Quelques exemples de familles exponentielles

MAHAMAT ATTEÏB Adoum

Institut Polytechnique de Paris
Mastère spécialisé : Big Data

01/12/2023

Familles exponentielles

Définition: En probabilité, une loi fait partie de la famille exponentielle si sa densité $f(x)$ peut se réécrire sous la forme :

$$f(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j(\theta) T_j(x) - B(\theta)\right) \times h(x)$$

Dans les beamers ci-dessous, on s'attele à démontrer que les lois (Bernoulli, binomiale, Poisson, exponentielle et normale) font parties de la famille exponentielle.

Loi de Bernoulli : Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= p^x(1-p)^{1-x} \\
&= \exp(\log p^x) \times \exp(\log(1-p)^{1-x}) \\
&= \exp(x \log p + (1-x)\log(1-p)) \\
&= \exp(x \log p + \log(1-p) - x\log(1-p)) \\
&= \exp\left(x \log \frac{p}{1-p} - \log \frac{1}{1-p}\right) \times 1
\end{aligned}
$$

$T(x) = x,\ \eta(\theta) = \log \frac{p}{1-p},\ B(\theta) = \log \frac{1}{1-p}$ *et* $h(x) = 1$
Donc, la loi de Bernoulli fait partie de la famille exponentielle.

Loi Binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} &= \binom{n}{x} \exp\left[x \log(p)\right] \exp\left[(n-x)\log(1-p)\right] \\
&= \binom{n}{x} \exp\left[x \log(p) + n\log(1-p) - x\log(1-p)\right] \\
&= \binom{n}{x} \exp\left[x \log\frac{p}{1-p} + n\log(1-p)\right] \\
&= \binom{n}{x} \exp\left[x \log\frac{p}{1-p} + \log(1-p)^n\right] \\
&= \binom{n}{x} \exp\left[x \log\frac{p}{1-p} - (\log 1 - \log(1-p)^n\right]
\end{aligned}
$$

$$f(x) = \exp\left[x \log \frac{p}{1-p} - \log \frac{1}{(1-p)^n}\right] \times \binom{n}{x}$$

$T(x) = x,\ \eta(\theta) = \log \frac{p}{1-p},\ B(\theta) = \log \frac{1}{(1-p)^n}\ et\ h(x) = \binom{n}{x}$
Donc, la loi binomiale appartient à la famille exponentielle.

loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
f(x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!} &= \exp(-\lambda) \cdot \frac{\exp(\log(\lambda^x))}{\exp(\log x!)} \\
&= \exp(-\lambda) \cdot [\exp(x \log(\lambda)) - \log(x!)] \\
&= \exp\left[-\lambda + x\log(\lambda) - \log(x!)\right] \\
&= \exp\left[x\log(\lambda) - \lambda + \log(x!)^{-1}\right] \\
&= \exp\left[x\log(\lambda) - \lambda\right] \times \exp(\log(x!)^{-1})
\end{aligned}$$

$T(x) = x,\ \eta(\theta) = \log(\lambda),\ B(\theta) = \lambda,\ \ h(x) = \exp(\log(x!)^{-1}) = \frac{1}{x!}$
Donc, la loi de Poisson fait partie de la famille exponentielle.

Loi exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= \lambda \exp(-\lambda x) \\ &= \exp\left(\log(\lambda)\right) \exp(-\lambda x) \\ &= \exp\left[\log(\lambda) - \lambda x\right] \\ &= \exp\left[-\lambda x - (-\log \lambda)\right] \times 1 \end{aligned}$$

avec $T(x) = x$, $\eta(\theta) = -\lambda$, $B(\theta) = -\log \lambda$ et $h(x) = 1$
Donc, la loi exponentielle fait partie de la famille exponentielle.

Loi Normale (σ connu) : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
f_\theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(-\log\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(-\log\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \log\sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log(\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})) - \log\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \log\frac{\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

avec $T(x) = x$, $\eta(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $B(\theta) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$ et $h(x) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$
Donc, la loi normale (avec σ connu) fait partie de la famille exponentielle.

Loi Normale (σ inconnu) : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$
\begin{aligned}
f_\theta(X = x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\log \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \left(\log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\right) \times 1
\end{aligned}
$$

$T_1(x) = x,\ \eta_1(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2},\ T_2(x) = -x^2,\ \ \eta_2(\theta) = \frac{1}{2\sigma^2},$
$B(\theta) = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$, et $h(x) = 1$
Donc, la loi normale (avec σ inconnu) fait partie de la famille exponentielle.