Estimateur du Maximum de Vraisemblance des Lois Usuelles

MAHAMAT ATTEÏB Adoum

Institut Polytechnique de Paris
Mastère spécialisé : Big Data
atteibadoum93@yahoo.fr

01/12/2023

Loi de Bernoulli

Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$ de densité $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$
Maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned}
L(x,p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\
&= p^{x_1+x_2+\ldots x_n}(1-p)^{(1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)} \\
&= p^{\sum_i^n x_i}(1-p)^{\sum_i^n(1-x_i)} \\
&= p^{\sum_i^n x_i}(1-p)^{\sum_i^n 1-\sum_i^n x_i} \\
L(x,p) &= p^{n\bar{x}}(1-p)^{(n-n\bar{x})}
\end{aligned}$$

Log-du maximum de vraisemblance :

$$l(x,p) = \log L(x,p) = \log\left[p^{n\bar{x}}(1-p)^{(n-n\bar{x})}\right]$$
$$l(x,p) = \log\left[p^{n\bar{x}}\right] + \log\left(1-p)^{(n-n\bar{x})}\right]$$
$$l(x,p) = n\bar{x}\log(p) + (n-n\bar{x})\log(1-p)$$

est la log-du maximum de vraisemblance de la loi de Bernoulli.
Condition du premier ordre :

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{(n-n\bar{x})}{1-p}$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = 0 \Rightarrow \mathbf{\hat{p}} = \mathbf{\bar{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{i}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i}$$

est l'estimateur du maxium de vraisemblance de la loi de Bernoulli.

Loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ de densité $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

Maximum de vraisemblance :

$$
\begin{aligned}
L(x, p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (n-p)^{n-x_i} \\
&= \binom{n}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n-x_1} \times \ldots \times \binom{n}{x_n} p^{x_n} (1-p)^{n-x_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \times p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} (n-x_i)} \\
L(x, p) &= \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \times p^{n\bar{x}} \times (1-p)^{(n^2 - n\bar{x})}
\end{aligned}
$$

Log du Maximum de vraisemblance :

$$l(x,p) = \log L(x,p) = \log \left[\prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \times p^{n\bar{x}} \times (1-p)^{(n^2 - n\bar{x})} \right]$$

$$= \log \left[\prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \right] + \log[p^{n\bar{x}}] + \log \left[(1-p)^{(n^2-n\bar{x})} \right]$$

$$l(x,p) = \log \left[\prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} \right] + n\bar{x}\log(p) + (n^2 - n\bar{x}) \log\left[(1-p)\right]$$

est la log du vraisemblance de la loi binomiale.

Condition du premier ordre :

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{(n^2 - n\bar{x})}{(1-p)} = \frac{n(1-p)\bar{x} - (n^2 - n\bar{x})p}{p(1-p)}$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = 0 \Rightarrow n(1-p)\bar{x} - (n^2 - n\bar{x})p = 0$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\mathbf{n}}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la loi binomiale.

Loi exponentielle

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ de densité $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$

Maximum de vraisemblance :

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \lambda \exp(-\lambda x_1) \times \ldots \times \lambda \exp(-\lambda x_n)$$

$$= \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$L(x, \lambda) = \lambda^n \exp(-\lambda n\bar{x})$$

Log du Maximum de vraisemblance :

$$l(x, \lambda) = \log L(x, \lambda) = \log[\lambda^n \exp(-\lambda n\bar{x})] = \log(\lambda^n) + \log(\exp(-\lambda n\bar{x}))$$

$$l(x, \lambda) = n \log(\lambda) - \lambda n\bar{x}$$

est la log-du maximum de vraisemblance de la loi exponentielle.

Condition du premier ordre :

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n\bar{x}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{n}}{\sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x}_{\mathbf{i}}}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la loi exponentielle.

Loi géométrique

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ de densité $f(x) = p(1-p)^{x-1}$

Maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} L(x,p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} \\ &= p(1-p)^{x_1-1} \times \ldots \times p(1-p)^{x_n-1} \\ &= p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)} \\ &= p^n(1-p)^{(n\bar{x}-n)} \end{aligned}$$

Log du Maximum de vraisemblance :

$l(x,p) = \log L(x,p)$

$l(x,p) = \log \left[p^n(1-p)^{(n\bar{x}-n)} \right]$

$l(x,p) = \log p^n + \log(1-p)^{(n\bar{x}-n)} = n\log(p) + (n\bar{x}-n)\log(1-p)$

est la log du maximum de vraisemblance de la loi géométrique.

Condition du premier ordre :

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{(n\bar{x} - n)}{1 - p} = \frac{n(1-p) - (n\bar{x} - n)p}{p(1-p)}$$

$$\frac{\partial l}{\partial p} = 0 \Rightarrow n(1-p) - (n\bar{x} - n)p = 0$$

$$\mathbf{\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la loi géométrique.

Loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ de densité $f(x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$

Maximum de vraisemblance :

$$L(x,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda)\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$= \exp(-\lambda n)\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$L(x,\lambda) = \exp(-\lambda n)\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\sum_{i=1}^{n} x_i!}$$

Log du Maximum de vraisemblance :

$$l(x,\lambda) = \log L(x,\lambda) = \log\left[\exp(-\lambda n) \times \frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\sum_{i=1}^{n} x_i!}\right]$$

$$= \log(-\lambda n) + \log\left[\frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\sum_{i=1}^{n} x_i!}\right]$$

$$= -\lambda n + \log(\lambda^{n\bar{x}}) - \log(\sum_{i=1}^{n} x_i!)$$

$$l(x,\lambda) = -\lambda n + n\bar{x}\log(\lambda) - \log(\sum_{i=1}^{n} x_i!)$$

est la log du maximum de vraisemblance de la loi de Poisson.

Condition du premier ordre :

$$\frac{\partial l}{\partial p} = -n + \frac{n\bar{x}}{\lambda} \quad \frac{\partial l}{\partial p} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la loi de Poisson.

Loi Normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de densité $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

Maximum de vraisemblance :

$$L(x, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$L(x, \mu, \sigma^2) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Log du Maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} l(x, \mu, \sigma^2) &= \log L(x, \mu, \sigma^2) \\ &= \log\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]^n + \log(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) \end{aligned}$$

$$l(x, \mu, \sigma^2) = -n\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$l(x, \mu, \sigma^2) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Condition du premier ordre :

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \mathbf{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne de la loi normale.

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sigma^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x_i} - \mu)^{\mathbf{2}}$$

est l'estimateur du maximum de vraisemblance de la variance de la loi normale.