőfokú polinom lehet. Abban a speciális esetben tehát, amikor a  $\mathbb{C}$  komplex számtest feletti vektortereket vizsgálunk, ez azt jelenti, hogy elég ha olyan  $A \in L(V)$  transzformációval foglalkozunk, amelynek  $m$  minimálpolinomjára

$$m(t) = (t - \alpha)^n$$

teljesül valamely  $\alpha \in \mathbb{C}$  komplex szám és  $n \in \mathbb{N}$  egész mellett. Ilyen  $A$  transzformációra, ha  $B$  jelöli a  $B = A - \alpha I$  lineáris transzformációt, akkor a  $B$  olyan, hogy valamely egész kitevős hatványa a konstans zérus transzformáció. Ez vezet majd a *nillpotens* fogalmához. Ha felírjuk valamely bázisban egy ilyen  $B$  nillpotens transzformáció mátrixát, akkor  $A$  mátrixa is könnyen adódik  $B$  mátrixából. Ehhez csak az  $\alpha[I]$  mátrixot kell  $[B]$ -hez adni, ami praktikusan nem jelent többet, mint hogy a  $[B]$  diagonális elemeket kell az  $\alpha$  komplex számmal megemelni. A fenti gondolaton alapul a *Jordan-normálak* fogalma.



## 12. fejezet

# Redukálás irreducibilis minimálpolinom esetén

A LELEGYSZERŰBB ESET, mikor a minimálpolinom elsőfokú irreducibilis polinomok szorzata.

**12.1. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformációja a  $V$  véges dimenziós vektortérnek, az  $m \in \mathbb{F}[t]$  egy  $k$ -adfokú, irreducibilis polinom, amelyre  $m(A) = 0$ . Ekkor

1. minden  $v \neq 0$  mellett  $\dim \text{lin}(v; A) = k$ ;
2. minden  $v \in V$  vektor és minden  $K \subseteq V$  invariáns altér mellett  $\text{lin}(v; A) \cap K = \{0\}$  vagy  $\text{lin}(v; A) \subseteq K$ ;
3. a  $V$  altér nulla dimenziós, vagy  $k$  dimenziós, vagy  $k$  dimenziós  $A$  invariáns alterek direktösszege. Pontosabban, ha  $\dim V > 0$ , akkor létezik  $r \geq 1$  szám, és léteznek  $v_1, \dots, v_r$  vektorok, amelyekre

$$\text{lin}(v_1; A) \oplus \dots \oplus \text{lin}(v_r; A) = V.$$

*Bizonyítás (1.):* Legyen adott  $v \neq 0$  vektor mellett  $p_v$  a  $v$ -hez tartozó kis minimálpolinom. Mivel  $m(A)v = 0$ , ezért  $p_v|m$ . No de  $m$  irreducibilis, ezért  $m = p_v$ . Ekkor viszont

$$k = \deg m = \deg p_v = \dim \text{lin}(v; A).$$

*Bizonyítás (2.):* Ha  $v = 0$ , akkor az állítás nyilvánvaló. A továbbiakban emiatt  $v \neq 0$ . Most tegyük fel, hogy  $x \in \text{lin}(v; A) \cap K$  és  $x \neq 0$ . Ekkor

$$\text{lin}(x; A) \subseteq \text{lin}(v; A) \cap K \subseteq \text{lin}(v; A)$$

No de, a bal- és a jobboldali altér azonos dimenziós alterek, emiatt fent mindenütt egyenlőség van. Speciálisan  $\text{lin}(v; A) = \text{lin}(v; A) \cap K$ , ami éppen azt jelenti, hogy  $\text{lin}(v; A) \subseteq K$ .

*Bizonyítás (3.):* Először is gondoljuk meg, hogy invariáns alterek Minkowski–összege is invariáns altér marad. Ha  $V$  nem tartalmaz nem zérus vektort, akkor  $\dim V = \{0\}$ .

Ha  $v_1 \in V$  egy nem zérus vektor, akkor jelölje  $V_1 = \text{lin}(v_1; A)$ . Ha  $V = V_1$ , akkor  $V$  egy  $k$ -dimenziós vektortér.

Ha  $V \neq V_1$ , akkor van  $v_2 \in V \setminus V_1$ . Mivel  $V_1$  egy invariáns altér, ezért a már igazolt állítás szerint bevezetve a  $V_2 = \text{lin}(v_2; A)$  jelölést  $V_2 \cap V_1 = \{0\}$ . Értelmes tehát venni e két invariáns altér direktösszegét. Ha  $V = V_1 \oplus V_2$ , akkor  $V$  előállt két  $k$  dimenziós invariáns alterének direktösszegeként.

Ha  $V \neq V_1 \oplus V_2$ , akkor van  $v_3 \in V \setminus (V_1 \oplus V_2)$ . Mivel  $V_1 \oplus V_2$  egy invariáns altér, ezért a már igazolt állítás szerint bevezetve a  $V_3 = \text{lin}(v_3; A)$  jelölést  $V_3 \cap (V_1 \oplus V_2) = \{0\}$ . Értelmes tehát venni e három invariáns altér direktösszegét, hiszen a  $V_1, V_2, V_3$  alterek ebben a sorrendben véve olyanok, hogy minden diszjunkt az előzőek összegétől. Ha  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ , akkor  $V$  előállt három  $k$  dimenziós invariáns alterének direktösszegeként.

Ha  $V \neq V_1 \oplus \dots \oplus V_t$ , valamely  $t \geq 2$  mellett, akkor van  $v_{t+1} \in V \setminus (V_1 \oplus \dots \oplus V_t)$ . Mivel  $V_1 \oplus \dots \oplus V_t$  egy invariáns altér, ezért a már igazolt állítás szerint bevezetve a  $V_{t+1} = \text{lin}(v_{t+1}; A)$  jelölést  $V_{t+1} \cap (V_1 \oplus \dots \oplus V_t) = \{0\}$ . Értelmes tehát venni ezen  $t+1$  invariáns altér direktösszegét, hiszen a  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_t, V_{t+1}$  alterek ebben a sorrendben véve olyanok, hogy minden diszjunkt az előzőek összegétől. Ha  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_{t+1}$ , akkor  $V$  előállt  $t+1$  darab  $k$  dimenziós invariáns alterének direktösszegeként.

Az eljárás előbb utóbb a  $V$  vektortér véges dimenziós volta miatt megáll.

## Következmény

Világos, hogy  $\{A^{k-1}v_1, A^{k-2}v_1, v_1, \dots, Av_1, v_1\}$  bázisa a lin  $\{v_1; A\}$  invariáns altérnek. Ha ebben a bázisban felírjuk a transzformáció mátrixát, akkor az első oszlopból vannak a minimálpolinom együtthatóinak ellentettjei, a diagonális feletti 1-ek, vannak és minden más elem zérus:

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{k-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Meggondoltuk tehát, hogy ha a transzformáció  $m$  minimálpolinomja irreducibilis és

$$m(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

alakú, akkor a térek van olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixa a fenti mátrix diagonális elrendezésű  $r$  darab másolatából áll, ahol  $rk = \dim V$ .

Házi feladatként gondoljuk meg, hogy minden nem konstans  $m(t) \in \mathbb{F}[t]$  polinomhoz létezik egy  $\mathbb{F}$  feletti vektortér, és azon egy lineáris transzformáció, amelynek minimálpolinomja éppen  $m$ . (Segítség: Nézzük és csodáljuk a fenti mátrixot.)

## Illusztráció

Bontsuk lehető legalacsonyabb invariáns alterek direktösszegére az alábbi  $\mathbb{R}$  feletti vektortérben értelmezett lineáris transzformáció értelmezési tartományát, és írjuk fel  $A$  mátrixát a lehető legegyszerűbb módon. A transzformáció definíciója egy  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  bázis felett a következő:

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4) = (-2\alpha + 3\gamma) u_1 + (-2\alpha - \beta + 3\gamma + \delta) u_2 + (-\alpha + \gamma) u_3 + (-\alpha - \beta + 3\gamma) u_4.$$

*Megoldás:* Írjuk fel az operátor mátrixát:  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ . Ha a sajátvektorokat keressük látjuk,

hogy nincs valós sajátérték. Keressük tehát a minimálpolinomot a bázis egyes elemeihez tartozó kis minimálpolinomok meghatározásával.

	$Au_1$	$A^2u_1$
$u_1$	-2	1
	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-2</span>	2
	-1	1
	-1	1
	$\delta$	-1

$\{u_1, Au_1\}$  lineárisan független, de

	$Au_2$	$A^2u_2$		$A^2u_2$
$u_2$	0	0	$u_2$	0
	-1	0		-1
	0	0		0
	<b>-1</b>	1		$Au_2$
	$\delta$	-1		-1

$\{u_2, Au_2\}$  lineárisan független, de

$$A^2u_2 + Au_2 + u_2 = 0,$$

ezért  $p_2(t) = t^2 + t + 1$ .

	$Au_3$	$A^2u_3$		$A^2u_3$
$u_3$	3	-3	$u_3$	-1
	3	-3		0
	1	-2		-1
	3	-3		0
	$\delta$	-1		

$\{u_3, Au_3\}$  lineárisan független, de

$$\left| \begin{array}{cc|cc} & Au_4 & A^2u_4 & \\ \hline & 0 & 0 & \\ & 1 & -1 & \\ & 0 & 0 & \\ \hline u_4 & 0 & -1 & \\ \hline & \delta & -1 & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|cc} & A^2u_4 & & \\ \hline & 0 & & \\ & Au_4 & -1 & \\ & 0 & 0 & \\ \hline u_4 & -1 & & \end{array} \right|$$

$\{u_4, Au_4\}$  lineárisan független, de  
 $A^2u_4 + Au_4 + u_4 = 0$ ,  
ezért  $p_4(t) = t^2 + t + 1$ .

Ez azt jelenti, hogy a minimálpolinom az  $m(t) = t^2 + t + 1$  másodfokú, az  $\mathbb{R}$  test felett irreducibilis polinom. A mátrix, tehát két darab  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrix diagonális elrendezésű partíciója. Mivel  $Au_4 = u_2$  az első invariáns altér bázisa lehet például  $\{u_2, u_4\}$ . minden olyan nem zérus vektorra, amely nincs e két vektor lineáris burkában, az  $\{Av, v\}$  rendszer egy invariáns direktiegészítőt definiál. Pont erről szól a 12.1. állítás.

Ilyen módon például az  $\{u_2, u_4, Au_1, u_1\}$  bázisban a transzformáció mátrixa  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  alakú.

Emlékezve az általános bázis transzformációra azt kaptuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 12.1. Irreducibilis polinommal képzett magtér redukálása

Legyen most  $p$  egy tetszőleges  $k$ -ad fokú irreducibilis polinom, és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Tekintsük a  $V_1 = \ker p(A)$  invariáns alteret, amelyre szorítsuk meg az  $A$  transzformációt, azaz  $A_1 = A|V_1$ . Világos, hogy  $p(A_1) = 0 \in L(V_1)$ , ezért alkalmazhatjuk a fent igazolt 12.1. állítást a  $V_1$  altérre és az  $A_1$  transzformációra.

**12.2. állítás.** Legyen  $V$  egy véges dimenziós vektortér,  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció, és  $p \in \mathbb{F}[t]$  egy irreducibilis polinom. Ekkor:

1. minden  $v \neq 0, v \in \ker p(A)$  mellett  $\dim \text{lin}(v; A) = \deg p$ ;
2.  $A \ker p(A)$  altér nulla dimenziós, vagy  $k$  dimenziós, vagy  $k$  dimenziós invariáns alterek direktösszege. Ponto-sabban fogalmazva ha  $\nu(A) > 0$ , akkor létezik  $r \geq 1$  szám, és léteznek  $v_1, \dots, v_r$  vektorok, amelyekre

$$\text{lin}(v_1; A) \oplus \dots \oplus \text{lin}(v_r; A) = \ker p(A).$$

Összefoglalhatjuk azt az esetet, mikor a minimálpolinom különböző irreducibilis polinomok szorzata. Ez éppen a 11.2. állítás esete.

**12.3. állítás.** Tekintsünk egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt, amelynek minimálpolinomja  $m \in \mathbb{F}[t]$ . Tegyük fel, hogy  $m$  előáll mint a különböző normált, irreducibilis polinomok elsőfokú hatványainak

$$m = p_1 p_2 \dots p_s$$

szorzata. Ekkor  $V$  előáll mint néhány – de legalább egy-egy darab –  $\deg p_1, \deg p_2, \dots, \deg p_s$  dimenziós minimális invariáns alterének direktösszege.

*Bizonyítás:* A 11.4. állításban láttuk, hogy  $V = \ker p_1(A) \oplus \dots \oplus \ker p_s(A)$  alakú. minden egyes  $p_j$  a minimálpolinom legalább elsőfokú osztója, így  $\ker p_j(A) \neq \{0\}$ . Az előző állítás szerint minden  $j$  mellett  $\ker p_j(A)$  egy  $\deg p_j$  dimenziós invariáns altér, vagy néhány ilyen direktösszege. Mivel ez minden  $j$  mellett igaz, ezért  $\ker p_j(A)$  felbontását a  $V$  felbontásába helyettesítve készen is vagyunk.

### A komplex és a valós eset

Most az tegyük fel, hogy a  $V$  vektortér a  $\mathbb{C}$  komplex számtest feletti vektortér. Ekkor az  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció minimálpolinomja egy komplex együtthatós polinom. Az algebra alaptétele szerint irreducibilis normált polinom csak elsőfokú, azaz  $t - \lambda$  alakú lehet, tehát az előző állítás feltétele most abba megy át, hogy  $A$  minimálpolinomja

$$m(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_s)$$

alakú, ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  az  $m$  különböző gyökei. Tudjuk viszont, hogy a minimálpolinom gyökei a sajártétek, ezért a feltételek szerint a minimálpolinom gyökei egyszeresek, vagy ami ugyanaz: a sajártétek a minimálpolinom egyszeres gyökei.

**12.4. állítás.** *Tegyük fel, hogy  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti vektortér és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. A pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja gyökei egyszeres multiplikitásúak.*

*Bizonyítás:* Ha a sajártétek a minimálpolinomnak egyszeres multiplikitású gyökei, akkor fennállnak az előző tételek feltételei. Így  $V$  előáll mint néhány egydimenziós invariáns alterének direktösszege, ami azt jelenti, hogy van sajávektorokból álló bázisa, ergo diagonalizálható.

Megfordítva, ha  $A$  diagonalizálható, akkor a diagonálisban a sajártétek vannak. Ha  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  a diagonális különböző elemei, akkor az  $A$  minimálpolinomja nyilvánvalóan

$$m(t) = \prod_{j=1}^s (t - \lambda_j)$$

alakú. Ez persze olyan polinom, amelyben minden gyöktényező csak egyszer szerepel.

Mivel a valós test feletti irreducibilis polinomok első- vagy másodfokúak, ezért a valós esetben is szép állítást kapunk.<sup>1</sup>

**12.5. állítás.** *Tegyük fel, hogy  $V$  egy  $\mathbb{R}$  feletti vektortér és  $A \in L(V)$ . A  $V$  pontosan akkor bontható fel egy vagy két dimenziós minimális  $A$ -invariáns alterek direktösszegére, ha az  $A$  transzformáció  $m$  minimálpolinomjának felbontásában minden irreducibilis polinom az első hatványon szerepel.*

*Bizonyítás:* A komplex esettel analóg.

---

<sup>1</sup>Ha nem is annyira szépet mint a komplex esetben.

## 13. fejezet

# A minimálpolinom fokszámáról

A MINIMÁLPOLINOM DEFINÍLÁSAKOR csak annyit láttunk, hogy legfeljebb  $n^2$  fokú polinom mindig konstruálható, amelynek a transzformáció gyöke, ahol  $n$  a tér dimenziója. Ebben a fejezetben látni fogjuk, hogy a fenti gondolat nagyon lényegesen erősíthető. Azt mutatjuk meg, hogy a minimálpolinom fokszáma nem lehet a tér dimenziójánál magasabb.

**13.1. lemma.** *Legyen  $B \in L(V)$  lineáris transzformáció, tegyük fel, hogy a  $v_1, \dots, v_r$  vektorok mindegyikére  $B^m v_j = 0$ , de a*

$$\{B^{m-1}v_1, B^{m-1}v_2, B^{m-1}v_3, \dots, B^{m-1}v_r\}$$

*vektorrendszer lineárisan független. Ekkor a*

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_r \\ Bv_1 & Bv_2 & Bv_3 & \dots & Bv_r \\ B^2v_1 & B^2v_2 & B^2v_3 & \dots & B^2v_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^t v_1 & B^t v_2 & B^t v_3 & \dots & B^t v_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{m-1}v_1 & B^{m-1}v_2 & B^{m-1}v_3 & \dots & B^{m-1}v_r \end{array} \right\}$$

*vektorrendszer is lineárisan független.*

□

*Bizonyítás:* Tekintsük ezen vektorok egy

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^r \alpha_{j,k} B^j x_k = 0$$

lineáris kombinációját. Meg kell mutatnunk, hogy az összes  $\alpha_{j,k} = 0$ . Ha  $m-1 \geq t \geq 0$ , az első olyan index, amelyre van  $\alpha_{t,k} \neq 0$  együttható, akkor a  $t$ -edik index előtt, minden együttható zérus, ergo

$$\sum_{j=t}^{m-1} \sum_{k=1}^r \alpha_{j,k} B^j x_k = 0$$

Erre alkalmazva a  $B^{m-t-1}$  transzformációt azt kapjuk, hogy

$$0 = B^{m-t-1} 0 = \sum_{j=t}^{m-1} \sum_{k=1}^r \alpha_{j,k} B^{j+m-t-1} x_k = \sum_{k=1}^r \alpha_{t,k} B^{t+m-t-1} x_k = \sum_{k=1}^r \alpha_{t,k} B^{m-1} x_k.$$

No de az  $\{B^{m-1}x_1, \dots, B^{m-1}x_r\}$  egy lineárisan független rendszer, amiből már következik, hogy minden  $\alpha_{t,k} = 0$ , ami ellentmondásban van a  $t$  index definíciójával.

**13.2. állítás.** Legyen  $B \in L(V)$  lineáris transzformációra  $B^m = 0$ . Ekkor  $\dim V \geq m\rho(B^{m-1})$ .  $\square$

*Bizonyítás:* Létezik tehát olyan  $\{B^{m-1}v_1, B^{m-1}v_2, \dots, B^{m-1}v_r\}$  lineárisan független vektorrendszer, ahol  $r = \rho(B^{m-1})$  a  $B^{m-1}$  transzformáció képterének dimenziója. A 13.1. lemma szerint a téren van egy  $m \cdot r$  elemű lineárisan független vektorrendszer, ergo a tér legalább  $m \cdot r = m\rho(B^{m-1})$  dimenziós.  $\square$

**13.3. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  minimálpolinomja  $p^m(t)$  alakú, ahol  $p$  egy irreducibilis polinom, melynek foka  $k$ . Ekkor a tér legalább  $m \cdot k$  dimenziós (, azaz a minimálpolinom foka legfeljebb a tér dimenziója).  $\square$

*Bizonyítás:* Először nézzük a trivialitásokat. Ha  $p$  a konstans 1 polinom, akkor a tér csak a 0 vektort tartalmazza, tehát mind a minimálpolinom fokszáma, mind a tér dimenziója zérus. Ha  $\deg p \geq 1$ , és  $m = 1$ , akkor a minimálpolinom irreducibilis, de van  $v \in V$  nem zérus vektor. Láttuk, hogy ilyenkor

$$\dim \text{lin}(v; A) = \deg p = k,$$

amiből persze következik, hogy a tér legalább  $k$  dimenziós.<sup>1</sup>

Most nézzük az érdekes esetet, mikor  $\deg p \geq 1$  és  $m \geq 2$ . Mivel a  $p^{m-1}(t)$  a minimálpolinomnál alacsonyab fokú de nem zérus polinom, ezért létezik  $v \in V$ , melyre  $B = p(A)$  jelöléssel  $B^{m-1}v \neq 0$ . Persze e vektor a  $\ker B = \ker p(A)$  egy eleme, és  $\ker p(A)$ -ban minden nem zérus elem generálta invariáns altér éppen  $k$ -dimenziós, ezért

$$\text{lin}\{B^{m-1}v; A\} = \text{lin}\{B^{m-1}v, AB^{m-1}v, A^2B^{m-1}v, \dots, A^{k-1}B^{m-1}v\}$$

pontosan  $k$  dimenziós. Persze  $\{B^{m-1}v, B^{m-1}Av, B^{m-1}A^2v, \dots, B^{m-1}A^{k-1}v\} \subseteq \text{Im } B^{m-1}$ , ergo

$$\rho(B^{m-1}) \geq k.$$

Alkalmazva  $B$ -re az imént igazolt 13.2 téttel kapjuk a kívánt  $\dim V \geq m\rho(B^{m-1}) \geq m \cdot k$  becslést.  $\square$

**13.4. állítás.** Tetszőleges lineáris transzformáció minimálpolinomjának foka legfeljebb a tér dimenziója.  $\square$

*Bizonyítás:* Legyen  $m(t) = p_1^{m_1}(t) \cdot p_2^{m_2}(t) \cdots p_r^{m_r}(t)$  a minimálpolinom relativ prím, irreducibilis polinomok hatványaiként való faktorizációja. Tudjuk, hogy ekkor

$$V = \ker p_1^{m_1}(A) \oplus \ker p_2^{m_2}(A) \oplus \cdots \oplus \ker p_r^{m_r}(A).$$

Az  $A|_{\ker p_i^{m_i}(A)}$  minimálpolinomja  $p_i^{m_i}(t)$ , így az előző tételet szerint minden egyes  $i$  index mellett  $m_i \cdot k_i \leq \dim(\ker p_i^{m_i}(A))$ . Világos, hogy

$$\deg m = \sum_{i=1}^r k_i \cdot m_i \leq \sum_{i=1}^r \dim(\ker p_i^{m_i}(A)) = \dim V.$$

Később ki fog derülni, hogy a transzformáció karakteristikus polinomjának, amely pontosan  $\dim V$ -ed fokú, is mindig gyöke a transzformáció. Ez az úgynevezett Cayley–Hamilton-tétel.

<sup>1</sup>Sőt még azt is láttuk, hogy néhány – lehet, hogy csak egy –  $k$  dimenziós invariáns altér direktösszege.

## 14. fejezet

# Nilpotens transzformációk

### 14.1. Hatvány függvény alakú minimálpolinom

**14.1. definíció** (nillpotens transzformáció). Egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt *nillpotensnek* mondjuk, ha létezik  $k \in \mathbb{N}$ , melyre  $A^k = 0$ . Ha  $A$  egy nillpotens transzformáció, akkor azt a legkisebb  $m$  számot, melyre  $A^m = 0$  a *nillpotencia rendjének* nevezzük.  $\square$

Például egy 5 dimenziós téren könnyen definiálhatunk első-, másod-, harmad-, negyed-, és ötöd-rendű nilpotens transzformációkat. De van-e mondjuk hatod-rendű nillpotens transzformáció ezen öt dimenziós vektortéren? Az első észrevétel adja a negatív választ.

**14.2. állítás.** Legyen  $B$  egy  $m$ -ed rendben nillpotens operátor. Ekkor létezik  $v \in V$  vektor, melyre  $B^{m-1}v \neq 0$ . minden ilyen  $v$  vektorra a

$$\{v, B, B^2v, \dots, B^{m-1}v\}$$

$m$  elemű vektorrendszer lineárisan független.

Emiatt ha a  $V$  vektortérnek van  $m$ -edrendben nillpotens lineáris transzformációja, akkor  $\dim V \geq m$ , azaz a nillpotencia rendje legfeljebb a tér dimenziója.  $\square$

*Bizonyítás:* Mivel  $B^{m-1} \neq 0$ , ezért valóban létezik  $v \in V$  vektor, melyre  $B^{m-1}v \neq 0$ . Persze ekkor a  $\{B^{m-1}v\}$  egy elemet tartalmazó rendszer lineárisan független, ezért a 13.1. lemma szerint a tételelbeli rendszer is lineárisan független.

**14.3. állítás.** Egy lineáris transzformáció pontosan akkor nillpotens, ha valamely  $m \leq \dim V$  mellett a minimálpolinomja  $m(t) = t^m$  alakú.

*Bizonyítás:* Tegyük fel először, hogy  $B$  lineáris transzformáció  $m$ -ed rendben nillpotens. Legyen  $p(t) = t^m$ . Ekkor  $p \in J_A$ , így a minimálpolinom  $p$  osztója. Másrészt a 14.2. állítás szerint van a térnak olyan vektora, amelyhez tartalmazó kis minimálpolinom is  $p$ . Így  $p$  osztója a minimálpolinomnak, ergo azonos vele.

Megfordítva, ha  $m(t) = t^m$  a minimálpolinomja  $B$ -nek, akkor  $B^m = 0$  és ez  $m$ -nél kisebb kitevőre nem teljesülhet. Ez éppen azt jelenti, hogy  $B$  transzformáció  $m$ -ed rendben nillpotens.  $\square$

### 14.2. Nilpotens operátorok redukálása

Az alábbi lemmának nincs köze a transzformációk redukálásához. Arra kell emlékeznünk, hogy egy véges dimenziós vektortérben minden altérnek van direkt kiegészítője.

**14.4. lemma.** Legyenek  $V_1$  és  $V_2$  diszjunkt altérei a véges dimenziós  $W$  vektortérnek. Ekkor  $V_1$ -nek létezik  $V_2$  alteret tartalmazó direktiegészítője, azaz létezik  $K \subset W$  altér, amelyre  $V_2 \subseteq K$  és  $V_1 \oplus K = V$ .  $\square$

*Bizonyítás:* Jelölje  $V = V_1 + V_2$ . Világos, hogy  $V$  altér  $W$ -ben. Legyen  $L$  a direktiegészítője, azaz  $V \oplus L = W$ . Ha  $K = V_2 + L$ , akkor  $K$  olyan altér  $W$ -ben, amelyre  $V_2 \subseteq K$ ,  $K \cap V_1 = \{0\}$ , valamint  $V_1 + K = W$ .  $\square$

A következő lemmának nagyon fontos szerepe lesz a fejezet leglényegesebb állításában a nillpotens operátorok redukcióját biztosító állításban.

**14.5. lemma.** Legyen a  $W$  véges dimenziós vektortérnek  $H, K_0, \bar{K}$  altére. Tegyük fel, hogy

1.  $H \cap K_0 = \{0\}$ ;
2.  $H + \bar{K} = W$ ;
3.  $K_0 \subseteq \bar{K}$ .

Ekkor létezik  $K$  altér  $W$ -nek, melyre

1.  $K_0 \subseteq K \subseteq \bar{K}$  és
2.  $K$  direkt kiegészítője  $H$ -nak, azaz  $H \oplus K = W$ .

*Bizonyítás:* Először is a  $K$  altér konstrukciója következik. Világos, hogy  $H \cap \bar{K} \subseteq \bar{K}$  és  $K_0 \subseteq \bar{K}$  diszjunkt alterek  $\bar{K}$ -ban, hiszen  $(H \cap \bar{K}) \cap K_0 \subseteq H \cap K_0 = \{0\}$ . Alkalmazzuk az előző 14.4. lemmát a  $\bar{K}$  altérben. Létezik tehát  $K_0 \subseteq K \subseteq \bar{K}$  altér  $\bar{K}$ -ban, amelyre  $(H \cap \bar{K}) \oplus K = \bar{K}$ .

A  $H$  és a  $K$  diszjunkt alterek:  $H \cap K = H \cap (K \cap \bar{K}) = (H \cap \bar{K}) \cap K = \{0\}$ .

A  $H$  és a  $K$  Minkowski-összege az egész tér:  $W = H + \bar{K} = H + ((H \cap \bar{K}) + K) \subseteq H + (H + K) = H + K$ . Ez éppen azt jelenti, hogy  $K$  direkt kiegészítője  $H$ -nak.

**14.6. állítás** (nillpotens operátorok felbontása). Legyen  $B \in L(W)$  egy  $m$ -ed rendben nillpotens lineáris transzformáció. Ekkor minden olyan  $v \in V$  vektorhoz, amelyre  $B^{m-1}v \neq 0$ , a  $\text{lin}\{v; B\}$  invariáns altérnek van invariáns altér direkt kiegészítője.

Formálisabban: létezik  $K \subseteq W$  invariáns altér, amelyre  $\text{lin}\{v, Bv, \dots, B^{m-1}v\} \oplus K = W$ .

*Bizonyítás:* A nillpotens transzformáció rendje szerinti teljes indukció. Ha  $m = 1$ , akkor  $B = 0$ , de a konsztans zérus operátorra nézve minden altér invariáns, így a tételet összesen annyit állít, hogy egy nem zérus  $v$  vektor generálta egydimenziós altérnek van direkt kiegészítője.

Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden vektortér legfeljebb  $m - 1$ -ed rendben nillpotens transzformációjára. Legyen tehát  $m > 1$  és  $B$  egy  $W$  vektortérén értelmezett  $m$ -ed rendben nillpotens lineáris transzformáció. Rögzítsünk egy  $v \in W$  elemet, amelyre  $B^{m-1}v \neq 0$ . Tekintsük az  $\text{Im } B$  invariáns altéret. Világos, hogy  $B|_{\text{Im } B}$  egy lineáris transzformáció az  $\text{Im } B$  vektortérén. Az is világos, hogy  $B|_{\text{Im } B}$  egy  $m - 1$ -rendben nillpotens lineáris transzformáció, hiszen minden  $u \in \text{Im } B$  mellett  $B^{m-1}u = 0$ . Azt is vegyük észre, hogy ezek szerint  $v \notin \text{Im } B$ .

Alkalmazhatjuk tehát az indukciós feltevést  $B|_{\text{Im } B} \in L(\text{Im } B)$  mellett a  $Bv$  vektorra. Persze  $B^{m-2}Bv = B^{m-1}v \neq 0$ . Létezik tehát  $K_0 \subseteq \text{Im } B$  a  $B$ -re is invariáns altér, amelyre

$$\text{lin}\{Bv, B^2v, \dots, B^{m-1}v\} \oplus K_0 = \text{Im } B.$$

Most megmutatjuk, hogy  $\text{lin}\{v; B\} \cap K_0 = \{0\}$ . Ugyanis, ha  $x = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k B^k v \in K_0 \subseteq \text{Im } B$ , akkor  $\alpha_0 v \in \text{Im } B$ , ami csak úgy lehetséges, hogy  $\alpha_0 = 0$ . Ezek szerint  $x \in \text{lin}\{Bv; B\}$  altérnek melynek direkt kiegészítője  $K_0$ . Ez persze csak úgy lehetséges, hogy  $x = 0$ .

Definiálja

$$\bar{K} = \{x \in W : Bx \in K_0\}.$$

Mivel  $K_0$  egy altér, ezért  $\bar{K}$  is az. Mivel a  $K_0$  altér  $B$ -invariáns, azért teljesül a  $K_0 \subseteq \bar{K}$  tartalmazás.

Most megmutatjuk, hogy  $\text{lin}\{v; B\} + \bar{K} = W$ . Válasszunk egy  $u \in W$  vektort. Persze  $Bu \in \text{Im } B$ , ezért előáll

$$Bu = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k B^k v + k_0 = B \left( \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_{k+1} B^k v \right) + k_0$$

alakban, ahol  $k_0 \in K_0$ . Ebből azt látjuk, hogy  $B(u - \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_{k+1} B^k v) \in K_0$ , ami persze  $\bar{K}$  definícióját figyelembe véve azt jelenti, hogy  $u - \sum_{k=0}^{m-2} \alpha_{k+1} B^k v \in \bar{K}$ . Előállítottuk tehát az  $u$  vektort egy  $\text{lin}\{v; B\}$ -beli és  $\bar{K}$ -beli vektor összegeként.

Alkalmazhatjuk tehát a 14.5. lemmát. Így létezik  $K_0 \subseteq K \subseteq \bar{K}$  altér, melyre  $\text{lin}\{v; B\} \oplus K = W$ . Persze ha  $u \in K \subseteq \bar{K}$ , akkor  $Bu \in K_0 \subseteq K$ , ergo  $K$  egy  $B$ -invariáns direkt kiegészítője a  $v$ -t tartalmazó legszűkebb  $B$  invariáns altérnek. Ezt kellett belátni.

Ahhoz, hogy megkapjuk az egész vektorteret  $v$ -invariáns altérként vagy ilyenek direktösszegeként, az előző tételt kell rekurzívan alkalmaznunk. A  $W$  vektortér véges dimenziós volta garantálja, hogy a rekurzió véget ér.

Persze  $B|_K$  a  $K$  altér lineáris transzformációja, ami  $m \geq n_2 \geq 1$  rendben nillpotens. Ha alkalmazzuk a fenti tételt, akkor kapjuk, hogy létezik  $v_2 \in K$ ,  $v_2 \neq 0$  elem és létezik  $K_2 \subseteq K$  a  $B$ -re nézve invariáns altér, amelyre

$$\text{lin} \{v_2, Bv_2, \dots, B^{n_2-1}v_2\} \oplus K_2 = K.$$

Itt persze  $\dim K_2 < \dim K$ , hiszen a baloldali első invariáns altér legalább egydimenziós. Az első két lépést összefoglalva:

$$\text{lin} \{v_1; B\} \oplus \text{lin} \{v_2; B\} \oplus K_2 = W,$$

Az eljárást folytatva minden lépésben legalább egyelőre csökken a kiegészítő invariáns altér dimenziója. Végül a vektortér előáll néhány, mondjuk  $r$  darab  $B$ -re invariáns altér direktösszegeként:

$$\text{lin} \{v_1; B\} \oplus \text{lin} \{v_2; B\} \oplus \dots \text{lin} \{v_r; B\} = W.$$

**14.7. állítás (nillpotens transzformáció redukálása).** Legyen  $B \in L(W)$  egy  $m$ -ed rendben nilpotens transzformáció. Ekkor léteznek olyan  $v_1, v_2, \dots, v_r \in W$  vektorok és léteznek olyan  $m = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 1$  pozitív egészek, amelyekre

$$\text{lin} \{v_1, Bv_1, \dots, B^{n_1-1}v_1\} \oplus \text{lin} \{v_2, Bv_2, \dots, B^{n_2-1}v_2\} \oplus \dots \oplus \text{lin} \{v_r, Bv_r, \dots, B^{n_r-1}v_r\} = W.$$

Emiatt az egyes invariáns alterek bázisainak egyesítésével kapott vektorrendszer bázisa  $W$ -nek:

$$\{B^{n_1-1}v_1, \dots, Bv_1, v_1\} \cup \{B^{n_2-1}v_2, \dots, Bv_2, v_2\} \cup \dots \cup \{B^{n_r-1}v_r, \dots, Bv_r, v_r\}$$

### 14.3. Egyértelműség

Azt mutatjuk meg, hogy a normálalakban  $r = \nu(B)$ , és az  $n_1, n_2, \dots, n_r$  számok is a  $B$  nilpotens transzformáció által egyértelműen meghatározottak. Ez azt jelenti, hogy minden nilpotens transzformációnak csak egyetlen normálalakja van.

**14.8. lemma.** Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció, és  $v \in V$  olyan vektor, amelyre  $A^m v = 0$ , de  $A^{m-1}v \neq 0$ . Ekkor

1.  $\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$  lineárisan független, így  $\text{lin} \{v; A\} = \text{lin} \{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$ ;
2. minden  $0 \leq l \leq m$  mellett  $\nu(A^l | \text{lin} \{v; A\}) = l$  és  $\rho(A^l | \text{lin} \{v; A\}) = m - l$ .

*Bizonyítás:* Ha  $l = m$ , akkor mindenki által állítás triviálisan teljesül. Legyen tehát  $0 \leq l < m$ . Az  $A^l$  transzformáció az  $\{A^{m-l}v, \dots, A^{m-1}v\}$  lineárisan független vektorrendszer nullára viszi, így  $l \leq \nu(A^l | \text{lin} \{v; A\})$ . A maradékot, a  $\{v, \dots, A^{m-l-1}v\}$  vektorrendszer pedig az  $\{A^l v, \dots, A^{m-1}v\}$  lineárisan független rendszerre képezi. Így  $m - l \leq \rho(A^l | \text{lin} \{v; A\})$ , amiből

$$l \leq \nu(A^l | \text{lin} \{v; A\}) = m - \rho(A^l | \text{lin} \{v; A\}) \leq l.$$

**14.9. lemma.** Legyen  $A \in L(V)$  és tegyük fel, hogy a  $V$  vektortér előáll a  $K_1, K_2$  invariáns alterei direktösszegeként, azaz  $V = K_1 \oplus K_2$ . Ekkor  $\rho(A) = \rho(A|K_1) + \rho(A|K_2)$  és  $\nu(A) = \nu(A|K_1) + \nu(A|K_2)$ .

*Bizonyítás:* Világos, hogy  $A(V) = A(K_1) + A(K_2)$ , és az invariancia szerint  $A(K_1) \cap A(K_2) \subseteq K_1 \cap K_2 = \{0\}$ . Így persze  $A(V) = A(K_1) \oplus A(K_2)$ , és

$$\rho(A) = \dim(A(V)) = \dim A(K_1) + \dim A(K_2) = \rho(A|K_1) + \rho(A|K_2).$$

Ebből már

$$\nu(A) = \dim(V) - \rho(A) = \dim(K_1) + \dim(K_2) - \rho(A|K_1) - \rho(A|K_2) = \nu(A|K_1) + \nu(A|K_2)$$

könnyen adódik.

**14.10. állítás** (A nillpotens felbontás egyértelműsége). Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Tegyük fel, hogy valamely  $\{v_1, \dots, v_r\}$  vektorrendszerre és valamilyen  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$  pozitív számokra  $A^{m_k-1}v_k \neq 0$ , de  $A^{m_k}v_k = 0$  fennáll minden  $k = 1, \dots, r$ , továbbá

$$V = \text{lin} \{v_1; A\} \oplus \dots \oplus \text{lin} \{v_r; A\}.$$

Tegyük fel még azt is, hogy valamely másik  $\{w_1, \dots, w_s\}$  vektorrendszerre és valamely más  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$  pozitív számokra  $A^{n_k-1}w_k \neq 0$ , de  $A^{n_k}w_k = 0$  fennáll minden  $k = 1, \dots, s$  mellett, és

$$V = \text{lin} \{w_1; A\} \oplus \dots \oplus \text{lin} \{w_s; A\}.$$

Ekkor

1. A nillpotens lineáris transzformációja  $V$ -nek;
2. Ha  $m$  jelöli a nillpotencia rendjét, akkor  $m_1 = m = n_1$ ;
3. A transzformáció  $\nu(A)$  defektusára  $r = \nu(A) = s$ ;
4. Valamennyi  $k = 1, \dots, r$  esetén  $m_k = n_k$ .

↓

Bizonyítás: Az első két állítás nyilvánvaló, mivel a rendezettség szerint  $A^{m_1}|_{\text{lin}\{v_k; A\}} = 0$ , minden  $k = 1, \dots, r$  mellett

A harmadik állításhoz:

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^r \nu(A| \text{lin} \{v_k; A\}) = \sum_{k=1}^r 1 = r.$$

Ugyanígy a másik direktösszeg felbontásból kapjuk, hogy  $\nu(A) = s$ .

A negyedik állítás. Tegyük fel – indirekt –, hogy  $m_k = n_k$  nem teljesül minden  $k = 1, \dots, r$  számra. Legyen  $1 < t \leq r$  az a legkisebb szám, amelyre  $m_t \neq n_t$ . Ezek szerint  $k = 1, \dots, t-1$  mellett  $m_k = n_k$ , de  $m_t \neq n_t$ . Feltehető, hogy  $m_t > n_t$ . Ekkor tehát

$$m_1 = n_1 \geq m_2 = n_2 \geq \dots \geq m_{t-1} = n_{t-1} \geq m_t > n_t.$$

Ekkor az első direktösszeg felbontásban a  $t$ -nél magasabb indexű tagokat elhagyva

$$\rho(A^{n_t}) \geq \left( \sum_{k=1}^{t-1} \rho(A^{n_t} | \text{lin} \{v_k; A\}) \right) + \rho(A^{n_t} | \text{lin} \{v_t; A\}) = \left( \sum_{k=1}^{t-1} (m_k - n_t) \right) + m_t - n_t.$$

Hasonlóan, a második direktösszeg felbontásban a  $t$ -edik, és a  $t$ -nél magasabb indexű rangok zérók, így

$$\rho(A^{n_t}) = \sum_{k=1}^{t-1} \rho(A^{n_t} | \text{lin} \{w_k; A\}) = \sum_{k=1}^{t-1} (n_k - n_t) = \sum_{k=1}^{t-1} (m_k - n_t),$$

ami ellentmond  $m_t > n_t$  feltételnek.

Az alábbiakban a nillpotens felbontási tételek annak egyértelműségével együtt foglaljuk össze.

**14.11. állítás** (nillpotens transzformáció normálakja). Legyen  $B \in L(W)$  egy  $m$ -ed rendben nilpotens transzformáció. Jelölje  $r = \nu(B)$  a  $B$  defektusát. Ekkor léteznek olyan  $v_1, v_2, \dots, v_r \in W$  vektorok és létezik pozitív egészek egyetlen olyan  $m = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 1$  véges sorozata, amelyekre

$$\text{lin} \{v_1, Bv_1, \dots, B^{n_1-1}v_1\} \oplus \text{lin} \{v_2, Bv_2, \dots, B^{n_2-1}v_2\} \oplus \dots \oplus \text{lin} \{v_r, Bv_r, \dots, B^{n_r-1}v_r\} = W.$$

Emiatt a

$$\{B^{n_1-1}v_1, \dots, Bv_1, v_1\} \cup \{B^{n_2-1}v_2, \dots, Bv_2, v_2\} \cup \dots \cup \{B^{n_r-1}v_r, \dots, Bv_r, v_r\} \quad (\dagger)$$

vektorrendszer bázisa  $W$ -nek.

Ha ebben a bázisban felírjuk  $B$  mátrixát, akkor  $r$  darab diagonálisan elhelyezkedő részmátrixból álló mátrixot kapunk. Az első  $n_1 \times n_1$  méretű, a második  $n_2 \times n_2$  méretű, ..., az utolsó  $n_r \times n_r$  méretű. minden ilyen blokkban csak a (felső) mellék diagonális elemei nem nullák. A mellék diagonális elemei 1-esek. minden más elem zérus. Ezt a mátrixot nevezzük a  $B$  nillpotens transzformáció normálalakjának.

↓

Adott  $1 \leq j \leq r$  mellett tehát,  $\mathbf{B}_j \in \mathbb{F}^{n_j \times n_j}$  a fenti  $j$ -edik invariáns altérre leszorított  $B$  leképezésnek a  $\{B^{n_j-1}v_j, \dots, Bv_j, v_j\}$  bázison felírt mátrixa:

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így az egész  $V$  vektortérén értelmezett  $B$  lineáris transzformáció normálalkja – azaz a  $B$ -nek ( $\dagger$ ) bázisban felírt mátrixá – a fenti tipusú mátrixok diagonális alakú elrendezésével adódik:

$$[B] = \left( \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Hangsúlyozni szeretném, hogy az egyértelműség szerint a  $B_j$  blokkok száma, és azok mérete is csak a nillpotens transzformációtól függ. Több bázis is lehetséges, amelyben a nillpotens transzformáció normálalakú, de nem csak hogy minden normálalakban azonos számú blokk van ( $B$  defektusa), de a blokkok mérete is azonos. A nillpotens felbontásban szereplő direktösszeadandó alerek páronként izomorfak egymással.

#### 14.4. Illusztrációk

### Egyetlen invariáns altér

Írjuk fel a  $W$  vektortéren értelmezett lineáris transzformáció normál alakját, ahol az  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  bázisban

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4) = -(\gamma + \delta) u_1 + \gamma u_2 - (\alpha + \beta + \gamma) u_3 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta) u_4.$$

A  $B$  mátrixa a fent rögzített bázisban:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel két azonos oszlop is van, ezért a defektus legalább egy. Számoljuk ki a minimálpolinomot! Az  $u_1$  bázis elemhez

	$u_1$	$Bu_1$	$B^2u_1$	$B^3u_1$	$B^4u_1$
$u_1$	1	0	0	-1	0
$u_2$	0	0	-1	1	0
$u_3$	0	-1	1	0	0
$u_4$	0	1	0	0	0

Mivel az első négy oszlop lineárisan független, ezért az  $u_1$ -hez tartozó kis minimálpolinom  $p_1 = t^4$ . Mivel tudjuk, hogy a minimálpolinom legfeljebb 4-ed fokú, és  $p_1$  osztója, ezért csak  $m(t) = t^4$  lehetséges, ezért  $B$  transzformáció 4-ed rendben nillpotens. Éppen most számoltuk ki, hogy  $B^3u_1 \neq 0$ , ezért az  $u_1$ -et tartalmazó legszűkebb  $B$  invariáns altér az egész  $\hat{W}$ , tehát

$$\text{lin} \{u_1, Bu_1, B^2u_1, B^3u_1\} = W$$

és a  $\{B^3u_1, Bu_1, B^2u_1, u_1\}$  bázisban  $B$  mátrixa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú. Emlékezzünk, hogy az új bázisra való áttérés mátrixa egyszerűen az új bázis elemeiből mint oszlopokból alkotott mátrix, ami azt jelenti, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Két invariáns altér (3- és 1 dimenziós)

Most a játék kedvéért, keressük meg a fenti felbontást és bázist, egy konkrét esetben. Legyen  $W$  egy négy dimenziós vektortér az  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  rögzült bázissal. A  $B \in L(W)$  lineáris transzformáció definíciója a báziselemek segítségével:

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4) = (\gamma - \delta) u_1 + \gamma u_2 + \delta u_3.$$

Első lépésként keressük meg a minimálpolinomot. A transzformáció mátrixa

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az  $u_1$ -minimálpolinom  $p_1(t) = t$ , az  $u_2$ -minimálpolinom  $p_2(t) = t$ . A harmadik kis minimálpolinomhoz írjuk fel  $u_3$  hatványait:

	$u_3$	$Bu_3$	$B^2u_3$
$u_1$	0	1	0
$u_2$	0	1	0
$u_3$	1	0	0
$u_4$	0	0	0

Persze az első két oszlop lineárisan független, így  $p_3(t) = t^2$ . Hasonlóan az  $u_4$  vektor  $B$  hatványait felírva:

	$u_4$	$Bu_4$	$B^2u_4$	$B^3u_4$
$u_1$	0	-1	1	0
$u_2$	0	0	1	0
$u_3$	0	1	0	0
$u_4$	1	0	0	0

Az első három oszlop ránézésre független, emiatt a minimálpolinom  $p_4(t) = t^3$ .

Emlékszünk, hogy a minimálpolinom a  $p_1, p_2, p_3, p_4$  legkisebb közös többszöröse, ergo  $m(t) = t^3$ , és  $B$  egy harmadrendben nilpotens transzformáció.

Írjuk fel a fenti tételeben szereplő invariáns direktfelbontást. Mivel a  $B$  rangja ránézésre 2, így a magtere 2 dimenziós, ergo két invariáns altér direktösszege  $W$ , amiből az egyik 3 dimenziós, így a másik csak egy-dimenziós lehet, ezért azt csak a magtér egyik eleme generálhatja! A három dimenziós altér lehet például a lin  $\{u_4; B\}$ , hiszen éppen az imént láttuk, hogy  $B^2 u_4 \neq 0$ . A fenti 14.6. állítás éppen azt mondja, hogy ennek az altérnek van olyan  $K$  invariáns altér direkt kiegészítője, aminek van olyan bázisa, amely annyi magtérbeli elemet tartalmaz, ami a  $B|_K$  nilpotens operátor rendje, tehát legalább 1. Így most nyilvánvaló, hogy az egydimenziós invariáns alteret generálhatja a ker  $A$  magtérbármely olyan eleme, amely lineárisan független  $B^2 u_4$ -től. Például  $u_1$ .<sup>1</sup> Ilyen módon

$$\text{lin} \{u_4, Bu_4, B^2 u_4\} \oplus \text{lin} \{u_1\} = W,$$

és az  $\{B^2 u_4, Bu_4, u_4, u_1\}$  vektorok olyan bázisát adják a térnak, melyben  $B$  mátrixa az alábbi alakú

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 14.5. A nillpotens felbontási tétele nélkül?

Legyen  $B \in L(V)$  egy  $m$ -edrendben nillpotens operátor. Világos, hogy  $\nu(B) \geq 1$ , hiszen egyébként  $B$  valamennyi hatványa is reguláris maradna.

Válasszuk ki a ker  $B$  egy  $\{e_1, \dots, e_r\}$  bázisát, ahol a rövidség kedvéért  $r = \nu(B)$ . Most minden  $i = 1, \dots, r$  mellett legyen  $m_i$  a legnagyobb olyan  $k$  egész, amelyre a  $B^{k-1}x = e_i$  egyenletnek még van megoldása. Világos, hogy  $1 \leq m_i \leq m$ . Az általánosság elvesztése nélkül feltehető, hogy  $m \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$ , hiszen a bázis elemeket az  $m_i$  számok csökkenő sorrendjében átindexelhetjük. Jelölje  $v_i \in V$  egy tetszőleges megoldását  $B^{m_i-1}x = e_i$ -nek. Világos tehát, hogy minden  $i = 1, \dots, r$  mellett

$$B^{m_i-1}v_i = e_i \quad \text{és} \quad B^{m_i}v_i = 0$$

Írjuk egy táblázat legalsó sorába a ker  $B$  kiválasztott bázis elemeit, majd föléjük a megfelelő csökkenő  $B$  hatványokat.<sup>2</sup>

$$\begin{array}{cccccc} v_1 & & \vdots & & \vdots & \\ Bv_1 & & v_2 & & \vdots & \\ B^2v_1 & & Bv_2 & & v_3 & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ B^{m_1-k}v_1 & & B^{m_2-k}v_2 & & B^{m_3-k}v_3 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \vdots \\ B^{m_1-1}v_1 & & B^{m_2-1}v_2 & & B^{m_3-1}v_3 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B^{m_r-1}v_r \end{array}$$

Felmerül, hogy a fenti vektorrendszer bázis, evvel a nillpotens felbontási tételel megkerülve kapnánk a nillpotens normálalak igazolását.

Sajnos nem feltétlen bázis a fenti vektorrendszer. A lineárisan függetlenség a korábbi technikával iga-zolható – tegyük ezt meg! –, de a rendszer nem minden generátorrendszer.

Tekintsük például a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Vagy bármi, ami  $\alpha u_1 + \beta u_2$  alakú, ahol  $\alpha \neq \beta$ .

<sup>2</sup>Tipográfiai probléma a táblázat áttekinthető leírása. A lényeg, hogy a legalsó sorban lévő vektorok vannak csak biztosan egy sorban. A 2. oszlopnak  $m_2 \leq m_1$  eleme van, tehát a  $v_1$  akkor és csak akkor esik egy sorba  $v_2$  vel, ha  $m_1 = m_2$ . Egyébként  $v_2$  lejebb van mint  $v_1$ . Képzeljük úgy a táblázatot, mint monoton fogyó elemszámú oszlopok, alulra zárt összeségét, úgy hogy a legnagyobbal kezdem, stb.

mátrixát. Jelölje most  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  a tének azt a bázisát, amelyben a fenti mátrixot felírtuk. Világos, hogy  $\{e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_3 + e_4\}$  vektorrendszer a ker  $B$  egy olyan bázisa, amelynek egyik eleme sem esik  $B$  képterébe, hiszen egyik elem sem az  $e_1$  skalárszorosa. Ilyen módon a fent konstruált vektorrendszer csak három elemű lesz, ergo nem bázisa a négy dimenziós tének.

A nillpotens felbontási téTEL éppen azt mondja, hogy a ker  $B$ -nek van olyan alkalmasan megválasztott bázisa, amelyre a fenti konstrukcióban kapott vektorrendszer a tének generátorrendszerére, ergo bázisa. Persze amikor konkrétan a normálalakot konstruáljuk, akkor elegendő olyan bázisát keresni ker  $B$ -nek, amelyből kiindulva a fenti vektorrendszer elemeinek száma a tér dimneziójával egyezik meg. Az így kapott rendszer persze bázis lesz.

## 15. fejezet

# A Jordan-normálalak

A LEGFONTOSABB GONDOLATHOZ érkeztünk, de igazán nincs új a fejezetben. Az előző fejezeteket foglaljuk össze. Először azt az esetet vizsgáljuk, mikor egy transzformáció minimálpolinomja egyetlen elsőfokú polinom valamilyen hatványa, majd ezt felhasználva kapjuk az úgynevezett kanonikus alakot abban az esetben is, mikor a minimálpolinom különböző elsőfokú polinomok hatványainak szorzataiként áll elő. Mivel egy komplex együtthatós polinom minden ilyen alakú, ezért az eredményeinket komplex test feletti vektorterek lineáris transzformációira alkalmazhatjuk.

### 15.1. Egy gyöktényezős minimálpolinom

**15.1. definíció** (Jordan-normálalak). Tegyük fel, hogy az  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció minimálpolinomja

$$(t - \lambda)^m$$

alakú, valamely  $\lambda \in \mathbb{F}$  és  $m$  pozitív egész mellett. Világos, hogy  $B = A - \lambda I$  éppen  $m$ -edrendben nillpotens. Alkalmazható tehát  $B$ -re a 14.11. állítás. Jelölje tehát  $r = \nu(B)$  a  $B$  defektusát. Így léteznek olyan  $v_1, v_2, \dots, v_r \in W$  vektorok és létezik pozitív egészek egyetlen olyan  $m = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 1$  véges sorozata, amelyekre a

$$\{B^{n_1-1}v_1, \dots, Bv_1, v_1\} \cup \{B^{n_2-1}v_2, \dots, Bv_2, v_2\} \cup \dots \cup \{B^{n_r-1}v_r, \dots, Bv_r, v_r\} \quad (\dagger)$$

vektorrendszer bázisa  $W$ -nek.

A  $B$  transzformációnak ebben a bázisban felírt mátrixa olyan, hogy a szuper diagonálisán kívül minden elem zérus, a szuper diagonálisban  $n_1 - 1$  db 1-es, aztán egy zérus, majd  $n_2 - 1$  db 1-es aztán egy zérus, stb. Adjuk a  $B = A - \lambda I$  mátrixához a  $\lambda I$  diagonális mátrixot! Ekkor kapjuk az  $A$ -nak a  $(\dagger)$  bázisban felírt mátrixát. Ezt a mátrixot nevezzük az  $A$  transzformáció *Jordan-normálalakjának*.

Adott  $1 \leq j \leq r$  mellett, a  $j$ -edik invariáns altérre leszorított  $A$  leképezésnek a  $\{B^{n_j-1}v_j, \dots, Bv_j, v_j\}$  bázison felírt mátrixát *Jordan-blokknak* mondjuk.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Így az egész  $V$  vektortéren értelmezett  $A$  lineáris transzformáció normálalakja – azaz a  $A$ -nak  $(\dagger)$  bázisban

felírt mátrixa – a fenti tipusú Jordan-blokkok, diagonális alakú elrendezésével adódik:

Hangsúlyozni szeretném, hogy az egyértelműség szerint a Jordan blokkok száma, és azok mérete is csak az  $A$  transzformációtól függ. Több bázis is lehetséges, amelyben a transzformáció Jordan-normálalakú, de nem csak hogy minden normálalakban azonos számú Jordan-blokk van,<sup>1</sup> de a blokkok mérete is azonos. A felbontásban szereplő direktösszeadandó alterek páronként izomorfak egymással.

## 15.2. Jordan-normálalak: az általános eset

**15.2. definíció.** Legyen  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció valamely  $\mathbb{F}$  test feletti vektortéren. Tegyük fel, hogy  $A$  minimálpolinomja

$$(t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$$

alakú, ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  az  $A$  különböző sajátértékei, és  $m_1, \dots, m_s$  pozitív egészek. Vezessük be a  $V_j = \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$ , és az  $A_j = A|V_j$  jelöléseket  $j = 1, \dots, s$  mellett. A 11.4. állításban rögzítettük, hogy

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

továbbá a  $V_j$  vektortér  $A_j$  lineáris transzformációjának minimálpolinomja

$$(t - \lambda_j)^{m_j}.$$

Minden egyes  $j$  mellett írjuk fel az  $A_j \in L(V_j)$  transzformáció Jordan-normálakját, majd egyesítsük a  $V_j$  alerek Jordan-bázisait a  $V$  tér bázisává. Jelölje  $B_j = A - \lambda_j I$ , így kapjuk minden  $j = 1, \dots, s$  mellett az

$m_j = n_1^{(j)} \geq n_2^{(j)} \geq \dots \geq n_{r_j}^{(j)} \geq 1$  pozitív egészeket és a  $v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)} \in V$

vektorokat, amelyekre a

$$\left\{ \begin{array}{llll} B_1^{n_1^{(1)}-1}v_1^{(1)}, \dots, B_1v_1^{(1)}, v_1^{(1)}; & B_1^{n_2^{(1)}-1}v_2^{(1)}, \dots, B_1v_2^{(1)}, v_2^{(1)}; & \dots; & B_1^{n_{r_1}^{(1)}-1}v_{r_1}^{(1)}, \dots, B_1v_{r_1}^{(1)}, v_{r_1}^{(1)} \\ B_2^{n_1^{(2)}-1}v_1^{(2)}, \dots, B_2v_1^{(2)}, v_1^{(2)}; & B_2^{n_2^{(2)}-1}v_2^{(2)}, \dots, B_2v_2^{(2)}, v_2^{(2)}; & \dots; & B_2^{n_{r_2}^{(2)}-1}v_{r_2}^{(2)}, \dots, B_2v_{r_2}^{(2)}, v_{r_2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_s^{n_1^{(s)}-1}v_1^{(s)}, \dots, B_sv_1^{(s)}, v_1^{(s)}; & B_s^{n_2^{(s)}-1}v_2^{(s)}, \dots, B_sv_2^{(s)}, v_2^{(s)}; & \dots; & B_s^{n_{r_s}^{(s)}-1}v_{r_s}^{(s)}, \dots, B_sv_{r_s}^{(s)}, v_{r_s}^{(s)}. \end{array} \right\}$$

<sup>1</sup>A Jordan-blokkok száma az  $B = A - \lambda I$  defektusa, azaz a  $\lambda$  sajátérték geometriai dimenziója.

vektorrendszer bázisa  $V$ -nek, amely bázist az  $A$  transzformáció *Jordan-bázisának* nevezünk. Az  $A$  transzformációjának ebben a bázisban felírt mátrixát nevezzük az *A Jordan-normálalakjának*.

Az  $A$  lineáris transzformáció Jordan-normálalakját tehát az egyes  $\lambda_j$  sajátértékekhez tartozó  $A_j \in L(V_j)$  transzformációk Jordan-normálalakú mátrixainak diagonális alakú elrendezésével kapjuk. Tehát

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_1] & & & \\ & [A_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [A_{s-1}] \\ & & & & [A_s] \end{pmatrix}.$$

Itt minden egyes  $[A_j]$  mátrix annyi Jordan-blokkból áll, amennyi a  $\lambda_j$  sajátérték geometriai dimenziója. minden egyes  $A_j$  mátrix első Jordan-blokkja egy  $m_j \times m_j$  méretű részmátrix, majd rendre kisebb vagy egyenlő méretű blokkok következnek.

**15.3. állítás.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  komplex számtest feletti vektortér, és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Ekkor  $A$ -hoz létezik Jordan-bázis, azaz  $A$  felírható Jordan-normálalakban. A Jordan-normálalak egyértelmű abban az értelemben, hogy minden  $\lambda_j$  sajátértékhez annyi Jordan-blokk tartozik, mint a sajátérték geometriai multiplicitása, és a Jordan-blokkok mérete csak az  $A$  transzformációtól függ.

*Bizonyítás:* Mivel a komplex számtest felett igaz az algebra alaptétele, ezért minden polinom, így  $A$  minimálpolinomja is előáll  $(t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}$  alakban. Alkalmazhatjuk tehát a fent leírt eljárást a Jordan-bázisának konstrukciójához.

### Következmények

Érdekes látni, hogy a fenti Jordan normálalakról szóló téTEL speciális esetként tartalmaz néhány korábbi, de későbbi fontos eredményünket feltéve, hogy az alaptest a komplex számtest.

Az egyes sajátértékekhez tartozó első Jordan blokk mérete  $m_j$ . Ezért a minimálpolinom fokszámánál, a  $\sum_{j=1}^s m_j$  számnál a tér dimenziója nem lehet kisebb. Meggondoltuk tehát, hogy a *minimálpolinom foka legfeljebb a tér dimenziója*.

Az is nyilvánvaló, hogy a Jordan-normálalak pontosan akkor diagonális, ha minden Jordan-blokk diagonális. Mivel a legnagyobb méretű Jordan-blokkok az  $A_j$  transzformációk első blokkja, aminek mérete  $m_j$ , ezért a *Jordan-normálalak pontosan akkor diagonális mátrix, ha minden  $j$  mellett  $m_j = 1$ , ami éppen azt jelenti, hogy a minimálpolinom gyökei egyszeresek*. Persze ebben az esetben a Jordan-bázis minden eleme az  $A$  egy sajátvektora.

Később teljesen nyilvánvaló lesz, hogy egy Jordan-normálalakú mátrix úgynevezett *karakterisztikus polinomja*

$$(t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$$

alakú, ahol a  $\lambda_j$  sajátérték pontosan  $k_j$ -szer szerepel a Jordan-normálalak diagonálisában. Mivel minden  $\lambda_j$ -re a legnagyobb Jordan-blokk éppen  $m_j \times m_j$  méretű, ezért  $m_j \leq k_j$  minden  $j$ -mellett. Ebből persze következik, hogy a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, ami avval ekvivalens, hogy az *A transzformáció karakterisztikus polinomjának is gyöke maga az A transzformáció*. Ezt az eredményt gondoltuk meg, mikor a vektortér olyan test felett van értelmezve, ahol minden polinomnak van gyöke. A gondolat általánosabban is igaz, tetszőleges test feletti vektorterek esetére. Ez a *Cayley–Hamilton-tétel*.

Mivel a karakterisztikus polinom minden pontosan egy  $\dim V$ -ed fokú normált polinom, ezért a Cayley–Hamilton-tételből is nevetve következik, hogy a minimálpolinom minden legfeljebb  $\dim V$ -ed fokú.

Szokás azt mondani, hogy a  $\lambda \in \sigma(A)$  sajátérték *algebrai multiplicitása*  $k$ , ha a Jordan-normálalakban  $\lambda_j$  éppen  $k$ -szor szerepel. Világos, hogy ez azonos avval, hogy az transzformáció karakterisztikus polinomjának  $\lambda$  egy  $k$ -szoros multiplicitású gyöke. Mivel minden egyes Jordan-blokk legalább  $1 \times 1$  méretű, ezért a  $\lambda_j$  geometriai multiplicitása, azaz a  $\lambda_j$ -hez tartozó Jordan-blokkok száma legfeljebb legfeljebb ezen blokkokban lévő diagonális elemek száma, ergo a  $\lambda_j$  algebrai multiplicitása. Az is világos, hogy e két multiplicitás pontosan akkor egyezik meg, ha minden Jordan-blokk  $1 \times 1$  méretű, tehát ha diagonalizálható. Arra jutottunk tehát, hogy egy komplex számtest feletti vektortér esetén az alábbi feltételek ekvivalensek.

- $A$  diagonalizálható;
- A minimálpolinomjának gyökei egyszeresek;
- A minden sajátértékének a geometriai és algebrai multiplicitása azonos.



## 16. fejezet

# Determináns

SÚLYOS ÖNBIZALOM HIÁNYHOZ vezet tapasztalataim szerint a determináns fogalmának mellőzése a lineáris algebra körében. E jelenség okait inkább a megszokások, a régi beidegződések közt kell keresnünk, mintsem a logikai szükségszerűségek közt. Tény ugyanakkor, hogy egyszerű egy mátrix szingularitására következeti, ha egy konkrét függvény argumentumába helyettesítve a mátrixunkat zérust kapunk. Hasonlóan egyszerű, ha egy explicit formulánk van, egy képlet amibe csak be kell helyettesíteni, egy reguláris mátrixszú inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldására, vagy egy mátrix inverzének felírására. A determináns fogalmát valóban nagyon sokszor csak arra használják, hogy a lineáris algebra alap algoritmusát, a Gauss–Jordan-eliminációt, egy explicit formulával cseréljék. Azt szerethnék itt hangsúlyozni, hogy pusztán emiatt nem érdemes előnyben részesíteni a determináns használatát. Az algoritmus éppen olyan jól, sőt látni fogjuk: sokkal de sokkal hatékonyabban működik, a mint a képlet.

Amiért mégis fontos ez a fejezet az kisebb részt az, hogy a lineáris algebra tanulásának az is a célja, hogy a későbbi standard felhasználásokat megértsük. Sok-sok közgazdasági és műszaki szakkönyv előszeretettel sűríti a mátrixokkal kapcsolatos tudnivalókat a determináns fogalmának segítségével. Az igazi ok viszont nem ez. Egyetlen helyen van megkerülhetetlen szerepe a transzformáció determinánsának. Ez az, amikor az válik valamiért fontossá, hogy egy lineáris transzformáció, a tér egység kockáját, amelynek a „térfogata” nyilván 1, mekkora térfogatú paralelepipedonba transzformálja.<sup>1</sup> Ez a kérdés a valós analízis fontos és érdemi pontjain merül fel. Például, amikor egy többváltozós függvény integrálját számoljuk valamelyen helyettesítéssel. Ezen a ponton válik majd a determináns fogalma igazából élővé. A fejezet tehát az első lépés ebben az irányban.<sup>2</sup>

### 16.1. Permutációk

Emlékezzünk arra, hogy egy  $n$  elemű halmaz permutációi  $n!$  elemszámú csoportot alkotnak a kompozíció műveletével. Szokásos elnevezés, hogy ezt a kompozíció műveletet szorzásnak nevezzük. Ezt a csoportot a továbbiakban  $S_n$ -el jelöljük. A determináns definíciójában majd olyan függvény szerepel, amely egy permutációhoz egy számot rendel, tehát egy  $\varphi : S_n \rightarrow \mathbb{F}$  függvényről van szó. Mivel a  $\pi \mapsto \pi^{-1}$  hozzárendelés egy  $S_n \rightarrow S_n$  bijekció, ezért tetszőleges ilyen függvény mellett

$$\sum_{\pi \in S_n} \varphi(\pi) = \sum_{\pi \in S_n} \varphi(\pi^{-1}),$$

hiszen a két  $n!$  összeadandóból álló összeg csak az elemek sorrendjében különbözik. Így minden oldal a  $\varphi$  értékkészlete elemeinek összegét jelöli.

A permutáció csoport elemeit, tehát az egyes permutációkat, érdemes a sakktábla bástyafelrakásával azonosítani. Képzeljünk el egy  $n \times n$  méretű sakktáblát. A feladat, hogy helyezzünk el a táblára  $n$  db bástyát olyan módon, hogy egy bánya se legyen ütésben. Nyilván ez úgy és csak úgy lehetséges, ha minden sorba és minden oszlopba egy bábut raktunk le. A bástyák egy ilyen elhelyezését nevezzük *bástyafelrakásnak*.

Vegyük észre, hogy  $n$  darab bábut minden olyan elrendezése, amelynél egy sorban egy bábut van, egy  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  függvénytel azonosítható. Gondoljunk a sorok számozására mint az értelme-

<sup>1</sup>A válasz érzelmi része az lesz, hogy a transzformáció determinánsa ennek a „mértéke”.

<sup>2</sup>Persze fontos az olvasó szociális érzelmi állapota, ami pozitív mellékterméke e fejezet pontos megértésének. ☺☺

zési tartomány elemeire. Mivel így minden sorban van bábú, és minden sorban csak egy bábú van, ezért értelmes az a definíció, amely szerint  $\pi(j)$  értéke legyen a  $j$ -edik sorban lévő bábú oszlopszáma.

Ha a bástyafelrakásra gondolunk, akkor további feltétel, hogy egyetlen oszlopan se legyen két bánya, ami éppen a  $\pi$  függvény injektivitását jelenti. No de egy véges halmaznak önmagára képező injekciója egyben szürjekció is, emiatt a bástyafelrakások a bijekciókkal azonosíthatók.

A determináns fogalmának megértését nagyban segíti, ha  $n$  elem permutációjára mint a  $n$  darab bástyafelrakására gondolunk.<sup>3</sup> Az id identikus permutációt például a diagonális bástyafelrakás jelképezi. Ha adott egy  $\pi$  permutációhoz tartozó bástyafelrakás, akkor a  $\pi^{-1}$  inverzhez tartozó bástyafelrakást a diagonálisra való tükrözéssel kapjuk.

**16.1. definíció** (transzpozíció). Egy permutációt *transzpozíciónak* nevezünk, ha az csak két elemet cserél fel.

Egy bástyafelrakásra gondolva, az akkor transzpozíció, ha az identitásnak megfelelő diagonális felrakás két sorának felcserélésével keletkezik. Emiatt transzpozíciók szorzata egy olyan permutáció, amely a diagonális felrakásból néhány sor felcserélésével keletkezik.

Na most, gondolunk bele, hogy minden bástyafelrakás véges sok sor felcserélésével az identitás permutációt reprezentáló diagonális felrakásba vihető át. Az algoritmus a következő. Keressük meg azt a sort, ahol a bánya az első oszlopban áll. Cseréljük fel ezt a sort az első sorral. Most keressük meg azt a sort, ahol a bánya a második oszlopot foglalja. Cseréljük fel ezt a sort a második sorral. Stb. Az  $n-1$ -edik diagonális elem helyre kerülése után, az utolsó sorban, a bánya az utolsó pozíciót foglalja el, hiszen a sorok cserélgetésével megmarad a táblázatnak az a tulajdonsága, hogy minden sorban és minden oszlopan pontosan egy bánya van.

Adott  $\pi$  permutációhoz találtunk tehát  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  transzpozíciókat, amelyekre  $\pi \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} = \text{id}$ , amiből persze  $\pi = \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}$  következik. Egy transzpozíció inverze is transzpozíció, tehát igazoltuk a könyvtárak klasszikus felíratáról szóló állítást.

**16.2. állítás.** *Minden permutáció transzpozíciók szorzata.*

Persze szó nincs arról, hogy a fenti előállítás egyértelmű lenne. Még nagyon sok más algoritmust is kitalálhatunk a sorba rendezésre, olyanokat is, amelyek minden lépésükben csak két elemet cserélnek fel.<sup>4</sup> Annyi viszont igaz, hogy amennyiben egy permutáció páros (páratlan) sok transzpozíció szorzata, akkor minden más előállításában is páros (páratlan) sok transzpozíció szerepel. Kisvártatva látjuk majd, hogy ez miért van így.

## A permutáció paritása

Egy kényelmes jelölést vezetünk be egy permutációnak és egy előre adott transzpozíciók szorzatára.

**16.3. definíció.** Legyenek  $1 \leq i, j \leq n$  különböző egészek, és  $\pi \in S_n$  egy permutáció. Definiálja  $\pi^* \in S_n$  a  $\pi$  permutációnak és az  $(i, j)$  párt felcserélő transzpozíciónak a szorzatát, azaz

$$\pi^*(k) \doteq \begin{cases} \pi(k) & , \text{ha } k \neq i \text{ és } k \neq j; \\ \pi(j) & , \text{ha } k = i; \\ \pi(i) & , \text{ha } k = j. \end{cases}$$

Látható, hogy a  $\pi$ -t reprezentáló bástyafelrakásból az  $i$  és  $j$  sorok felcserélésével kapjuk a  $\pi^*$  bástyafelrakását.

Az is világos, hogy rögzített  $(i, j)$  transzpozíció mellett a  $\pi \mapsto \pi^*$  egy  $S_n \rightarrow S_n$  bijekció, emiatt újra elmondható, a fejezet eleji megjegyzés, tehát ha  $\varphi : S_n \rightarrow \mathbb{F}$  egy tetszőleges függvény, akkor

$$\sum_{\pi \in S_n} S(\pi) = \sum_{\pi \in S_n} S(\pi^*).$$

<sup>3</sup>Persze ez ugyanaz mintha olyan  $n \times n$  mátrixról beszélünk, ahol csak 0 és 1-es szerepel, mégpedig úgy, hogy minden sorban és minden oszlopan pontosan egy db 1-es van. Az 1-esek játszák a bányák szerepét. Az ilyen mátrixokat szoktuk permutáció mátrixnak mondani.

<sup>4</sup>Keressünk például a 'bubble sort' kifejezésre.

**16.4. definíció** (Inverzió). Legyenek újra  $1 \leq i, j \leq n$  különböző egészek, és  $\pi \in S_n$  egy permutáció. Azt mondjuk, hogy az  $i$ -edik és a  $j$ -edik sorban álló bástyák inverzióban vannak, ha

$$(\pi(j) - \pi(i))(j - i) < 0.$$

A fenti jelölések mellett az  $i$  és  $j$ -edik sor bástyái pontosan akkor vannak inverzióban, ha  $j > i$  esetén  $\pi(j) < \pi(i)$ . Gondoljuk meg, hogy az identitás permutáció az egyetlen olyan a permutációk között, melynél nincs inverzióban álló bástyapár.

**16.5. állítás.** minden  $\pi \in S_n$  permutációra, a  $\pi$ -nél és  $\pi^{-1}$ -nél inverzióban álló bástyapárok száma azonos.

*Bizonyítás:* Világos, hogy

$$(\pi(j) - \pi(i))(j - i) = (j - i)(\pi(j) - \pi(i)) = (\pi^{-1}(\pi(j)) - \pi^{-1}(\pi(i)))(\pi(j) - \pi(i)).$$

Ez azt jelenti, hogy az  $i$  és  $j$  sorokat foglaló bástyapár pontosan akkor van inverzióban  $\pi$ -szerint, ha a  $\pi(i)$  és a  $\pi(j)$  sorokat foglaló bástyapár inverzióban van  $\pi^{-1}$  szerint. Mivel az  $(i, j) \mapsto (\pi(i), \pi(j))$  leképezés az  $\{(i, j) : i \neq j : 1 \leq i, j \leq n\}$  halmaznak önmagára képező bijekciója, ezért kölcsönösen egyértelmű leképezést találtunk a  $\pi$  és a  $\pi^*$  inverzióban álló bástyapárok között.

**16.6. definíció** (Páros, páratlan permutáció). Egy  $\pi \in S_n$  permutációt párosnak (páratlanak) nevezünk, ha  $\pi$ -nél inverzióban lévő párok száma páros (páratlan). A permutáció előjele:

$$\operatorname{sgn} \pi \doteq \begin{cases} +1 & , \text{ha } \pi \text{ páros;} \\ -1 & , \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Egy permutáció előjelét meghatározó algoritmus a definíció szerint a következő: Tekintsük a  $\pi$  permutáció bástyafelrakását. Hasonlítsuk össze az összes különböző – tehát  $\binom{n}{2}$  darab – bástyapárnak az oszlopszámait a sorszámaiival. Ha a nagyobb sorindexű bánya oszlopszáma a kisebb, akkor ők inverzióban vannak. Ha  $k$  jelöli az inverzióban álló bástyapárok számát, akkor  $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^k$ .

Az identitás permutációban zérus az inverziók száma, tehát  $\operatorname{sgn}(\text{id}) = +1$ . Mivel egy permutációt és az inverzének azonos számú inverziója van, ezért az előjelük is azonosak:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1}).$$

A következő állítás szerint, egy bástyafelrakás előjele két sorának felcserélésével az ellenkezőjére vált.

**16.7. állítás.** Jelölje  $\pi^*$  a  $\pi$  permutációnak és egy adott transzpozíciónak a szorzatát. Ekkor

$$\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^*.$$

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $\pi^*$  a  $\pi$ -ből az  $i$  és  $j$ -edik sorok felcserélésével keletkezik, ahol  $i < j$ . Leszámoljuk, hogy hány az  $u, v$  sorokat foglaló bástyapár van inverzióban  $\pi$  és  $\pi^*$  mellett. Az esetek szétválasztása folyamán végig páros számban tér el egymástól a  $\pi^*$  és  $\pi$  -melletti inverziók száma, míg az utolsó esetben pontosan egy a különbség. Ily módon a  $\pi^*$  és  $\pi$  -melletti inverziók összességében páratlan számban különböznek, ami igazolja az állítást. Az eset szétválasztás aszerint történik, hogy az egyes esetekben számolandó  $u$  és  $v$  sorbeli bástyák milyen kapcsolatban vannak, a felcserélendő  $i$  és  $j$  sorokkal. Lássuk tehát a különböző eseteket:

1. Az  $u$  és  $v$  egyike sem egyezik  $i$  és  $j$  egyikével sem.

Világos, hogy ebben az esetben a  $\pi$  melletti és a  $\pi^*$  melletti inverziók száma azonos, hiszen egyik itt vizsgált bástyapár sem mozdul a  $\pi$ -ről  $\pi^*$ -ra való áttérés során.

2. Az  $u$  megegyezik az  $i$  és  $j$  közül az egyikkel, de  $v > j$ .

Tekintsük egy  $u, v$  sorbeli bástyapárt. Az  $i$ -edik és a  $j$ -edik sor felcseréléséve az  $u$ -adik sorban álló bánya megmozdul, de az oszlop koordinátáját megtartja, és sor koordinátája is  $v$ -nél kisebb marad. Ez azt jelenti, hogy ugyanazok bástyapárok lesznek inverzióban a  $\pi$ -nél, mint  $\pi^*$ -nál, ergo a  $\pi$ -nél és  $\pi^*$ -nál inverzióban álló párok száma azonos.

3. Az  $u$  megegyezik az  $i$  és  $j$  közül az egyikkel, de  $i < v < j$ .

Különböztessünk meg ezen belül is három esetet.

- i. Ha  $\pi(v) > \max(\pi(j), \pi(i))$ .  
 Ekkor a  $v$ -edik sor bástyája az  $i$ -sorbeli bástyával nincs inverzióban, de a  $j$ -sorbeli bástyával inverzióban van. A  $\pi$ -nél tehát az inverziók száma 2. Ugyanez a helyzet  $\pi^*$ -nál is, ergo a  $\pi$  melletti és a  $\pi^*$  melletti inverziók száma azonos.
  - ii. Ha  $\pi(v) < \min(\pi(j), \pi(i))$ .  
 Analóg [i]-vel.
  - iii. Ha  $\min(\pi(j), \pi(i)) < \pi(v) < \max(\pi(j), \pi(i))$ .  
 Ha  $\pi(j) < \pi(i)$ , akkor az inverziók száma  $\pi$ -nél 2,  $\pi^*$ -nál zérus. Ha viszont  $\pi(j) > \pi(i)$ , akkor az inverziók száma  $\pi$ -nél 0, de  $\pi^*$ -nál 2. Mindkét esetben tehát 2 a különbség, ezért bárhogyan is van, de a  $\pi$  melletti és a  $\pi^*$  melletti inverziók száma páros számban különbözik.
  4. Az  $u$  megegyezik az  $i$  és  $j$  közül az egyikkel, de  $v < i$ .  
 Analóg a második esettel.
  5. Az  $u$  is és a  $v$  is megegyezik az  $i$  és  $j$  egyikével.  
 Ekkor ha az  $u$  és  $v$  sorbeli bástyák inverzióban vannak  $\pi$ -nél, akkor nem lesznek inverzióban  $\pi^*$ -nál, és hasonlóan, ha nincsenek inverzióban  $\pi$ -nél, akkor inverzióban lesznek  $\pi^*$  mellett. Bárhogyan is van, de a  $\pi$ -nél és  $\pi^*$ -nál inverzióban lévő elemek száma 1-el változik.

Világos, hogy minden  $u, v$  pár a fenti esetek közül pontosan az egyikbe tartozik. Összességében a  $\pi$ -ről  $\pi^*$ -ra való áttéréssel a transzpozíciók száma páratlan számmal változik, tehát párosból páratlanul válik, vagy páratlanból párossá.

Nyilvánvaló tehát, hogy az  $S_n$  csoportnak  $n!/2$  számú páros és ugyanennyi páratlan eleme van.

Mivel egy transzpozícióval való szorzás a permutáció előjelét ellenőrzi, ezért ha egy permutáció  $k$  darab transzpozíció szorzataként áll elő az identikus permutációból, akkor annak előjele  $(-1)^k$ . Ebből azonnal következik, hogy egy páros (páratlan) permutáció nem áll elő mint páratlan (páros) sok transzpozíció szorzata.

## 16.2. Mértékek

A determinánsról szól minden további gondolatban feltesszük, hogy az  $\mathbb{F}$  testben  $1 + 1 = 0$  nem teljesül. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az  $\mathbb{F}$  test nem 2 karakaterisztikájú.

**16.8. definíció** (mérték). Legyenek  $V_1$ ,  $V_2$  és  $V$  ugyanazon test feletti vektorterek. Az  $A : V_1 \times V_2 \rightarrow V$  leképezést **bilineáris operátornak** nevezzük, ha:

1. minden rögzített  $x \in V_1$  esetén az  $A(x, \cdot) : V_2 \rightarrow V$  lineáris operátor.
  2. minden rögzített  $x \in V_2$  esetén az  $A(\cdot, x) : V_1 \rightarrow V$  lineáris operátor.

Ha valamely  $A : V \times V \rightarrow V$  bilineáris operátorra minden  $u, v \in V$  esetén  $A(u, v) = -A(v, u)$ , akkor  $A$ -t *anti-szimmetrikus bilineáris operátornak* nevezzük.

Ha valamely  $A : V \times V \rightarrow V$  bilineáris operátorra minden  $u \in V$  esetén  $A(u, u) = 0$ , akkor  $A$ -t *alternáló bilineáris operátornak* nevezzük.

Legyenek most  $V_1, V_2, \dots, V_k$  és  $V$  ugyanazon test feletti vektorterek. Az  $A : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow V$  leképezést multi-lineáris operátornak vagy  $n$ -lineáris operátornak nevezzük, ha bármely rögzített

$$x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k$$

vektor mellett az

$$A(x_1, \dots x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_k) : V_i \times V_j \rightarrow V$$

függvény bilineáris operátor. Ha a fenti függvény anti-szimmetrikus (alternáló) operátor minden  $i$ -re  $j$ -re és tetszőlegesen rögzített vektorokra, akkor az  $A : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow V$  leképezést *anti-szimmetrikus (alternáló) multi-lineáris operátornak* nevezzük.

Ha  $V$  egy nem 2 karakterisztikájú test feletti  $n$ -dimenziós vektortér, akkor egy  $V \times \dots \times V \rightarrow V$   $n$ -lineáris anti-szimmetrikus függvényt a  $V$  vektortér feletti *mértéknak* nevezzünk.  $\square$

**16.9. állítás.** Legyen  $V$  olyan  $\mathbb{F}$  test feletti vektortér, ahol a  $1 + 1 \neq 0$ . Tegyük fel, hogy  $A : V \times V \rightarrow V$  bilineáris függvény. Ekkor az alábbi három feltevés egymással ekvivalens.

1. Az  $A$  anti-szimmetrikus;
2. Az  $A$  alternáló;
3. minden  $u, v \in V$ -re valamint tetszőleges  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$  skalárokra

$$A(u, v + \lambda u) = A(u, v) = A(u + \mu v, v). \quad \square$$

Bizonyítás: 1.  $\Rightarrow$  2. és 2.  $\Rightarrow$  3. nyilvánvaló. 3.  $\Rightarrow$  1.:  $A(u, v) = A(u, v - u) = A(u + v - u, v - u) = A(v, v - u) = A(v, -u) = -A(v, u)$ .  $\square$

Világos, hogy tetszőleges  $k$  pozitív egész mellett,  $k$ -lineáris függvények vektorteret alkotnak. E vektor tér egy altere a  $k$ -lineáris anti-szimmetrikus függvények vektortere. Ez persze fennáll akkor is, mikor  $n$ -dimenziós vektortérnek  $n$ -szeres szorzatán értelmezett  $n$ -lineáris függvényekről van szó, ergo a mértékek egy vektorteret alkotnak. A konstans zérus mérték így nyilvánvaló példa mértékre. A kérdés, hogy van-e más mérték?

### Példa mértékre

Egy  $n$  dimenziós tér  $n$ -szeres Descartes-szorzatán értelmezett konstans zérus leképezés egy triviális példa mértékre. Az alábbiakban egy olyan mértéket készítünk, ami egészen biztosan nem a konstans zérus függvény.

**16.10. definíció.** Legyen  $V$  egy vektortér, amelyben rögzített az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázis. Mivel lineáris funkcionál egy bázison tetszőlegesen és egyértelműen előírható, ezért tetszőleges  $1 \leq i \leq n$ -hez létezik egyetlen  $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{F}$  lineáris funkcionál, amelyre

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

fennáll. Ezt az  $e_i^*$  lineáris funkcionált nevezzük az  $i$ -edik duális báziselemeinek.<sup>5</sup>  $\square$

**16.11. állítás.** Rögzítsük az  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$  bázist. Ekkor minden  $v \in V$  mellett  $v = \sum_{j=1}^n e_j^*(v) e_j$ , azaz  $v$ -nek az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázisban felírt  $j$ -edik koordinátája  $e_j^* v$ .  $\square$

Bizonyítás: Legyen  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ . Ekkor tetszőlegesen rögzített  $i$  mellett  $e_i^*(v) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i$ .  $\square$

Úgy interpretálhatjuk tehát az  $e_i^*$  lineáris funkcionált, hogy az minden  $v$  vektorhoz hozzárendeli a vektor  $i$ -edik koordinátáját.

**16.12. állítás.** Rögzítsünk az  $n$ -dimenziós  $V$  vektortérben egy  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázist. Ekkor minden  $v_1, \dots, v_n \in V$  vektor esetén

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_i^* v_{\pi(i)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_{\pi(i)}^* v_i. \quad \square$$

<sup>5</sup>Az elnevezés oka, hogy  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  bázisa az összes  $V \rightarrow \mathbb{F}$  lineáris funkcionálok vektorterének.

Képzeljük el, hogy egy  $n \times n$  méretű sakktábla  $j$ -edik oszlopába írjuk a  $v_j$  vektor koordinátáit, minden  $j = 1, \dots, n$  mellett. Tegyük fel erre a sakktáblára egy  $\pi$  permutációt, azaz a  $\pi$  bástyafelrakását. minden  $i$ -re az  $i$ -edik sor  $\pi(i)$ -edik elemén áll tehát egy bánya. No de a  $\pi(i)$  edik oszlop  $i$ -edik helyére  $v_{\pi(i)}$  vektor  $i$ -edik koordinátája, azaz  $e_i^* v_{\pi(i)}$  van írva. Így az  $\prod_{i=1}^n e_i^* v_{\pi(i)}$  szám egyszerűen a bástyafelrakásban a bánya taposta számok szorzata. A baloldali számhoz ezt kell megszorozni még a szóban forgó permutáció előjelével, majd ugyanezt az összes permutációra megismételni és a kapott számok összegét képezni.

A jobboldali szám interpretációját kapjuk, ha most a  $v_1, \dots, v_n$  vektorok koordinátáit rendre a sorokba írjuk. Újra gondolunk egy  $\pi$  permutáció bástyafelrakására. minden  $i$ -re az  $i$ -edik sor  $\pi(i)$ -edik elemén áll tehát egy bánya, ami most az  $i$ -edik vektornak tehát  $v_i$ -nek, a  $\pi(i)$ -edik koordinátáját azaz  $e_{\pi(i)}^* v_i$ -t tapossa. Így az  $\prod_{i=1}^n e_{\pi(i)}^* v_i$  szám egyszerűen a bástyafelrakásban a bánya taposta számok szorzata. A jobboldali számhoz ezt kell megszorozni még a szóban forgó permutáció előjelével, majd ugyanezt az összes permutációra megismételni és a kapott számok összegét képezni.

Az állítás szerint tehát, mindegy hogy a sorokra vagy az oszlopokra másoljuk a  $v_1, \dots, v_n$  vektorok koordinátáit, a fenti eljárás mindenkor ugyanazt a számot eredményezi.<sup>6</sup>

*Bizonyítás:* A számolásban kihasználjuk, hogy minden  $\pi \in S_n$  mellett  $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$ , és azt, hogy a  $\pi \mapsto \pi^{-1}$  hozzárendelés egy bijekció az  $S_n$  halmazon.

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_i^* v_{\pi(i)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} \prod_{k=1}^n e_{\pi^{-1}(k)}^* v_k = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{k=1}^n e_{\pi(k)}^* v_k.$$

**16.13. állítás („Példa” mértékre).** Rögzítsünk az  $n$ -dimenziós  $V$  vektortérben egy  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázist. Ekkor

$$d_{\{e_1, \dots, e_n\}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_i^* v_{\pi(i)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_{\pi(i)}^* v_i$$

Ekkor  $d_{\{e_1, \dots, e_n\}} : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{F}$  egy olyan mérték, amelyre  $d_{\{e_1, \dots, e_n\}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .<sup>7</sup>

*Bizonyítás:* Világos, hogy  $d(e_1, \dots, e_n) = 1$ , hiszen ha  $\pi$  nem az identikus permutáció, akkor van olyan  $i$  melyre  $\pi(i) \neq i$ , az  $e_i^*(e_{\pi(i)}) = 0$ . Így a  $d(e_1, \dots, e_n)$  definíciójában az  $n!$  darab permutáció minden elemére 0-t kapunk, kivétel az identikus permutáció, amelynek előjele +1 és  $\prod_{i=1}^n e_i^* e_{\text{id}(i)} = \prod_{i=1}^n \delta_{i,i} = 1$ .

A linearitás könnyen következik az  $e_i^*$  duális bázis elemek linearitásából. Mondjuk ha a hátsó  $n-1$  változót rögzítjük, akkor az első változót szabadon hagyva

$$d(\cdot, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \left( \prod_{k=2}^n e_{\pi(k)}^* v_k \right) \cdot e_{\pi(1)}^*.$$

Mivel a lineáris funkcionálok vektorteret alkotnak, ezért a  $d(\cdot, v_2, \dots, v_n)$  függvény is egy lineáris funkcionál. Analóg módon a többi változót szabadon hagyva kapjuk, hogy  $d$  egy  $n$ -lineáris függvény.

Az anti-szimmetria igazolásához szükséges, a  $\operatorname{sgn} \pi = -\operatorname{sgn} \pi^*$  összefüggés. Például az első két változóra:

$$\begin{aligned} d(x, y, v_3, \dots, v_n) &= \\ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \left( \prod_{k=3}^n e_{\pi(k)}^* v_k \right) e_{\pi(1)}^* x \cdot e_{\pi(2)}^* y &= \sum_{\pi \in S_n} (-\operatorname{sgn} \pi^*) \left( \prod_{k=3}^n e_{\pi^*(k)}^* v_k \right) e_{\pi^*(1)}^* y \cdot e_{\pi^*(2)}^* x = \\ - \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \left( \prod_{k=3}^n e_{\pi(k)}^* v_k \right) e_{\pi(1)}^* y \cdot e_{\pi(2)}^* x &= -d(y, x, v_3, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Itt  $\pi^*$  a  $\pi$  permutációnak és az  $(1, 2)$  elemeket felcserélő transzpozíciónak a szorzata. Az utolsó egyenlőségben azt használtuk ki, hogy ha  $\pi$  befutja az  $S_n$  csoport összes elemét, akkor az evvel párhuzamosan számolt  $\pi^*$  permutációk is végig mennek a permutáció csoport minden elemén.

Analóg módon kapjuk, hogy bármely két változót felcserélve  $d$  értéke az ellentettjére változik.

<sup>6</sup>E hosszú, de ultra fontos interpretáció után nézzük az egysoros bizonyítást.

<sup>7</sup>Ha a szövegkörnyezetből világos, hogy melyik a rögzített bázis, akkor a kicsit nehézkes  $d_{\{e_1, \dots, e_n\}}$  jelölés helyett csak  $d$ -t használunk.

Meggondoltuk tehát, hogy egy  $n$  dimenziós vektortér feletti mértékek vektortere legalább egy dimenziós, hiszen van e vektortérnek a zérustól különböző eleme. Azt mutattuk meg, hogy adott  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázis rögzítése mellett, az ehhez a bázishoz tartozó  $d_{\{e_1, \dots, e_n\}}$  függvény egy nem triviális mérték  $V$  felett. Persze sok-sok bázist tudunk rögzíteni, így sok-sok mértéket is tudunk konstruálni. Leginkább pedig az általunk konstruált mértékeken felül is lehet még mérték a  $V$  felett. Ehhez képest nem sokára látni fogjuk, hogy a  $V$  feletti mértékek vektortere pontosan egydimenziós vektortér. A legfontosabb gondolat, hogy a fenti  $d$ -nek csak konstans szorosai lehetnek a  $V$  feletti mértékek, de megszakítjuk itt a tárgyalást, azért hogy a fent definiált mérték fontosságát hangsúlyozzuk.

## Mátrix determinánса

Gondolunk erre a szakaszra mint egy érdekes kitérőre, ha már van a kezünkben egy igazi – értsd nem triviális – mérték.

**16.14. definíció** (Mátrix determinánса). Legyen  $[A]$  egy mátrix. E mátrix  $|[A]|$  determinánса a következő szám:

$$|[A]| = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n [A]_{i, \pi(i)}. \quad \square$$

Az előbb bevezetett  $d$  függvény és a mátrix determinánсának kapcsolata.

**16.15. állítás.** Legyen  $V$  egy vektortér,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  egy bázis, és  $a_1, \dots, a_n \in V$  vektorok. Az  $A$  mátrix oszlopai legyenek rendre az  $a_1, \dots, a_n$  vektorok fenti bázisban felírt koordinátavektorai. Ekkor

$$|[A]| = d_{\{e_1, \dots, e_n\}}(a_1, \dots, a_n) = |[A]|^T. \quad \square$$

*Bizonyítás:* Elég azt látni, hogy  $[A]_{i, \pi(i)}$  a mátrix  $\pi(i)$ -edik oszlopának, tehát  $a_{\pi(i)}$ -nek  $i$ -edik koordinátája, azaz a  $e_i^*(a_{\pi(i)})$ . Így

$$\begin{aligned} |[A]| &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n [A]_{i, \pi(i)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_i^*(a_{\pi(i)}) = d(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_{\pi(i)}^*(a_i) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n [A]_{\pi(i), i} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n [A]_{i, \pi(i)}^T = |[A]|_{\{e_1, \dots, e_n\}}^T. \end{aligned}$$

Ezt kellett beláttni. ■

## Mátrix determinánсának legfontosabb tulajdonságai

**Összefoglaljuk,** amit eddig a pontig megértettünk a mátrix determinánсának fogalmáról.<sup>8</sup> Legyen tehát  $[A]$  egy mátrix. Ekkor

1.  $|[A]| = |[A]|^T$ ;
2.  $|[A]|$  az oszlopok (sorok) lineáris függvénye;
3.  $|[A]|$  értéke ellentetjére változik két oszlopának (sorának) felcserélése után;
4.  $|[A]|$  értéke zérus, ha két azonos oszlopa (sora) van;
5.  $|[A]|$  értéke nem változik, ha egyik oszlopához (sorához) egy másik oszlop (sor) skalárszorosát adjuk.

<sup>8</sup>Mielőtt tovább megyünk adjunk képleteket  $1 \times 1$ -es,  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as mátrixok determinánсának kiszámolására, a definíció alapján. Érdemes figyelni arra, mennyire nő a definíció komplexitása a méret emelésével.

**Egy permutáció mátrix determinánsa, a permutáció előjele.** Ugyanis, ha  $\pi$  permutációhoz tartozik a permutáció mátrix, akkor minden  $\sigma \neq \pi$  permutáció mellett a  $\sigma$  permutáció egyik bástyája (sőt legalább két bástyája) zérus elemen áll. Így a determináns definíciója szerint az  $n!$  elemszámú összegben a  $\pi$  kivételével minden összeadandó zérus. Speciálisan, az identitás mátrix determinánsa 1.

**Egy felső- (alsó-)háromszög alakú mátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata.** Ugyanis minden  $\pi \neq \text{id}$  permutáció esetén van egy bánya a diagonális alatt (és egy a diagonális felett). Ez azt jelenti, hogy a definícióban csak az identitás permutációhoz tartozó tag nem feltétlen zérus. Az identitáshoz tartozó tag pedig a diagonális elemek szorzata. Speciálisan, az identitás mátrix determinánsa 1.

**Egy mátrix determinánsa Gauss–Jordan-eliminációval.** Képzeljük el, hogy adott egy reguláris mátrix, tehát olyan, amelynek oszlopai lineárisan függetlenek. Az eliminációs algoritmusnak arra az alakjára gondolunk először, amikor a bázisba bevont oszlopvektornak is kiírjuk az új bázisban a koordinátáit. Ilyen módon végig  $n \times n$  méretű táblázatokkal dolgozunk. Tegyük fel, hogy egy táblázat  $A_1$  az ebből következő táblázat  $A_2$ .  $A_2$ -t úgy kaptuk  $A_1$ -ből, hogy a pivot elemmel osztottuk a pivot elem sorát, majd minden más sorhoz hozzáadtuk a pivot elem sorának skalárszorosát. Ha  $r_1$  jelöli az  $A_1$ -ben választott pivot-emet, akkor

$$|A_2| = \frac{1}{r_1} |A_1|.$$

Mivel  $A_1$  oszlopai lineárisan függetlenek, ezért minden oszlop a bázisba bevonható, ami azt jelenti, hogy az utolsó táblázat – az  $A_{n+1}$  – egy permutáció mátrix. Tehát az előbbi összefüggést lépésenként alkalmazva

$$|A_1| = r_1 \cdot |A_2| = r_1 \cdot r_2 \cdot |A_3| = \cdots = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \cdot |A_{n+1}| = \left( \prod_{j=1}^n r_j \right) \cdot \text{sgn}(A_{n+1}).$$

Ezek szerint az algoritmus a következő: A determinánsának kiszámításához az összes oszlopot Gauss–Jordan-eliminációval bevíssük a bázisba. A determináns a pivot elemek szorzata szorozva +1, vagy -1-el. Az utolsó táblázatban, az új bázis elemeit az eredeti oszlopvektorok alkotják. Számoljuk meg, hogy hány sorcserét kell kapnunk ahhoz, hogy az eredeti oszlopvektorok természetes sorrendjébe cseréljük az elimináció végén kapott új bázis elemeket. Ha ehhez páratlan sok csere kellett, akkor -1-el kell még szoroznunk a pivot elemek szorzatát. Egyébként a determináns a pivot elemek szorzata.<sup>9</sup>

**Az oszlopok (sorok) lineáris függetlensége** eldönthető a determináns segítségével. Láttuk ugyanis, hogy a mátrix determinánsa nem változik, ha egyik oszlopához a másik skalárszorosát adjuk. Ha tehát az egyik oszlop felírható a többi lineáris kombinációjaként, akkor ehhez az oszlophoz véges sokszor egy másik oszlop skalárszorosát adva olyan mátrixot kapunk, amelyben ez az oszlop csupa zérus, és a determinánsa azonos a kiinduló mátrix determinánsával. Láttuk tehát, hogy ha az oszlopok lineárisan összefüggők, akkor a mátrix determinánsa zérus. Viszont ha az oszlopok lineárisan függetlenek, akkor Gauss–Jordan-eliminációval minden oszlop a bázisba vihető, és a determináns előjeltől eltekintve a pivot elemek szorzata. E szorzat nem lehet zérus, hiszen egyik pivot elem sem lehet zérus. Meggondoltuk tehát: Egy mátrix determinánsa pontosan akkor zérus ha az oszlopok (sorok) lineárisan összefüggők.

**Particionált mátrix determinánsa.** Tegyük fel, hogy  $A$  egy  $(n+m) \times (n+m)$  méretű mátrix, amely

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

módon van partitionálva, ahol  $A_{1,1}$  egy  $n \times n$ ,  $A_{2,2}$  egy  $m \times m$  méretű négyzetes mátrix, továbbá  $A_{2,1}$  egy  $m \times n$  méretű és  $A_{1,2}$  egy  $n \times m$  méretű részmátrix. Tegyük fel, hogy  $A_{2,1}$  minden eleme zérus. Ekkor

$$|A| = |A_{1,1}| \cdot |A_{2,2}|.$$

<sup>9</sup>A determináns kiszámolásának ez a preferált és professzionális módja. Vessük össze a definíció művelet igényével mondjuk 3,4,5 dimenzió mellett.

*Definíció alapján:* Látható ugyanis, hogy ha vesszük az  $A$  egy bástyafelrakását, akkor ha kerül bástya az  $A_{1,2}$  részgráfra, akkor kerül bástya az  $A_{2,1}$  részgráfra is. Így a determináns definíciójához elég csak olyan  $\pi \in S_{n+m}$  permutációkat venni, amelyre  $\pi(i) \leq n$ , ha  $i \leq n$  és  $\pi(i) > n$ , ha  $i > n$ . Egy ilyen  $\pi$  permutációt össze lehet állítani  $\pi = (\sigma, \tau)$  alakban, ahol  $\sigma$  az  $\{1, \dots, n\}$  halmaz permutációja és  $\tau$  az  $\{n+1, \dots, n+m\}$  halmaz permutációja. Ha  $\pi$  egy ilyen permutáció, akkor olyan inverziója nincs, aminek egyik bástyája  $A_{1,1}$ -ben van és másik bástyája  $A_{2,2}$ -ben van. Ez azt jelenti, hogy ha  $k$  a  $\sigma$  inverzióinak száma és  $l$  a  $\tau$  inverzióinak száma, akkor a  $\pi$  inverzióinak száma éppen  $k+l$ . Tehát

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau.$$

Jelölje a bizonyítás végeig,  $S_n$  az  $\{1, \dots, n\}$  halmaz,  $S_m$  az  $\{n+1, \dots, n+m\}$  halmaz partíció csoporthjait, továbbá  $S'_{n+m}$  az  $\{1, \dots, n+m\}$  halmaz bijekciói közül azon  $\pi$  partíciókat, amelyek előállnak  $\pi = (\sigma, \tau) \in S_n \times S_m$  alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} |A_{1,1}| \cdot |A_{2,2}| &= \left( \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right) \left( \sum_{\tau \in S_m} \operatorname{sgn} \tau \prod_{i=1}^m a_{n+i, \tau(n+i)} \right) \\ &= \sum_{(\sigma, \tau) \in S_n \times S_m} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \prod_{i=n+1}^{n+m} a_{i, \tau(i)} = \sum_{\pi \in S'_{n+m}} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^{n+m} a_{i, \pi(i)} \\ &= \sum_{\pi \in S_{n+m}} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^{n+m} a_{i, \pi(i)} = |A|. \end{aligned}$$

Ezt kellett indokolni.

*Gauss–Jordan-elimináció alapján:* Először is azt vegyük észre, hogy az  $A_{2,1}$  nullmátrix léte miatt, ha  $A$  oszlopai lineárisan összefüggők, akkor az  $A_{1,1}$  és  $A_{2,2}$  mátrixok egyikének oszlopai is lineárisan összefüggők. Az állítás tehát teljesül, ha  $|A| = 0$ . Felte tesszük, hogy  $A$  oszlopai lineárisan függetlenek. Végezzünk Gauss–Jordan-eliminációt az  $A$  mátrixon de úgy, hogy az első  $n$  lépésben  $A_{1,1}$  részéből, utána  $A_{2,2}$  részéből választjuk a pivot elemeket. Ez megtehető, hiszen  $A_{1,1}$  oszlopai is lineárisan függetlenek. Legyenek a pivot elemek  $r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_m$ , és az utolsó oszlop bevonása után maradt  $n+m \times n+m$  méretű permutáció mátrix  $P$ . Mivel csak a balfelől  $n \times n$ -es és a jobbalsó  $m \times m$  részből választottunk pivot elemeket, ezért a  $P$  mátrix  $P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & 0 \\ 0 & P_{2,2} \end{pmatrix}$  alakú, ahol  $P_{1,1}$  egy  $n \times n$  méretű, és  $P_{2,2}$  egy  $m \times m$  méretű permutáció mátrix. Ha  $k$  – illetve  $l$  – sorcsere kell ahoz, hogy  $P_{1,1}$ -et – illetve  $P_{2,2}$ -t – a diagonálisba transzformáljuk, akkor  $k+l$  sorcserevel  $P$  is a diagonális permutációba megy át. Mivel egy permutáció mátrix determinánsa a permutáció előjele, ezért  $|P| = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = |P_{1,1}| |P_{2,2}|$ . Világos, hogy  $|A_1| = r_1 \cdots r_n |P_{1,1}|$ . No de  $A_{2,1}$  a nullmátrix, ezért az elimináció első  $n$  lépésében  $A_{2,2}$  változatlan marad, így  $|A_{2,2}| = r_{n+1} \cdots r_{n+m} |P_{2,2}|$ . Összefoglalva:

$$|A| = r_1 \cdots r_n \cdot r_{n+1} \cdots r_{n+m} |P| = (r_1 \cdots r_n |P_{1,1}|) (r_{n+1} \cdots r_{n+m} |P_{2,2}|) = |A_{1,1}| \cdot |A_{2,2}|.$$

### 16.3. A mértékek jellemzése

**16.16. állítás.** Legyen  $V$  egy  $n$ -dimenziós vektortér,  $f$  egy  $V$  feletti mérték. Ha a  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ .

*Bizonyítás:* Mivel  $f$  értéke nem változik ha egy változójához a másik skalárszorosát hozzá adjuk, ezért ha  $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$ , akkor  $f(v_1, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, 0, \dots, v_n) = 0$ .

**16.17. állítás.** Legyen  $V$  egy  $n$ -dimenziós vektortér, és  $f$  egy  $V$  feletti mérték. Ekkor ha van olyan  $e_1, \dots, e_n$  bázisa a térenk melyekre  $f(e_1, \dots, e_n) = 0$ , akkor  $f$  a konstans zéró, azaz a triviális mérték.

*Bizonyítás:* Mivel  $f$  anti-szimmetrikus és minden permutáció előáll transzpozíciók szorzataként, ezért tetszőleges  $\pi \in S_n$  mellett  $|f(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \dots, e_{\pi(n)})| = |f(e_1, \dots, e_n)| = 0$ . De az egyes rögzített változókban való linearitás és az alternáló tulajdonság miatt minden  $v_1, \dots, v_n$  vektorrendszerhez léteznek  $\beta_\pi$  ( $\pi \in S_n$ ) együtthatók, melyekre  $f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \beta_\pi f(e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \dots, e_{\pi(n)}) = 0$ .

Foglaljuk össze az előző két állítást:

**16.18. állítás.** Legyen  $f$  egy nem triviális mérték a  $V$  vektortér felett. A  $\{v_1, \dots, v_n\}$  vektorrendszer lineárisan összefüggőségének szükséges és elegendő feltétele, hogy  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ .  $\square$

**16.19. állítás.** Tetszőleges (legalább egy dimenziós) vektortér feletti mértékek vektortere egydimenziós vektortér.  $\square$

*Bizonyítás:* Rögzítsük a tér egy  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázisát. Láttuk, hogy a

$$d(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n e_i^* v_{\pi(i)}$$

függvény nem triviális mértéket definiál. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy amennyiben  $D \neq 0$  egy másik mérték  $V$  felett, úgy található  $\delta \in \mathbb{F}$ , amelyre  $D = \delta d$ . Legyen ezért  $\delta = D(e_1, \dots, e_n)$ , így

$$(D - \delta d)(e_1, \dots, e_n) = D(e_1, \dots, e_n) - \delta d(e_1, \dots, e_n) = \delta - \delta \cdot 1 = 0.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a  $D - \delta d$  mérték az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázison eltűnik, ami csak úgy lehetséges ha  $D - \delta d = 0$ , ergo  $D = \delta d$ .  $\square$

A fejezet legfontosabb gondolatához érkeztünk.

**16.20. definíció-állítás** (Lineáris transzformáció determinánsa). Legyen  $A \in L(V)$  a  $V$  véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációja. Ehhez létezik egyetlen olyan  $\delta(A) \in \mathbb{F}$  szám, amelyre minden  $f$  nem triviális  $V$  feletti mérték esetén az

$$f(Av_1, \dots, Av_n) = \delta(A) f(v_1, \dots, v_n)$$

azonosság minden  $v_1, \dots, v_n \in V$  vektor mellett fenáll.

Ezt a  $\delta(A)$  számot nevezzük az  $A$  lineáris transzformáció determinánsának.  $\square$

*Bizonyítás:* Vegyük egy  $f$  nem triviális mértéket  $V$  felett. Láttuk, hogy ilyen valóban létezik, hiszen a mértékek egydimenziós teret alkotnak. Világos, hogy a  $(v, \dots, v_n) \mapsto f(Av_1, \dots, Av_n)$  függvény is egy mérték. No de, a mértékek egy egydimenziós térfelület az elemei, ezért van egyetlen olyan  $\delta_f(A) \in \mathbb{F}$  szám, amelyre minden  $v_1, \dots, v_n$  mellett  $f(Av_1, \dots, Av_n) = \delta_f(A) f(v_1, \dots, v_n)$ . Legyen most  $g$  egy másik nem zérus mérték. Ekkor  $g = \gamma f$  valamely  $\gamma \neq 0$  számmal. Persze  $g$ -re is igaz, amit eddig igazoltunk, így

$$g(Av_1, \dots, Av_n) = \delta_g(A) g(v_1, \dots, v_n), \text{ valamint } f(Av_1, \dots, Av_n) = \delta_f(A) f(v_1, \dots, v_n).$$

Ha a baloldali kifejezésben a  $g$  mértéket a  $\gamma f$  mértékre cseréljük, majd osztunk a  $\gamma$  számmal, akkor

$$f(Av_1, \dots, Av_n) = \delta_g(A) f(v_1, \dots, v_n)$$

következik. Így  $\delta_f(A)$  egyértelműsége miatt  $\delta_f(A) = \delta_g(A)$ . A  $\delta_f(A)$  értéke tehát minden  $f$  nem triviális mérték mellett azonos, tehát azt  $\delta(A)$ -val jelölve, kapjuk az egyetlen olyan számot, amelyre a kívánt azonosság fennáll.  $\square$

**16.21. állítás** (Szorzattétel). Legyenek az  $A, B \in L(V)$  lineáris transzformációk a  $V$  véges dimenziós vektortéren. Ekkor

$$\delta(A \circ B) = \delta(A) \delta(B). \quad \square$$

*Bizonyítás:* A  $\delta(A \circ B)$  definíciója szerint ez az egyetlen olyan szám, amelyikre minden  $v_1, \dots, v_n$  mellett

$$f(ABv_1, \dots, ABv_n) = \delta(A \circ B) f(v_1, \dots, v_n).$$

Másrészt a  $\delta(A)$  és  $\delta(B)$  értelmezése szerint

$$f(ABv_1, \dots, ABv_n) = \delta(A) f(Bv_1, \dots, Bv_n) = \delta(A) \delta(B) f(v_1, \dots, v_n)$$

E két utolsó sort összevetve kapjuk, hogy  $\delta(A \circ B) = \delta(A) \delta(B)$ .  $\square$

**16.22. állítás.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Ekkor az  $A$  bármely bázisban felírt mátrixának a determinánsa azonos  $A$ -nak mint lineáris transzformációnak a determinánsával. Formálisan tetszőleges  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázis mellett:

$$\delta(A) = \left| [A]_{\{e_1, \dots, e_n\}} \right|.$$

Bizonyítás: Jelölje  $d = d_{\{e_1, \dots, e_n\}}$  a bázishoz tartozó nem triviális mértéket. Ekkor

$$|[A]| = d(Ae_1, \dots, Ae_n) = \delta(A) d(e_1, \dots, e_n) = \delta(A).$$

Meggondoltuk tehát, hogy egy transzformáció mátrixának determinánsa nem függ a koordinátázástól, tehát más-más bázisokban felírt mátrixának determinánsa azonos. A továbbiakban az  $A$  lineáris transzformáció determinánsára az egyszerűség kedvéért az  $|A|$  jelölést (is) használjuk. Ezek szerint  $A$ -nak  $|A|$  determinánsa, és  $A$ -nak valamely bázisban felírt mátrixának  $|[A]|$  determinánsa közt nincs különbség.

**Mátrixok szorzattétele** Ha  $[A], [B]$  két négyzetes mátrix, akkor  $A$ -val és  $B$ -vel jelölve a mátrixok generálta  $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  lineáris transzformációkat

$$|[A][B]| = |[A \circ B]| = \delta(A \circ B) = \delta(A) \delta(B) = |[A]| \cdot |[B]|.$$

Meggondoltuk tehát, hogy mátrixok szorzatának determinánsa a mátrixok determinánsának szorzata.

**Az inverz determinánsa** Legyen most  $A \in L(V)$  egy reguláris transzformáció. Ekkor  $AA^{-1} = I$ , így véve a determinánsokat,  $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ , azaz  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ . Összefoglalva, az inverz determinánsa a determináns reciproka.

## 16.4. A determináns kifejtése

A kifejtési tételek arra való, hogy a determináns kiszámítását visszavezessük 1-el kisebb méretű mátrixok determinánsának kiszámolására. Ezt a gondolatot egymásután alkalmazva tetszőleges mátrix determinánsa kiszámítható.

Ebben a fejezetben vannak azok az explicit formulák, amelyeket a fejezet bevezetőjében említettem.

**16.23. definíció** (minor, kofaktor, kofaktormátrix). Legyen  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  egy mátrix. E mátrix

- $(i, k)$ -csonkoltja a mátrix  $i$ -edik sorának és  $k$ -adik oszlopának törlése után megmaradt  $n - 1 \times n - 1$  méretű mátrix. Jelölése:  $A_{i,k}$ .
- $(i, k)$ -minorja az  $(i, k)$ -csonkolt  $A_{i,k}$  mátrix determinánsa.
- $(i, k)$ -kofaktora a  $(-1)^{i+k} |A_{i,k}|$  szám.
- kofaktormátrixa az az  $n \times n$  méretű mátrix, amelynél az  $i$ -edik sor  $k$ -adik eleme az  $(i, k)$ -kofaktor.

**16.24. állítás.** Legyen  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  egy mátrix. Írjuk felül az  $A$  mátrix  $k$ -adik oszlopának elemeit 0-val, majd a  $k$ -adik oszlop  $i$ -edik helyére írunk 1-et. E felülírt mátrix determinánsa az eredeti mátrix  $(i, k)$ -kofaktora.

Bizonyítás: Világos, hogy a szóban forgó mátrix  $k - 1$  sorcsere, majd és  $i - 1$  oszlopcsere után olyan alakra hozható, ahol a bal felső elem 1, alatta az első oszlop minden eleme zérus, és a jobb alsó  $n - 1 \times n - 1$  méretű részmátrix az eredeti mátrix  $(i, k)$ -csonkoltja:

$$\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & A_{i,k} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \right)$$

A fenti mátrix determinánsa a partcionált mátrix determinánsára kapott formula, a 118. oldal, szerint  $1 \cdot |A_{i,k}|$ . Meggondoltuk tehát, hogy ha az állításban felülírt mátrix determinánsát  $\delta$ -val jelöljük, akkor  $\delta(-1)^{k-1+i-1} = 1 \cdot |A_{i,k}|$ -t kapjuk. Ebből persze  $\delta = (-1)^{i+k} |A_{i,k}|$ .

**16.25. állítás** (oszlopok szerinti kifejtés). *Legyen  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  mátrix. Ekkor*

1. minden  $1 \leq k \leq n$  oszlopra  $|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} |A_{i,k}|$ ,
2. minden  $1 \leq k, j \leq n$  oszlopra  $j \neq k$  mellett  $0 = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A_{i,k}|$ .

*A fenti két formula tömörebben: minden  $1 \leq k, j \leq n$  mellett*

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A_{i,k}| = \delta_{j,k} |A|. \quad \square$$

*Bizonyítás:* Tekintsük az  $\mathbb{F}^n$  vektortér természetes bázisát:  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Láttuk, hogy a  $d = d_{\{e_1, \dots, e_n\}}$  mérték mellett

$$|A| = d(a_1, \dots, a_n),$$

ahol  $a_1, \dots, a_n$  jelöli rendre az  $A$  mátrix oszlopait. A  $k$ -adik oszlopvektorra  $a_k = \sum_{i=1}^n a_{i,k} e_i$ . Mivel  $d$  az összes nem  $k$ -adik változója rögzítése mellett a  $k$ -adik váltoozójában lineáris, ezért

$$|A| = d(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = d\left(a_1, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,k} e_i, \dots, a_n\right) = \sum_{i=1}^n a_{i,k} d(a_1, \dots, e_i, \dots, a_n).$$

No de itt  $d(a_1, \dots, e_i, \dots, a_n)$  az előző állításban felülírt mátrix determinánsa, azaz  $(-1)^{i+k} |A_{i,k}|$ . Éppen ezt kellett belátni az 1. pont indoklásához.

Másoljuk a mátrix  $j$ -edik oszlopát a  $k$ -adik oszlopra. Ennek a mátrixnak két oszlopa azonossá vált, ezért determinánsa zérus. Felírva erre a mátrixra a  $k$ -adik oszlop szerinti kifejtést, éppen a 2. pont azonosságát kapjuk.

A mátrix transzponáltjának determinánsa azonos a mátrix determinánsával. Így ha a transzponált mátrixra alkalmazzuk az oszlopok szerinti kifejtést, akkor a sorok szerinti kifejtést kapjuk.

A determináns kifejtésével az mátrix inverzére kapunk explicit formulát:

**16.26. állítás.** *Legyen  $[A]$  egy reguláris mátrix. Ekkor az inverz mátrix a kofaktormátrix transzponáltjának a determináns reciprokával vett szorzata.*

*Magyara átérve:*

$$[A^{-1}]_{k,i} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i+k} |A_{i,k}|. \quad \square$$

*Bizonyítás:* Jelölje a  $M$  a kofaktormátrix transzponáltját, azaz  $m_{k,i} = (-1)^{i+k} |A_{i,k}|$ . Így az  $M \cdot A$  szorzat mátrix  $k, j$  pozíciója

$$\sum_{i=1}^n m_{k,i} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} |A_{i,k}| a_{i,j} = \delta_{j,k} |A|$$

a kifejtési tétele szerint. Ez azt jelenti, hogy  $M \cdot A = |A|I$ . Mivel  $A$  reguláris ezért a nem zérus determinánssával osztva kapjuk, hogy  $\left(\frac{1}{|A|}M\right)A = I$ , ami azt jelenti, hogy  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}M$ .

**16.27. állítás** (Cramer-szabály). *Tekintsünk egy  $n \times n$  méretű inhomogén lineáris egyenletrendszeret. Tudjuk, hogy pontosan akkor van egyetlen megoldása minden jobboldal mellett, ha az együttható mátrix reguláris. Jelölje ezért  $A$  a reguláris együttható mátrixot, és  $B_k$  azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy az egyenlet jobboldalát reprezentáló oszlopvektort az  $A$  együttható mátrix  $k$ -adik oszlopára írjuk. Ekkor az  $x$  megoldásvektor  $k$ -adik koordinátájára*

$$x_k = \frac{|B_k|}{|A|}. \quad \square$$

*Bizonyítás:* Kezdjük a  $B_k$  mátrixnak a  $k$ -adik oszlopa szerinti kifejtésével.  $|B_k| = \sum_{i=1}^n b_i (-1)^{i+k} A_{i,k}$ . Na most az  $Ax = b$  ekvivalens az  $x = A^{-1}b$ -vel, így a Cramer-szabály szerint

$$x_k = [A^{-1}]_k \cdot b = \sum_{i=1}^n [A^{-1}]_{k,i} \cdot b_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{|A|} (-1)^{i+k} |A_{i,k}| \right) b_i = \frac{1}{|A|} \cdot |B_k|. \quad \square$$

## 16.5. A karakterisztikus polinom

**16.28. definíció.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformációja az  $\mathbb{F}$  test feletti  $V$ ,  $n$ -dimenziós vektortérnek. Definiáljuk a  $k : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$  függvényt, mint  $k(t) = |tI - A|$  minden  $t \in \mathbb{F}$  mellett. Ekkor  $k$  egy pontosan  $n$ -ed fokú, normált polinom, amelyre

$$k(t) = t^n - \text{tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|.$$

Ezt a  $k$  függvényt nevezzük az  $A$  transzformáció karakterisztikus polinomjának. ↓

*Bizonyítás:* Rögzítsük a tér egy  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázisát, majd írjuk fel az  $tI - A$  transzformáció mátrixát ebben a bázisban. E mátrix determinánsa  $k(t)$ , ami minden konkrét  $t \in \mathbb{F}$  mellett az  $\mathbb{F}$  testbeli szám. Mivel a transzformáció mátrixának determinánsa minden bázis mellett ugyanaz a szám, ezért  $k(t)$  konkrét értéke a választott bázistól független.

A diagonálisban szereplő elemek  $(t - a_{i,i})$  alakúak, és a  $t$  változó máshol nem szerepel a mátrixban. Ha a determináns definíciójára gondolunk, akkor nyilvánvaló, hogy  $k(t)$  a  $t$  változó legfeljebb  $n$ -ed fokú polinomja.

E polinom konstans tagja  $k(0) = | - A| = (-1)^n |A|$ .

Ha  $\pi \neq \text{id}$  egy permutáció, akkor  $\pi$  legalább két helyen különbözik az identikus permutációtól, ergo a  $\pi$ -hez tartozó bástyafelrakás legfeljebb  $n - 2$  diagonális elemet taposhat. Látjuk tehát, hogy identitástól különböző permutáció mellett nincs  $t$ -nek  $n - 2$ -nél magasabb fokú hatványa.

A diagonális bástyafelrakáshoz a

$$(t - a_{1,1})(t - a_{2,2}) \cdots (t - a_{n,n})$$

szorzat tartozik, amelynek első két legmagasabb hatványú tagja

$$t^n + t^{n-1}(-a_{1,1} \cdots - a_{n,n}) = t^n - \text{tr}(A)t^{n-1}.$$

A spektrum pontjai nem csak a minimálpolinom zérus helyei, hanem a karakterisztikus polinom zérushelyei is.

**16.29. állítás** (karakterisztikus polinom gyökei). *Legyen  $k(t)$  az  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja.  $A \lambda \in \mathbb{F}$  szám pontosan akkor sajátértéke  $A$ -nak, ha  $k(\lambda) = 0$ .* ↓

*Bizonyítás:* A  $\lambda$  pontosan akkor sajátértéke  $A$ -nak, ha  $\lambda I - A$  szinguláris, ami avval ekvivalens, hogy  $0 = |\lambda I - A| = k(\lambda)$ .

Most tegyük fel egy pillanatra, hogy  $\mathbb{C}$  feletti vektortér  $A \in L(V)$  lineáris transzformációját vizsgáljuk. Minimálpolinomja az algebra alaptétele szerint felbomlik

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$$

gyöktényezői szorzatára, ahol  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ . Jelölje  $k_i$  a  $\lambda_i$  sajátérték algebrai multiplicitását, azaz  $k_i = \nu((A - \lambda_i I)^{m_i})$ . Tudjuk, hogy  $tI - A$  Jordan-normálalakú mátrixa egy olyan felsőháromszög alakú mátrix, amelynek diagonálisában  $t - \lambda_i$  kifejezés éppen  $k_i$ -szer szerepel. Mivel egy felsőháromszög alakú mátrix determinánsa a diagonális elemek szorzata, ezért a következő tételt gondoltuk meg.

**16.30. állítás.** *Tegyük fel, hogy  $V$  egy a  $\mathbb{C}$  test feletti vektortér és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Jelölje  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  a különböző sajátértékeket, és jelölje  $k_1, \dots, k_s$  rendre sajátértékek algebrai multiplicitásait. Ekkor az  $A$  transzformáció karakterisztikus polinomja*

$$k(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s}.$$

No persze az  $A - \lambda_i I$  a  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$  vektortér felett egy  $m_i$ -ed rendben nillpotens transzformáció, de tudjuk hogy a nillpotencia rendje legfeljebb a tér dimenziója, ergo  $m_i \leq \dim(\ker(A - \lambda_i I)^{m_i}) = \nu((A - \lambda_i I)^{m_i}) = k_i$ . Ebből azonnal látjuk, hogy a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak. Meggondoltuk tehát a Cayley–Hamilton-tételt abban a speciális esetben, mikor a test a komplex számtest.

A Cayley–Hamilton-tétel nem függ az algebrai alaptételől, amint azt rögtön megmutatjuk.

**16.31. lemma.** Legyen  $\mathbb{F}$  egy test, amelyben  $1 + 1 \neq 0$ . Tetszőlegesen választott  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}$  számok mellett

jelölje  $A = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  az  $n \times n$  méretű mátrixot. Ekkor ennek karakterisztikus polinomja

$$k(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0.$$

Bizonyítás: Először is tekintsük a  $tI - A = \begin{pmatrix} t + \alpha_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & t & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix}$  mátrixot. E mátrix mérete

szerinti indukcióval bizonyítunk.

Ha  $n = 1$ , akkor a polinom  $t + \alpha_0$ , és a mátrixnak is csak egyetlen  $t + \alpha_0$  eleme van.

Most tegyük fel, hogy igaz az állítás tetszőlegesen választott  $n - 1$  szám mellett, és lássuk be  $n$ -re. A  $tI - A$  mátrix determinánsát megkapjuk az utolsó sor szerint kifejtéssel. Tehát

$$k(t) = |tI - A| = \alpha_0 (-1)^{1+n} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ t & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \right| + t(-1)^{n+n} \left| \begin{pmatrix} t + \alpha_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & t & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & -1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix} \right|.$$

Itt az első  $(n - 1) \times (n - 1)$  méretű determináns  $(-1)^{n-1}$ , mert ez egy alsóháromszög alakú mátrix a diagonálisában csupa  $-1$  számmal. A második determináns értéke az indukciós feltevés az  $n - 1$  darab  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  számra. A fent kezdtet kiemelést folytatva tehát,

$$k(t) = \alpha_0 (-1)^{1+n} (-1)^{n-1} + t(t^{n-1} + \alpha_{n-1}t^{n-2} + \dots + \alpha_2t + \alpha_1) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0. \quad \square$$

**16.32. állítás** (Cayley–Hamilton). Legyen  $V$  egy tetszőleges test feletti vektortér, és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Ekkor  $A$  gyöke a karakterisztikus polinomjának, azaz  $k(A) = 0 \in L(V)$ .  $\square$

Bizonyítás: Legyen  $m = \dim V$ , és  $v \in V$  egy nem zérus elem. Tekintsük a  $v$  által generált legszűkebb  $A$ -invariáns alteret, azaz  $\text{lin}(v; A)$ -t. Ha ez  $n$  dimenziós ( $1 \leq n \leq m$ ), és a  $v$ -hez tartozó kis minimálpolinom

$$p_v(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0,$$

akkor a  $\text{lin}(v; A)$  invariáns altérben  $\{A^{n-1}v, \dots, Av, v\}$  egy bázis. Ebben a bázisban  $A|_{\text{lin}(v; A)}$  transzformáció mátrixa

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

alakú. Az előző gondolat szerint  $A_{1,1}$  karakterisztikus polinomja éppen  $p_v(t)$ .

Egészítük ki  $\text{lin}(v; A)$  fenti bázisát az egész  $V$  vektortér bázisává. Ebben a bázisban felírva  $A$  mátrix-sza  $[A] = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$  alakú, ahol  $A_{1,1}$  azonos  $A|_{\text{lin}(v; A)}$  fenti mátrix-szával, és mivel a  $\text{lin}(v; A)$  egy invariáns altér, ezért az  $A_{1,1}$  alatt elhelyezkedő  $(m - n) \times n$  méretű  $A_{2,1}$  mátrix minden eleme zérus. Egy ilyen módon partícionált mátrix determinánsa már könnyen számolható:

$$k(t) = |[tI - A]| = \left| \begin{pmatrix} tI_{1,1} - A_{1,1} & -A_{1,2} \\ -A_{2,1} & tI_{2,2} - A_{2,2} \end{pmatrix} \right| = |tI_{1,1} - A_{1,1}| \cdot |tI_{2,2} - A_{2,2}| = p_v(t) k_2(t),$$

ahol  $k_2$  az  $A_{2,2}$  karakterisztikus polinomja. Azt kaptuk, hogy  $p_v$ -nek többszöröse  $k$ , ezért  $k(A)v = 0$ .  $\square$

Mivel egy lineáris transzformáció gyöke a saját karakterisztikus polinomjának, ezért a karakterisztikus polinom egy pontosan  $n$ -ed fokú polinom, amely a minimál polinom többszöröse, azaz a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak. Persze ebből is következik, hogy a minimálpolinom egy legfeljebb  $n$ -ed fokú polinom.



## 17. fejezet

# SkaláriSSzorzatos terek geometriája

A továbbiakban  $\mathbb{K}$  feletti vektorterekről van szó, ahol  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### 17.1. Definíciók

**17.1. definíció** (skaláriSSzorzatos-tér). Egy  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  függvényt *skaláris szorzatnak* mondunk, ha teljesülnek az alábbi axiómák:

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  minden  $x, y \in V$  mellett.
2.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  minden  $x, y \in V$  és minden  $\alpha \in V$  mellett.
3.  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$  minden  $x_1, x_2, y \in V$  mellett.
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  és  $\langle x, x \rangle = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = 0$ .

Ha a  $V$  vektortéren adott a fenti skaláris szorzat, akkor a  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  párt *skaláriSSzorzatos-térnek* mondjuk.  $\square$

Az első három pont szerint a skaláris szorzat rögzített második változó melett az elsőben lineáris, azaz  $\langle \sum_{j=1}^s \alpha_j x_j, y \rangle = \sum_{j=1}^s \alpha_j \langle x_j, y \rangle$ . Hasonlóan, a skaláris szorzás operáció rögzített első változó mellett a második változó *konjugáltan lineáris* függvénye, azaz  $\langle x, \sum_{k=1}^r \beta_k y_k \rangle = \sum_{k=1}^r \overline{\beta_k} \langle x, y_k \rangle$ . Persze ezeket nagyon sokszor vegyítjük is, így a

$$\left\langle \sum_{j=1}^s \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^r \beta_k y_k \right\rangle = \sum_{j=1}^s \alpha_j \left\langle x_j, \sum_{k=1}^r \beta_k y_k \right\rangle = \sum_{j=1}^s \alpha_j \sum_{k=1}^r \overline{\beta_k} \langle x_j, y_k \rangle = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^r \alpha_j \overline{\beta_k} \langle x_j, y_k \rangle$$

formula adódik, amit úgy jegyezhetünk meg, hogy minden tagot minden taggal kell szorozni, de a másik változóból konjugáltan emeljük ki a test elemeit.

**Belső szorzat.** A legfontosabb példa skaláris szorzatra a *belső szorzat*. Ha adott a vektortér egy  $\{v_1, \dots, v_n\}$  bázisa, akkor minden vektort egyértelműen meghatároznak a koordinátái, azaz  $x = \sum_{j=1}^n \xi_j v_j$  és  $y = \sum_{j=1}^n \eta_j v_j$ . Ezek belső szorzatát

$$[x, y] = \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\eta_j}$$

definiálja. Nagyon fontos észrevenni, hogy a belső szorzat a definíciója szerint függ a vektorok koordinátáitól, tehát függ a bázis megválasztásától.<sup>1</sup>

A másik fontos példa  $\mathbb{R}$  feletti vektortérnél értelmezett. Jelölje  $C[a, b]$  valamely  $[a, b]$  korlátos és zárt intervallum feletti összes folytonos függvények vektorterét. Definiálja  $f, g \in C[a, b]$  két folytonos függvény skaláris szorzatát  $\int_a^b f(x) g(x) dx$ . Könnyen látható, hogy a fenti függvény kielégíti a skaláris szorzat definíciójában követelteket. Figyeljünk a folytonosság szerepére!

<sup>1</sup>Helyesebb lenne a szörnyen nehézkes  $[\cdot, \cdot]_{\{v_1, \dots, v_n\}}$  jelölés.

**17.2. definíció** (merőlegesség, halmaz ortokomplementere). Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  egy skaláriszorzatos-tér.

1. Ha az  $x, y \in V$  két pontjára  $\langle x, y \rangle = 0$ , akkor azt mondjuk hogy a két vektor *merőleges* egymásra. Jelölés:  $x \perp y$ .
2. Legyen most,  $H \subseteq V$  egy részhalmaz. Definiálja  $H^\perp = \{x \in V : x \perp a \text{ minden } a \in H\}$  a  $H$  halmaz *merőlegesét*, vagy *ortokomplementérét*.

A zérus vektor minden vektorra merőleges, sőt a zérus vektor az egyedüli ilyenvektor, hiszen ekkor sajátmagára is merőleges, de saját magára merőleges vektor csak a zérus vektor van. Pont ezt jelenti az axiómák közt az utolsó. A  $H^\perp$  az a részhalmaza  $V$ -nek, amely az összes  $H$ -ra merőleges vektorokból áll. Tehát  $\{0\}^\perp = V$  és  $V^\perp = \{0\}$ .

**17.3. definíció.** Legyen  $V$  egy skaláriszorzatos-tér,  $H \subseteq V$ . Az  $\{x_1, \dots, x_k\}$  vektorrendszer

1. *ortogonálisnak* nevezünk, ha minden  $i \neq j$  esetén  $x_i \perp x_j$ .
2. *ortonormáltnak* nevezünk, ha minden  $i, j$  mellett  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$ .

A felépítés jelen szintjén nem olyan egyszerű egy tetszőleges skaláris szorzatos térben ortonormált rendszert adni. Persze az üres vektorrendszer ortogonális, de ortonormált is. Az látható, hogy egy ortogonális rendszert tetszőlegesen sok zérus vektorral kiegészítve ortogonális rendszert kapunk. Persze a zérus vektor egy ortonormált rendszerhez nem tartozhat elemként, de ha van a vektortérben egy  $v \neq 0$  elem, akkor az egyelemű  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} v \right\}$  vektorrendszer egy ortonormált rendszert alkot. (Mivel csak egyetlen elem van, ezért bármely két különböző elem merőleges egymásra; valamint  $\langle \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} v, \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} v \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} \langle v, v \rangle = 1$ .)

Egynél több elemből álló ortonormált rendszert most nem tudunk mutatni, de később ennek oka egészben világos lesz. Látjuk majd, hogy egy  $n$ -dimenziós skaláriszorzatos térben minden van  $n$  elemű ortonormált rendszert, de annál több elemű soha nincs. Hogy  $n$ -nél több nemzérus vektor nem alkothat ortogonális rendszert, az már látható is:

**17.4. állítás.** Egy zérus elemeket nem tartalmazó ortogonális rendszer lineárisan független rendszer is.

*Bizonyítás:* Ha a  $\{v_1, \dots, v_n\}$  rendszer lineárisan összefüggő, és  $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$ , akkor

$$\langle v_k, v_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j, v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \langle v_j, v_k \rangle = 0.$$

Ez a skaláris szorzás definíciója szerint csak abban az esetben lehetséges, ha  $v_k = 0$ , ami ellentmond annak a feltételnek, hogy a rendszer a null vektort nem tartalmazza.

Speciálisan, egy ortonormált rendszer a zérus vektort nem tartalmazza, emiatt lineárisan független rendszer. Így tehát a Steinitz-lemma szerint, egy  $n$ -dimenziós vektortérben nem lehet több mint  $n$  elemű ortonormált rendszert mutatni. Később látni fogjuk, hogy  $n$  elemű ortonormált rendszer viszont mindenkor strukturáltható egy  $n$ -dimenziós vektortérben, de erre itt még várunk kell.

Az alábbiakban a merőlegesség legnyilvánvalóbb tulajdonságait foglaljuk össze. Ezeket a továbbiakban hivatkozás nélkül használjuk.

**17.5. állítás** (Merőlegesség tulajdonságai). Legyen most is  $V$  egy skaláriszorzatos-tér,  $H, H_1 \subseteq V$ . Ekkor

1.  $H \cap H^\perp \subseteq \{0\}$ ,
2.  $H \subseteq H_1 \implies H_1^\perp \subseteq H^\perp$ ,
3.  $H \subseteq (H^\perp)^\perp$ ,
4.  $H^\perp = (\text{lin } H)^\perp$ ,
5.  $H^\perp$  altér.

**Bizonyítás:** Ha  $v \in H \cap H^\perp$ , akkor  $v \perp v$ , ergo  $v = 0$ , ami az 1. pontot igazolja. Ha  $H \subseteq H_1$  és a  $v$  vektor a  $H_1$  minden pontjára merőleges, akkor persze ez a  $v$  a  $H$  minden pontjára is merőleges, azaz 2. pontot is meggondoltuk. Ha  $v \in H$  rögzített és  $a \in H^\perp$  egy vektor, akkor  $v \perp a$ , ami azt jelenti, hogy  $H \subseteq (H^\perp)^\perp$ . A  $(\text{lin } H)^\perp \subseteq H^\perp$  tartalmazás nyilvánvaló a már meggondolt 2. tulajdonság szerint. Ha viszont  $v \in H^\perp$  és  $u_1, \dots, u_n \in H$ , akkor ezek tetszőleges lineáris kombinációjára  $\langle v, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v, u_j \rangle = 0$ , hiszen  $v \perp u_j$ . Meggondoltuk tehát, hogy  $v$  merőleges a  $H$ -beli elemekből képzett tetszőleges lineáris kombinációra, ergo  $H^\perp \subseteq (\text{lin } H)^\perp$ . Világos, hogy  $0 \in H^\perp$ , ha  $v_1, v_2 \in H^\perp$ , akkor  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in H^\perp$ , azaz  $H^\perp$  minden  $H$  részhalmaz mellett egy altér.

## 17.2. Egyenlőtlenségek

**17.6. állítás** (Bessel). *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárisszorzatos-tér. Tegyük fel, hogy  $\{x_1, \dots, x_k\}$  egy ortonormált rendszer. Ekkor minden  $u \in V$  vektorra:*

1. fennáll a Bessel-egyenlőtlenség:  $\sum_{i=1}^k |\langle u, x_i \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle$ ;

2. Az  $\hat{u} = u - \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i$  vektorra  $\hat{u} \perp x_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ), azaz  $\hat{u} \in \{x_1, \dots, x_k\}^\perp$ .

**Bizonyítás:** Jelölje a bizonyítás erejéig  $\alpha_j = \langle u, x_j \rangle$ . Ekkor az  $\hat{u} = u - \sum_{j=1}^k \alpha_j x_j$  vektorra

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle u, -\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j \rangle + \langle -\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j, u \rangle + \langle -\sum_{j=1}^k \alpha_j x_j, -\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \sum_{j=1}^k \overline{\alpha_j} \langle u, x_j \rangle - \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle x_j, u \rangle + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \alpha_j \overline{\alpha_i} \langle x_j, x_i \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \sum_{j=1}^k \overline{\alpha_j} \alpha_j - \sum_{j=1}^k \alpha_j \overline{\alpha_j} + \sum_{j=1}^k \alpha_j \overline{\alpha_j} = \langle u, u \rangle - \sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2. \end{aligned}$$

Ez éppen a Bessel-egyenlőtlenség. A merőlegességre vonatkozó második állítás már sokkal egyszerűbb:

$$\langle \hat{u}, x_j \rangle = \langle u - \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, x_j \rangle = \langle u, x_j \rangle - \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x_i, x_j \rangle = \alpha_j - \alpha_j = 0.$$

**17.7. állítás** (Schwartz-egyenlőtlenség). *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárisszorzatos-tér,  $u, v \in V$ . Ekkor*

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

**Bizonyítás:** Ha  $v = 0$ , akkor minden oldal zérus. Ha  $v \neq 0$ , akkor a  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} v \right\}$  rendszer egyetlen elemű ortonormált rendszer. Alkalmazva a Bessel-egyenlőtlenséget  $k = 1$  mellett

$$\frac{1}{\langle v, v \rangle} |\langle u, v \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} \langle u, v \rangle \right|^2 = \left| \langle u, \frac{1}{\sqrt{\langle v, v \rangle}} v \rangle \right|^2 \leq \langle u, u \rangle,$$

ami a bizonyítandó állítás. Ha viszont  $v = 0$ , akkor az állítás minden oldala zérus.

**17.8. definíció** (skalárisszorzat indukálta norma). *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárisszorzatos-tér, jelölje minden  $x \in V$  mellett  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .*

**17.9. definíció** (norma indukálta metrika). *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárisszorzatos-tér, tetszőleges  $x, y \in V$  mellett jelölje  $d(x, y) = \|x - y\|$ .*

**17.10. állítás.** *Egy  $V$  skalárisszorzatos-térben teljesül a Schwartz-egyenlőtlenség, azaz  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , valamint a skalárisszorzatos-tér kielégíti a normált tér axiómákat, azaz*

1.  $\|x\| = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = 0$ ,
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,

továbbá egy normált tér kielégíti a metrikus tér axiómákat, azaz

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

□

**Bizonyítás:** Egyedül a 3. normált tér axióma nem teljesen evidens. Emlékezzünk arra, hogy egy  $\Re z \leq |z|$  minden  $z \in \mathbb{K}$  szám mellett. Így

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Mindkét oldal gyökét véve, kapjuk a háromszög-egyenlőtlenséget.

▪

### 17.3. Pont és altér távolsága

Ebben a szakaszban azt mutatjuk meg, hogy ha a  $V$  skaláriszorzatos térnek  $M$  egy olyan alttere, amelyben van véges ortonormált bázis, akkor a tér tetszőleges  $V$  pontjának, van  $M$ -hez legközelebbi pontja. Mi több, ilyen legközelebbi pontból csak egyetlen egy van.

Ehhez először a kis iskolából jól ismert Pythagoras-tételelt kell megfogalmaznunk.

**17.11. állítás (Pythagoras).** Ha  $u \perp v$ , akkor  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ . Hasonlóan, ha  $\{u_1, \dots, u_k\}$  ortogonális rendszer, akkor  $\|\sum_{i=1}^k u_i\|^2 = \sum_{i=1}^k \|u_i\|^2$ .

□

**Bizonyítás:** Világos, hogy ha  $\langle u, v \rangle = 0$ , akkor  $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$ . Most tegyük fel, hogy  $k$ -nál kisebb elemszámú ortogonális rendszerre igaz az állítás és lássuk be  $k$ -ra. Világos, hogy  $\langle \sum_{j=1}^{k-1} u_j, u_k \rangle = 0$ . Így a már bizonyított állítás és az indukciós feltevés szerint

$$\left\| \sum_{j=1}^k u_j \right\|^2 = \left\| \left( \sum_{j=1}^{k-1} u_j \right) + u_k \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{k-1} u_j \right\|^2 + \|u_k\|^2 = \sum_{j=1}^{k-1} \|u_j\|^2 + \|u_k\|^2 = \sum_{j=1}^k \|u_j\|^2.$$

**17.12. állítás (legközelebbi pont).** Legyen  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormált rendszer és jelölje  $M = \text{lin} \{x_1, \dots, x_k\}$ . Ekkor minden  $u \in V$  vektorhoz létezik egyetlen  $u^* \in M$  vektor, amelyre

$$d(u, u^*) = \inf \{d(u, w) : w \in M\}.$$

Erre az  $M$  altérbeli  $u^*$  vektorra teljesül az  $u^* = \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i$  egyenlőség.

□

Ez azt jelenti, hogy minden  $u \in V$  mellett a  $\sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i$  vektor ez egyetlen olyan  $M$ -beli vektor, amelyre

$$d\left(u, \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i\right) = \min \{d(u, w) : w \in M\}.$$

Ezt az  $\|u - \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j\|$  számot nevezzük, az  $u$  vektor és az  $M$  altér távolságának.

**Bizonyítás:** minden  $w \in M$  mellett az  $\hat{u} = u - \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j$  vektorra  $\hat{u} \perp \left( \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j - w \right)$ , hiszen  $\sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j - w \in M$ . Így a Pythagoras-tétel szerint

$$\begin{aligned} d(u, w)^2 &= \|u - w\|^2 \\ &= \|u - \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j + \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j - w\|^2 = \|\hat{u} + \left( \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j - w \right)\|^2 \\ &= \|\hat{u}\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j - w \right\|^2. \end{aligned}$$

A jobboldali első kifejezés  $\|\hat{u}\|^2$  független  $w \in M$ -től, ezért  $d(u, w)^2 \geq \|\hat{u}\|^2$ . Itt szigorú reláció áll fenn, minden  $w \in M$ -re, amelyre  $w \neq \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j$ , és persze egyenlőség áll fenn, ha  $w = \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j$ . Ez azt jelenti, hogy

$$\min \{d(u, w) : w \in M\} = \|\hat{u}\| = \|u - \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j\| = d\left(u, \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j\right),$$

és az  $u^* = \sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j$  az egyetlen olyan  $M$ -beli pont, amelyre az  $\|u - u^*\| = \min \{\|u - w\| : w \in M\}$  egyenlőség fennáll. Ezt kellett belátni.

Láttuk tehát, hogy ha az  $M$  altérben található véges ortonormált bázis, akkor tetszőleges ponthoz van egy és csak egy legközelebbi pontja az  $M$  altérnek. Ez a korábbi tapasztalataink szerint egy kicsit sem meglepő. Az már sokkal érdekesebb, hogy mivel csak egy legközelebbi pont van, ezért ha az  $M$  altérben egy másik ortonormált bázist veszünk kiindulásul, akkor az azzal képzett  $\sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j$  vektor is a ugyanazt a vektort, az  $u$ -hoz legközelebbi  $M$ -beli vektort adja. Ez formálisan nézve már meglepő, hiszen az

$$\sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j$$

vektor felírása szerint függ az  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq M$  ortonormált bázis megválasztásától, ugyanis a fent kiemelt képletfelirásban szerepelnek a bázis elemei. Viszont tudjuk, hogy a fenti vektor az  $u$ -hoz legközelebb eső vektora  $M$ -nek, amiből persze csak egy van, emiatt a fenti kiemelt  $M$ -beli vektor nem függ az  $M$  altér ortonormált bázisának megválasztásától. Ez utóbbi gondolat már nagyon is meglepő.

**17.13. definíció** (merőleges vetület, merőleges vetítés). Legyen  $M = \text{lin} \{x_1, \dots, x_k\}$ , ahol  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormált rendszer.

Láttuk, hogy a  $\sum_{i=j}^k \langle u, x_j \rangle x_j \in M$  vektor független az  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormált rendszer megválasztásától, hiszen ez vektor az  $u$  vektorhoz legközelebb eső vektora az  $M$  altérnek. Definiálja  $p_M : V \rightarrow V$  az alábbi függvényt

$$p_M(u) = \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i.$$

A  $p_M(u) \in M$  vektort nevezzük az  $u$ -nak  $M$  altérre eső merőleges vetületének. A  $p_M$  függvény neve: merőleges vetítés az  $M$  altérre.

Mivel a skalárisszorzás rögzített második változó mellett, az első változó lineáris függvénye, ezért egy rögzített  $x \in V$  vektor mellett az  $u \mapsto \langle u, x \rangle x$  függvény egy  $V \rightarrow V$  lineáris operáció. Mivel  $p_M$  ilyenek véges összege, azért a fent definiált merőleges vetítés a  $V$  vektortér egy lineáris transzformációja.

## 17.4. Ortogonalizáció

A merőleges vetítés operáció bevezetésének feltétele volt, hogy ha az  $M$  altérre vonatkozó merőleges vetítést akarjuk használni, akkor léteznie kell egy ortonormált bázisnak az  $M$  altérben. Az eddigi tételeinkben

ez a tétel feltevése volt. Most megmutatjuk, hogy egy skaláriszorzatos térnek minden véges dimenziós altere rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, így egy véges dimenziós altérre eső merőleges vetítés minden definiált.

Először is érdemes újra fogalmazni a Bessel-egyenlőtlenségről szóló 17.6 gondolatot, a bevezetett merőleges vetítés és hosszúság fogalom felhasználásával. Figyeljünk arra, hogy az  $M$ -beli ortonormált bázis léte, még minden definiált az állítás feltevése.

**17.14. állítás (Bessel).** *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skaláriszorzatos-tér. Tegyük fel, hogy  $\{x_1, \dots, x_k\}$  egy ortonormált rendszer,  $M = \text{lin} \{x_1, \dots, x_k\}$  és  $p_M \in L(V)$  a merőleges vetítés az  $M$  altérre. Ekkor minden  $u \in V$  mellett*

$$1. \|p_M(u)\| \leq \|u\|,$$

$$2. u - p_M(u) \in M^\perp.$$

*Bizonyítás:* Világos, hogy  $\|p_M(u)\|^2 = \|\sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j\|^2 = \sum_{j=1}^k \|\langle u, x_j \rangle x_j\|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle u, x_j \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle = \|u\|^2$  a 17.6. állítás szerint. Hasonlóan  $u - p_M(u) \in \{x_1, \dots, x_k\}^\perp = \text{lin} \{x_1, \dots, x_k\}^\perp = M^\perp$ .

**17.15. állítás (Gram–Schmidt-ortogonalizáció).** *Legyen a  $V$  skaláriszorzatos-térben  $\{y_1, \dots, y_k\}$  egy lineárisan független vektorrendszer. Ehhez létezik olyan  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormált rendszer, amelyre minden  $i = 1, \dots, k$  mellett  $x_i \in \text{lin} \{y_1, \dots, y_i\}$ .*

*Bizonyítás:* Teljes indukció, a lineárisan független rendszer elemszáma szerint. Ha  $k = 1$ , akkor  $y_1 \neq 0$ , így az  $x_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1$  jelöléssel az  $\{x_1\}$  egy egyelemű ortonormált rendszer, amelyre  $x_1 \in \text{lin} \{y_1\}$  is teljesül.

Tegyük fel, hogy igaz az állítás  $k$ -nál kisebb elemszámu lineárisan független rendszerre és lássuk be  $k \geq 2$ -re. Jelölje  $M = \text{lin} \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ . Az indukciós feltevés szerint létezik  $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$  ortonormált rendszer, amelyre még az  $\{x_1, \dots, x_{k-1}\} \subseteq M$  tartalmazás is fennáll. No de  $\dim M = k-1$ , ezért  $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$  nem csak lineárisan független, de maximális lineárisan független rendszer  $M$ -ben, ergo generátorrendszer is, ezért

$$\text{lin} \{x_1, \dots, x_{k-1}\} = M$$

is teljesül. Találtunk tehát az  $M$  altérben egy ortonormált bázist, így evvel az ortonormált bázissal felírt merőleges vetítés értelmesen definiált. Legyen ez  $p_M$ , azaz minden  $u \in V$  vektorra  $p_M(u) = \sum_{j=1}^{k-1} \langle u, x_j \rangle x_j$ . Tekintsük az

$$\hat{y}_k = y_k - p_M(y_k)$$

vektort. Ha ez a zérus vektor lenne, akkor  $y_k \in M$  lenne, ami ellentmondana az  $\{y_1, \dots, y_k\}$  rendszer lineárisan függetlenségének. Ezek szerint az

$$x_k = \frac{1}{\|\hat{y}_k\|} \hat{y}_k$$

vektorra  $\|x_k\| = 1$ ,  $x_k \in M^\perp$ , ezért az  $\{x_1, \dots, x_k\}$  vektorrendszer valóban ortonormált.

Már csak azt kell igazolnunk, hogy minden  $j \leq k$  mellett  $x_j \in \text{lin} \{y_1, \dots, y_j\}$ . Ez a  $j \leq k-1$  esetben az indukciós feltevés miatt van igaz. A  $j = k$  esetben  $p_M(y_k) \in M = \text{lin} \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ , emiatt  $\hat{y}_k \in \text{lin} \{y_1, \dots, y_k\}$ , amiből persze egy  $\mathbb{K}$  testbeli elemmel való szorzás után már  $x_k \in \text{lin} \{y_1, \dots, y_k\}$  is következik.

A fenti bizonyítás kiemelt soraiból leolvasható az ú.n. *Gram–Schmidt-ortogonalizációs algoritmus*. Ha adott az  $\{y_1, \dots, y_n\}$  lineárisan független vektorok rendszere, akkor abból egy  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ortonormált rendszer konstruálható. Az első lépés:

$$x_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1.$$

Ha az első  $k-1$  darab vektort már definiáltuk úgy, hogy  $\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$  ortonormált rendszer, akkor a  $k$ -adik vektort a következőképpen kapjuk. Legyen  $\hat{y}_k = y_k - p_M(y_k)$ , ahol  $p_M(y_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \langle y_k, x_j \rangle x_j$ , majd

$$x_k = \frac{1}{\|\hat{y}_k\|} \hat{y}_k.$$

A Gram–Schmidt-ortogonalizációról szóló állítás azonnali következménye az ortonormált bázisok egzisztenciáját biztosító állítás:

**17.16. állítás (o.n.b.).** *Egy véges dimenziós skalárisszorzatos-térnek minden van ortonormált bázisa, azaz olyan  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ortonormált rendszere, amely generátorrendszer is.*

*Ha  $\{x_1, \dots, x_n\}$  egy ortonormált bázis, akkor minden  $v \in V$  mellett  $v = \sum_{j=1}^n \langle v, x_j \rangle x_j$ .*  $\square$

*Bizonyítás:* Tudjuk, hogy  $V$  vektortérnek van  $\{y_1, \dots, y_n\}$  bázisa. Vegyük egy ilyen bázist, tehát lineárisan független rendszert, majd alkalmazzuk a 17.15. állítást. Így kapunk egy  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$  ortonormált rendszert. No de,  $\dim V = n$  és az ortonormált rendszer elemei között a zérus vektor nem szerepel, így az ortonormált rendszer lineárisan független rendszer is. Mivel annak  $n = \dim V$  darab eleme van, ezért az maximális lineárisan független rendszer  $V$ -ben, ergo bázis is. Konstruáltunk tehát egy ortonormált bázist.

Jelölje most  $P_V$  egy  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ortonormált bázis definíálta merőleges vetítést az egész  $V$  vektortérre, mint egy altérre. Világos, hogy  $P_V$  az identitás függvény, hiszen minden vektorra igaz, hogy saját maga a hozzá legközelebbi  $V$ -beli pont. Így minden  $v \in V$  mellett  $v = P_V(v) = \sum_{j=1}^n \langle v, x_j \rangle x_j$ .  $\square$

Ez utóbbi gondolat szerint, ha egy  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ortonormált bázis rögzítünk, akkor tetszőleges  $x \in V$  vektornak ebben a bázisban felírt koordináta-vektora

$$[x]_{\{x_1, \dots, x_n\}} = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Ugyanez, kicsit eltérő szintaxisával, hogy az ortonormált bázishoz tartozó  $i$ -edik duális lineáris funkcionál, amit korábban  $x_i^*$ -al jelöltünk, az  $x \mapsto \langle x, x_i \rangle$  függvény.

## 17.5. Projekciós tételek

Láttuk tehát, hogy egy véges dimenziós altérnek minden van ortonormált bázisa. Ezért ha egy véges dimenziós altérre való merőleges vetítést akarunk használni, nem kell kikötnünk, hogy legyen az altérben egy ortonormált bázis, hiszen ilyen minden van. Persze ahogyan bázis is sok van, ugyanúgy ortonormált bázisból is nagyon sok lehet. Meggondoltuk viszont, hogy függetlenül attól, hogy az  $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq M$  vagy az  $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq M$  ortonormált bázis segítségével írjuk fel az  $M$  altérre vonatkozó merőleges vetítést a vetület minden azonos, nevezetesen a ponthoz az  $M$ -beli legközelebbi pont:

$$\sum_{j=1}^k \langle u, x_j \rangle x_j = P_M(u) = \sum_{j=1}^k \langle u, y_j \rangle y_j.$$

Ennek fényében először is érdemes újra és újra fogalmazni a Bessel-egyenlőtlenségről szóló 17.14. gondolatot. Figyeljünk arra, hogy az  $M$ -beli ortonormált bázis léte nem szerepel a feltételek között, hanem helyette az altér véges dimenziós volta szerepel.<sup>2</sup>

**17.17. állítás (Bessel).** *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárisszorzatos-tér, és  $M$  egy véges dimenziós altér. Ekkor minden  $u \in V$ -hez*

1. *létezik egyetlen  $u^* \in M$  vektor, amelyre  $d(u, u^*) = \min \{d(u, w) : w \in M\}$ . Erre a vektorra teljesül az  $u^* = p_M(u) = \sum_{i=1}^k \langle u, x_i \rangle x_i$  egyenlőség, az  $M$  altér tetszőlegesen választott  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ortonormált bázisa mellett;*
2.  $\|p_M(u)\| \leq \|u\|$ ;
3.  $u - p_M(u) \in M^\perp$ .

*Bizonyítás:* Mivel  $M$  a  $V$  skalárisszorzatos tér egy véges dimenziós altér, ezért az  $M$  altérnek minden ortonormált bázisa, amint azt a 17.16. állításban Gram–Schmidt-ortogonalizációt követően láttuk. Legyen ez  $\{x_1, \dots, x_k\}$ . Írjuk fel ezzel az ortonormált rendszerrel a 17.12. legközelebbi pontról szóló, és a 17.14. Bessel-egyenlőtlenségről szóló állításokat.

<sup>2</sup>Majd mikor funkcionálanalízist és mértékelméletet tanulunk látjuk, hogy a feltétel még tovább gyengíthető, arra az esetre, mikor  $M$  a  $V$  Hilbert-tér egy zárt altére.

**17.18. állítás** (projekciós-tétel). *Legyen  $V$  egy skalárisszorzatos-tér, és  $M$  egy véges dimenziós altere. Ekkor*

$$M \oplus M^\perp = V.$$

*Bizonyítás:* Az  $M$  és az  $M^\perp$  egymástól diszjunkt alterek. Tetszőleges  $u \in V$  vektorra fennáll az

$$u = p_M(u) + (u - p_M(u))$$

nyilvánvaló egyenlőség. Itt az első vektorra  $p_M(u) \in M$ , és a második vektorra  $u - p_M(u) \in M^\perp$  a 17.17. állítás szerint. Ez azt jelenti, hogy  $M + M^\perp = V$  azonosság is teljesül, ahol  $M + M^\perp$  az  $M$  és az  $M^\perp$  orto-komplementerének a Minkowski-összege.

**17.19. állítás.** *Legyen  $V$  egy skalárisszorzatos-tér. Ekkor*

1. *Minden  $M \subseteq V$  véges dimenziós alter mellett  $M = M^{\perp\perp}$ ,*
2. *Minden olyan  $H \subseteq V$  részhalmazra, amelyre  $\text{lin } H$  véges dimenziós alter, fennáll az  $\text{lin } H = H^{\perp\perp}$  egyenlőség.*

*Bizonyítás:* Láttuk, hogy  $M \subseteq M^{\perp\perp}$  minden halmazra is igaz. Legyen a fordított tartalmazás igazolásához,  $u \in M^{\perp\perp}$ . A projekciós térel miatt  $u = u_1 + u_2$ , ahol  $u_1 \in M$  és  $u_2 \in M^\perp$ . Így

$$\langle u_2, u_2 \rangle = \langle u - u_1, u_2 \rangle = \langle u, u_2 \rangle - \langle u_1, u_2 \rangle = 0.$$

Itt a jobboldali első szám azért zérus, mert  $u \in M^{\perp\perp}$  és  $u_2 \in M^\perp$ , a második meg azért zérus, mert  $u_1 \in M$  és  $u_2 \in M^\perp$ . Azt kaptuk tehát, hogy  $u_2 = 0$ , amiből már látszik is, hogy  $u = u_1 \in M$ .

Tetszőleges  $H \subseteq V$  mellett  $\text{lin } H$  egy véges dimenziós alter, így a már igazolt állítás miatt  $\text{lin } H = (\text{lin } H)^{\perp\perp}$ . No de már korábban is láttuk, hogy  $H^\perp = (\text{lin } H)^\perp$ , így

$$\text{lin } H = (\text{lin } H)^{\perp\perp} = ((\text{lin } H)^\perp)^\perp = (H^\perp)^\perp = H^{\perp\perp}.$$

## 17.6. Ortonormált rendszer teljessége

**17.20. definíció** (T.O.N.R.). Legyen  $\{e_1, \dots, e_k\}$  egy ortonormált rendszer a  $V$  skalárisszorzatos-térben. Azt mondjuk, hogy ez egy *teljes ortonormált rendszer*, ha

$$\langle u, e_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \implies u = 0$$

implikáció teljesül.

Először is vegyük észre, hogy a fenti implikáció ekvivalens az  $\{e_1, \dots, e_k\}^\perp = \{0\}$  feltétellel.

**17.21. állítás.** Legyen  $V$  egy skalárisszorzatos-tér, és tekintsünk egy a továbbiakban rögzített  $\{e_1, \dots, e_n\}$  egy ortonormált rendszert. Az alábbi feltevések ekvivalensek.

1. Az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  vektorrendszer teljes ortonormált rendszer;
2. Az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  vektorrendszer ortonormált bázis;
3. minden  $x \in V$  mellett  $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$ ;
4. minden  $x, y \in V$  mellett  $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$ ;
5. minden  $x \in V$  mellett  $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2$ .

*Bizonyítás:* Körbe bizonyítunk:

1.  $\Rightarrow$  2. Mivel egy ortonormált rendszer egy zérus elemet nem tartalmazó ortogonális rendszer, ezért lineárisan független. Jelölje  $H = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Világos, hogy  $\text{lin } H$  véges dimenziós, ezért a projekciós térel előző következménye miatt  $\text{lin } H = H^{\perp\perp}$ . No de a teljesség szerint  $H^\perp = \{0\}$ , ergo

$$\text{lin } H = H^{\perp\perp} = 0^\perp = V.$$

Ez azt jelenti, hogy a  $H$  vektorrendszer egy lineárisan független generátorrendszer, ergo bázis.

2.  $\Rightarrow$  3. Már beláttuk a 17.16. állítás második felében.

3.  $\Rightarrow$  4. Jelölje  $x \in V$  mellett  $\xi_j = \langle x, e_j \rangle$  és  $y \in V$  mellett  $\eta_j = \langle y, e_j \rangle$ . A 3. feltevés szerint

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \xi_j e_j, \sum_{k=1}^n \eta_k e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \overline{\eta_k} \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j \overline{\eta_k} \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\eta_j} = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle.$$

4.  $\Rightarrow$  5. Az  $x = y$  speciális esetben 4. szerint

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} = \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

5.  $\Rightarrow$  1. Ha fennáll 5. és  $v \in \{e_1, \dots, e_n\}^\perp$ , akkor minden  $j$  mellett  $\langle v, e_j \rangle = 0$ , ezért

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j = 0.$$

emmiatt  $v = 0$  is fennáll. Ez azt jelenti, hogy  $\{e_1, \dots, e_n\}^\perp = \{0\}$ , ergo az  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ortonormált rendszer teljes.

A fejezet elején láttunk konkrét példát véges dimenziós skaláriesszorzatos-térre: egy rögzített bázisban felírt belsőszorzatot. Persze ebben a skaláriesszorzatban, a kiinduló bázis ortonormált bázissá is válik. Most azt látjuk, hogy a fenti példán kívül nem is lehet más skaláriesszorzatot definiálni. minden skaláriesszorzat ugyanis, valamely bázishoz tartozó belső szorzat. Pontosan ezt állítja a fenti 4-es tulajdonság.

Ezt a tényt a fontossága miatt külön is kiemeljük:

**17.22. következmény.** minden véges dimenziós skaláriesszorzatos-térben a skaláriesszorzat nem más, mint erre a skaláriesszorzatra nézve, de tetszőleges ortonormált bázishoz felírt belső szorzat.



## 18. fejezet

# Az adjungált operátor bevezetése

Az egész fejezetben  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti vektortér.

### 18.1. Riesz-reprezentáció véges dimenziós skalárisszorzatos-térben

**18.1. állítás** (Riesz-reprezentáció). *Legy  $V$  egy véges dimenziós skalárisszorzatos-tér. Ekkor minden  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen  $z_\varphi \in V$  vektor, amelyre minden  $x \in V$  mellett*

$$\varphi(x) = \langle x, z_\varphi \rangle$$

Ezt az egyetlen  $z_\varphi$  vektort nevezzük a  $\varphi$  lineáris funkcionált reprezentáló vektornak.

*Bizonyítás:* Először az unicitást lássuk be. Tegyük fel, hogy  $z_1, z_2 \in V$  is reprezentáló vektorok, azaz minden  $x \in V$  mellett

$$\langle x, z_1 \rangle = \varphi(x) = \langle x, z_2 \rangle.$$

Ekkor  $(z_1 - z_2) \perp x$  minden  $x \in V$ -re tehát  $z_1 - z_2 = 0$ , ergo  $z_1 = z_2$ .

Az egzisztencia igazolásához legyen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  egy ortonormált bázisa a  $V$  skalárisszorzatos-térnek. Tudjuk – lásd a 17.16. állítást –, hogy minden  $x \in V$  vektor  $x = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j$  alakú. Emiatt

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j\right) = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^n \langle x, \overline{\varphi(v_j)} v_j \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j \rangle.$$

Ha tehát bevezetjük a  $z_\varphi = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(v_j)} v_j$  jelölést, akkor készen is vagyunk.

A bizonyításból az is látszik, hogy amennyiben  $\{v_1, \dots, v_n\}$  a tér akármelyik ortonormált bázisa, akkor a reprezentáló vektort a

$$z_\varphi = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(v_i)} v_i$$

formula szolgáltatja. Mivel csak egyetlen reprezentáló vektor van, ezért ha például  $\{x_1, \dots, x_n\}$  egy másik ortonormált bázisa a térnek, akkor

$$\sum_{i=1}^n \overline{\varphi(v_i)} v_i = z_\varphi = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(x_i)} x_i.$$

### 18.2. Az adjungált operáció

**18.2. definíció** (adjungált, adjungált azonosság). *Legyen  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  és  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  véges dimenziós skalárisszorzatos-tér. Rögzített  $A \in L(V, W)$  lineáris operátor és rögzített  $w \in W$  vektor mellett tekintsük a*

$$\varphi_w = \langle \cdot, w \rangle_W \circ A$$

függvényt. Világos, hogy  $\varphi_w : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineáris funkcionál  $V$ -n, így a Riesz-reprezentációs tétel szerint létezik egyetlen  $w^* \in V$ , amelyre  $\varphi_w(v) = \langle v, w^* \rangle_V$  minden  $v \in V$  mellett teljesül.

Jelölje most  $A^*$  a  $w \mapsto w^*$  függvényt, tehát  $A^* : W \rightarrow V$ . Ekkor minden  $v \in V$  és  $w \in V$  mellett fennáll az ú.n. adjungált azonosság:

$$\langle Av, w \rangle_W = \varphi_w(v) = \langle v, w^* \rangle_V = \langle v, A^*w \rangle_V. \quad (\dagger)$$

Ezt az  $A^* : W \rightarrow V$  függvényt nevezük az  $A$  lineáris transzformáció adjungáltjának.  $\square$

**18.3. állítás.** Legyenek  $V, W$  skalárisszorzatos-terek, és  $A \in L(V, W)$  lineáris operátor. Ekkor az  $A^*$  adjungált az egyetlen  $W \rightarrow V$  függvény, amelyre a  $(\dagger)$  adjungált azonosság fennáll.  $\square$

**Bizonyítás:** Legyen  $B : W \rightarrow V$  olyan függvény, amelyre szintén fennáll adjungált azonosság, azaz

$$\langle v, Bw \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle$$

fennáll minden  $v \in V$  és  $w \in W$  mellett. Mivel a skalárisszorzás rögzített első változó mellett a második változóban additív, ezért  $\langle v, (A^* - B)w \rangle = 0$  fennáll minden  $v \in V$  és  $w \in W$  mellett. Speciálisan ez igaz  $v = (A^* - B)w$ -re is, ergo minden  $w \in W$ -re  $(A^* - B)w = 0$ . Ez éppen azt jelenti, hogy  $A^* = B$ .  $\square$

Látni fogjuk, hogy a  $(\dagger)$  adjungált azonosság szinte fontosabb mint a definíció. A definíció arra való, hogy megmutassuk: adott  $A \in L(V, W)$  lineáris transzformációhoz van olyan  $A^* : W \rightarrow V$  függvény, amelyre minden  $u \in W$  és minden  $w \in W$  mellett fennáll az adjungált azonosság:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle. \quad (\dagger)$$

Az adjungált unicitása, és összes fontos tulajdonsága az adjungált azonosságon alapul.

**Az adjungált függvény linearitása.** A 18.1. Riesz-reprezentációs tétel során meggondoltuk, hogy ha tetszőlegesen adott egy  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  ortonormált bázis, akkor

$$A^*w = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi_w(v_j)} v_j = \sum_{j=1}^n \overline{\langle Av_j, w \rangle}_W v_j = \sum_{j=1}^n \langle w, Av_j \rangle_W v_j.$$

Ebből már adódik, hogy  $A^* : W \rightarrow V$  lineáris operátor. Ugyanis a skalárisszorzat rögzített második változó mellett az első változóban lineáris, emiatt egy rögzített  $j$  esetén az  $w \mapsto \langle w, Av_j \rangle_W v_j$  a  $w$  változó lineáris függvénye. A fenti kiemelt sor szerint  $A^*$  ilyen függvények összegeként maga is lineáris.

Alternatív indoklást kapunk az adjungált operáció linearitására az  $(\dagger)$  adjungált azonosság háromszori felírásával. Itt kihasználjuk a tényt, hogy a skalárisszorzás rögzített első változó mellett a második változó konjugáltan lineáris függvénye.

$$\begin{aligned} \langle u, A^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle &= \langle Au, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \\ \bar{\alpha}_1 \langle Au, w_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle Au, w_2 \rangle &= \bar{\alpha}_1 \langle u, A^* w_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle u, A^* w_2 \rangle = \langle u, \alpha_1 A^* w_1 \rangle + \langle u, \alpha_2 A^* w_2 \rangle = \\ &\quad \langle u, \alpha_1 A^* w_1 + \alpha_2 A^* w_2 \rangle. \end{aligned}$$

Mivel ez minden  $u \in V$  és minden  $w_1, w_2 \in W$  esetén fennáll, ezért az

$$A^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 A^* w_1 + \alpha_2 A^* w_2$$

azonosság is teljesül.

**18.4. állítás.** Legyen  $V$  és  $W$  véges dimenziós skalárisszorzatos-tér. Rögzítsünk egy  $\{v_1, \dots, v_m\}$  ortonormált bázist  $V$ -ben, és rögzítsünk egy  $\{w_1, \dots, w_n\}$  ortonormált bázist  $W$ -ben. Legyen  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operátor és  $A^* \in L(W, V)$  az adjungáltja. Ekkor  $A$ -nak a fenti bázisokban rögzített mátrixa azonos  $A^*$  mátrix sorainak és oszlopainak felcseréléssel, majd konjugálásával kapott mátrix-szal.

Formálisan:

$$[A]_{i,j} = \overline{[A^*]_{j,i}}$$

minden  $j = 1, \dots, m$  és minden  $i = 1, \dots, n$  esetén.  $\square$

*Bizonyítás:*  $[A]_{i,j} = \langle Av_j, w_i \rangle = \langle v_j, A^* w_i \rangle = \overline{\langle A^* w_i, v_j \rangle} = \overline{[A^*]_{j,i}}$ , a 17.16. állítás, a  $(\dagger)$  adjungált azonosság, és a skaláriszorzás tulajdonságai szerint.

Most összefoglaljuk az adjungálás operáció legfontosabb tulajdonságait, amelyeket későbbi számolásaink során külön hivatkozás nélkül használunk.

**18.5. állítás.** Legyenek  $V$  és  $W$  véges dimenziós skaláriszorzatos terek,  $A, B \in L(V, W)$  lineáris operátorok. Ekkor

1.  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
2.  $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ ,
3.  $(A^*)^* = A$

*Ha  $I \in L(V)$  jelöli az identitás transzformációt, továbbá  $A, B \in L(V)$ , akkor*

4.  $I^* = I$ ,
5.  $(AB)^* = B^* A^*$ .

6. Az  $A$  lineáris operátor pontosan akkor reguláris ha  $A^*$  adjungált operáció is az. Ebben az esetben az adjungált operáció inverze éppen az inverz operáció adjungáltja, magyarul  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

*Bizonyítás:* Az első öt tulajdonság teljesen nyilvánvaló az adjungált mátrixának felírásából. Csak azért, hogy hangsúlyozzuk az adjungált azonosság hasznosságát a mátrixokra való hivatkozások nélküli indoklást is adunk.

1., 2.

$$\begin{aligned} \langle u, (\alpha A + B)^* w \rangle &= \\ \langle (\alpha A + B) u, w \rangle &= \alpha \langle Au, w \rangle + \langle Bu, w \rangle = \alpha \langle u, A^* w \rangle + \langle u, B^* w \rangle = \langle u, \bar{\alpha} A^* w \rangle + \langle u, B^* w \rangle = \\ &= \langle u, (\bar{\alpha} A^* + B^*) w \rangle \end{aligned}$$

Ez minden  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $u \in V$  és minden  $w \in W$  mellett, tehát  $(\alpha A + B)^* = \bar{\alpha} A^* + B^*$ .

3.  $\langle Au, w \rangle = \langle u, A^* w \rangle = \overline{\langle A^* w, u \rangle} = \overline{\langle w, A^{**} u \rangle} = \langle A^{**} u, w \rangle$ .
4.  $\langle u, Iv \rangle = \langle Iu, v \rangle = \langle u, I^* v \rangle$ .
5.  $\langle u, (AB)^* v \rangle = \langle ABu, v \rangle = \langle Bu, A^* v \rangle = \langle u, B^* A^* v \rangle$ .
6. A pontosan akkor reguláris, ha létezik  $B$ , amelyre  $AB = I$ , ami ekvivalens  $B^* A^* = I$ -vel, ami ekvivalens avval, hogy  $A^*$  reguláris. Világos, hogy ebben az esetben  $(A^*)^{-1} = B^* = (A^{-1})^*$ .

Felépítésünk sarokköve a skaláriszorzatos terek rangtétele. Legfontosabb következménye, hogy zérus vektoron kívül nincs olyan vektor, amely egyszerre  $A$  képteréhez is, de  $A^*$  magteréhez is hozzátartozik.

**18.6. állítás** (skaláriszorzatos rang-tétel). Legyenek  $V, W$  skaláriszorzatos terek,  $A \in L(V, W)$  lineáris operáció. Ekkor  $(\text{Im } A)^\perp = \ker A^*$  és  $(\ker A)^\perp = \text{Im } A^*$ . Emiatt

$$\begin{aligned} \text{Im } A \oplus \ker A^* &= W; & \text{Im } A \perp \ker A^*; \\ \ker A \oplus \text{Im } A^* &= V; & \ker A \perp \text{Im } A^*, \end{aligned}$$

így  $\rho(A) = \rho(A^*)$ .

*Bizonyítás:* Az adjungált azonosság szerint egy  $w \in W$  vektorra az alábbi feltevések ekvivalensek

$$\begin{aligned} w \in (\text{Im } A)^\perp &\iff \langle Av, w \rangle = 0 \forall v \in V \iff \langle v, A^* w \rangle = 0 \forall v \in V \iff A^* w \in V^\perp \iff A^* w = 0 \\ &\iff w \in \ker A^*, \end{aligned}$$

ami igazolja az  $(\text{Im } A)^\perp = \ker A^*$  azonosságot.

A projekciós tételt alkalmazva:  $\text{Im } A = (\text{Im } A)^{\perp\perp} = (\ker A^*)^\perp$ . Ez persze az  $A^*$  adjungált operátorra is igaz, ergo  $\text{Im } A^* = (\ker A)^\perp$ .

Újra felírva a projekciós tételt:  $W = \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp = \text{Im } A \oplus \ker A^*$  valamint  $V = \ker A \oplus (\ker A)^\perp = \ker A \oplus \text{Im } A^*$ .

A direktösszegek dimenziójára vonatkozó állítás és a rang-defektus tételnek az adjungált operációra vonatkozó alakja szerint  $\rho(A) = \dim W - \nu(A^*) = \rho(A^*)$ .

### 18.3. Önadzungált transzformációk

**18.7. definíció.** Legyen  $V$  egy skaláriszorzatos-tér, és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Azt mondjuk, hogy az  $A$  transzformáció *önadzungált*, ha  $A^* = A$ .

**18.8. állítás.** A skaláriszorzatos-tér egy  $A$  lineáris transzformációja pontosan akkor önadzungált, ha minden  $u, w \in V$  mellett

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

Ha felírjuk a transzformáció mátrixát egy ortonormált bázisban, akkor messziről látszik, hogy a transzformáció önadzungált vagy sem.

**18.9. állítás.** A skaláriszorzatos-tér egy  $A$  lineáris transzformációja pontosan akkor önadzungált, valamely ortonormált bázisban felírt mátrixára

$$[A]_{i,j} = \overline{[A]_{j,i}}.$$

Persze a fenti tulajdonság, ha egy ortonormált bázis mellett teljesül, akkor  $A$  önadzungált, ezért minden más ortonormált bázisban is igaz marad.

A skaláriszorzatos-terek rangtétele, – tehát a 18.6. állítás – önadzungált transzformációk mellett azt jelenti, hogy a  $\ker A$  és az  $\text{Im } A$  egymásra merőleges alterek, amelyek direktösszege az egész tér. Később látjuk majd, hogy ez nem csak önadzungált transzformációkra igaz, hanem transzformációk egy sokkal szélesebb osztályára<sup>1</sup> is teljesül.

### 18.4. Unitér transzformációk

**18.10. definíció.** Legyen  $V$  egy skaláriszorzatos-tér, és  $B \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Azt mondjuk, hogy  $B$  unitér, ha  $B$  reguláris és  $B^{-1} = B^*$ .

**18.11. állítás.**  $A B \in L(V)$  transzformációra tett alábbi feltevések ekvivalensek.

1.  $B$  unitér;
2. minden  $u, v \in V$  mellett  $\langle Bu, Bv \rangle = \langle u, v \rangle$ .
3.  $B$  egy ortonormált bázist ortonormált bázisra képez.

*Bizonyítás:* Körben bizonyítunk:

1.  $\Rightarrow$  2.  $\langle Bu, Bv \rangle = \langle u, B^* Bv \rangle = \langle u, B^{-1} Bv \rangle = \langle u, v \rangle$ .
2.  $\Rightarrow$  3. Legyen  $u_1, \dots, u_n$  egy ortonormált bázis. Ennek  $B$  képére  $\langle Bu_j, Bu_k \rangle = \langle u_j, u_k \rangle = \delta_{j,k}$ . Ez azt jelenti, hogy a  $\{Bu_1, \dots, Bu_n\}$  egy ortonormált rendszer. A tér  $n$  dimenziós, hiszen  $\{u_1, \dots, u_n\}$  egy bázis. Így  $\{Bu_1, \dots, Bu_n\}$  egy maximális lineárisan független rendszerként maga is bázis.
3.  $\Rightarrow$  1. Vegyünk  $V$ -ben egy  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ortonormált bázist. Feltevésünk szerint a  $\{Bu_1, \dots, Bu_n\}$  egy ortonormált rendszer. Így minden  $j, k$  mellett

$$\langle u_k, (B^* B - I) u_j \rangle = \langle u_k, B^* Bu_j \rangle - \langle u_k, u_j \rangle = \langle Bu_k, Bu_j \rangle - \langle u_k, u_j \rangle = \delta_{k,j} - \delta_{k,j} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az  $(B^* B - I)u_j$  vektor merőleges az  $\{u_1, \dots, u_n\}$  bázis minden elemére. Az ortonormált rendszer teljessége szerint ez csak úgy lehetséges, ha minden  $j$  indexre  $B^* Bu_j = Iu_j$ . No de a lineáris transzformációk bázison egyértelműen meghatározottak, ezért  $B^* B = I$ . Ez azt jelenti, hogy  $B$  reguláris és  $B^{-1} = B^*$ .

<sup>1</sup>Lásd a 19.4. állítást

Egy ortonormált bázisban felírva a  $B$  transzformáció mátrixát, nagyon könnyen észrevehető, hogy unitér transzformációval állunk szemben. Ugyanis  $B$  mátrixának  $j$ -edik oszlopa a  $j$ -edik bázis elem képe. Így ortonormált bázisból kiindulva a transzformáció pontosan akkor unitér, ha a felírt  $[B]$  mátrix oszlopai egy ortonormált rendszert alkotnak az eredeti bázisban felírt belső szorzattal.

**18.12. állítás.** *Legyen  $V$  egy skalárrisztorzatos-tér és  $B \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. A  $B$  transzformáció pontosan akkor unitér, ha tetszőleges ortonormált bázisban felírt mátrixának oszloprendszeré egy ortonormált rendszer.*

Egyszerűbben kifejezve, ha  $B$  ortonormált bázisban felírt mátrixának elemei  $\beta_{i,j}$ , akkor a  $B$  unitér voltnak szükséges és elegendő feltétele, hogy minden  $i, j$ -re  $\sum_{k=1}^n \beta_{k,i} \overline{\beta_{k,j}} = \delta_{i,j}$ . Ultra fontos következmény az alábbi:

**18.13. állítás.** *Tegyük fel, hogy a  $V$  skalárrisztorzatos-tér, egy  $A$  lineáris transzformációjának mátrixát felírtuk két ortonormált bázisban. Legyen  $\{u_1, \dots, u_n\}$  a régi ortonormált bázis és  $\{e_1, \dots, e_n\}$  az új ortonormált bázis. Jelölje  $B$  az áttérés lineáris transzformációt, tehát  $Bu_j = e_j$  minden  $j = 1, \dots, n$  mellett. Ekkor*

$$[A]_{\text{új}} = [\overline{B}]^T [A]_{\text{régi}} [B].$$



## 19. fejezet

# Normális transzformációk diagonalizálhatósága

**19.1. definíció** (normális lineáris transzformáció). A  $V$  skaláriszorzos-tér egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációját *normálisnak* nevezzük, ha

$$N^*N = NN^*$$

tehát, ha a transzformáció kommutál az adjungáltjával.  $\square$

Nyilvánvaló példák normális transzformációkra:

1. Ha  $N$  önadjungált;
2. Ha  $N$  reguláris és  $N^{-1} = N^*$ ;<sup>1</sup>
3. Ha létezik olyan  $q$  polinom, amelyre  $N^* = q(N)$ ;
4. Ha  $N$  egy ortonormált bázisban diagonalizálható, akkor ebben a bázisban felírt matrixszára, a mátrix kommutál az adjungált mátrixszal, így az eredeti transzformáció is normális.

Ki fog derülni a fejezetben, hogy a fenti példák közül a 3. és a 4. le is fedi valamennyi normális transzformációt. Az unitér transzformációk olyanok, amelyek  $\mathbb{R}$  feletti esetben nem diagonalizálhatók.

**19.2. állítás.** *Egy normális transzformáció polinomja is normális.*  $\square$

*Bizonyítás:* Először gondoljuk meg, hogy  $(N^j)^*$  és  $N^k$  kommutálnak minden  $j, k \geq 0$  mellett. Ez indukcióval könnyű:

$$\begin{aligned} (N^j)^*N^k &= (N^*)^jN^k = (N^*)^{j-1}N^*NN^{k-1} = (N^*)^{j-1}NN^*N^{k-1} \\ &= N(N^*)^{j-1}N^{k-1}N^* = N(N^{j-1})^*N^{k-1}N^* = NN^{k-1}(N^{j-1})^*N^* = N^k(N^*)^j = N^k(N^j)^*. \end{aligned}$$

Most legyen  $p \in \mathbb{K}[t]$  egy plinom. Ha  $p(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j t^j$ , akkor

$$\begin{aligned} (p(N))^*p(N) &= \left( \sum_{j=0}^m \alpha_j N^j \right)^* \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k N^k \right) = \left( \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j (N^j)^* \right) \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k N^k \right) \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \bar{\alpha}_j \alpha_k (N^j)^* N^k = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \alpha_k \bar{\alpha}_j N^k (N^j)^* \\ &= \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k N^k \right) \left( \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j (N^j)^* \right) = \left( \sum_{k=0}^m \alpha_k N^k \right) \left( \sum_{j=0}^m \alpha_j N^j \right)^* = p(N)(p(N))^*. \end{aligned}$$

Ezt kellett belátni.

**19.3. állítás.** *Legyen  $N$  egy normális transzformáció. Ekkor  $\ker N^* = \ker N$ .*  $\square$

<sup>1</sup>Az ilyen transzformációt nevezzük *unitér* transzformációt.

*Bizonyítás:* Legyen  $u \in V$ . Ekkor

$$\|Nu\|^2 = \langle Nu, Nu \rangle = \langle u, N^* Nu \rangle = \langle u, NN^* u \rangle = \langle N^* u, N^* u \rangle = \|N^* u\|^2.$$

Ez azt jelenti, hogy  $Nu = 0$  akkor és csak akkor áll fenn, ha  $N^* u$  is fennáll.

Korábban láttuk, hogy tetszőleges lineáris transzformáció mellett  $(\text{Im } A)^\perp = \ker A^*$ . Normális transzformáció esetén ez még egyszerűbb:

**19.4. állítás** (Normális transzformációk rangtétele). *Legyen  $V$  skalárisszorzatos-tér és  $N \in L(V)$  egy normális lineáris transzformáció. Ekkor*

$$\text{Im } N \oplus \ker N = V \quad \text{és} \quad \text{Im } N \perp \ker N.$$

Tudjuk, hogy  $\lambda \in \sigma(N)$  akkor és csak akkor, ha  $\ker(N - \lambda I) \neq \{0\}$ . Mivel normális transzformáció mellett az  $N - \lambda I$ , az  $N$ -nek polinomja lévén, maga is normális, ezért az  $\ker(N - \lambda I)$  és  $\ker(N^* - \bar{\lambda} I)$  azonos alterek. Azt gondoltuk meg tehát, hogy normális  $N$  mellett tetszőleges  $u$  vektorra  $Nu = \lambda u$  akkor és csak akkor igaz, ha  $N^* u = \bar{\lambda} u$ .

**19.5. állítás.** *Legyen  $N$  egy normális transzformáció a  $V$  skalárisszorzatos-téren. Ekkor*

1.  *$A \lambda \in \sigma(N)$  akkor és csak akkor, teljesül, ha  $\bar{\lambda} \in \sigma(N^*)$ ;*
2. *Minden  $\lambda \in \mathbb{K}$  mellett  $\ker(N - \lambda I) = \ker(N^* - \bar{\lambda} I)$ ;*
3. *Különböző sajátértékekhez tartozó sajátalerek merőlegesek egymásra, azaz  $\ker(N - \lambda I) \perp \ker(N - \mu I)$ , ahol  $\lambda \neq \mu$  és  $\lambda, \mu \in \sigma(N)$ .*
4. *Ha  $N = N^*$ , azaz  $N$  önadjungált transzformáció, akkor  $\sigma(N) \subseteq \mathbb{R}$ , azaz önadjungált transzformációinak valósak a sajátértékei.*

*Bizonyítás:* Az első két állítást már meggondoltuk.

Legyen  $u \in \ker(N - \lambda I)$  és  $v \in \ker(N - \mu I)$ . Ekkor persze  $Au = \lambda u$  és  $N^* v = \bar{\mu} v$ . Így

$$(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle - \langle u, \bar{\mu} v \rangle = \langle Nu, v \rangle - \langle u, N^* v \rangle = 0.$$

Mivel a két sajátérték nem azonosak, ezért  $u \perp v$ . Ezt kellett belátni.

Legyen most  $N$  önadjungált, és  $\lambda \in \sigma(N)$  egy sajátérték. Van tehát olyan  $u \neq 0$  vektor, amelyre  $Nu = \lambda u$  és  $N^* u = \bar{\lambda} u$ . Ekkor

$$(\lambda - \bar{\lambda}) u = Nu - N^* u = Nu - Nu = 0.$$

Így persze az  $u \neq 0$  feltétel miatt  $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ , tehát  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Eddig minden gondolat  $\mathbb{K}$  feletti skalárisszorzatos-téren volt. A komplex és a valós diagonalizálhatóság közös magja a következő állítás.

**19.6. állítás.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti skalárisszorzatos-tér, és  $N \in L(V)$  egy normális transzformáció. Ekkor  $N$  minimálpolinomja különböző, normált, irreducibilis polinomok elsőfokú hatványainak szorzata.*

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $p^k | m$ , ahol  $m$  a minimálpolinom,  $p$  egy irreducibilis polinom, és  $k \geq 2$ . Láttuk, hogy bevezetve a  $V_1 = \ker p^k(N)$ , és  $A_1 = N|_{V_1}$  jelöléseket, az  $A_1$  minimálpolinomja  $p^k$ . Tehát ha  $B = p(N)$ , akkor  $B|_{V_1}$  transzformáció  $k$ -ad rendben nillpotens, létezik tehát  $v \in V_1$ , amelyre  $B^{k-1} v \neq 0$ , de  $B^k v = 0$ . Mivel  $k-1 \geq 1$ , ezért találtunk  $x = B^{k-1} v \in \text{Im } p(N)$  nem zérus vektort, amelyre  $x \in \ker(p(N))$ . Ez ellentmond a normális transzformációk rangtételének.

### Normális transzformációk diagonalizálhatósága komplex skalárisszorzatos-tereken

A fenti gondolat azonnali következménye a normális transzformációk diagonalizálhatósága  $\mathbb{C}$  felett.

**19.7. állítás.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skalárisszorzatos-tér. Ekkor minden  $N$  normális transzformáció ortonormált bázisban diagonalizálható. Ez azt jelenti, hogy létezik a térfelület  $N$  sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban felírva  $N$  mátrixát egy diagonális mátrixot kapunk, amelynek diagonálisában  $N$  sajátértékei vannak.

*Bizonyítás:* Az algebra alaptétele szerint irreducibilis  $\mathbb{C}$  feletti polinom csak első fokú polinom lehet. Így a minimálpolinom, a normalitást kihasználva a fenti (19.6.) gondolat alapján,

$$m(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_s).$$

Ezért a transzformációk redukálására vonatkozó 11.2. állítás szerint

$$V = \ker(N - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus \ker(N - \lambda_s I).$$

Most végezzünk Gram–Schmidt-ortogonalizációt minden egyes fenti sajátaltérben külön-külön, majd egyesítsük a kapott ortogonális rendszereket az egész  $V$  skalárisszorzatos-tér ortogonális bázisává. Így  $N$  sajátvektoraiból álló ortonormált bázist kapunk.

Összefoglalva a komplex test feletti esetet: *Egy transzformáció pontosan akkor normális, ha ortonormált bázisban diagonalizálható.*

### Szimmetrikus transzformációk diagonalizálhatósága valós skalárisszorzatos-tereken

A valós test feletti eset fontosságát hangsúlyozandó, az önadjungált transzformációkra külön elnevezést vezetünk be.

**19.8. definíció** (szimmetrikus transzformáció). Egy  $\mathbb{R}$  feletti skalárisszorzatos-tér egy  $A \in L(V)$  lineáris transzformációját *szimmetrikusnak* mondjuk, ha az önadjungált, azaz  $A^* = A$ .

Egy kicsit sem nyilvánvaló, hogy miért lenne egy szimmetrikus transzformáció sajátértéke. Rögtön kiderül, hogy minden sajátértéke.

Ha  $\dim V = 1$ , akkor minden  $A : V \rightarrow V$  transzformációra, ha  $Av \neq 0$ , akkor van olyan  $\lambda \in \mathbb{R}$ , hogy  $Av = \lambda v$ . Azt kaptuk tehát, hogy 1 dimenziós téren értelmezett minden lineáris transzformációnak van sajátértéke, és minden zérustól különböző vektor sajátvektor is.

Most nézzük csak 2 dimenzióban. Ha  $A$  mátrixa egy ortonormált bázisban  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  akkor  $A$  karakterisztikus polinomja  $k(t) = (t - a)(t - c) - b^2 = t^2 - (a + c)t + a^2 - b^2$ . E polinomnak van valós gyöke, tehát van  $\lambda_1 \in \sigma(A)$ , tehát van  $u \in V$ ,  $\|u\| = 1$  vektor, amelyre  $Au = \lambda u$ . Legyen most  $v \in V$  olyan vektor, amelyre  $v \perp u$  és  $\|v\| = 1$ . Mivel a térfelület 2 dimenziós, ezért van ilyen vektor, és  $\text{lin}\{v\} = u^\perp$ . Világos, hogy

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy  $u^\perp$  egy-dimenziós, az  $A$ -ra nézve invariáns altér. minden nem zérus vektor az  $u^\perp$  altérben egyben  $A$  sajátvektora is. Meggondoltuk tehát, hogy egy 2 dimenziós téren értelmezett szimmetrikus transzformációnak van sajátvektorokból ortonormált bázisa.

**19.9. állítás.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{R}$  feletti skalárisszorzatos-tér. Ekkor minden  $A$  szimmetrikus transzformáció ortonormált bázisban diagonalizálható. Ez azt jelenti, hogy létezik a térfelület  $A$  sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban felírva  $A$  mátrixát egy diagonális mátrixot kapunk, amelynek diagonálisában  $A$  sajátértékei vannak.

*Bizonyítás:* Az algebra alaptétele szerint irreducibilis  $\mathbb{R}$  feletti polinom csak első- vagy másodfokú polinom lehet. Mivel  $A$  szimmetrikus, ezért persze normális is. Így a minimálpolinom, a transzformáció normalitását használó 19.6. állítás alapján,

$$m = p_1 \dots p_s$$

alakú, ahol  $p_1, \dots, p_s$  egymástól különböző, normált, irreducibilis, legfeljebb másodfokú polinomok. Ezért a transzformációk redukálására vonatkozó 11.2. állítás szerint a térfelület előáll mint legfeljebb két dimenziós invariáns alterei direktösszege. minden ilyen legfeljebb 2 dimenziós invariáns altérben van  $A$  sajátvektoraiból

álló bázis, amelyeket egyesítve az egész  $V$  vektortér egy egy olyan bázisát kapjuk, amelynek minden elem az  $A$  sajátvektora. Ezért

$$V = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_s I).$$

Most végezzünk Gram–Schmidt-ortogonalizációt minden egyes fenti  $A - \lambda_j I$  sajátaltérben külön-külön, majd egyesítsük a kapott ortogonális rendszereket az egész  $V$  skaláriszorzatos-tér ortogonális bázisává. Így  $A$  sajátvektoraiból álló ortonormált bázist kapunk.

## 20. fejezet

# Ortogonalis projekciók

**20.1. definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $P \in L(V)$  transzformáció egy *projekció*, ha az idempotens, tehát fennáll a  $P^2 = P$  azonosság.

**20.2. állítás.** *Egy  $V$  skalárisszorzatos-tér minden  $P$  projekciójára*

$$\ker P \oplus \operatorname{Im} P = V.$$

**20.3. definíció.** A  $V$  skalárisszorzatos-tér egy  $P \in L(V)$  lineáris transzformációját *ortogonalis projekciónak* mondunk, ha

1.  $P^2 = P$  és

2.  $\ker P \perp \operatorname{Im} P$ .

**20.4. állítás.** *Ha  $P \in L(V)$  a  $V$  skalárisszorzatos-tér egy ortogonalis projekciója, akkor*

$$(\ker P)^\perp = \operatorname{Im} P.$$

*Bizonyítás:* A definíció szerint  $\operatorname{Im} P \subseteq (\ker P)^\perp$ , no de a két altér azonos dimenziós, ezért azonosak is.

Láttuk korábban, hogy ha  $M$  egy altere a  $V$  skalárisszorzatos-térnek, akkor az a  $P_M \in L(V)$  transzformáció, amely minden  $v \in V$  vektorhoz hozzárendeli a  $v$ -hez  $M$ -ben legközelebb eső egyetlen  $P_M(v)$  pontot, egy ortogonalis projekció, hiszen  $P_M|_M = I|_M$ , amiből  $P_M^2 = P_M$ , de azt is láttuk, hogy  $\operatorname{Im} P_M = M$  és  $\ker P_M = M^\perp$ .

A következő állítás szerint nincs más tipusú ortogonalis projekció, mint valamely  $M$  altérre eső merőleges vetítés.

**20.5. állítás.** *Legyen  $V$  egy skalárisszorzatos-tér, és  $P \in L(V)$  egy ortogonalis projekció. Jelölje  $M = \operatorname{Im} P$ . Ekkor*

$$P = P_M.$$

**20.6. állítás.** *Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció a  $V$  skalárisszorzatos-tér felett. Az  $A$  pontosan akkor ortogonalis projekció, ha  $P^* = P$  és  $P^2 = P$ .*

*Bizonyítás:* Láttuk korábban hogy egy  $P_M$  merőleges vetítés önadjugált is, idempotens is. No de minden ortogonalis projekció  $P_M$  alakú, valamely  $M$  altér megválasztása mellett, ezért  $A$ -ra is igaz, hogy önadjungált és idempotens.

Megfordítva, ha  $A$  önadjungált, akkor a skalárisszorzatos rang tétel szerint  $(\ker A)^\perp = \operatorname{Im} A^* = \operatorname{Im} A$ , amiből persze  $\ker A \perp \operatorname{Im} A$  már könnyen következik.

Mivel minden  $P$  ortogonalis projekció  $P = P_M$  alakú, ezért a Bessel-egyenlőség ortogonalis projekcióra is igaz:

**20.7. állítás (Bessel).** *Minden  $P \in L(V)$  ortogonalis projekcióra és minden  $v \in V$  vektorra  $\|Pv\| \leq \|v\|$ .*

*Bizonyítás:* Jelölje  $M = \operatorname{Im} P$ . Ekkor  $\|Pv\| = \|P_M v\| \leq \|v\|$ .

**20.8. állítás.** Legyen  $P, Q \in L(V)$  ortogonális projekció. A  $QP = 0$  pontosan akkor teljesül, ha  $\text{Im } P \perp \text{Im } Q$ .  $\square$

Bizonyítás: Legyen  $u \in \text{Im } P$  és  $v \in \text{Im } Q$ . Ekkor

$$\langle u, v \rangle = \langle Pu, Qv \rangle = \langle Q^*Pu, v \rangle = \langle QPu, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0.$$

Evvel igazoltuk, hogy  $QP = 0$  esetén  $\text{Im } P \perp \text{Im } Q$ .

Megfordítva, tetszőleges  $u \in V$  mellett  $Pu \in \text{Im } P$  és  $QPu \in \text{Im } Q$ . Így

$$\|QPu\|^2 = \langle QPu, QPu \rangle = \langle Q^*QPu, Pu \rangle = \langle Q^2Pu, Pu \rangle = \langle QPu, Pu \rangle = 0.$$

**20.9. definíció** (ortogonális projekciók merőlegessége). Az  $Q$  és  $P$  ortogonális projekciókat egymásra merőlegesnek mondjuk, ha  $QP = 0$  fennáll. Jelölés:  $Q \perp P$ .  $\square$

Világos tehát, hogy  $QP = 0$ ,  $\text{Im } P \perp \text{Im } Q$  és  $PQ = 0$  ekvivalens megfogalmazásai  $Q \perp P$ -nak, amennyiben  $P, Q \in L(V)$  ortogonális projekciók. Az  $M_1, M_2 \subseteq V$  alerek esetén  $P_{M_1} \perp P_{M_2}$  pontosan akkor, ha  $M_1 \perp M_2$ .

**20.10. állítás.** Legyenek  $P_1, \dots, P_r$  ortogonális projekciók. Jelölje  $P = \sum_{j=1}^r P_j$  ezek összegét. A  $P$  összeg pontosan akkor ortogonális projekció, ha  $P_i \perp P_j$  minden  $i \neq j$  mellett.  $\square$

## 20.1. Ortogonális transzformációk lineáris kombinációja

Olyan nem zérus ortogonális projekciók lineáris kombinációit vizsgáljuk, amelyek összege az identikus transzformáció. Mivel az identikus transzformáció egyben projekció is, ezért az előző tételt használva azt kapjuk, hogy az összeandó projekciók még egymásra merőlegesek is.

**20.11. állítás** (komplex együtthatók). Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti skaláriszszorozatos-tér. Tegyük fel, hogy  $P_1, \dots, P_r \in L(V)$  olyan ortogonális projekciók, amelyekre

1.  $P_j \neq 0$  minden  $j = 1, \dots, r$  mellett.

2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ .

Legyenek a  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \mathbb{K}$  (nem feltétlenül különböző) számok tetszőlegesen rögzítve, és jelölje  $N = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ . Ekkor az  $N$  egy normális transzformáció, amelynek spektrumára  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .  $\square$

Bizonyítás: A feltétel szerint az ortogonális projekciók összege az identikus transzformáció, tehát az összeg is egy ortogonális projekció. Emiatt a  $P_j$  projekciók egymásra páronként merőlegesek, így

$$N^*N = \sum_{j=1}^r |\lambda_j|^2 P_j = NN^*.$$

Most megmutatjuk, hogy  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \sigma(N)$ . Legyen  $u_j \in \text{Im } P_j$  egy nem zérus vektor, azaz  $u_j \neq 0$ . Ilyen vektor létezik, hiszen  $P_j \neq 0$ . Világos, hogy minden  $k$  mellett  $P_k(u_j) = P_k(P_j(u_j)) = P_k P_j(u_j) = \delta_{k,j} u_j$ . Így

$$Nu_j = \left( \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k \right) u_j = \sum_{k=1}^r \lambda_k \delta_{k,j} u_j = \lambda_j u_j,$$

ami pont azt jelenti, hogy  $\lambda_j$  az  $N$  transzformáció egy sajátertéke.

Most azt mutatjuk meg, hogy  $\sigma(N) \subseteq \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . Legyen  $\mu \in \sigma(N)$ , azaz  $Ns = \mu s$  valamely  $s \neq 0$  vektorra. Jelölje  $s_j = P_j s \in \text{Im } P_j$ , minden  $j = 1, \dots, r$  mellett. Itt

$$s = Is = \left( \sum_{j=1}^r P_j \right) s = \left( \sum_{j=1}^r P_j s \right) = \sum_{j=1}^r s_j.$$

Ezért

$$\sum_{j=1}^r \mu s_j = \mu \sum_{j=1}^r s_j = \mu s = Ns = \left( \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j \right) s = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j s = \sum_{j=1}^r \lambda_j s_j.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\sum_{\substack{j=1 \\ s_j \neq 0}}^r (\lambda_j - \mu) s_j = 0. \quad (\dagger)$$

Itt a baloldali szummának van legalább egy tagja, hiszen  $0 \neq s = \sum_{j=1}^r s_j$ . Az  $\{s_j : j = 1, \dots, r\}$  egy ortogonális rendszer, hiszen a  $P_j$  projekciók egymásra merőlegesek, ami ekvivalens avval, hogy  $\text{Im } P_k \perp \text{Im } P_j$  minden  $k \neq j$  mellett. Így az  $\{s_j : j = 1, \dots, r, s_j \neq 0\}$  vektorrendszer, zérus elemet nem tartalmazó ortogonális rendszerként lineárisan független rendszer. Ez azt jelenti, hogy a  $(\dagger)$  lineáris kombináció együtthatói a test nullelemei, ergo  $\lambda_j - \mu = 0$  minden szóba jövő  $j$ -re, azaz minden olyan  $j$  mellett, amelyre  $s_j \neq 0$ . A már igazoltak szerint  $\mu = \lambda_j \in \sigma(N)$ . Ezt kellett belátni.

**20.12. állítás.** *Tegyük fel, hogy olyan  $P_1, \dots, P_r$  ortogonális projekcióra, amelyek összege az identikus transzformáció, és a tetszőlegesen megválasztott  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  számokra  $N = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ . Ekkor minden  $q \in \mathbb{K}[t]$  polinom mellett  $q(N) = \sum_{j=1}^r q(\lambda_j) P_j$ .*

*Bizonyítás:* Először gondoljuk meg azt, hogy minden  $l \geq 0$  mellett  $N^l = \sum_{j=1}^r \lambda_j^l P_j$ . Ha  $l = 0$ , akkor az ortogonális projekciók összege az identitás feltevést kapjuk. Ha az állítás igaz  $l$ -ig, akkor  $l+1$ -re:

$$N^{l+1} = N^l N = \left( \sum_{j=1}^r \lambda_j^l P_j \right) \left( \sum_{h=1}^r \lambda_h P_h \right) = \sum_{j=1}^r \sum_{h=1}^r \lambda_j^l \lambda_h P_j P_h = \sum_{j=1}^r \lambda_j^{l+1} P_j.$$

Itt azt használtuk ki, hogy amennyiben az ortogonális projekciók összege is egy ortogonális projekció, akkor  $P_j P_h = \delta_{j,h} P_j^2 = \delta_{j,h}$ . No de, ha a  $q$  polinom  $q(t) = \sum_{l=0}^m \alpha_l t^l$  alakú, akkor

$$\begin{aligned} q(N) &= \sum_{l=0}^m \alpha_l N^l = \sum_{l=0}^m \alpha_l \left( \sum_{j=1}^r \lambda_j^l P_j \right) = \sum_{l=0}^m \sum_{j=1}^r \alpha_l \lambda_j^l P_j \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{l=0}^m \alpha_l \lambda_j^l P_j = \sum_{j=1}^r \left( \sum_{l=0}^m \alpha_l \lambda_j^l \right) P_j = \sum_{j=1}^r q(\lambda_j) P_j. \end{aligned}$$

Ezt kellett belátni.

### Valós együtthatós lineáris kombináció

Most nézzük a valós együtthatós lineáris kombinációk esetét.

**20.13. állítás.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti skaláriszorzatos-tér. Tegyük fel, hogy  $P_1, \dots, P_r \in L(V)$  olyan ortogonális projekciók, amelyekre*

1.  $P_j \neq 0$  minden  $j = 1, \dots, r$  mellett.
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ .

*Legyenek a  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \mathbb{R}$  (nem feltétlenül különböző) valós számok tetszőlegesen rögzítve, és jelölje  $N = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ . Ekkor az  $N$  egy önadjungált transzformáció, amelynek spektrumára  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .*

*Bizonyítás:* Mivel az itt szerpelő  $\lambda_j$  számok valósak, ezért azonosak a konjugáltjukkal. Így

$$N^* = \sum_{j=1}^r \overline{\lambda_j} P_j^* = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j = N.$$

### Egy abszolútértékű együtthatókkal képzett lineáris kombináció

Most nézzük az olyan lineáris kombinációk esetét, amikor az együtthatók 1 abszolútértékű számok.

**20.14. állítás.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti skalárisszorzatos-tér. Tegyük fel, hogy  $P_1, \dots, P_r \in L(V)$  olyan ortogonális projekciók, amelyekre*

1.  $P_j \neq 0$  minden  $j = 1, \dots, r$  mellett.
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ .

*Legyenek a  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subseteq \mathbb{K}$  (nem feltétlenül különböző), 1 abszolútértékű számok tetszőlegesen rögzítve, és je-lölje  $N = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ . Ekkor az  $N$  egy unitér transzformáció transzformáció, amelynek spektrumára  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .*  $\square$

*Bizonyítás:*  $N$  spektruma a zérust nem tartalmazza, tehát  $N$  reguláris. Persze

$$NN^* = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 P_j = \sum_{j=1}^n P_j = I$$

ami azt jelenti, hogy  $N^{-1} = N^*$ .  $\square$

## 21. fejezet

# Spektrális felbontások

A KÖZÖS MAGJA az úgynévezett spektrális felbontási tételeknek az identitikus operáció alábbi felbontása.

**21.1. állítás.** *Tegyük fel, hogy  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti skaláriszorzatos-tér, és tegyük fel, hogy az  $M_1, \dots, M_r$  altérerekre*

$$V = M_1 \oplus \dots \oplus M_r, \quad \text{ahol } M_j \perp M_k \text{ minden } j \neq k.$$

*Jelölje  $P_j$  az  $M_j$  altérre való merőleges vetítést. Ekkor*

$$I = \sum_{j=1}^r P_j$$

*és persze  $P_j \perp P_k$  minden  $j \neq k$  mellett.*

*Bizonyítás:* minden  $s \in V$  vektor egyértelműen előáll  $s = \sum_{j=1}^r s_j$  alakban, ahol  $s_j \in M_j$ . Felhasználva, hogy  $P_j|M_j = \text{id}$  és  $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r M_k \subseteq M_j^\perp = \ker P_j$  minden  $k \neq j$  mellett

$$\left( \sum_{j=1}^r P_j \right) s = \sum_{j=1}^r P_j s = \sum_{j=1}^r P_j \left( s_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r s_k \right) = \sum_{j=1}^r \left( P_j s_j + P_j \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r s_k \right) \right) = \sum_{j=1}^r s_j = Is. \quad \square$$

Emlékezzünk arra, hogy ha  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  az  $N$  normális transzformáció sajátértékei, akkor bevezetve az  $M_i = \ker(N - \lambda_i I)$  jelölést

$$M_1 \oplus \dots \oplus M_r \subseteq V \quad \text{ahol } M_j \perp M_k \text{ minden } j \neq k.$$

Még azt is láttuk, hogy  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  esetben itt egyenlőség is van, de azt is tudjuk, hogy az egyenlőség még a  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  és  $N^* = N$  esetben is fennáll.

### 21.1. Komplex eset

#### Normális transzformáció

**21.2. állítás** (spektrális felbontás). *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skaláriszorzatos-tér, és  $N \in L(V)$  egy normális lineáris transzformáció. Jelölje  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  az  $N$  különböző sajátértékeit. Láttuk, hogy  $N$  diagonalizálható, ezért  $k \geq 1$ . Jelölje  $P_j$  a  $\ker\{N - \lambda_j I\}$  altérre való merőleges vetítést. Ekkor*

1. minden  $j = 1, \dots, r$  mellett  $P_j \neq 0$ ;
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ ;
3.  $N = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ ;
4.  $N^* = \sum_{j=1}^r \overline{\lambda_j} P_j$ .

*Bizonyítás:* Láttuk, hogy  $N$  diagonalizálható, azaz létezik a térenk  $N$  sajátvektoraiból álló bázisa, ezért

$$M_1 \oplus \cdots \oplus M_r = V \quad \text{itt } M_j \perp M_k \text{ minden } j \neq k, \quad (\dagger)$$

ahol  $M_j = \ker(N - \lambda_j I)$ .

Világos, hogy minden  $j$  mellett létezik  $u_j \neq 0$ , hogy  $Nu_j = \lambda_j u_j$ , így  $M_j \neq \{0\}$ , ergo  $P_j \neq 0$ .

Láttuk korábban, hogy  $(\dagger)$ -ből  $I = \sum_{j=1}^r P_j$  is következik.

A 3. azonossághoz azt vegyük észre, hogy tetszőleges  $v \in V$  mellett  $P_j v \in M_j$  a  $\lambda_j$ -hez tartozó sajátáltér egy eleme, így  $NP_j v = \lambda_j P_j v$ . Tehát

$$Nv = N(Iv) = N\left(\sum_{j=1}^r P_j v\right) = \sum_{j=1}^r NP_j v = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j v = \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j\right) v.$$

A 4. azonosság a 3. tulajdonságból az adjungálás tulajdonságai és  $P^* = P$  figyelembe vételével adódik. .

Az eddigiek összefoglalásaként (20.11 és 20.12) kapjuk az alábbi szükséges és elegendő feltételét annak, hogy egy komplex mátrix ortonormált bázisban diagonalizálható.

**21.3. állítás** (Normalitás karakterizációja a spektrális felbontással). *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skaláriszorozatos-tér és  $N \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Az  $N$  transzformáció pontosan akkor normális, ha létezik  $r \geq 1$  egész, léteznek  $P_1, \dots, P_r$  ortogonális projekciók és léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  komplex számok, amelyekre*

1.  $P_j \neq 0$ , minden  $j = 1, \dots, r$ ;
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ ;
3.  $N = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ .

Ha  $N$  normális, akkor  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ ,  $N^* = \sum_{j=1}^r \bar{\lambda}_j P_j$ , és tetszőleges  $q \in \mathbb{C}[t]$  komplex együtthatós polinom mellett  $q(N)$  is normális, továbbá  $q(N) = \sum_{j=1}^r q(\lambda_j) P_j$ . .

### Önadjungált transzformáció

Először azt kell látnunk, hogy komplex vektortér esetében a normális transzformációk közül éppen azok az önadjungáltak, amelyeknek a – nem üres – spektruma valós.

**21.4. állítás.** *Legyen  $V$  egy a komplex számtest feletti skaláriszorozatos-tér.  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Az  $A$  pontosan akkor önadjungált, ha  $A$  normális és  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$*  .

*Bizonyítás:* Az, hogy önadjungált transzformáció normális és a (lehetséges, hogy üreshalmaz) spektruma valós, még  $\mathbb{K}$  feletti skaláriszorozatos-tér mellett is igaz. (19.5). Megfordítva, ha egy komplex vektortérben  $A$  normális, akkor van spektrális felbontása:

$$A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j,$$

ahol  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  a spektrum elemei. Mivel ezek valós számok, ezért

$$A^* = \sum_{j=1}^r \bar{\lambda}_j P_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j = A. .$$

Az önadjungált transzformációk spektrális felbontása a normális transzformációk spektrális felbontásának speciális esete.

**21.5. állítás** (spektrális felbontás). *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skaláriszorozatos-tér, és  $A \in L(V)$  egy önadjungált lineáris transzformáció. Jelölje  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  az  $A$  különböző sajátértékeit. Láttuk, hogy  $k \geq 1$ , és  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ . Jelölje  $P_j$  a  $\ker\{N - \lambda_j I\}$  altérre való merőleges vetítést. Ekkor*

1. minden  $j = 1, \dots, r$  mellett  $P_j \neq 0$ ;

2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j;$
3.  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j.$

Összefoglalásként (20.13 és 20.12) kapjuk az alábbi szükséges és elegendő feltételét annak, hogy egy komplex mátrix ortonormált bázisban diagonalizálható, és a diagonális elemei valós számok.

**21.6. állítás** (Önadzungáltság karakterizációja a spektrális felbontással). *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skalárisszorzatos-tér és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Az  $A$  transzformáció pontosan akkor önadzungált, ha létezik  $r \geq 1$  egész, léteznek  $P_1, \dots, P_r$  ortogonális projekciók és léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  valós számok, amelyekre*

1.  $P_j \neq 0$ , minden  $j = 1, \dots, r$ ;
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j;$
3.  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j.$

*Ha  $A$  önadzungált, akkor  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ , és tetszőleges  $q \in \mathbb{R}[t]$  valós együtthatós polinom mellett  $q(N)$  is önadzungált, továbbá  $q(N) = \sum_{j=1}^r q(\lambda_j) P_j.$*

### Unitér transzformáció

Először azt kell látnunk, hogy komplex vektortér esetében a normális transzformációk közül éppen azok az unitér transzformációk, amelyekre a – nem üres – spektruma minden pontja egységnnyi abszolútértékű.

**21.7. állítás.** *Legyen  $V$  egy a komplex számtest feletti skalárisszorzatos-tér.  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Az  $A$  pontosan akkor unitér, ha  $A$  normális és minden  $\lambda \in \sigma(A)$  sajátértékre  $|\lambda| = 1$ .*

*Bizonyítás:* Még  $\mathbb{K}$  feletti skalárisszorzatos-tér mellett is igaz, hogy egy unitér transzformáció normális, és a (lehetséges, hogy üreshalmaz) spektruma minden pontja egységnnyi abszolútértékű: Ugyanis a  $\lambda$  spektrumpontra  $\lambda \neq 0$ , és valamely  $u \neq 0$  vektor mellett  $Au = \lambda u$ ,  $A^*u = \bar{\lambda}u$ . Így

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \bar{\lambda}\right)u = \frac{1}{\lambda}u - \bar{\lambda}u = A^{-1}u - A^*u = 0.$$

Ebből már  $u \neq 0$  miatt  $|\lambda| = 1$  következik.

Megfordítva, mivel komplex tér felett vagyunk, ezért  $A$ -nak normális volta miatt van  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$  spektrális felbontása, ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  az  $A$  sajátértékei. Tehát  $A$  ortogonális projekciók egységnnyi abszolútértékű együtthatókkal képzett lineáris kombinációja, amiről korábban már láttuk, hogy minden unitér transzformációt eredményez.

Az unitér transzformációk spektrális felbontása is a normális transzformációk spektrális felbontásának speciális esete.

**21.8. állítás (spektrális felbontás).** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skalárisszorzatos-tér, és  $A \in L(V)$  egy unitér lineáris transzformáció. Jelölje  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  az  $A$  különböző sajátértékeit. Láttuk, hogy  $k \geq 1$ ,  $|\lambda_j| = 1$  minden  $j = 1, \dots, r$  mellett Jelölje  $P_j$  a ker  $\{N - \lambda_j I\}$  altérre való merőleges vetítést. Ekkor*

1. *Minden  $j = 1, \dots, r$  mellett  $P_j \neq 0$ ;*
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j;$
3.  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j;$
4.  $A^* = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\lambda_j} P_j.$

Összefoglalásként (20.14 és 20.12) kapjuk az alábbi szükséges és elegendő feltételét annak, hogy egy komplex mátrix ortonormált bázisban diagonalizálható, és a diagonális elemei egy abszolútértékű komplex számok.

**21.9. állítás** (Unitér karakterizáció a spektrális felbontással). *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{C}$  feletti skalárisszorzatos-tér és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Az  $A$  transzformáció pontosan akkor unitér, ha létezik  $r \geq 1$  egész, léteznek  $P_1, \dots, P_r$  ortogonális projekciók és léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  egységnnyi abszolútértékű komplex számok, amelyekre*

1.  $P_j \neq 0$ , minden  $j = 1, \dots, r$ ;
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ ;
3.  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ .

*Ha  $A$  unitér, akkor  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ , és  $A^{-1} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\lambda_j} P_j = A^*$  is fennáll.* □

## 21.2. Valós eset

Mivel valós test feletti skaláriszorzatos-tér felett még az is előfordulhat, hogy egy normális transzformációnak még sajátértéke sincs, ezért nem várható általános eredmény normális transzformációk diagonalizálhatóságára.

### Szimmetrikus transzformáció

Láttuk, hogy szimmetrikus transzformációk diagonalizálhatók, ezért a komplex önadzungált esettel analóg állítás igaz valós vektortér esetére.

**21.10. állítás** (spektrális felbontás). *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{R}$  feletti skaláriszorzatos-tér, és  $A \in L(V)$  egy szimmetrikus lineáris transzformáció. Jelölje  $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$  az  $A$  különböző sajátértékeit. Láttuk, hogy  $k \geq 1$ . Jelölje  $P_j$  a  $\ker(N - \lambda_j I)$  altérre való merőleges vetítést. Ekkor*

1. *Minden  $j = 1, \dots, r$  mellett  $P_j \neq 0$ ;*
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ ;
3.  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ . □

*Bizonyítás:* Láttuk, hogy  $A$  diagonalizálható<sup>1</sup>, azaz létezik a térnak  $A$  sajátvektoraiból álló bázisa, ezért

$$M_1 \oplus \dots \oplus M_r = V \quad \text{itt } M_j \perp M_k \text{ minden } j \neq k, \quad (\dagger)$$

ahol  $M_j = \ker(N - \lambda_j I)$ .

Világos, hogy minden  $j$  mellett létezik  $u_j \neq 0$ , hogy  $Au_j = \lambda_j u_j$ , így  $M_j \neq \{0\}$ , ergo  $P_j \neq 0$ .

Láttuk korábban, hogy  $(\dagger)$ -ből  $I = \sum_{j=1}^r P_j$  is következik.

A 3. azonossághoz azt vegyük észre, hogy tetszőleges  $v \in V$  mellett  $P_j v \in M_j$  a  $\lambda_j$ -hez tartozó sajátáltér egy eleme, így  $AP_j v = \lambda_j P_j v$ . Tehát

$$Av = A(Iv) = A\left(\sum_{j=1}^r P_j v\right) = \sum_{j=1}^r AP_j v = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j v = \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j\right) v. \quad .$$

Összefoglalásként (20.11 és 20.12) kapjuk az alábbi szükséges és elegendő feltételét annak, hogy egy valós szimmetrikus mátrix ortonormált bázisban diagonalizálható.

**21.11. állítás** (Szimmetrikus karakterizáció spektrális felbontással). *Legyen  $V$  egy valós skaláriszorzatos-tér és  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció. Az  $A$  transzformáció pontosan akkor szimmetrikus, ha létezik  $r \geq 1$  egész, léteznek  $P_1, \dots, P_r$  ortogonális projekciók és léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  valós számok, amelyekre*

1.  $P_j \neq 0$ , minden  $j = 1, \dots, r$ ;
2.  $I = \sum_{j=1}^r P_j$ ;
3.  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ .

*Ha  $A$  szimmetrikus, akkor  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ , és tetszőleges  $q \in \mathbb{R}[t]$  valós együtthatós polinom mellett  $q(N)$  is szimmetrikus, továbbá  $q(N) = \sum_{j=1}^r q(\lambda_j) P_j$ . □*

<sup>1</sup>Innen a bizonyítás szó szerint azonos a komplex tér feletti normális transzformáció spektrálfebontásának igazolásával.

### 21.3. Operátornorma

A spektrális felbontási tétele egy fontos következménye, hogy egy normális transzformációt egyértelműen meghatározza a spektruma, és a sajátterereire való ortogonális projekciók. Ez lehetőséget ad egy tetszőleges  $A$  lineáris operáció normájának meghatározására az  $A^*A$  spektrumának ismeretében.

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy az operátornorma definíciója és alaptulajdonságai ismertek. Összefoglalom az általunk használt legfontosabb tényeket. Ha  $A \in L(V, W)$  véges dimenziós normált téren értelmezett és a  $W$  normált térbe képező lineáris operáció, akkor

$$\max \{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} = \min \{K \geq 0 : \|Ax\| \leq K\|x\| \quad \forall x \in V\}$$

számok azonosak és végesek. A közös érték az  $\|A\|$  operátornorma. Ha az  $L(V, W)$  lineáris operációk vektorterét ellátjuk az operátornormával, akkor egy normált teret kapunk. A  $W = V$  speciális esetben  $A, B \in L(V)$ -re  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  egyenlőtlenség is fennáll.

A továbbiakban  $V$  egy véges dimenziós  $\mathbb{K}$  feletti skaláriszorozatos-tér.

**21.12. definíció.** Legyen  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció, amelynek spektruma nem üres. Ekkor az  $r(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$  számot az  $A$  transzformáció spektrálisugarának mondjuk.

Világos, hogy  $r(A)$  a legkisebb olyan sugár, amellyel a komplex síkra rajzolt origó középpontú kör tartalmazza az  $A$  valamennyi sajátértékét. Ezzel ekvivalens azt mondani, hogy a spektrálisugár a sajátértékek origótól vett távolságainak maximuma.

Ha például  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ , azaz valós sajátértékek vannak<sup>2</sup>, akkor a  $\lambda_{\max} = \max \sigma(A)$  és  $\lambda_{\min} = \min \sigma(A)$  jelölések értelmesek, és  $r(A) = \max \{|\lambda_{\min}|, |\lambda_{\max}|\}$ . Ha még azt is feltesszük, hogy minden sajátérték nem negatív, akkor  $r(A) = \lambda_{\max}$ .

**21.13. állítás.** Legyen  $V, W$  ugyanazon  $\mathbb{K}$  test feletti skaláriszorozatos-terek. Legyen  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Ekkor az  $A^*A$  egy önadjungált transzformáció, így  $\sigma(A^*A) \neq \emptyset$ ,  $A^*A$  valamennyi sajátértéke nem negatív valós szám, ezért  $r(A^*A) = \max \sigma(A^*A)$ .

*Bizonyítás:* Világos, hogy  $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ , ergo  $A^*A$  valóban egy önadjungált lineáris transzformációja a  $V$  vektortérnek. Láttuk, hogy  $A$  még diagonalizálható is, tehát spektruma nem üres. Azt is láttuk, hogy önadjungált transzformáció minden sajátértéke valós. No de, ha  $\lambda \in \sigma(A^*A)$  és  $x \in V$  egy nem zérus vektor, amelyre  $A^*Ax = \lambda x$ , akkor

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2.$$

Ebből persze  $\lambda \geq 0$  azonnal következik.

**21.14. állítás.** Legyen mint az előző állításban  $A \in L(V, W)$ . Definálja  $Q(v) = \langle A^*Av, v \rangle$  a  $Q : V \rightarrow [0, \infty)$  nem negatív, valós függvényt. Legyen  $\lambda_{\max} = \max \sigma(A^*A)$ , továbbá legyen  $v_{\max} \in V$  az  $A^*A$  transzformációnak a  $\lambda_{\max}$  sajátértékéhez tartozó olyan sajátvektora, amelyre  $\|v_{\max}\| = 1$ . Ekkor

$$\max \{Q(v) : v \in V, \|v\| \leq 1\} = \lambda_{\max} = Q(v_{\max}).$$

*Bizonyítás:* Tudjuk, hogy  $A^*A$  önadjungált, ezért minden  $\mathbb{R}$ , minden  $\mathbb{C}$  felett diagonalizálható. Létezik tehát  $u_1, \dots, u_n$  ortonormált bázis  $V$ -ben, amelynek minden vektorra sajátvektora  $A^*A$ -nak. Ha  $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$  olyan vektor, amelyre  $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 = 1$ , akkor

$$\begin{aligned} Q(v) &= \langle A^*A \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right), \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \right) \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\alpha}_k \langle A^*Au_j, u_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\alpha}_k \lambda_j \langle u_j, u_k \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\alpha}_j \lambda_j = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \lambda_j \leq \lambda_{\max} \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 = \lambda_{\max}. \end{aligned}$$

Itt az  $u_i$  sajátvektorok tartoznak a  $\lambda_i$  sajátértékekhez. Így  $\sup \{Q(v) : v \in V, \|v\| \leq 1\} \leq \lambda_{\max}$ .

No de,  $Q(v_{\max}) = \langle A^*Av_{\max}, v_{\max} \rangle = \lambda_{\max} \langle v_{\max}, v_{\max} \rangle = \lambda_{\max}$ , amiből már az is látszik, hogy  $\lambda_{\max} = Q(v_{\max}) \leq \sup \{Q(v) : v \in V, \|v\| \leq 1\}$ .

<sup>2</sup>Például ha  $A$  önadjungált, akkor így van.

Összefoglalásként kapjuk az operátornorma és a spektrálsugár közti kapcsolatot:

**21.15. állítás.** *Legyen  $A \in L(V, W)$  egy lineáris operáció. Ekkor*

$$\|A\|^2 = r(A^* A) = \max \sigma(A^* A).$$

*Bizonyítás:* Az  $x \mapsto x^2$  függvény a számegyenes nem negatív része felett szigorúan monoton növő, ezért

$$\|A\|^2 = (\sup \{\|Av\| : \|v\| \leq 1\})^2 = \sup \{\|Av\|^2 : \|v\| \leq 1\} = \sup \{Q(v) : \|v\| \leq 1\} = \max \sigma(A^* A).$$

Ha ezt egy önadjungált transzformációra írjuk fel, akkor még egyszerűbb állítást kapunk.

**21.16. állítás.** *Legyen  $A \in L(V)$  egy önadjungált lineáris transzformáció a  $V$  véges dimenziós,  $\mathbb{K}$  feletti skaláris-szorzatos-téren. Ekkor*

$$\|A\| = r(A) = \max \{|\min \sigma(A)|, |\max \sigma(A)|\}.$$

*Bizonyítás:* Mivel  $A$  önadjungált, ezért  $A$ -nak van spektrál felbontása, és ha ez  $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$ , akkor az  $A^2$  spektrál felbontása  $A^2 = \sum_{j=1}^r \lambda_j^2 P_j$ , ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  valós számok. Ez azt jelenti, hogy  $A^2$  minden sajátértéke négyzete  $A$  valamelyik sajátértékének. Így

$$r(A^2) = \max \{\lambda_j^2 : j = 1, \dots, r\} = (\max \{|\lambda_{\min}|, |\lambda_{\max}|\})^2 = r(A)^2.$$

No de, újra használva  $A^* = A$  feltevést

$$\|A\|^2 = r(A^* A) = r(A^2) = r(A)^2.$$

**21.17. állítás.** *Tetszőleges  $A \in L(V, W)$  lineáris operáció mellett*

1. *Teljesül az úgynevezett  $C^*$ -azonosság:*

$$\|A\|^2 = \|A^* A\|.$$

2. *A transzformációk és az adjungáltjának azonos a normája, azaz*

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

3. *Az  $A^* A \in L(V)$  és az  $AA^* \in L(W)$  transzformációk spektrálsugara azonos, azaz*

$$r(A^* A) = r(AA^*).$$

*Bizonyítás:* Mivel  $A^* A$  önadjungált, ezért

$$\|A^* A\| = r(A^* A) = \|A\|^2,$$

ami éppen a  $C^*$ -azonosság.

Felhasználva, hogy transzformációk szorzatának normája legfeljebb a normák szorzata, a  $C^*$ -azonosság szerint  $\|A\|^2 \leq \|A^*\| \|A\|$ , amiből  $\|A\| \leq \|A^*\|$  következik. No de, ez minden lineáris operációra igaz, speciálisan az  $A^*$  adjungáltra is. Emiatt az  $\|A^*\| \leq \|(A^*)^*\| = \|A\|$  egyenlőtlenség is teljesül igazolva, hogy egy lineáris operációkának és adjungáltjának azonos a normája.

Alkalmazva az eddig igazoltakat

$$r(A^* A) = \|A\|^2 = \|A^*\|^2 = r(AA^*).$$

Fontos megérteni az utolsó azonosság jelentőségét. Az  $A^* A$  és az  $AA^*$  más-más vektortereken vannak értelmezve. Képzeljük el, hogy  $V$  egy nyolc dimenziós tér és  $W$  egy két dimenziós tér,  $A \in L(V, W)$ . Ekkor  $A$  mátrixa egy  $2 \times 8$  méretű mátrix, ezért  $A^* A$  mátrixa egy  $8 \times 8$  méretű mátrix. Hasonlóan  $AA^*$  egy  $2 \times 2$  méretű mátrix. Ha az  $A$  operátor normáját kell meghatározunk, akkor nagyon nem mindegy, hogy egy  $8 \times 8$  méretű-, vagy egy  $2 \times 2$  méretű önadjungált mátrix legnagyobb sajátértékét kell megtalálnunk.

Legvégül a  $C^*$ -azonosság és következményei egy sorban

$$\|A\|^2 = \|A^* A\| = r(A^* A) = r(AA^*) = \|AA^*\| = \|A^*\|^2.$$

## **Függelékek**



## A. függelék

# A komplex számokról

Az algebra alaptétele, és a komplex számtest egyértelműsége. Elsősorban (Ebbinghaus és tsai. 1991) és (Derkson 2003) alapján

### A.1. Lineáris algebrai megközelítés

Ha  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bázisa egy  $\mathbb{C}$  feletti  $V$  vektortérnek és  $m(t) \in \mathbb{C}[t]$  egy pontosan  $n$ -ed fokú, normált polinom, például  $m(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + t^n$ , akkor definiálja az  $A \in L(V)$  lineáris transzformációt

$$A(e_k) = \begin{cases} e_{k+1} & , \text{ ha } 1 \leq k \leq n-1 \\ -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_{j+1} & , \text{ ha } k = n. \end{cases}$$

Világos, hogy  $A^j e_1 = e_{j+1}$  tetszőleges  $0 \leq j \leq n-1$  mellett. Ebből azonnal következik, hogy

1.  $\{e_1, Ae_1, A^2e_1, \dots, A^{n-1}e_1\}$  rendszer lineárisan független,
2.  $\{e_1, Ae_1, A^2e_1, \dots, A^{n-1}e_1, A^ne_1\}$  rendszer már lineárisan összefüggő, hiszen  $A^ne_1 = AA^{n-1}e_1 = Ae_n = -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j A^j e_1$ .

Látjuk tehát, hogy  $m$  a legalacsonyabb fokú normált polinom, melyre  $m(A)e_1 = 0$ , így az  $e_1$  vektorhoz tartozó kis minimálpolinom éppen  $m$ . Mivel a térszín  $n$ -dimenziós, ezért  $m$  egyben minimálpolinomja is  $A$ -nak.

Persze egy lineáris transzformációnak egy szám pontosan akkor sajátértéke, ha az a minimálpolinom-jának gyöke, emiatt az algebra alaptétele a következőképpen is fogalmazható:

*Minden komplex vektortér feletti lineáris transzformációnak van sajátvektora.*

Jelölje  $\rho(A)$  az  $A$  transzformáció rangját, azaz a képtér dimenzióját, és  $\nu(A)$  a defektust, azaz a magtér dimenzióját. Jól ismert, hogy ha  $A \in L(V)$  egy lineáris transzformáció és  $p(t) \in \mathbb{F}[t]$  egy polinom, akkor  $\ker p(A)$  és  $\text{Im } p(A)$  is  $A$ -ra invariáns alterek. Két lineáris trafóról azt mondjuk, hogy *kommutálnak*, ha  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ . Könnyen látható, hogy ha  $A_1$  és  $A_2$  kommutálnak, akkor tetszőleges két  $p, q$  polinom mellett  $p(A_1)$  és  $q(A_2)$  is kommutálnak.

**A.1. lemma.** *Legyenek az  $A_1, A_2 \in L(V)$  kommutáló lineáris transzformációk, valamint  $p, q \in \mathbb{F}[t]$  polinomok. Ekkor  $\ker p(A_1)$  és  $\text{Im } p(A_1)$  is invariáns alterek  $q(A_2)$ -re.*

*Bizonyítás:* Elég megmutatni, hogy  $\ker p(A_1)$ -re és  $\text{Im } p(A_1)$ -re invariáns  $A_2$ , hiszen  $p(A_1)$  és  $q(A_2)$  is kommutálnak. No de, az  $A_1 A_2 x = A_2 A_1 x = A_2 0 = 0$  szerint a magra, és  $u = A_1 v$  jelöléssel az  $A_2 u = A_2 A_1 v = A_1 A_2 v$  azonosságból a képre vonatkozó állítás következik.

**A.2. lemma.** *Legyen a  $d > 1$  pozitív egész rögzítve. Tegyük fel, hogy az  $\mathbb{F}$  test rendelkezik avval a tulajdonsággal, hogy minden az  $\mathbb{F}$  feletti  $d$ -vel nem osztható dimenziós vektortér tetszőleges lineáris trafójának van sajátvektora. Ekkor minden olyan  $\mathbb{F}$  feletti vektortérre, amelynek dimenziója  $d$ -vel nem osztható igaz, hogy bármely két kommutáló lineáris transzformációjának van közös sajátvektora is.*

**Bizonyítás:** A térfelület dimenziója szerinti indukció. Egy egydimenziós térfelület minden nem nulla vektora sajátvektora tetszőleges lineáris transzformációjának, így persze bármely két egydimenziós térfelületen értelmezett lineáris transzformációnak is van közös sajátvektora. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb  $n$ -dimenziós vektortérre és tekintsünk egy olyan  $\mathbb{F}$  feletti vektorteret, amely éppen  $n$ -dimenziós és  $d$  nem osztója  $n$ -nek. Jelölje  $A_1$  és  $A_2$  a szóban forgó két lineáris transzformációt. A feltétel szerint mondjuk  $A_1$ -nek van sajátvektora, így valamely  $\mu \in \mathbb{F}$  mellett  $\nu(A_1 - \mu I) > 0$ . Ha az  $\nu(A_1 - \mu I) = n$ , akkor a térfelület minden vektora sajátvektora  $A_1$ -nek, így mivel  $A_2$ -nek is van sajátvektora, ezért ez közös sajátvektoruk is. Ha  $\nu(A_1 - \mu I) < n$ , akkor  $\nu(A_1 - \mu I) + \rho(A_1 - \mu I) = n$  miatt az  $K = \ker(A_1 - \mu I)$  és a  $L = \text{Im}(A_1 - \mu I)$  valódi alterek dimenziójának egyike nem osztható  $d$ -vel. No de  $A_2$  és  $A_1$  invariáns  $K$ -ra is és  $L$ -re is az előző lemma miatt, így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést  $K$  és  $L$  közül a  $d$ -vel nem osztható dimenziós altérre, amely garantálja az  $A_1$  és  $A_2$  közös sajátvektorát.

Mivel a karakterisztikus polinom gyökei a sajátértékek, és mivel egy  $n$ -dimenziós térfelületen értelmezett lineáris transzformáció pontosan  $n$ -edfokú a karakterisztikus polinomja, ezért a Bolzano-tétel szerint egy  $\mathbb{R}$  feletti páratlan dimenziós vektortér lineáris transzformációjának van sajátvektora. A fenti lemma tehát kommutáló transzformációk esetében közös sajátvektort garantál páratlan dimenziójú valós vektortér felett.

**A.3. állítás.** *Egy páratlan dimenziós komplex vektortér minden lineáris transzformációjának van sajátvektora.*

**Bizonyítás:** Legyen  $V$  a  $\mathbb{C}$  feletti vektortér,  $n$  páratlan szám a dimenziója,  $A \in L(V)$  a transzformáció. Jelölje  $\mathcal{H} = \{A \in L(V) : A = A^*\}$  az önadjungált transzformációkat. Világos, hogy  $\mathcal{H}$  egy valós,  $n^2$  dimenziós vektortér. minden  $C \in L(V)$  lineáris transzformáció előáll

$$C = \frac{C + C^*}{2} + i \frac{C - C^*}{2i}$$

alakban, ahol persze  $\frac{1}{2}(C + C^*)$  és  $\frac{1}{2i}(C - C^*)$  az önadjungált transzformációk. A továbbiakban rögzített  $A \in L(V)$  mellett jelölje  $L_1, L_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  függvényeket.

$$L_1(B) = \frac{AB + BA^*}{2} \text{ és } L_2(B) = \frac{AB - BA^*}{2i}$$

Világos, hogy  $L_1$  és  $L_2$  lineáris transzformációk a  $\mathcal{H}$  valós vektortéren, amelyekre minden  $B \in \mathcal{H}$  mellett

$$AB = L_1(B) + iL_2(B).$$

E két operátor felcserélhető, hiszen tetszőleges  $B \in \mathcal{H}$  mellett, ugyanis

$$\begin{aligned} L_1 \circ L_2(B) &= \frac{1}{4i}(A(AB - BA^*) + (AB - BA^*)A^*) = \frac{1}{4i}(A^2B + BA^{*2}) \\ L_2 \circ L_1(B) &= \frac{1}{4i}(A(AB + BA^*) - (AB + BA^*)A^*) = \frac{1}{4i}(A^2B + BA^{*2}) \end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk az  $n^2$  páratlan dimenziós valós vektortérre az előző lemmát. Létezik  $B \in \mathcal{H}$  nem a konstans zéró transzformáció és létezik  $\alpha_1, \alpha_2$  valós szám, melyekre  $L_1(B) = \alpha_1 B$  és  $L_2(B) = \alpha_2 B$ . Tehát ha valamely  $v \in V$  vektorra  $Bv \neq 0$ , akkor

$$A(Bv) = \alpha_1 Bv + i\alpha_2 Bv = (\alpha_1 + i\alpha_2)Bv,$$

ergo  $\alpha_1 + i\alpha_2$  sajátértéke, és  $Bv$  sajátvektora  $A$ -nak.

Minden komplex számnak van gyöke, ezért minden legfeljebb másodfokú komplex együtthatós polinomnak van zérushelye. Az algebra alaptételével ekvivalens állítás tehát, hogy egy komplex vektortér felett minden lineáris transzformáció minimálpolinomjának van legfeljebb másodfokú faktora.<sup>1</sup> Az is nyilvánvaló, hogy minden egész szám egyértelműen áll  $2^k n$  alakban, ahol  $n$  páratlan.

A következő állítás tehát az algebra alaptételének egy ekvivalens megfogalmazása.

**A.4. állítás.** *Tekintsünk egy  $V$  komplex vektorteret, amelynek dimenziója  $2^k n$  alakú, ahol  $n$  páratlan egész. Ekkor  $V$  minden lineáris transzformációja minimálpolinomjának van legfeljebb másodfokú faktora.*

<sup>1</sup>Azaz, van legfeljebb két dimenziós nem triviális invariáns altér.

*Bizonyítás:* A  $k$  szerinti indukció. A  $k = 0$  esetben az előző állítás szerint van sajátvektor is, tehát első fokú faktora is van a minimálpolinomnak. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden  $k$ -nál kisebb szám mellett. E feltétel azt jelenti, hogy minden olyan vektortérre igaz az állítás, – így az algebra alaptétele – melynek dimenziója  $2^l$  páratlan szorosa  $l < k$  mellett, azaz amelynek dimenzióját a  $d = 2^k$  szám nem osztja. Alkalmaszva a lemmát azt kapjuk, hogy ilyen dimenziójú vektortér kommutáló lineáris transzformációinak van közös sajátvektora is. Legyen tehát  $V$  dimenziója  $2^k n$  alakban felírva, ahol  $n$  páratlan.

Rögzítünk a térek egy bázisát, és jelölje  $\mathcal{S} \subseteq L(V)$  azon lineáris transzformációk összességét, amelyeknek mátrixá az itt rögzített bázisban szimmetrikus. Ez egy komplex vektortér, amelyre

$$\dim \mathcal{S} = \frac{2^k n (2^k n + 1)}{2} = 2^{k-1} n (2^k n + 1) = 2^{k-1} n',$$

ahol  $n'$  páratlan. Alkalmaszhatjuk tehát a komplex  $\mathcal{S}$  vektortérre az indukciós feltevést. Ehhez, rögzített  $A \in L(V)$  lineáris transzformáció mellett, vezessük be az  $L_1, L_2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  függvényeket.

$$L_1(B) = AB + BA^T \text{ és } L_2(B) = ABA^T.$$

Könnyű számolatás mutatja, hogy az  $L_1$  és  $L_2$  lineáris transzformációk kommutálnak:

$$\begin{aligned} (L_1 \circ L_2) B &= A(ABA^T) + (ABA^T) A^T = A(ABA^T + BA^T A^T) = \\ &= A(AB + BA^T) A^T = (L_2 \circ L_1) B. \end{aligned}$$

Létezik tehát közös sajátvektora az  $L_1$  és  $L_2$  transzformációknak, ergo létezik  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  komplex szám, és létezik nem az azonosan zérus  $B \in \mathcal{S}$  lineáris transzformáció, amelyekre  $L_1(B) = \lambda B$  és  $L_2(B) = \mu B$ , azaz  $AB + BA^T = \lambda B$  és  $ABA^T = \mu B$ . Ebből

$$A\lambda B = A(AB + BA^T) = A^2 B + ABA^T = A^2 B + \mu B.$$

Ha tehát  $u = Bv \neq 0$ , akkor

$$A^2 u - \lambda A u + \mu u = 0.$$

Ha  $u$  nem sajátvektora  $A$ -nak, akkor a  $p(t) = t^2 - \lambda t + \mu$  egy nem zérus vektor kis minimálpolinomja, ezért a  $p$  polinom osztója a minimálpolinomnak.

## A.2. Analízis megközelítés

Az algebra alaptételének (A.2. tétele) bizonyításához felhasználunk néhány az elemi analízisből jól ismert állítást. Ezek közül a lényegesebbek az alábbiak:

1. Az origó középpontú zárt kör a sík kompakt részhalmaza.
2. Kompakt halmazon folytonos függvény felveszi minimumát.
3. minden komplex számnak van legalább egy  $k$ -adik gyöke ( $k > 0$ ).
4. Komplex síkon differenciálható függvények folytonosak is.

A főtételt könnyen megérthetjük, ha áttekintjük a felé vezető utat. Két lényeges pontot kell látnunk. Az első (A.6. állítás) kompaktsági megmondás, polinomok növekedési ütemére (A.5. lemma) támaszkodva. Ez utóbbi lemma talán önmagában is érdekes, hiszen azt állítja, hogy egy polinom legalább a fokszáma nagyságrendjében növekszik. A másik döntő lépés (A.8. állítás) az Argand-féle becslésén (A.7. lemma) nyugszik. Ez a holomorf függvényekre vonatkozó nyílt leképezés tételnek az itt éppen elegendő speciális esete.

**A.5. lemma.** *Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nem a konstans nulla, komplex  $n$ -edfokú polinom. Ekkor létezik olyan  $r > 0$  valós szám, hogy minden  $z \in \mathbb{C}, |z| > r$  esetén  $|f(z)| > \frac{1}{2} |a_n| |z^n|$ .*

*Bizonyítás:* Nyilván  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  alakú, ahol  $a_n \neq 0$ . Világos, hogy  $z \neq 0$  esetén

$$f(z) = z^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right).$$

Legyen  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  komplex polinom a következőképpen definiálva:

$$h(w) := a_{n-1}w + a_{n-2}w^2 + \dots + a_1w^{n-1} + a_0w^n.$$

Ekkor minden  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$  mellett

$$f(z) = z^n (a_n + h(1/z)). \quad (\text{A.1})$$

A  $h$  folytonos 0-ban, és  $h(0) = 0$ , így létezik olyan  $\delta > 0$  valós szám, melyre  $w \in \mathbb{C}, |w| < \delta$  esetén  $|h(w)| < \frac{1}{2} |a_n|$ . Így ha  $|z| > 1/\delta$ , akkor  $|1/z| < \delta$ , amiből következik, hogy

$$|h(1/z)| < \frac{1}{2} |a_n|.$$

A háromszög-egyenlőtlenség és (A.1) miatt az  $r := 1/\delta$  választással minden  $z \in \mathbb{C}, |z| > r$  mellett

$$|f(z)| = |z^n| |a_n + h(1/z)| \geq |z^n| (|a_n| - |h(1/z)|) > |z^n| \left( |a_n| - \frac{1}{2} |a_n| \right) = \frac{1}{2} |a_n| |z^n|. \quad \square$$

**A.6. állítás.** Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  komplex polinom. Ekkor létezik  $c \in \mathbb{C}$  komplex szám, melyre

$$|f(c)| = \inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C} \}.$$

*Bizonyítás:* Most úgy válasszuk meg az  $r$  pozitív valós számot, hogy egyrészt az előző lemma, másrészt az  $\frac{1}{2} |a_n| r^n > |a_0|$  feltétel is teljesüljön. Ekkor persze minden  $z \in \mathbb{C}, |z| > r$  esetén

$$|f(z)| > \frac{1}{2} |a_n| |z^n| > |a_0| = |f(0)|$$

is teljesül. Ez azt jelenti, hogy ha bevezetjük az  $\alpha := \inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \}$  jelölést, akkor minden  $z \in \mathbb{C}, |z| > r$  esetén  $|f(z)| \geq |f(0)| \geq \alpha$ . Persze ha  $|z| \leq r$  ez utóbbi akkor is teljesül, ezért

$$\alpha \leq \inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C} \}.$$

Mivel a fordított irányú egyenlőtlenség triviális, azt kapjuk, hogy

$$\inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \} = \inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C} \}.$$

De láttuk, hogy  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \subseteq \mathbb{C}$  a komplex számsík kompakt halmaza, így az  $f$  polinom és az abszolútértek-függvény folytonossága miatt létezik  $c \in \mathbb{C}, |c| \leq r$ , amelyre

$$|f(c)| = \alpha = \inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \} = \inf \{ |f(z)| : z \in \mathbb{C} \}. \quad \square$$

**A.7. lemma** (Argand). Legyen  $k \in \mathbb{N}, k > 0$  egész és  $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$  komplex szám, valamint  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g(0) = 0$  olyan függvény, amely a  $0 \in \mathbb{C}$  pontban folytonos. Tekintsük a következőképpen definiált  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  leképezést:

$$h(z) := 1 + bz^k + z^k g(z).$$

Ekkor létezik  $z \in \mathbb{C}$  komplex szám, melyre  $|h(z)| < 1$ . ◻

*Bizonyítás:* Azt fogjuk megmutatni, hogy található  $d \in \mathbb{C}$  és  $t \in \mathbb{R}, t \in (0, 1)$  melyekre  $|h(dt)| < 1$ .

$$h(dt) = 1 + bd^k t^k + d^k t^k g(dt).$$

Válasszuk  $d$  komplex számot úgy, hogy  $bd^k = -1$  teljesüljön, azaz  $d$  legyen a  $-1/b$  komplex szám egyik  $k$ -adik gyöke. Ekkor

$$h(dt) = 1 - t^k + d^k t^k g(dt).$$

Amiből

$$|h(dt)| \leq 1 - t^k + t^k |d^k g(dt)| = 1 - t^k \left( 1 - |d^k g(dt)| \right).$$

Ebből látszik, hogy elegendő megválasztani  $t \in (0, 1)$ -et olyan módon, hogy  $|d^k g(dt)| < 1$ . Ez pedig nyilván megtehető  $g(0) = 0$  és  $g$ -nek a 0 pontban feltett folytonossága miatt. ◻

**A.8. állítás.** Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  legalább elsőfokú polinom. Ekkor minden  $c \in \mathbb{C}$ ,  $f(c) \neq 0$  komplex számhoz létezik olyan  $\hat{c} \in \mathbb{C}$  komplex szám, melyre

$$|f(\hat{c})| < |f(c)|.$$

]

*Bizonyítás:* Tekintsük a

$$h(z) := \frac{f(z+c)}{f(c)}$$

legalább elsőfokú polinomot. Vegyük észre, hogy  $h(0) = 1$ , így e polinom

$$h(z) = 1 + a_k z^k + \dots + a_n z^n$$

alakú, ahol  $a_k \neq 0$  valamely  $k \geq 1$ -re, hiszen az  $f$  és ebből következően a  $h$  polinom nem konstans. Tovább alakítva:

$$h(z) = 1 + a_k z^k + z^k (a_{k+1} z + \dots + a_n z^{n-k}).$$

Világos, hogy a fenti  $h$  polinomra alkalmazható az előző lemma, így létezik  $u \in \mathbb{C}$ , melyre  $|h(u)| < 1$ . Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\left| \frac{f(u+c)}{f(c)} \right| < 1$$

amiből  $\hat{c} := u + c$  választással kapjuk, hogy

$$|f(\hat{c})| = |f(u+c)| < |f(c)|.$$

**Az algebra alaptétele.** Legyen  $f(t) \in \mathbb{C}[t]$  nem konstans polinom. Ekkor  $f$ -nek van gyöke a komplex számok körében.

*Bizonyítás:* Láttuk (A.6. állítás), hogy van olyan  $c \in \mathbb{C}$  melyre

$$|f(c)| = \inf \{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}.$$

Ha  $f(c) \neq 0$  lenne, akkor lenne (A.8. állítás)  $\hat{c} \in \mathbb{C}$  melyre

$$|f(\hat{c})| < |f(c)| = \inf \{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$$

is teljesülne, ami nem lehetséges.

### A.3. A komplex számok egyértelműsége

Az alábbiakban azt fogjuk megvizsgálni, hogy lehet-e a sík pontjain a komplex számok bevezetésénél megadott szorzástól eltérő módon bevezetni szorzás műveletet úgy, hogy ez a valós számokon már megszokott szorzás kiterjesztése legyen, és a sík ellátva a szokásos összeadással valamint evvel a szorzásnak nevezett műveettel test legyen. Meg fogjuk mutatni, hogy ez nem lehetséges. Sőt azt is látni fogjuk, hogy az  $\mathbb{R}$ -től illetve a  $\mathbb{C}$ -től eltékintve nincs véges dimenziós  $\mathbb{R}$  feletti vektortér, amely test lesz olyan összeadásnak illetve szorzásnak nevezett műveettel, amely az  $\mathbb{R}$ -ben szokásos összeadás és szorzás kiterjesztése.

**A.9. állítás.** Legyen  $\mathbb{G}$  az  $\mathbb{R}$  valós számtestet tartalmazó olyan test, amelyben az  $(+, \cdot)$  műveletek az  $\mathbb{R}$ -ben szokásos  $(+, \cdot)$  műveletek kiterjesztései, valamint amely kétdimenziós vektortér  $\mathbb{R}$  felett. Ekkor  $\mathbb{G}$  test izomorf  $\mathbb{C}$ -vel.

]

*Bizonyítás:* Meg fogjuk mutatni, hogy létezik  $w \in \mathbb{G}$  melyre  $w^2 = -1$ . Ekkor készen is leszünk, mert nyilván  $w \notin \mathbb{R}$  így  $\text{lin}\{1, w\} = \mathbb{G}$  amiből könnyen látható, hogy az  $\alpha + w\beta \mapsto \alpha + i\beta$  megfeleltetés izomorfizmus  $\mathbb{G}$  és  $\mathbb{C}$  között.

Legyen  $v \in \mathbb{G} \setminus \mathbb{R}$ . Ilyen  $v$  létezik, mivel  $\mathbb{G}$  kétdimenziós. Világos, hogy az  $\{1, v, v^2\}$  vektorrendszer lineárisan összefüggő, hiszen három vektor egy kétdimenziós vektortérben. Így léteznek  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  valós számok melyekre  $v^2 = \alpha + \beta v$ . Most legyen  $\gamma := \frac{-\beta}{2}$ . Ekkor nyilván  $v^2 = \alpha - 2\gamma v$ . Most tekintsük a  $(v + \gamma)^2$  kifejezést.

$$(v + \gamma)^2 = v^2 + 2\gamma v + \gamma^2 = \alpha + \gamma^2$$

Azt kaptuk tehát, hogy létezik  $r \in \mathbb{R}$  valós szám melyre  $(v + \gamma)^2 = r$ . De vegyük észre, hogy ha  $r \geq 0$  lenne, akkor  $t = \sqrt{r} \in \mathbb{R}$  jelöléssel  $(v + \gamma)^2 = t^2$  következne, amiből pedig  $v \in \mathbb{R}$  következtetésre juthatnánk ellentétben a  $v$ -re kiindulásul tett feltétellel. Ebből már világos, hogy ha  $w$ -t

$$w := \frac{v + \gamma}{\sqrt{|r|}} \in \mathbb{G}$$

módon definiáljuk akkor  $w^2 = \frac{r}{|r|} = -1$ , hiszen  $r < 0$ .

**A.10. definíció.** Legyen  $\mathbb{G}$  az  $\mathbb{R}$  valós számtestet tartalmazó olyan test amelyben az  $(+, \cdot)$  műveletek az  $\mathbb{R}$ -ben szokásos  $(+, \cdot)$  műveletek kiterjesztései. Az  $x \in \mathbb{G}$  elemet  $\mathbb{R}$  felett algebraiknak nevezzük, ha létezik nem konstans zérő valós együtthatós polinom, melynek  $x$  gyöke.

**A.11. állítás.** Legyen  $\mathbb{G}$  az  $\mathbb{R}$  valós számtestet tartalmazó olyan test amelyben az  $(+, \cdot)$  műveletek az  $\mathbb{R}$ -ben szokásos  $(+, \cdot)$  műveletek kiterjesztései, valamint amely véges dimenziós vektortér  $\mathbb{R}$  felett. Ekkor  $\mathbb{G}$  minden eleme algebrai  $\mathbb{R}$  felett.

*Bizonyítás:* Legyen  $\mathbb{G}$  dimenziója  $n$  és  $v \in \mathbb{G}$  tetszőleges vektor. Tekintsük az

$$\{1, v, v^2, \dots, v^n\}$$

vektorrendszert. Ez nyilván lineárisan összefüggő, hiszen  $n + 1$  vektor egy  $n$  dimenziós vektortérben. Így van nem triviális 0-t adó lineáris kombinációja. Azaz léteznak  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  nem csupa nulla valós számok melyekre

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i v^i = 0$$

De ez pont azt jelenti, hogy ha a  $p$  polinomot

$$p(x) := \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$$

módon definiáljuk, akkor  $p(v) = 0$ .

**A.12. állítás (Weierstrass).** Legyen  $\mathbb{G}$  az  $\mathbb{R}$  valós számtestet tartalmazó olyan test, amelyben az  $(+, \cdot)$  műveletek az  $\mathbb{R}$ -ben szokásos  $(+, \cdot)$  művelet kiterjesztései, valamint minden eleme algebrai  $\mathbb{R}$  felett. Ekkor két eset lehetséges: Vagy  $\mathbb{G}$  test-izomorf  $\mathbb{R}$ -rel, vagy  $\mathbb{G}$  test-izomorf  $\mathbb{C}$ -vel.

*Bizonyítás:* Tegyük fel, hogy  $\mathbb{G}$  tartalmaz  $\mathbb{R}$ -től különböző  $v$  vektort. Ekkor azt kell megmutatni, hogy  $\mathbb{G}$  izomorf  $\mathbb{C}$ -vel.

Először azt mutatjuk meg, hogy

$$v^2 \in \text{lin} \{1, v\} \tag{A.2}$$

Mivel  $v$  algebrai  $\mathbb{R}$  felett, ezért létezik  $p$  valós együtthatós polinom melyre  $p(v) = 0$ . De láttuk, hogy valós együtthatós polinom első- és másodfokú tényezők szorzatára bomlik (1.66.), ami azt jelenti, hogy van olyan  $q$  első, vagy másodfokú valós együtthatós polinom melyekre  $q(v) = 0$ . Ha  $q$  első fokú lenne az azt jelentené, hogy található  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  valós számok melyekre  $\alpha + \beta v = 0$ , azaz  $v \in \mathbb{R}$  lenne. Tehát  $q$  pontosan másodfokú. Ez viszont azt jelenti, hogy léteznak  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}$  valós számok  $\gamma \neq 0$ , melyekre  $\alpha + \beta v + \gamma v^2 = 0$ . Ebből persze

$$v^2 = \frac{-\alpha}{\gamma} + \frac{-\beta}{\gamma} v$$

már könnyen következik, bizonyítva (A.3)-et.

Most megmutatjuk, hogy  $\mathbb{G}$  tartalmaz  $\mathbb{C}$ -vel izomorf testet. Tekintsük a

$$K := \text{lin} \{1, v\}$$

kétdimenziós alterét  $\mathbb{G}$ -nek. Világos, hogy ennek test voltához elegendő megmutatni, hogy a  $\mathbb{G}$ -beli műveletekre zárt. Az összeadásra való zártsg triviális a  $K$  altér mivoltából, a szorzásra való zártsg pedig (A.3) következménye. Így tehát  $K$  két dimenziós test kiterjesztése  $\mathbb{R}$ -nek, ami azt jelenti (A.9.), hogy  $K$

test izomorf  $\mathbb{C}$ -vel.

Utoljára megmutatjuk, hogy  $\mathbb{G}$  minden  $w$  eleme  $\mathbb{C}$ -beli is. Mivel  $w$  algebrai  $\mathbb{R}$  felett, ezért létezik  $p$  valós együtthatós polinom, melyre  $p(w) = 0$ . De tekinthetjük  $p$ -t a komplex számtest feletti polinomnak is, így  $p$  felbomlik elsőfokú komplex polinomok szorzatára (1.64). Ez viszont azt jelenti, hogy létezik olyan  $c$  komplex szám, melyre  $w - c = 0$ , tehát  $w \in \mathbb{C}$  valóban teljesül.



## Irodalom

- Dancs, István és Csaba Puskás (2001). *Vektorterek*. Aula kiadó 2001, Budapest, ISBN:963 9345 53 9, BCE Catalogue: bcek.379187. (hiv. old. 5).
- Derkzen, Harm (2003). „The Fundamental Theorem of Algebra and Linear Algebra”. *The American Mathematical Monthly* 110.7, 620–623. old. issn: 00029890, 19300972. url: <http://www.jstor.org/stable/3647746> (hiv. old. 159).
- Ebbinghaus, H.-D. és tsai. (1991). *Numbers*. 123. köt. Graduate Texts in Mathematics. With an introduction by K. Lamotke, Translated from the second 1988 German edition by H. L. S. Orde, Translation edited and with a preface by J. H. Ewing, Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, xviii+395. old. ISBN: 0-387-97497-0. doi: 10.1007/978-1-4612-1005-4. url: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1005-4> (hiv. old. 25, 159).



# Tárgymutató

- 2 karakteristikájú test, 114  
Abel-csoport, 12  
abszolútérték, 27  
adjungált, 137  
adjungált azonosság, 137  
affin halmaz, 55, 61  
affin kombináció, 55  
algebrai struktúra, 11  
alternáló operátor, 114  
altér, 34  
anti-szimmetrikus operátor, 114  
asszociatív, 11  
áttérés transzformáció, 75  
  
bástyafelrakás, 111  
bázis, 49  
belső szorzat, 127  
Bessel-egyenlőtlenség, 129, 132, 133, 147  
Bezout-azonosság, 17, 19  
  
Cayley–Hamilton, 98, 109  
 $C^*$ -azonosság, 156  
 $C^*$ -azonosság, 28  
co-dimenzió, 63  
Cramer-szabály, 122  
csoport, 11  
  
defektus, 71  
determináns, 117, 120  
determinánsok szorzattétele, 120  
diád, 23, 48  
diagonalizálhatóság, 85  
diagonális alakú mátrix, 85  
diagonális mátrix, 25  
direkt kiegészítő, 59, 63  
direkt összeg, 57  
diszjunkt alterek, 57  
disztributív, 12  
duális bázis, 115, 133  
  
egyszerűsítési szabály, 12  
együttható-mátrix, 37  
elemi mátrix, 42  
Euklideszi-algoritmus, 19  
  
faktortér, 62  
  
formális algebrai kifejezés, 14  
félcsoport, 11  
fődiagonális, 25  
főegyüttható, 14  
főideál, 13, 82–85  
főideál-gyűrű, 13, 82, 83  
  
Gauss–Jordan-elimináció, 25, 37–39, 41–43  
generált altér, 34  
generált ideál, 13  
generátorrendszer, 35  
geometriai multiplicitás, 86  
Gram–Schmidt-ortogonalizáció, 132, 145, 146  
gyökök multiplicitása, 18  
gyűrű, 12  
gyűrű-izomorfizmus, 73  
  
homogén lineáris egyenletrendszer, 37  
háromszög-egyenlőtlenség, 28  
  
 $i$  komplex szám, 26  
identitás mátrix, 23  
ideál, 13  
inhomogén lineáris egyenletrendszer, 37  
invariáns altér, 77  
invertálható mátrix, 42  
inverz, 12  
inverzió, 113  
irreducibilis polinom, 20  
izomorf vektorterek, 52  
izomorfizmus, 25, 52  
  
Jordan-blokk, 107  
Jordan-bázis, 109  
Jordan-normálalak, 91, 107, 123  
  
karakterisztikus polinom, 109, 123  
kis minimálpolinom, 82, 84, 85, 90, 93, 99, 124, 159  
kofaktor, 121  
kofaktormátrix, 121  
kommutatív, 12  
kommutál, 43, 81, 159, 161  
kommutáló mátrixok, 25, 43  
kommutáló transzformációk, 81  
komplex  $n$ -edik egységgökök, 29  
komplex szám argumentuma, 29  
komplex szám konjugáltja, 27

komplex szám képzetesz része, 27  
 komplex szám normálalakja, 27  
 komplex szám trigonometrikus alakja, 29  
 komplex szám valós része, 27  
 komplex számok, 26  
 komplex számok mátrix reprezentációja, 26  
 komplex számtest feletti vektortér, 91  
 konjugáltan lineáris, 127  
 koordináta, 52  
 kötött változó, 38  
 Kronecker-delta, 23  
  
 legkisebb közös többszörös, 17, 84  
 legközelebbi pont, 130  
 legnagyobb közös osztó, 16  
 legszűkebb invariáns altér, 77  
 lineáris burok, 34  
 lineáris funkcionál, 51  
 lineáris kombináció, 22, 34  
 lineáris operáció, 51  
 lineáris operáció mátrixa, 70  
 lineáris transzformáció, 51  
 lineáris transzformáció determinánsa, 120  
 lineáris transzformációk szorzata, 72  
 lineárisan független rendszer, 45  
 lineárisan összefüggő rendszer, 44  
  
 mátrixok szorzata, 22  
 mátrixok összege, 21  
 maximális lineárisan független rendszer, 45  
 merőleges, 128  
 minimális generátorrendszer, 45  
 minimálpolinom, 83  
 Minkowski-összeg, 55, 56, 61, 90  
 minor, 121  
 Moivre-formula, 29  
 mátrix determinánsa, 117  
 mérték, 115, 119  
 művelet, 11  
  
 n-lineáris operátor, 114  
 neutrális elem, 11  
 neutrális elemes félcsoport, 11  
 nillpotens transzformáció, 91  
 nillpotens transzformáció normálalakja, 102  
 normális transzformáció, 143, 148  
 normált polinom, 14  
  
 o.n.b, 133  
 operátornorma, 155  
 ortogonális projekció, 147  
 ortokomplementer, 128  
 oszlopvektor, 22  
 önadjungált transzformáció, 140, 149  
  
 páratlan permutáció, 113  
 páros permutáció, 113  
 permutáció csoport, 111  
 permutáció előjele, 113  
  
 permutáció mátrix, 112  
 permutációk, 12  
 pivot elem, 37, 38, 41, 118  
 polinom, 13  
 polinom foka, 14  
 polinom osztója, 15  
 polinom többszöröse, 15  
 projekció, 147  
 projekciós-tétel, 134  
 prím polinom, 20  
 Pythagoras-tétel, 130  
  
 rang, 71  
 rang-defektus-tétel, 63, 140  
 reducibilis polinom, 20  
 reguláris mátrix, 72  
 relatív prím polinomok, 17  
 Riesz-reprezentáció, 137  
  
 sajátaltér, 79, 82  
 sajátvektor, 79, 85  
 sajátérték, 79, 85  
 sajátérték algebrai multiplicitása, 109, 123  
 sajátérték geometriai dimenziója, 108  
 Schwartz-egyenlőtlenség, 28  
 skaláris szorzat, 127  
 skaláriosszorzatos-tér, 127  
 sorvektor, 22  
 spektrum, 79  
 spektrálisugár, 155  
 Steinitz-lemma, 35, 47–50, 78, 82, 83  
 szabad változó, 38  
 szimmetrikus diád, 23  
 szinguláris, 85  
 szorzattétel, 120  
 szám és mátrix szorzata, 22  
  
 triviális altér, 34  
 triviális lineáris kombináció, 45  
  
 unitér, 143  
 unitér transzformáció, 140, 150  
  
 vektortér, 22, 33  
 vektortér altere, 34  
 véges dimenziós, 49  
 végesen generált vektortér, 35, 49