Les Lois de probabilité usuelles calcul de l'espérance et de la variance

MAHAMAT ATTEÏB Adoum

01/12/2023

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \text{ (loi discrète)}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \text{ (loi continue)}$$

Variance

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Propriété de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires; a et b deux constantes.

$$E(a) = a$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

Propriété de la variance

Soit X et Y deux variables aléatoires; a et b deux constantes.

$$V(a) = 0$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2COV(X,Y)$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Loi uniforme discrète

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1; 2; \ldots; n\}$. Si chaque valeur de $\{1; 2; \ldots; n\}$ est équiprobable, c'est-à-dire si
$P(X = 1) = P(X = 2) = ... = P(X = n) = \frac{1}{n}$

Espérance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \\
&= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \ldots + x_n \times P(X = x_n) \\
&= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \ldots + n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times (1 + 2 + \ldots + n) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Variance :

Calcul de $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{N} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2(2n^2+3n+1)}{12} - \frac{3(n^2+2n+1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Loi uniforme continue

Sa densité s'écrit : $f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, b]$

Espérance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_a^b x f(x) dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \\
&= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\
&= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} \\
E(X) &= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Loi de Bernoulli

$X \sim \mathcal{B}(p)$ et sa densité est : $P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$
$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)$$
$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$V(X) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) - p^2$$
$$V(X) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p - p^2$$
$$V(X) = p(1-p)$$

Loi binomiale

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et sa densité est : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\text{Loi binomiale} = n \times \text{Loi de Bernoulli}$$

Cést-à-dire $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$

Espérance :

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$
$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$
$$E(X) = nE(X_1)$$
$$E(X) = np$$

Variance : X_i sont indépendantes et identiquement distribuées

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$$
$$= p(1-p) + p(1-p) + ... + p(1-p)$$
$$V(X) = np(1-p)$$

Loi géométrique

$X \sim \mathcal{G}(p)$ et sa densité est : $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

Rappel : utile pour le calcul de l'espérance et de la variance

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$E(X) = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ Calculons d'abord $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty}[k(k+1)-k](1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{2p}{(1-(1-p))^3} - \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{2p}{p^3} - \frac{p}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Donc,

$$V(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Loi de Poisson

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et sa densité est : $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Rappel : utile pour le calcul de l'espérance et de la variance

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda}$$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ Calculons : $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k-1)!}\lambda^k$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)+1}{(k-1)!}\lambda^k$$

$$= e^{-\lambda}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\lambda^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\lambda^k\right]$$

$$= e^{-\lambda}\left[\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda}\left[\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right] = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Loi exponentielle

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et de densité: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$

Espérance :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx, \quad \text{or } x > 0$$

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\left[x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

Intégration par parties: $\int u'v = [uv] - \int uv'$

Donc,

$$E(X) = -\left[0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0}\right] + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda \cdot \infty} - e^{-\lambda \cdot 0}\right] = -\frac{1}{\lambda}(0 - 1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Variance : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ On calcule

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$E(X^2) = -\left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}\, dx = -\frac{2}{\lambda}\left[xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

$$E(X^2) = -\frac{2}{\lambda}\left[0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0}\right] + \int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{2}{\lambda^2}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

$$E(X^2) = -\frac{2}{\lambda^2}(0-1)$$

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Donc,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Loi normale

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ une loi normale de densité: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

Changement de variable :

$$y = \frac{x-m}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + m \text{ et } dx = \sigma dy$$

Rappel :
Soit $Y \sim N(0,1)$ une loi normale centrée réduite de densité
$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$
On revient au calcul de notre espérance en tenant compte du changement de variable.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m) e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{m\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{y^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + m \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \times 0 + m \\
E(X) &= m
\end{aligned}
$$

Variance :

Variance $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Calcul de $E(X^2)$: on procéde à un changement de variable

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m)^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 y^2 + 2m\sigma y + m^2) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + 0 + m^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy
\end{aligned}$$

$$E(X^2) = \sigma^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + m^2$$

Maintenant, calculons $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ Soit $Y \sim N(0,1)$ une loi normale centrée réduite de densité $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} - 0^2 \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

On retourne au calcul de notre $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sigma^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + m^2 = \sigma^2 \times 1 + m^2 = \sigma^2 + m^2$$

Donc,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$$