مذكرة الكالكولس الشاملة

Complete Calculus Study Guide

من الأساسيات إلى حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات

Pre-Calculus • Calculus 1 • Calculus 2 • Multivariable Calculus

شرح عميق •أمثلة محلولة •فهم السبب والهدف من كل خطوة

Calculus 0 — Pre-Calculus Foundations

1. Algebra Essentials

1.1 Real Numbers & Properties

الأعداد الحقيقية هي كل الأعداد التي يمكن تمثيلها على خط الأعداد، وتشمل: الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية والتي لا نسبية.

الأعداد الطبيعية (N): 1, 2, 3, ...
الأعداد الصحيحة (Z): ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
الأعداد النسبية (Q): 3/4, 1/2 أعداد تُكتب كسراً مثل
الأعداد التي لا نسبية (Irrational): π مثل)لا تُكتب كسراً دقيقاً(2√ و
الأعداد الحقيقية (R) = لا نسبية ∪ نسبية

الخصائص الأساسية للأعداد الحقيقية:

الإبدالية (Commutative): $a + b = b + a$ و $a \times b = b \times a$
التجميعية (Associative): $(a+b)+c = a+(b+c)$
التوزيعية (Distributive): $a(b+c) = ab + ac$
العنصر المحايد: $a + 0 = a$ و $a \times 1 = a$
العنصر المعاكس: $a + (-a) = 0$ و $a \times (1/a) = 1$

لماذا نهتم بهذه الخصائص؟ لأنها الأساس الذي يُبنى عليه كل تبسيط جبري في الكالكولس. بدونها لا تستطيع تبسيط التعبيرات أو فك الأقواس.

مثال: بسّط $2(x - 1) - (x + 4)$
الحل خطوة بخطوة:
الخطوة 1: وزّع الأقواس: $2x - 2 + 12 + x$
لماذا؟ لأن خاصية التوزيع تقول: $a(b+c) = ab + ac$
الخطوة 2: اجمع الحدود المتشابهة: $(3x - 2x) + (12 + 2) = x + 14$
النتيجة: $x + 14$

1.2 Exponents & Radicals

الأسس والجذور هما وجهان لعملة واحدة. الأس يعني ضرب العدد في نفسه عدة مرات، والجذر هو عكس عملية الأس.

قوانين الأسس:

لماذا؟ لأن الضرب يُجمع الأسس	$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$
لماذا؟ لأن القسمة تطرح الأسس	$a^m \div a^n = a^{(m-n)}$
لماذا؟ لأن الأس المتكرر يُضاعف القوة	$(a^m)^n = a^{(m\times n)}$
لماذا؟ لأن $a^n / a^n = a^{(n-n)} = a^0 = 1$	$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$
لماذا؟ لأن الأس السالب يعني مقلوب	$a^{(-n)} = 1/a^n$
لماذا؟ لأن $(a^{(1/n)})^n = a^1 = a$	$a^{(1/n)} = \sqrt[n]{a}$

مثال 1: بسّط $x^3 \times x^5$
الحل: $x^3 \times x^5 = x^{(3+5)} = x^8$
$x^5 = x\times x\times x\times x\times x$ و $x^3 = x\times x\times x$ لماذا نجمع الأسس؟ لأن
x^8 = مضروبة 8 مرات x فضربهما معاً يعطي
مثال 2: بسّط $(16)^{(3/4)}$
الحل:
الخطوة 1: اكتب $16 = 2^4$
الخطوة 2: $(2^4)^{(3/4)} = 2^{(4\times 3/4)} = 2^3 = 8$
لماذا هذه الطريقة؟ لأن تحليل الأساس يُسهّل تطبيق قانون الأسس
مثال 3: بسّط $\sqrt{(12x^2y^3)}$
الحل: $\sqrt{(12)} \times \sqrt{(x^2)} \times \sqrt{(y^3)} = 2\sqrt{3} \times x \times y\sqrt{y} = 2xy\sqrt{(3y)}$

1.3 Algebraic Expressions

التعبير الجبري هو مجموعة من الأعداد والمتغيرات والعمليات الرياضية مجمّعة معاً. فهم التعبيرات الجبرية أساسي لكتابة معادلات الكالكولس.

مثال: وسّع وبسّط $(2x + 3)^2 - (x - 1)(x + 4)$
الحل:
الخطوة 1: وسّع $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
لماذا؟ لأن $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — صيغة مربع ثنائي الحد
الخطوة 2: وسّع $(x-1)(x+4) = x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4$
لماذا؟ باستخدام FOIL: أول×أول, خارج×خارج, داخل×داخل, آخر×آخر
الخطوة 3: اطرح $(4x^2 + 12x + 9) - (x^2 + 3x - 4)$
$= 4x^2 + 12x + 9 - x^2 - 3x + 4 = 3x^2 + 9x + 13$

1.4 Equations & Inequalities

المعادلة هي جملة رياضية تقول إن تعبيرين متساويان. حلّها يعني إيجاد قيمة المتغير التي تُحقق المساواة.

المعادلة الخطية: $ax + b = 0 \rightarrow x = -b/a$
المعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = (-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}) / (2a)$
المتباينة: نحل مثل المعادلة لكن نقلب الإشارة عند الضرب/القسمة على سالب

مثال: $x^2 - 5x - 3 = 0$ حلّ 2
الحل باستخدام المعادلة التربيعية:
$a = 2, b = -5, c = -3$
المميّز (Discriminant): $b^2-4ac = 25 + 24 = 49 \rightarrow \sqrt{49} = 7$
لماذا نحسب المميّز أولاً؟ ليعطينا معلومة عن طبيعة الحلول:
إذا >0: حلّان حقيقيان مختلفان
إذا $=0$: حلّ واحد (مزدوج)
إذا <0: لا حلول حقيقية
$x = (5 \pm 7) / 4$
$x_1 = 12/4 = 3$ و $x_2 = -2/4 = -1/2$

مثال: $x - 7 > 2x + 1$ حلّ المتباينة 3
الحل:
$3x - 2x > 1 + 7$
$x > 8$
الإجابة: $x \in (8, +\infty)$
لماذا نكتب بصيغة الفترة؟ لأنها أوضح في وصف مجموعة الحلول الغير محدودة

1.5 Absolute Value

القيمة المطلقة تُعبّر عن المسافة من نقطة إلى الصفر على خط الأعداد — دائماً موجبة أو صفر.

$x \geq 0$ إذا $\lvert x\rvert = x$
$x < 0$ إذا $\lvert x\rvert = -x$
$\lvert x - a\rvert$ = المسافة بين x و a
مثال: $\lvert x - 3\rvert = 7$ حلّ 2
الحل:
لماذا نحصل على معادلتين؟ لأن القيمة المطلقة تساوي 7 في حالتين:

2: 1 الحالة $x - 3 = 7 \rightarrow x = 5$
2: 2 الحالة $x - 3 = -7 \rightarrow x = -2$
✓ التحقق| :2)5(-3| = |7| = 7 ✓ و |2(2)-3| = |-7| = 7

1.6 Polynomials

أعداد صحيحة غير سالبة n حيث، a_nx^n هي مجموع حدود من الشكل (Polynomial) كثيرة الحدود.

أعلى أس في كثيرة الحدود: (Degree) الدرجة
معامل أعلى أس: (Leading Coefficient) المعامل الرئيسي
تجعل الدالة =0 x قيمة: (Root/Zero) الجذر
احسب: مثال $(3x^2 + 2x - 1)(x + 4)$
الحل بطريقة التوزيع:
$3x^2(x+4) + 2x(x+4) - 1(x+4)$
$= 3x^3 + 12x^2 + 2x^2 + 8x - x - 4$
$= 3x^3 + 14x^2 + 7x - 4$
لماذا نُوزّع كل حد على حدة؟ لأن خاصية التوزيع تضمن عدم ضياع أي حد

1.7 Factoring Techniques

التحليل إلى عوامل هو عكس عملية الضرب — نُعبّر عن كثيرة الحدود كضرب عوامل أبسط. هذه مهارة حيوية في الكالكولس لتبسيط الكسور وحل المعادلات.

1. 6: العامل المشترك $x^2 + 4x = 2x(3x + 2)$
2. مربع الثنائي: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
3. فرق المربعين: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. مجموع/فرق المكعبات: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
5. التجميع (Grouping): $ax + ay + bx + by = (a+b)(x+y)$
حلّل: 1 مثال $x^2 - 9$
فرق مربعين ← $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$
لماذا يُفيدنا هذا؟ نستطيع الآن إيجاد الجذور: $x = 3$ أو $x = -3$
حلّل: 2 مثال $x^3 - 8$
فرق مكعبين ← $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
التحقق: $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3+2x^2+4x - 2x^2-4x-8 = x^3-8$ ✓

مثال 3: $x^2 + 11x + 4$ حلّل 6
نبحث عن عددين حاصل ضربهما =6×4 =24 وحاصل جمعهما =11
و 8 +3= 11 $8 \times 3 = 24$
$6x^2 + 8x + 3x + 4 = 2x(3x+4) + 1(3x+4) = (2x+1)(3x+4)$

1.8 Rational Expressions

التعابير الكسرية (Rational Expressions) هي كسور تكون بسطها ومقامها كثيرات حدود. مهارة تبسيطها ضرورية لتبسيط النهايات في Calculus 1.

مثال: بسّط $(x^2 - 4) / (x^2 - x - 2)$
الحل:
الخطوة 1: حلّل البسط: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
الخطوة 2: حلّل المقام: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
الخطوة 3: اختصر: $(x+2)(x-2) / [(x-2)(x+1)] = (x+2)/(x+1)$
لماذا نحلّل أولاً؟ حتى نستطيع رؤية العوامل المشتركة ونختصرها
ملاحظة مهمة: $x \neq 2$ و $x \neq -1$ (قيم تُصفّر المقام)

1.9 Systems of Equations

نظام المعادلات هو مجموعة معادلتين أو أكثر بمتغيرين أو أكثر. الهدف: إيجاد القيم التي تُحقق جميع المعادلات في نفس الوقت.

طرق الحل:
1. الحذف (Elimination): نضرب معادلة ونجمع للتخلص من متغير
2. التعويض (Substitution): نُعبّر عن متغير بالآخر ونعوّض
3. رسومياً: نجد نقطة تقاطع الخطين
مثال: حلّ النظام: $x + y = 7$ و $x - y = 2$
بطريقة الحذف:
الخطوة 1: نجمع المعادلتين: $(2x+y) + (x-y) = 7+2$
لماذا؟ لأن y و -y يُلغيان بعضهما فيبقى متغير واحد
$3x = 9 \rightarrow x = 3$
الخطوة 2: نعوّض: $y = 7 + 3(2)$ $\rightarrow y = 1$
الحل: $(x=3, y=1)$
التحقق: $3 - 1 = 2$ ✓

2. Functions Basics — أساسيات الدوال

2.1 مفهوم الـ Function

الدالة (Function) هي قاعدة تُرسل كل عنصر من مجموعة (المجال) إلى عنصر واحد بالضبط في مجموعة أخرى (المدى). الكلمة المفتاحية «هي»: واحد بالضبط.

لماذا شرط 'واحد بالضبط'؟ لأن الدالة تُمثّل علاقة سببية: لكل مدخل ناتج واحد لا لبس فيه. مثل آلة القهوة: لكل كبسة زر نتيجة واحدة.

اختبار الخط الرأسي (Vertical Line Test):
إذا قاطع أي خط رأسي الرسم البياني في نقطتين ← ليست دالة
إذا قاطع في نقطة واحدة على الأكثر ← دالة
هل العلاقة: مثال $y^2 = x$ دالة؟
الحل:
عند $x = 4$: $y^2 = 4 \rightarrow y = 2$ أو $y = -2$
x لنفس قيمة y نحصل على قيمتين لـ لإن انت هتشيل الأس بجذر فلازم تحط موجب وسالب
الحكم: ليست دالة — لأن المدخل الواحد له أكثر من مخرج
هي دالة لأنها تُعطي قيمة موجبة واحدة فقط $y = \sqrt{x}$:لكن هنا نفس الدالة الأولي بس هو اللي حط الجذر فكده مش هتحط الموجب والسالب

2.2 Domain & Range

المجال (Domain): مجموعة كل قيم x (المدخلات) الممكنة.

المدى (Range): مجموعة كل قيم y (المخرجات) الناتجة.

قواعد تحديد المجال:
لا يجوز القسمة على صفر ← اجعل المقام $\neq 0$ 1.
لا جذر تربيعي لعدد سالب ← اجعل ما تحت الجذر ≥ 0 2.
argument > 0 ← لوغاريتم الأعداد الموجبة فقط 3.
مثال 1: $f(x) = \sqrt{(x - 3)}$ أوجد مجال
الشرط: $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$
المجال: $[3, +\infty)$
لماذا؟ لأن الجذر التربيعي غير معرّف للأعداد السالبة
مثال 2: $g(x) = (x+1) / (x^2 - 4)$ أوجد مجال
الشرط: $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$ و $x \neq -2$
المجال: $\mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

مثال 3: أوجد مدى $f(x) = x^2 + 1$
$f(x) = 1$ هي 0، إذن أدنى قيمة لـ x^2 أدنى قيمة لـ
المدى: $[1, +\infty)$

2.3 Function Notation

«x عند النقطة f تعني »قيمة الدالة — x مضروباً في f لا تعني f(x).

مثال: إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$، أوجد $f(0), f(2), f(a+1)$
$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
$f(2) = 2(4) - 6 + 1 = 3$
$f(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 1$
$= 2(a^2+2a+1) - 3a - 3 + 1$
$= 2a^2 + 4a + 2 - 3a - 2 = 2a^2 + a$
لماذا نحسب $f(a+1)$ لاحقاً؟: هذا أساسي لتعريف المشتقة $[f(x+h)-f(x)]/h$

2.4 Transformations — (Shift, Stretch, Reflect)

التحولات تُغيّر شكل الدالة ومكانها دون تغيير طبيعتها الأساسية.

وحدة k إزاحة للأعلى → $y = f(x) + k$
وحدة k إزاحة للأسفل → $y = f(x) - k$
وحدة h إزاحة لليسار → $y = f(x + h)$
وحدة h إزاحة لليمين → $y = f(x - h)$
x انعكاس حول محور → $y = -f(x)$
y انعكاس حول محور → $y = f(-x)$
تمدد رأسي → $y = af(x), a>1$
تضييق أفقي → $y = f(bx), b>1$
لماذا $f(x+h)$ ينقل يساراً لا يميناً؟ لأن $f(x+2) = 0$ يحتاج $x = -2$، أي النقطة الصفرية انتقلت لـ $x = -2$، وهو يسار الأصل.
مثال: اكتب معادلة لـ $y = \sqrt{x}$ بعد:
إزاحة يميناً 3 وحدات -
إزاحة للأعلى 2 وحدات -
x انعكاس حول محور -
الحل: $y = -\sqrt{(x - 3)} + 2$
لليمين، +2 للأعلى، السالب الخارجي للانعكاس $(x-3)$

2.5 Composition of Functions

تركيب الدوال (Composition): يعني تطبيق دالة على ناتج دالة أخرى $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

في الكالكولس يعتمد كلياً على فهم تركيب الدوال — متى تكون دالة مركّبة ومن أي Chain Rule لماذا يهمنا التركيب؟ لأن طبقات تتكون.
مثال: إذا كان $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$، أوجد $f(g(x))$ و $g(f(x))$
$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$ ، المجال: $x \geq 0$
$g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)}$ ، المجال: جميع الأعداد الحقيقية
ملاحظة: $f \circ g \neq g \circ f$ — ترتيب التركيب مهم جداً!

2.6 Inverse Functions

الدالة العكسية f^{-1} هي الدالة التي تعكس عمل f. إذا $f(a) = b$ فإن $f^{-1}(b) = a$.

شروط وجود الدالة العكسية:
الدالة يجب أن تكون One-to-One (واحدة x قيمة y لكل قيمة)
اختبار الخط الأفقي: لا يُقاطع الرسم في نقطتين
طريقة إيجاد الدالة العكسية:
1. استبدل $f(x)$ بـ y
2. بادل x و y
3. حلّ بالنسبة لـ y — هذا هو $f^{-1}(x)$
مثال: أوجد عكس $f(x) = 3x - 5$
الخطوة 1: $y = 3x - 5$
الخطوة 2: $x = 3y - 5$
الخطوة 3: $x + 5 = 3y \rightarrow y = (x+5)/3$
$f^{-1}(x) = (x+5)/3$
التحقق: $f(f^{-1}(x)) = 3 \cdot (x+5)/3 - 5 = x+5-5 = x$ ✓

3. Important Function Types — أنواع الدوال المهمة

3.1 Linear Functions

الدالة الخطية: $f(x) = mx + b$، حيث m الميل و b نقطة قطع محور y.

الميل (Slope) = تغيّر في y / تغيّر في x $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ يعني كام التغير في y لما يحصل تغير ١ في x
ميل موجب ⟵ الدالة تتزايد
ميل سالب ⟵ الدالة تتناقص
ميل =0 ⟵ خط أفقي (دالة ثابتة)
مثال: اكتب معادلة الخط المار بـ (1,3) و (4,9)
$m = (9-3)/(4-1) = 6/3 = 2$
$y - 3 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 1$
لماذا نستخدم النقطة-الميل؟ لأنها أسرع عندما نعرف نقطة وميلاً

3.2 Quadratic Functions

الدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c$، رسمها قطع مكافئ (Parabola)، إذا $a>0$ يفتح للأعلى وللأسفل إذا $a<0$.

قمة القطع المكافئ (Vertex): $x = -b/(2a)$
المحور الصادي للتماثل: $x = -b/(2a)$
الصيغة القمية: $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ، القمة (h,k)
المميّز: b^2-4ac يُحدد عدد جذور المعادلة
مثال: اكتب $f(x) = x^2 - 6x + 5$ وأوجد القمة بالصيغة القمية
الخطوة 1: أكمل المربع:
$x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$
مربعاً كاملاً $(x-6x+9)$ لماذا نُضيف 9؟ لأن $(-6/2)^2 = 9$، وهذا يجعل
الصيغة القمية: $f(x) = (x-3)^2 - 4$
$a = 1 > 0$ (القمة: 3, -4) ⟵ أدنى نقطة لأن

3.3 Polynomial Functions

كثيرات الحدود لها خصائص أساسية تُحدد شكل رسمها:

سلوك الطرفين (End Behavior):
$(+\infty)$ درجة زوجية، معامل موجب: كلا الطرفين للأعلى
$(-\infty)$ درجة زوجية، معامل سالب: كلا الطرفين للأسفل
$(+\infty)$ درجة فردية، معامل موجب: يسار للأسفل $(-\infty)$، يمين للأعلى

(-∞) درجة فردية، معامل سالب :يسار للأعلى +)(∞، يمين للأسفل
$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ مثال :ارسم تخطيطياً
$f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$ الخطوة 1 :أوجد الجذور :حلّل
الجذور: $x = -1, 1, 3$
الخطوة 2 :سلوك الطرفين :درجة 3)فردية(، معامل موجب
+∞ :يسار :- ∞، يمين →
x الخطوة 3 :اختبر إشارة بين الجذور لمعرفة أين الدالة فوق/تحت

3.4 Rational Functions

الدالة الكسرية: $f(x) = P(x)/Q(x)$ حيث P وQ المقاربات .تتميز بوجود حدود كثيرتا (Asymptotes).

تُصفّر المقام)وليس البسط(x عند قيم :(Vertical Asymptote) المقاربة الرأسية
:(Horizontal Asymptote) المقاربة الأفقية
• درجة P < درجة Q → y = 0
• درجة P = درجة Q → y = (الرئيسي P معامل)/(الرئيسي Q معامل)
• درجة P > درجة Q →)وجود مائلة(لا توجد مقاربة أفقية
$f(x) = (2x+1)/(x-3)$ مثال :أوجد المقاربات لـ
المقاربة الرأسية: $x = 3$ (تُصفّر المقام)
درجتا: المقاربة الأفقية P وQ، إذن (=1 متساويتان) $y = 2/1 = 2$
$x \to \infty$: $(2x+1)/(x-3) \approx 2x/x = 2$ لماذا؟ عندما

3.5 Exponential Functions

الدالة الأسية: $f(x) = a^x$، حيث $a > 0$ و $a \neq 1$. .تنمو أو تتناقص بمعدل ثابت النسبة.

$a > 1$: دالة متزايدة (نمو أسي — Exponential Growth)
$0 < a < 1$: دالة متناقصة (تناقص أسي — Exponential Decay)
المدى: $(0+, \infty)$ ، المجال: $\mathbb{R}$
دائماً تمر بـ $(0, 1)$
القاعدة الطبيعية: $e \approx 2.718 \rightarrow f(x) = e^x$
مثال :البكتيريا تتضاعف كل ساعة .كانت 100 في البداية .كم عددها بعد t ساعات؟
$N(t) = 100 \times 2^t$
بعد 3 ساعات: $N(3) = 100 \times 8 = 800$ بكتيريا
لماذا الدالة الأسية؟ لأن النمو نسبي — كل وحدة زمنية تُضاعف العدد

3.6 Logarithmic Functions

اللوغاريتم هو عكس الدالة الأسية: $\log_a(x) = y$ يعني $a^y = x$

$\log_a(x)$: لوغاريتم بأساس a
$\log(x) = \log_{10}(x)$: لوغاريتم عشري
$\ln(x) = \log_e(x)$: لوغاريتم طبيعي
قوانين اللوغاريتم:
$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$
مثال: حلّ $2^{(x+1)} = 32$
$32 = 2^5 \rightarrow 2^{(x+1)} = 2^5 \rightarrow x+1 = 5 \rightarrow x = 4$
مثال: حلّ $\ln(x) + \ln(x-2) = \ln(8)$
$\ln[x(x-2)] = \ln(8) \rightarrow x(x-2) = 8$
$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow (x-4)(x+2) = 0$
$x = -2$ أو $x = 4$
غير معرّف $\ln(-2)$ لأن $x = -2$ تُهمل
الحل: $x = 4$

4. Trigonometry — المثلثات

4.1 Unit Circle — الدائرة الوحدة

الدائرة الوحدة هي دائرة مركزها الأصل ونصف قطرها 1. تُعطي تعريفاً شاملاً لدوال المثلثات لجميع الزوايا.

النقطة على الدائرة الوحدة هي (cos θ, sin θ)، لأي زاوية θ
زوايا محورية: 0°, 90°, 180°, 270°, 360°
(1,0) , (0,1) , (-1,0) , (0,-1) , (1,0)
زوايا مهمة:
30° = π/6: cos=√3/2, sin=1/2
45° = π/4: cos=√2/2, sin=√2/2
60° = π/3: cos=1/2, sin=√3/2
لماذا الدائرة الوحدة مهمة في الكالكولس؟ لأنها تُعطي قيم الجيب وجيب التمام بشكل مباشر، وهي أساس اشتقاق sin وcos لاحقاً.

4.2 Trigonometric Functions

sin(θ) = الإحداثي = في الدائرة الوحدة y ضلع مقابل /وتر
cos(θ) = الإحداثي = في الدائرة الوحدة x ضلع مجاور /وتر
tan(θ) = sin(θ)/cos(θ) = y/x
csc(θ) = 1/sin(θ)
sec(θ) = 1/cos(θ)
cot(θ) = cos(θ)/sin(θ) = 1/tan(θ)

4.3 Trigonometric Identities

المتطابقات المثلثية هي معادلات صحيحة لجميع قيم الزاوية. ضرورية لتبسيط التكاملات وإثبات المتطابقات.

الهوية الأساسية: $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
منها نستنتج: $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$
صيغ مجموع الزوايا:
$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$
$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$

صيغ الزاوية المضاعفة:
$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$
مثال: أثبت أن $(1 - \cos^2(x)) / \sin(x) = \sin(x)$
الطرف الأيسر: $(1 - \cos^2(x)) / \sin(x)$
من الهوية الأساسية: $1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$
إذن: $\sin^2(x) / \sin(x) = \sin(x)$ ✓
لماذا نبدأ من الجانب الأعقد؟ لأنه يوفر أكثر مادة للتبسيط

4.4 Inverse Trig Functions

$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$: المجال $[-\pi/2, \pi/2]$ المدى $[-1, 1]$
$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$: المجال $[0, \pi]$ المدى $[-1, 1]$
$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$: المجال $\mathbb{R}$ ، المدى $(-\pi/2, \pi/2)$
مثال: أوجد $\arcsin(\sqrt{3}/2)$
نسأل: ما الزاوية θ التي $\sin(\theta) = \sqrt{3}/2$ و $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$؟
الجواب: $\theta = \pi/3 = 60°$

5. Analytic Geometry — الهندسة التحليلية

5.1 Coordinate System & Lines

معادلة الخط:
الصيغة الميلية: $y = mx + b$
صيغة النقطة-الميل: $y - y_1 = m(x - x_1)$
الصيغة العامة: $ax + by + c = 0$
خطان متوازيان: نفس الميل $(m_1 = m_2)$
خطان عموديان: حاصل ضرب ميليهما $(m_1 \times m_2 = -1)$ =-1

5.2 Conic Sections

القطوع المخروطية هي مقاطع المخروط: دائرة، قطع مكافئ، قطع ناقص، قطع زائد.

الدائرة (Circle): $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
r النصف قطر، (h,k) المركز
القطع المكافئ (Parabola):
$y = a(x-h)^2 + k$ (يفتح أعلى/أسفل)
$x = a(y-k)^2 + h$ (يفتح يمين/يسار)
القطع الناقص (Ellipse):
$(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$
القطع الزائد (Hyperbola):
$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$
مثال: اكتب معادلة دائرة مركزها (2,-3 ونصف قطرها 5
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
مثال: حوّل $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ إلى الصيغة القياسية
$(x^2-4x) + (y^2+6y) = 3$
أكمل المربع: $(x-2)^2-4 + (y+3)^2-9 = 3$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

دائرة مركزها)2,-3 (ونصف قطرها 4

Calculus 1 — Differential Calculus

6. Limits & Continuity — النهايات والاستمرارية

6.1 مفهوم الـ Limit

من قيمة معينة؟ لا نهتم بقيمة الدالة عند النقطة نفسها، بل بما يحدث في محيطها x النهاية تُجيب على سؤال: إلى أي قيمة تقترب الدالة عندما يقترب.

غير معرّفة بالتعويض المباشر x=0 عند (sin x)/x لماذا نحتاج النهايات؟ لأن كثيراً من الدوال المهمة مثل،
لكن لها نهاية محددة. النهاية هي الأداة التي تجعلنا نتجاوز هذه الإشكالية.
أيضاً: تعريف المشتقة والتكامل كلاهما يقوم على مفهوم النهاية.
التعريف غير الرسمي: lim[x→a] f(x) = L
L من f(x) اقتربت، x=a يعني: كلما اقتربنا من
ملاحظة جوهرية: lim[x→a] f(x) لا يعتمد على f(a)

6.2 Limit Laws

موجودتين، فإن lim g و lim f إذا كانت النهايتان:
lim[x→a] [f(x) ± g(x)] = lim f(x) ± lim g(x)
lim[x→a] [f(x) × g(x)] = lim f(x) × lim g(x)
lim[x→a] [f(x)/g(x)] = lim f(x) / lim g(x) ، بشرط lim g ≠ 0
lim[x→a] [f(x)]ⁿ = [lim f(x)]ⁿ
lim[x→a] c = c (نهاية الثابت هي هو نفسه)
مثال: أوجد lim[x→2] (x² + 3x - 1)
بالتعويض المباشر): 2(3+ ²)2: 1 -) 4= 6+ 1 - 9=
لماذا يجوز التعويض؟ لأن كثيرات الحدود دوال مستمرة، نهايتها =قيمتها

6.3 One-Sided Limits — النهايات الأحادية الجانب

(من الجهة الأكبر a يقترب من x) نهاية من اليمين: lim[x→a⁺] f(x)
(من الجهة الأصغر a يقترب من x) نهاية من اليسار: lim[x→a⁻] f(x)
النهاية: قاعدة مهمة lim[x→a] f(x) موجودة ⟺ النهايتان الجانبيتان متساويتان
مثال: أوجد نهايات f(x) = |x|/x عند x=0
من اليمين (x>0): |x|/x = x/x = 1 → lim[x→0⁺] = 1

من اليسار (x<0): $\lim[x\to 0^-] = -1 \leftarrow -x/x = -1 = \lvert x\rvert/x$
لا وجود لها $\lim[x\to 0]$ ← النهايتان مختلفتان
x=0 هذا يعني أن الدالة لديها قفزة عند

6.4 Infinite Limits & Limits at Infinity

(المقارب الرأسي) النهاية اللانهائية: $\lim[x\to a]\ f(x) = \pm\infty$
(المقارب الأفقي) النهاية عند اللانهاية: $\lim[x\to\pm\infty]\ f(x) = L$
تقنيات مهمة:
• اقسم البسط والمقام على أعلى درجة في المقام
• 1: استخدم $1/x^n \to 0$ عندما $x \to \pm\infty$
مثال: أوجد $\lim[x\to\infty]\ (3x^2 + 5) / (2x^2 - x + 1)$
اقسم على x^2:
$= \lim[x\to\infty]\ (3 + 5/x^2) / (2 - 1/x + 1/x^2)$
$= (3 + 0) / (2 - 0 + 0) = 3/2$
لماذا هذه الطريقة؟ لأن الحدود الأقل درجة تتلاشى مقارنة بالحد الأعلى درجة
مثال: أوجد $\lim[x\to 2]\ 1/(x-2)^2$
عندما $x \to 2$: $(x-2)^2 \to 0^+$
$1/(x-2)^2 \to +\infty$ إذن
مقارب رأسي x=2 هذا يعني

6.5 حالات التحقق بتقنيات خاصة

الحالات الغير محددة (Indeterminate Forms):
∞^0 ، 1^∞ ، 0^0 ، $\infty-\infty$ ، $0\times\infty$ ، ∞/∞ ، $0/0$
التقنيات:
1. التحليل والاختصار (Factoring)
2. ضرب المرافق (Rationalizing)
3. قاعدة لوبيتال (L'Hopital's Rule) — ستأتي في المشتقات
مثال: أوجد $\lim[x\to 3]\ (x^2-9)/(x-3)$
التعويض المباشر يُعطي 0/0 — حالة غير محددة

حلّل: الحل: $(x^2-9)/(x-3) = (x+3)(x-3)/(x-3) = x+3$ (لـ $x\neq3$)
$\lim[x\to3] (x+3) = 6$
نفسها $f(3)$ لماذا يجوز الاختصار؟ لأن النهاية لا تعتمد على
أوجد: مثال $\lim[x\to0] (\sqrt{(x+4)} - 2)/x$
حالة 0/0 — نضرب بالمرافق
$\times (\sqrt{(x+4)}+2)/(\sqrt{(x+4)}+2)$
$= (x+4-4) / [x(\sqrt{(x+4)}+2)]$
$= x / [x(\sqrt{(x+4)}+2)]$
$= 1/(\sqrt{(x+4)}+2)$
عند $x\to0$: $1/(\sqrt{4}+2) = 1/4$

6.6 Continuity — الاستمرارية

إذا وفقط إذا تحققت ثلاثة شروط معاً $x=a$ مستمرة عند f الدالة:

1. $f(a)$ (النقطة موجودة) معرّفة
2. $\lim[x\to a] f(x)$ (النهاية موجودة) موجودة
3. $\lim[x\to a] f(x) = f(a)$ (النهاية تساوي القيمة)
لماذا الاستمرارية مهمة؟ الدوال المستمرة تُحقق خصائص قوية:
Intermediate Value Theorem: الدالة المستمرة على $[a,b]$ تأخذ كل قيمة بين $f(a)$ و$f(b)$
وكذلك الاشتقاق يتطلب الاستمرارية كشرط أساسي
أنواع الانقطاع (Discontinuities):
1. قابل للإزالة (Removable): النهاية موجودة لكن $f(a)$ ثقب في الرسم — مختلفة أو غير معرّفة
2. قفزة (Jump): النهايتان الجانبيتان موجودتان لكنهما مختلفتان
3. لا نهائي (Infinite): وجود مقارب رأسي ∞ (النهاية $= \pm$)
مثال: أوجد نوع انقطاع $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$
عند $x=1$: غير معرّفة — التعويض يُعطي 0/0
لكن $\lim[x\to1] (x+1)(x-1)/(x-1) = \lim[x\to1] (x+1) = 2$
غير معرّفة $f(1)$ النهاية موجودة لكن
$f(1)=2$ الانقطاع: قابل للإزالة — يمكن 'إصلاحه' بتعريف

7. Derivatives — المشتقات

7.1 تعريف المشتقة

المشتقة هي معدل التغير اللحظي للدالة. تُعرَّف بالنهاية:

$f'(x) = \lim[h\to 0]\ [f(x+h) - f(x)] / h$
عندما يصبح التغير صغيراً جداً؟ x إلى التغير في f هذا يعني: ماذا يحدث لنسبة التغير في
(Secant Line). نحصل على ميل قاطع $h\neq 0$ لـ $[f(x+h)-f(x)]/h$ لماذا النهاية؟ لو حسبنا
(Tangent Line). تتحول القاطع إلى مماس، $h\to 0$ عندما
ميل المماس هو المشتقة — يُعطينا معدل التغير اللحظي.
$f(x) = x^2$ من التعريف لـ $f'(x)$ مثال: أوجد
$f'(x) = \lim[h\to 0]\ [(x+h)^2 - x^2] / h$
$= \lim[h\to 0]\ [x^2+2xh+h^2 - x^2] / h$
$= \lim[h\to 0]\ [2xh + h^2] / h$
$= \lim[h\to 0]\ [2x + h]$
$= 2x$
من المقام قبل أخذ النهاية h لماذا نُبسّط أولاً؟ حتى يختفي

7.2 Differentiation Rules — قواعد الاشتقاق

قاعدة الأسس (Power Rule): $d/dx\ [x^n] = n\cdot x^{n-1}$
قاعدة الثابت: $d/dx\ [c] = 0$
قاعدة الثابت ×الدالة: $d/dx\ [c\cdot f(x)] = c\cdot f'(x)$
قاعدة الجمع/الطرح: $d/dx\ [f\pm g] = f'\pm g'$
قاعدة الضرب (Product Rule): $d/dx\ [f\cdot g] = f'g + fg'$
قاعدة القسمة (Quotient Rule): $d/dx\ [f/g] = (f'g - fg') / g^2$
قاعدة السلسلة (Chain Rule): $d/dx\ [f(g(x))] = f'(g(x))\cdot g'(x)$
هذا خطأ شائع — $(fg)' \neq f'g'$ لماذا قاعدة الضرب هكذا؟ لأن!
السبب: التغير في حاصل الضرب يشمل تغيّر كل منهما مع ثبات الآخر.
g، لكل وحدة من f' تتغير بمعدل f و g' تتغير بمعدل g لماذا قاعدة السلسلة؟ لأن إذا
$f'\cdot g'$. تتغير بمعدل $f(g(x))$ فإن
اشتق: 1 مثال $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2$
$f'(x) = 15x^2 - 6x + 7$

لماذا؟ نطبّق Power Rule على كل حد: $d/dx[x^n] = nx^{n-1}$
اشتق: 2 مثال $f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$ [Product Rule]
$f'(x) = (3x^2) \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$
$f' = u'v + uv'$ حيث $u=x^3, v=\sin(x)$
اشتق: 3 مثال $f(x) = \sin(x^2+1)$ [Chain Rule]
الدالة الخارجية: $\sin(\square)$ ، الدالة الداخلية: x^2+1
$f'(x) = \cos(x^2+1) \cdot 2x$
لماذا نضرب بـ 2 ؟ لأن هذا مشتقة الدالة الداخلية x

7.3 Derivatives of Standard Functions

$d/dx [\sin x] = \cos x$
$d/dx [\cos x] = -\sin x$
$d/dx [\tan x] = \sec^2 x$
$d/dx [e^x] = e^x$
$d/dx [a^x] = a^x \cdot \ln(a)$
$d/dx [\ln x] = 1/x$
$d/dx [\log_a x] = 1/(x \cdot \ln a)$
$d/dx [\arcsin x] = 1/\sqrt{(1-x^2)}$
$d/dx [\arctan x] = 1/(1+x^2)$
اشتق: مثال $f(x) = e^{(3x^2)} \cdot \ln(x)$
نطبّق Product Rule: $u = e^{(3x^2)}$، $v = \ln(x)$
$u' = e^{(3x^2)} \cdot 6x$ (Chain Rule)
$v' = 1/x$
$f'(x) = 6x \cdot e^{(3x^2)} \cdot \ln(x) + e^{(3x^2)} \cdot (1/x)$
$= e^{(3x^2)} [6x \cdot \ln(x) + 1/x]$

7.4 Implicit Differentiation

عندما تكون y معرّفة ضمنياً (لا نستطيع حلّها صراحةً بالنسبة لـ y)، نشتق الطرفين بالنسبة لـ x مع تذكّر أن y دالة في x.

مثال: أوجد dy/dx إذا كان $x^2 + y^2 = 25$

نشتق الطرفين بالنسبة لـ x:
$2x + 2y\cdot(dy/dx) = 0$
لماذا ظهر dy/dx مع y؟ لأن y دالة في x، فنطبّق Chain Rule
$2y\cdot(dy/dx) = -2x$
$dy/dx = -x/y$
هذا يُعطينا ميل المماس للدائرة عند أي نقطة

7.5 Higher Order Derivatives

f'(x) = المشتقة الأولى (First Derivative)
f''(x) = مشتقة = المشتقة الثانية f'(x)
f'''(x) = المشتقة الثالثة
$f^{n}(x)$ = المشتقة من الدرجة n
المشتقة الثانية تُعطينا معلومة عن التحدّب والتقعّر
مثال: أوجد f''(x) إذا $f(x) = x^4 - 3x^2$
$f'(x) = 4x^3 - 6x$
$f''(x) = 12x^2 - 6$
نقاط الانعطاف المحتملة — $x = \pm 1/\sqrt{2}$ عند $f''(x) = 0$

7.6 Logarithmic Differentiation

تُستخدم عندما يكون الاشتقاق المباشر معقداً — خاصة عند وجود دوال أسية بمتغيرين.

مثال: اشتق f(x) = x^(sin x)
لا يمكن استخدام Power Rule (الأس متغير)
نأخذ ln لطرفين: ln(f) = sin(x)·ln(x)
نشتق: f'/f = cos(x)·ln(x) + sin(x)/x
f'(x) = f·[cos(x)·ln(x) + sin(x)/x]
= x^(sin x)·[cos(x)·ln(x) + sin(x)/x]

8. Applications of Derivatives — تطبيقات المشتقات

8.1 Increasing & Decreasing Functions

متزايدة على تلك الفترة f ← على فترة $f'(x) > 0$
متناقصة على تلك الفترة f ← على فترة $f'(x) < 0$
محتملة (Critical Point) نقطة حرجة x=c ← x=c عند $f'(x) = 0$
مثال: أوجد فترات التزايد والتناقص لـ $f(x) = x^3 - 3x$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$
النقاط الحرجة: $x = \pm 1$
الاختبار:
متزايدة ← $x < -1$: $f'(-2) = 3(4-1) = 9 > 0$
متناقصة ← $-1 < x < 1$: $f'(0) = -3 < 0$
متزايدة ← $x > 1$: $f'(2) = 9 > 0$

8.2 Local Maxima & Minima — First & Second Derivative Tests

اختبار المشتقة الأولى:
(Local Max) قمة محلية ← x=c من +إلى - عند f' إذا تغيّرت إشارة
(Local Min) قاع محلي ← x=c إذا تغيّرت من - إلى +عند
اختبار المشتقة الثانية:
قمة محلية ← $f''(c) < 0$ و $f'(c) = 0$
قاع محلي ← $f''(c) > 0$ و $f'(c) = 0$
الاختبار يفشل — نستخدم الأول ← $f''(c) = 0$ و $f'(c) = 0$
مثال: أوجد القيم القصوى المحلية لـ $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$
النقاط الحرجة: $x=1, x=2$
$f''(x) = 12x - 18$
$x=1$، $f(1) = 5$ قمة محلية عند ← $f''(1) = -6 < 0$
$x=2$، $f(2) = 4$ قاع محلي عند ← $f''(2) = 6 > 0$

يعني ايه اشتقاق

انت بتجيب معدل التغير بين نقطتين بس مش أي نقطتين انت عشان تجيب معدل التغير لأي نقطة بتجيب اقرب نقطة ليها وممكن تفرض اقرب نقطة ليها تبعد مسافة صغيرة جداً جداً وممكن كمان تتجاهل الفرق بين النقطتين ولما يكون النقطتين قريبين جداً من بعض زي التطابق انت كده

كإنك بتجيب المماس بتاع النقطة يعني ايه المماس المماس هو عبارة عن خط ميل وبنحدد منه الميل موجب ولا سالب وخد بالك لو المماس افقي يعني الاشتقاق بصفر ده معناه مفيش تغير وده بيحصل في القمة والقاع

عشان تحدد القمة والقاع

امتي يكون فيه قمة وقاع لما يكون معدل التغير يبقي ثابت يعني المشتقة الأولي تكون بصفر

وخدبالك ليه القمة والقاع بيكون المشتقة بتاعتها بصفر عشان ببسطة أي حاجه بتتحرك بيكون معدل التغير موجب عشان كل خطوة اكبر من اللي قبلها وده بيظهر لما يكون جسم بيتحرك بسرعة تزايديه وبعدين عاوز توقف الجسم كان ماشي كل خطوة اكبر من اللي قبلها ومعدل التغير موجب وعاوزه توقف فبيجي خطوة التغير بتكون الخطوة اللي بعدي هتساوي نفس الخطوة اللي انا فيها وكده لما يكونوا متساويين فمعدل التغير بيبقى صفر وطبيعي جداً عشان تتحرك من الموجب وتروح السالب لازم تعدي ع الصفر هنا بقي بتكون قمة او قاع عشان بتكون اكبر او اقل قيمة انت وصلتها عشان كانت بتتحرك تزايديه او تناقصية في اللحظة دي بتكون قمة او قاع وبعدها انت عاوز تقلل السرعة وكده كل خطوة بتكون اكبر من اللي بعدها فهنا معدل التغير بيكون بالسالب عشان معدل التغير بيكون الخطوة اللي انا فيها ناقص الخطوة اللي قبلي وده بيحدد معدل التغير

كده حددنا النقط اللي فيها تغير عاوزين نعرف النقط دي قمة ولا قاع

عاوزين نعرف الأول لو انا بطلع او بنزل المشتقة بيحصل ايه فيها

لو انت بتنزل كده الميل بيكون سالب بيكون ع الشكل ده \

ولو انت بتطلع بيكون الميل موجب بيكون ع الشكل ده /

وخد بالك انت لما تكون قاع الخطوة اللي بعدها انك تطلع فهيكون المشتقة بموجب

وبرضو لو انت تكون في قمة الخطوة اللي بعدها هتنزل فكده المشتقة هتكون سالب

يعني عشان نعرف هي قمة ولا قاع بنشوف إشارة المشتقة التانية

طب ليه المشتقة التانيه

المشتقة الأولي بتقيس التغير عادي واحنا بنشوف هي امتي تكون صفر عشان اللحظة دي بتكون قمة او قاع كده احنا معانا الميل عاوزين نشتقه كمان مره عشان نشوف التغير اللي هيحصل فيه ونحدد الأشارة ودي بتعرفنا الأتجاه

احنا في المشتقة الأولي بنساوي المعادلة بصفر ونطلع قيمة x وبنعوض في المعادلة الأصلية نشوف قيمة الدالة كام لما كانت x بالقيمة دي وبعدها نشتق المره التانيه وبعدين النقطة x نعوض في المشتقة التانيه ونحدد إشارة الناتج

```
m = f'(a)  هو  x=a ميل الخط المماس عند
m = (y-yi)/(x-xi) لإن
والتغير ده (y-yi)/(x-xi) هو الاشتقاق
وكده الميل هو الأشتقاق والميل بتاع القيمة والقاع بيكون الميل بصفر
```

8.3 Concavity & Inflection Points

مثل حوض — (Concave Up) الرسم مقعّر للأعلى ← $f''(x) > 0$
مثل قبة — (Concave Down) الرسم مقعّر للأسفل ← $f''(x) < 0$
حيث يتغير اتجاه التقعر: (Inflection Point) نقطة الانعطاف
مثال: أوجد نقاط الانعطاف لـ $f(x) = x^4 - 4x^3$
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$
$f''=0$ عند $x=0$ و $x=2$
الاختبار:

مقعر للأعلى → $x < 0$: $f''(-1) = 36 > 0$
مقعر للأسفل → $0<x<2$: $f''(1) = -12 < 0$
مقعر للأعلى → $x > 2$: $f''(3) = 36 > 0$
نقاط الانعطاف: $(0, 0)$ و $(2, -16)$

8.4 Optimization Problems

نُطبّق المشتقات لإيجاد أكبر أو أصغر قيمة ممكنة في مسائل عملية.

خطوات حل مسائل التحسين:
1. اقرأ المسألة وحدّد المجهول الذي تريد تحسينه
2. اكتب معادلة الكمية المراد تحسينها (دالة الهدف)
3. استخدم القيود لتعبير بمتغير واحد
4. اشتق وساو بالصفر
5. تحقق باختبار المشتقة الثانية
مثال: مستطيل محيطه 40 سم. ما أبعاده لتكون مساحته أكبر ما يمكن؟
ليكن الطول = x، العرض = y
القيد: $2x + 2y = 40 \rightarrow y = 20 - x$
الدالة الهدف: $A = x \cdot y = x(20-x) = 20x - x^2$
$A'(x) = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$
$A''(x) = -2 < 0$ ← مساحة قصوى ← قمة
$x = y = 10$ cm (مربع!) ، $A_{max} = 100$ cm²
استنتاج: من بين جميع المستطيلات بنفس المحيط، المربع أكبر مساحة

8.5 Related Rates

نستخدم المشتقات لإيجاد معدل تغير كمية واحدة بمعرفة معدل تغير كمية أخرى مرتبطة بها.

مثال: بالون كروي يُنفخ بمعدل 4π cm³/s. ما معدل تزايد نصف قطره عندما $r=2$ cm؟
$V = (4/3)\pi r^3$
نشتق بالنسبة للزمن t:
$dV/dt = 4\pi r^2 \cdot (dr/dt)$
لماذا ظهر dr/dt؟ لأن r يتغير مع الزمن فنطبّق Chain Rule
$4\pi = 4\pi(2)^2 \cdot (dr/dt)$
$4\pi = 16\pi \cdot (dr/dt)$
$dr/dt = 1/4$ cm/s

8.6 Mean Value Theorem & Rolle's Theorem

نظرية رول (Rolle's Theorem):
f(a)=f(b) و، (a,b) قابلة للاشتقاق على، [a,b] مستمرة على f إذا
f'(c) = 0 بحيث ∃ c ∈ (a,b) إذن
نظرية القيمة المتوسطة (MVT):
(a,b) قابلة للاشتقاق على، [a,b] مستمرة على f إذا
f'(c) = [f(b)-f(a)] / (b-a) بحيث ∃ c ∈ (a,b) إذن
بالفهم؟ إذا سافرت 100 كم في ساعة، فلابد أن متوسط سرعتك 100 كم/س MVT ماذا تعني،
وهذا يعني أنك في لحظة ما كانت سرعتك بالضبط 100 كم/س.
على]1,3[$f(x) = x^2$ لـ MVT مثال: تحقق من
f(1) = 1، f(3) = 9
معدل التغير المتوسط (=9-1)/(3-1 = 4)
f'(x) = 2x = 4 → x = 2
محققة MVT — c = 2 ∈ (1,3) ✓

Calculus 2 — Integral Calculus + Series

9. Integration Basics — أساسيات التكامل

9.1 Indefinite Integrals — التكامل غير المحدود

ثابت التكامل C و $F'(x) = f(x)$ حيث $\int f(x)dx = F(x) + C$. التكامل غير المحدود هو عكس الاشتقاق.

؟ لأن اشتقاق أي ثابت يُعطى صفراً، إذن لا نستطيع معرفة C لماذا ثابت التكامل
يُمثّل كل الدوال المحتملة التي لها نفس المشتقة C. الثابت من المشتقة وحدها.
$\int x^n\, dx = x^{n+1}/(n+1) + C \quad (n \neq -1)$
$\int 1/x\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$
$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$
$\int \sec^2(x)\, dx = \tan(x) + C$
$\int 1/(1+x^2)\, dx = \arctan(x) + C$
احسب: مثال $\int (3x^2 - 5x + 2)\, dx$
$= 3\cdot(x^3/3) - 5\cdot(x^2/2) + 2x + C$
$= x^3 - (5/2)x^2 + 2x + C$
✓ $x^2 - 5x + 2$ التحقق: اشتق الناتج: 3

9.2 Definite Integrals — التكامل المحدود

التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ يُعطي قيمة عددية محددة — المساحة المحاطة بالمنحنى ومحور x بين x=a و x=b.

نظرية أساس الحساب التفاضلي والتكاملي (FTC):
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
f مضاد اشتقاق F حيث
خصائص التكامل المحدود:
$\int_a^b f\, dx = -\int_b^a f\, dx$
$\int_a^a f\, dx = 0$
$\int_a^b c\cdot f\, dx = c\cdot\int_a^b f\, dx$
مهمة؟ إنها تربط المشتقة بالتكامل — العمليتان عكستان تماماً FTC لماذا.
معقدة Riemann كان حساب المساحات يتطلب نهايات مجاميع، FTC قبل.
احسب: مثال $\int_0^3 (x^2 + 1)\, dx$

$F(x) = x^3/3 + x$
$= F(3) - F(0) = (27/3 + 3) - (0 + 0)$
$= 9 + 3 - 0 = 12$
من 0 إلى 3 هي 12 وحدة² x هذا يعني المساحة بين المنحنى ومحور

9.3 Integration Techniques — تقنيات التكامل

التعويض (Substitution)

وهي عكس قاعدة السلسلة في الاشتقاق، $u = g(x)$ نُبسّط التكاملات المعقدة باستبدال.

مثال: احسب $\int 2x\cdot\cos(x^2)\,dx$
x^2 هي مشتقة x نلاحظ أن 2
نضع $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$
التكامل يصبح: $\int\cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C$
بالعكس Chain Rule لماذا يعمل التعويض؟ لأننا في الواقع نطبّق

Integration by Parts

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ **تكامل دالتين عبارة عن الأولي في تكامل التانيه – تكامل(تكامل التانيه في اشتقاق التانيه)**
LIATE: ؟ قاعدة dv و u كيف نختار اللي يمكن تفاضله Log, exp, arc(sin, cos, tan)
L - Logarithmic (اختر أولاً)
I - Inverse Trig
A - Algebraic
T - Trigonometric
E - Exponential (اختر أخيراً)
مثال: احسب $\int x\cdot e^x\,dx$
بقاعدة LIATE: $u = x$ (جبري)، $dv = e^x\,dx$ (أسي)
$du = dx$، $v = e^x$
$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$
التحقق: $d/dx[e^x(x-1)] = e^x(x-1) + e^x = xe^x$ ✓

Trigonometric Substitution

عند وجود $\sqrt{(a^2-x^2)}$: ضع $x = a\cdot\sin(\theta)$

عند وجود $\sqrt{(a^2+x^2)}$: ضع $x = a\cdot\tan(\theta)$
عند وجود $\sqrt{(x^2-a^2)}$: ضع $x = a\cdot\sec(\theta)$
لماذا؟ لأن المتطابقات المثلثية تُزيل الجذور
مثال: احسب $\int\sqrt{(4-x^2)}\,dx$
نضع $x = 2\sin(\theta) \rightarrow dx = 2\cos(\theta)d\theta$
$\sqrt{(4-x^2)} = \sqrt{(4-4\sin^2\theta)} = 2\lvert\cos\theta\rvert = 2\cos\theta$
$\int 2\cos(\theta)\cdot 2\cos(\theta)d\theta = 4\int\cos^2(\theta)d\theta$
$= 4\cdot\int(1+\cos2\theta)/2\,d\theta = 2\theta + \sin(2\theta) + C$
نعود لـ x: $\theta = \arcsin(x/2)$، $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = x\cdot\sqrt{(4-x^2)}/2$
الناتج: $\arcsin(x/2) + (x/2)\sqrt{(4-x^2)} + C$

Partial Fractions

لتكامل كسور معقدة، نُفككها إلى كسور جزئية أبسط.

مثال: احسب $\int(2x+1)/(x^2-x-2)\,dx$
حلّل المقام: $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$
$(2x+1)/[(x-2)(x+1)] = A/(x-2) + B/(x+1)$
$2x+1 = A(x+1) + B(x-2)$
عند $x=2$: $5 = 3A \rightarrow A=5/3$
عند $x=-1$: $-1 = -3B \rightarrow B=1/3$
$\int[5/3/(x-2) + 1/3/(x+1)]\,dx$
$= (5/3)\ln\lvert x-2\rvert + (1/3)\ln\lvert x+1\rvert + C$

10. Applications of Integrals — تطبيقات التكامل

10.1 Area Under Curve

مثال: احسب المساحة بين $y=x^2$ و $x\in[0,3]$
$A = \int_{0}^{3} x^2\,dx = [x^3/3]_0^3 = 27/3 - 0 = 9$ وحدة²

10.2 Area Between Two Curves

$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$
$f(x) \geq g(x)$ على $[a,b]$ حيث
إذا تقاطع المنحنيان، نَقسّم الفترة عند نقاط التقاطع
مثال: المساحة بين $y=x^2$ و $y=x$ على $]0,1[$
نتحقق: $x \geq x^2$ على $]0,1[$
$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1$
$= 1/2 - 1/3 = 1/6$ وحدة²

10.3 Volumes of Revolution — الحجوم

طريقة الأقراص (Disk Method):
$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ (دوران حول محور x)
طريقة الغسالة (Washer Method):
$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$
طريقة الأسطوانة القشرية (Shell Method):
$V = 2\pi \int_a^b x\cdot f(x)\,dx$ (دوران حول محور y)
مثال: أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران $y=\sqrt{x}$ حول محور x لـ $x\in[0,4]$
$V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi\int_0^4 x\,dx$
$= \pi[x^2/2]_0^4 = \pi(8-0) = 8\pi$ وحدة³

10.4 Arc Length — طول القوس

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

لماذا هذه الصيغة؟ كل عنصر صغير من المنحنى طوله
$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(1 + (dy/dx)^2)}\, dx$

10.5 Improper Integrals — التكاملات غير المنتظمة

التكامل غير منتظم عندما يكون أحد حدوده ∞± أو عندما تكون الدالة غير مستمرة في الفترة.

$\int_{[a \text{ to } \infty]} f(x)dx = \lim_{[t\to\infty]} \int_{[a \text{ to } t]} f(x)dx$
(Convergent) إذا وُجدت النهاية وكانت محدودة ← التكامل مُتقارب
(Divergent) إذا لم تُوجد النهاية ← التكامل مُتباعد
مثال: احسب: $\int_{[1 \text{ to } \infty]} 1/x^2\, dx$
$= \lim_{[t\to\infty]} \int_{[1 \text{ to } t]} x^{-2}\, dx$
$= \lim_{[t\to\infty]} [-x^{-1}]$ from 1 to t
$= \lim_{[t\to\infty]} (-1/t + 1) = 0 + 1 = 1$ ← متقارب
مقارنة: $\int_{[1 \text{ to } \infty]} 1/x\, dx = \lim_{[t\to\infty]} [\ln(t)] = \infty$ ← متباعد
$1/x$ تتناقص أسرع بكثير من $1/x^2$ لماذا الفرق؟

11. Sequences & Series — المتتاليات والمتسلسلات

11.1 Sequences — المتتاليات

المتتالية هي قائمة مرتبة من الأعداد. نهتم بسلوكها عندما $n \to \infty$.

المتتالية مُتقاربة: $\lim[n\to\infty]\ a_n = L$ (محدود)
المتتالية مُتباعدة: النهاية لا تُوجد أو $= \pm\infty$
مثال: هل المتتالية $a_n = (2n+1)/(n+3)$ متقاربة؟
$\lim[n\to\infty]\ (2n+1)/(n+3) = \lim\ (2+1/n)/(1+3/n) = 2/1 = 2$
نعم، متقاربة وتتقارب إلى 2

11.2 Series — المتسلسلات

المتسلسلة هي مجموع حدود متتالية: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \Sigma a_n$

المجموع الجزئي: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
المتسلسلة مُتقاربة: $\lim[n\to\infty]\ S_n = S$ (محدود)
المتسلسلة الهندسية: $\Sigma ar^n \to S = a/(1-r)$ إذا $\lvert r\rvert<1$
مثال: احسب مجموع المتسلسلة الهندسية $\Sigma(1/2)^n$ من $n=0$ إلى ∞
$a=1$، $r=1/2$، $\lvert r\rvert<1$
$S = 1/(1-1/2) = 1/(1/2) = 2$
لماذا تتقارب؟ لأن كل حد أصغر من سابقه والمجموع يقترب من حد

11.3 Convergence Tests — اختبارات التقارب

1. اختبار الحد nth-Term Test:
إذا $\lim a_n \neq 0 \to$ (المتسلسلة متباعدة لكن العكس ليس صحيحاً دائماً)
2. اختبار التكامل Integral Test:
$\Sigma f(n)$ وَ $\int f(x)dx$ يتقاربان أو يتباعدان معاً
3. اختبار المقارنة Comparison Test:
إذا $0 \le a_n \le b_n$ وΣb_n متقاربة $\to \Sigma a_n$ متقاربة
4. اختبار النسبة Ratio Test:
$L = \lim\lvert a_\{n+1\}/a_n\rvert$

غير حاسم → L=1 ،متباعدة → L>1 ،متقاربة → L<1
5. اختبار الجذر Root Test:
(Ratio Test نفس أحكام) $L = \lim \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$
6. اختبار التناوب Alternating Series Test:
$\Sigma(-1)^n b_n$ متقاربة إذا: b_n ول متناقصة $\lim b_n = 0$
∞ إلى n=1 من $\Sigma\ n^2/n!$ مثال: اختبر تقارب
نستخدم Ratio Test:
$\lvert a_\{n+1\}/a_n \rvert = \lvert (n+1)^2/(n+1)! \rvert \times \lvert n!/n^2 \rvert$
$= (n+1)^2 / [(n+1)\cdot n^2]$
$= (n+1)/n^2$
$\lim[n\to\infty]\ (n+1)/n^2 = 0 < 1$
المتسلسلة متقاربة →

11.4 Power Series & Taylor Series

من أقوى الأدوات في الرياضيات والبرمجيات (Maclaurin Series) و **متسلسلة ماكلورين** (Taylor Series) تُعد **متسلسلة تيلر**، سهلة الحساب (Polynomials) إلى **كثيرات حدود** ($sin(x), (e^x)$) حيث تسمحان بتحويل الدوال المعقدة (مثل.

---

1. الفكرة الجوهرية

بدلاً من التعامل مع دالة "منحنية" يصعب حساب قيمتها بدقة عند أي نقطة، نحاول تقريب هذه الدالة عند نقطة معينة باستخدام المشتقات. كلما زاد عدد المشتقات (الحدود التي نستخدمها)، زادت دقة التقريب ليطابق منحنى الدالة الأصلي.

---

2. متسلسلة تيلر (Taylor Series)

حول أي نقطة اختيارية نختارها، ولنسمّها (a). تُستخدم لتقريب قيمة الدالة (f(x)).

القانون العام

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

(f(a)): قيمة الدالة عند النقطة (a).

(f'(a), f''(a)): المشتقة الأولى والثانية عند (a)، وهكذا... محسوبة عند.

(n!): المضروب (Factorial) لضمان وزن الحدود بشكل صحيح.

---

3. متسلسلة ماكلورين (Maclaurin Series)

هي حالة خاصة جداً وبسيطة من متسلسلة تيلر. الفرق الوحيد هو أننا نقوم بالتقريب حول النقطة صفر (a = 0).

القانون العام

$$[f(x) = f(0) + x + x2 + x3 + ..]$$

تُستخدم هذه النسخة بكثرة لأن الحساب حول الصفر غالباً ما يكون أسهل بكثير برمجياً ورياضياً.

---

5. لماذا نستخدمها؟ (من منظور تقني)

الحساب العددي (Numerical Computing): الكمبيوتر لا يعرف بالفطرة كيف يحسب sin(0.5)، لكنه بارع جداً في الجمع والضرب. المتسلسلة تحول الـ ()إلى عمليات جمع وضرب بسيطة.

تبسيط المسائل: في الفيزياء أو التفاضل، أحياناً نستبدل الدالة المعقدة بأول حدين أو ثلاثة من المتسلسلة (Linear Approximation) لتسهيل حل المعادلات.

الاستمثال (Optimization): في تعلم الآلة (Machine Learning)، تُستخدم "متسلسلة تيلر من الدرجة الثانية" لفهم انحناء الدالة وتحديد أسرع طريق للوصول للـ Local Minimum (Hessian Matrix).

باختصار

تيلر وماكلورين هما وسيلة لفك شفرة أي دالة معقدة وتحويلها إلى "سلسلة" من العمليات الحسابية البسيطة (جمع، طرح، ضرب، وقسمة).

المتسلسلة القوية (Power Series):
تتقارب في فترة تقارب (Interval of Convergence) — $\Sigma\, c_n(x-a)^n$
متسلسلة تيلر (Taylor Series):
$f(x) = \Sigma\, f^{(n)}(a)/n! \times (x-a)^n$
a=0: خاصة حالة — متسلسلة ماكلورين (Maclaurin Series)
$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$
$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$
$\cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$
$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad (\lvert x\rvert<1)$
خدبالك قيمة كل مشتقة واحده موجب واللي قبلها واللي بعدها بسالب يعني كل مشتقة بعدها الأشارة بتتعكس
لماذا متسلسلات تيلر مهمة في AI/ML؟
بدقة، gradients تستخدم في تقريب دوال التفعيل، في حساب .وفي فهم سلوك النماذج قرب النقاط المثلى
a=0 حول $f(x) = e^x$ مثال: أوجد متسلسلة تيلر لـ
$f(x) = e^x$، $f'(x) = e^x$، $f''(x) = e^x$، ...
لجميع n $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$
$e^x = \Sigma\, x^n/n! = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$
$x \in (-\infty, +\infty)$ هذه المتسلسلة تتقارب لجميع

```
الفرق بين a, x

a  نقطة معلومة
x  نقطة المطلوب حسابها وهنحسبها بمعرفة النقطة a

القانون:
f(x) = sum([f`i`(a)*(x-a)^i/i! for i in range(0, n)])
f(x) = f(a) + f`(a)*(x-a)^1/1! + f``(a)*(x-a)^2/2! + f```(a)*(x-a)^3/3! + ...

مثال احسب (4.1)^0.5 بدقة حتي المشتقة الرابعة
x = 4.1
a = 4
=>> f(x) = x^0.5
=>> (x - a) = (4.1 - 4) = 0.1
=>> f(x) = f(4.1) = sum([f`i`(a)*(x-a)^i/i! for i in range(0, 4)])
df_0 => f(a) = a^0.5 = 2
df_1 => f(a) = 0.5a^-0.5 = 0.25
df_2 => f(a) = -0.5*0.5a^-1.5 = -0.03125
df_3 => f(a) = -1.5*-0.5*0.5a^-2.5 = 0.01171875
df_4 => f(a) = -2.5*-1.5*-0.5*0.5a^-3.5 = -0.00732421875
dfs = [df_0, df_1, df_2, df_3, df_4]
result = sum([dfs[i]*(0.1^i)/fac(i) for i in range(0, 4)])
print(result) #=> 2.0248456726074218
```

Topics for AI / ML — الكالكولس متعدد المتغيرات

12. Multivariable Calculus Basics

12.1 Functions of Multiple Variables

الدالة ذات المتغيرات المتعددة تأخذ أكثر من مدخل وتُعطي مخرجاً واحداً. مثال: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (يُعدي إلى الأعداد الحقيقية-n من فضاء)
سطح في الفضاء ثلاثي الأبعاد: $f(x,y)$ الرسم البياني لـ
أهم أداة في التصور — $f(x,y) = c$ (Level Curves): خطوط المستوى
في التعلم الآلي (Loss Functions) ؟ دوال الخسارةAI لماذا هذا مهم في
هي دوال بآلاف المتغيرات (المعاملات). نحتاج حسابها وتحسينها.

12.2 Partial Derivatives — المشتقات الجزئية

المشتقة الجزئية تقيس معدل تغير الدالة بالنسبة لمتغير واحد مع تثبيت باقي المتغيرات.

$\partial f/\partial x =$ نشتق بالنسبة لـ x ونعامل y كثابت
$\partial f/\partial y =$ نشتق بالنسبة لـ y ونعامل x كثابت
Notation: $\partial f/\partial x = f_x = f_x$
مثال: أوجد $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ إذا $f(x,y) = x^2y + 3xy^3 - y^2$
$\partial f/\partial x = 2xy + 3y^3$ (y نشتق، x ثابت فقط)
$\partial f/\partial y = x^2 + 9xy^2 - 2y$ (x نشتق، y ثابت فقط)
لماذا $\partial f/\partial x$ مشتقة لا تحتوي y لأن ؟ y (بالنسبة لـ ثابت) x معامل

12.3 Gradient — التدرج

التدرج (Gradient) هو متجه يجمع جميع المشتقات الجزئية. يُشير دائماً في اتجاه أسرع تزايد للدالة.

$\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) = (f_x, f_Y)$
خصائص التدرج:
• يُشير نحو اتجاه أسرع زيادة
• عموديٌّ على خطوط المستوى
• $-\nabla f$ يُشير نحو اتجاه أسرع نقصان (Gradient Descent مهم في)
لماذا التدرج أساسي في ML خوارزمية ؟ Gradient Descent تُحدّث المعاملات
لتقليل دالة الخسارة. هذا لب التدريب في الشبكات العصبية $-\nabla(\text{Loss})$ في اتجاه

مثال: أوجد ∇f إذا $f(x,y) = x^2 + xy$ عند النقطة (1,2)
$f_x = 2x + y \rightarrow f_x(1,2) = 2+2 = 4$
$f_y = x \rightarrow f_y(1,2) = 1$
$\nabla f(1,2) = (4, 1)$
تكون في اتجاه المتجه (4,1) المعنى: عند (1,2)، أسرع زيادة في f

12.4 Directional Derivatives

المشتقة الاتجاهية في اتجاه الوحدة $\hat{u} = (u_1,u_2)$:
$D_\hat{u} f = \nabla f \cdot \hat{u} = f_x \cdot u_1 + f_y \cdot u_2$
∇f موازٍ لـ $\hat{u}$ تحدث عندما $D_\hat{u} f$ أكبر قيمة لـ
∇f معاكس لـ $\hat{u}$ أصغر قيمة (تناقص أسرع (عندما
في الاتجاه (3,4) عند (1,1)؟ $f(x,y)=x^2y$ مثال: ما المشتقة الاتجاهية لـ
الوحدة: $\hat{u} = (3,4)/\lvert(3,4)\rvert = (3/5, 4/5)$
$\nabla f = (2xy, x^2)$ (1,1) عند: $\nabla f = (2, 1)$
$D_\hat{u} f = (2)(3/5) + (1)(4/5) = 6/5 + 4/5 = 2$

12.5 Optimization — التحسين متعدد المتغيرات

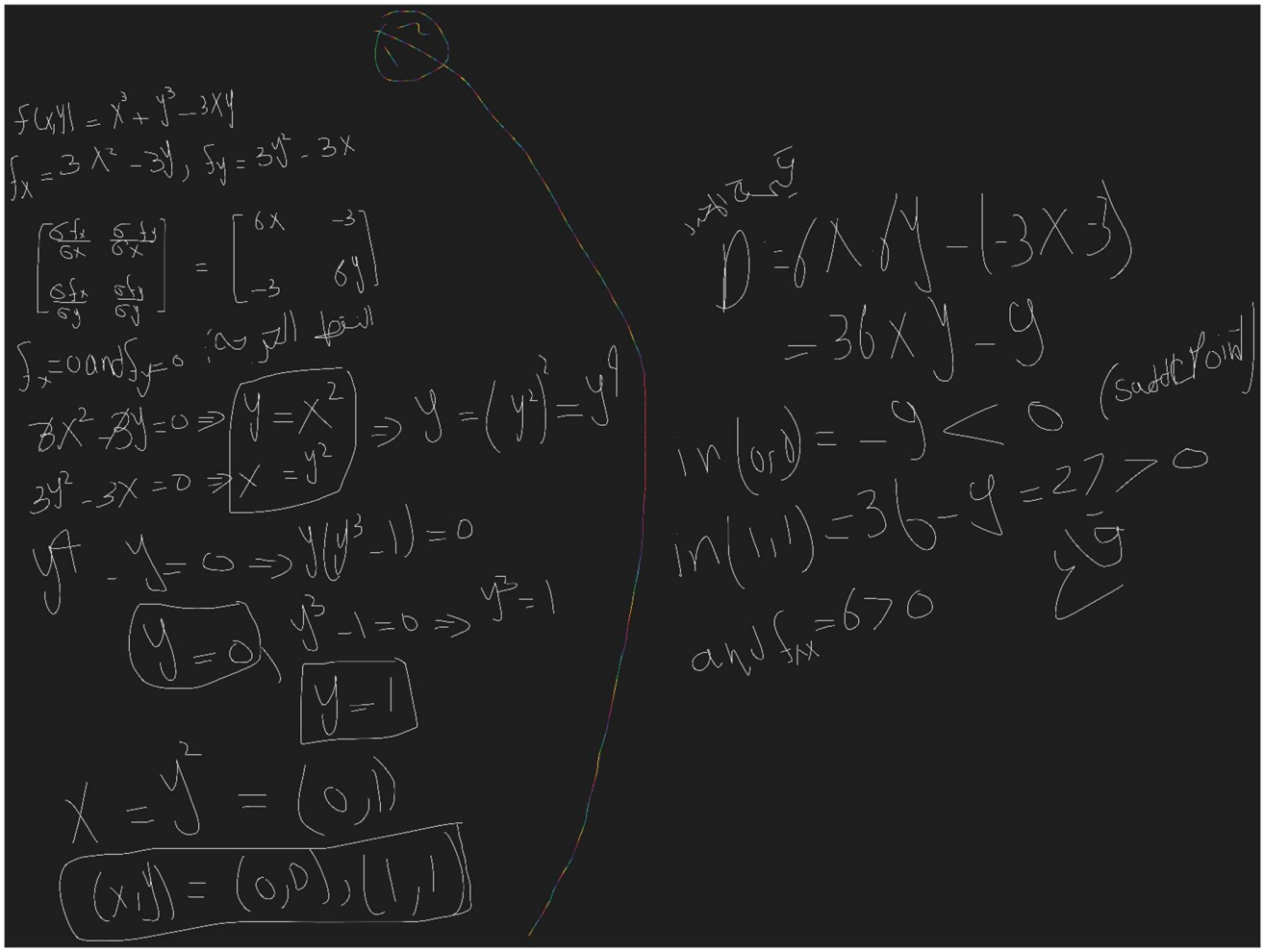
Critical Points

النقطة الحرجة: حيث $\nabla f = 0$ أي $f_x = 0$ و$f_y = 0$ معاً

Hessian Matrix

مصفوفة هيسيان: $H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$
المحدد: $D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$
قاع محلي (Local Minimum) ← $f_{xx} > 0$ و$D > 0$
قمة محلية (Local Maximum) ← $f_{xx} < 0$ و$D > 0$
لا قمة ولا قاع — نقطة سرج (Saddle Point) ← $D < 0$
الاختبار غير حاسم ← $D = 0$
لماذا Hessian مهم في ML؟ Newton's Method وثانية-الدرجة optimizers
لاتخاذ خطوات أذكى نحو الحد الأدنى Hessian تُستخدم، مثل L-BFGS.

مثال: أوجد القيم القصوى لـ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \rightarrow y = x^2$
$f_y = 3y^2 - 3x = 0 \rightarrow y^2 = x$
من المعادلتين: $x^4 = x \rightarrow x(x^3-1) = 0 \rightarrow x = 0$ أو $x = 1$
النقاط الحرجة: $(0,0)$ و $(1,1)$
$f_{xx}=6x$، $f_{yy}=6y$، $f_{xy}=-3$
قاع محلي $\rightarrow$ $f_{xx}=6>0$، $D = 36 - 9 = 27 > 0$ عند $(1,1)$
نقطة سرج $\rightarrow$ $D = 0 - 9 = -9 < 0$ عند $(0,0)$



12.6 Lagrange Multipliers — مضاعفات لاغرانج

لحل مسائل التحسين مع قيود (Constrained Optimization): maximize/minimize $f(x,y)$ بشرط $g(x,y) = 0$

الشرط الضروري: $\nabla f = \lambda \nabla g$
أي: $f_x = \lambda g_x$ و $f_y = \lambda g_y$ و $g(x,y) = 0$
هو مضاعف لاغرانج λ حيث

f ؟ عند نقطة القصوى المقيّدة، خط المستوى لـ$\nabla f = \lambda \nabla g$ لماذا
.وهذا يعني تناسب متجهات التدرج ،$g=0$ يجب أن يكون مماساً لمنحنى القيد
$x + y = 10$ بشرط $f(x,y) = xy$ مثال: أوجد أقصى قيمة لـ
$g(x,y) = x + y - 10 = 0$
$\nabla f = (y, x)$ ، $\nabla g = (1, 1)$
المعادلات: $y = \lambda$، $x = \lambda \rightarrow x = y$
من القيد: $x + x = 10 \rightarrow x = y = 5$
$f_max = 5\times5 = 25$
$x=y$ هذا يؤكد: من بين جميع الأزواج بمجموع 10، حاصل الضرب أكبر عند

13. Vector Calculus — حساب المتجهات

13.1 Vectors — المتجهات

المتجه: كمية لها مقدار واتجاه
متجه في 2D: $v = (v_1, v_2)$
متجه في 3D: $v = (v_1, v_2, v_3)$
العمليات الأساسية:
الجمع: $u + v = (u_1+v_1, u_2+v_2)$
الضرب بثابت: $k\cdot v = (kv_1, kv_2)$
المقدار (Norm): $\|v\| = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)}$

13.2 Dot Product — الضرب النقطي

$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$
تطبيقات:
زاوية بين متجهين $\rightarrow$ $\theta = \arccos(u\cdot v / \|u\|\|v\|)$
المتجهان عموديان $\rightarrow$ $u \cdot v = 0$
Projection of u on v = $(u\cdot v)/\|v\|$
ML؟ لماذا الضرب النقطي مهم في
- تشابه الجمل في NLP يُقاس بـ cosine similarity = $u\cdot v/(\|u\|\|v\|)$
- الخلايا العصبية تحسب: output = activation($w\cdot x + b$) حيث $w\cdot x$ ضرب نقطي

مثال: أوجد الزاوية بين $u=(1,2,-1)$ و $v=(3,1,2)$
$u\cdot v = 3+2-2 = 3$
$\lvert u\rvert = \sqrt{(1+4+1)} = \sqrt{6}$
$\lvert v\rvert = \sqrt{(9+1+4)} = \sqrt{14}$
$\cos\theta = 3/(\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}) = 3/\sqrt{84} \approx 0.327$
$\theta = \arccos(0.327) \approx 70.9°$

14. Integration in Higher Dimensions

14.1 Double Integrals — التكاملات الثنائية

التكامل الثنائي $f(x,y)$ فوق منطقة R في المستوى يُحسب حجم الجسم تحت سطح.

$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint f(x,y)\,dy\,dx$
طريقة الحساب (Fubini's Theorem):
$= \int_{[a \text{ to } b]} \left[\int_{[c \text{ to } d]} f(x,y)\,dy\right] dx$ (تكامل من الداخل للخارج)
مثال: احسب $\int_{[0 \text{ to } 2]} \int_{[0 \text{ to } 3]} (x + 2y)\,dy\,dx$
الخطوة 1: التكامل الداخلي (بالنسبة لـ y):
$\int_{[0 \text{ to } 3]} (x+2y)\,dy = [xy + y^2] \text{ from } 0 \text{ to } 3 = 3x + 9$
الخطوة 2: التكامل الخارجي (بالنسبة لـ x):
$\int_{[0 \text{ to } 2]} (3x+9)\,dx = [3x^2/2 + 9x] \text{ from } 0 \text{ to } 2 = 6 + 18 = 24$

14.2 Triple Integrals — التكاملات الثلاثية

$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
تُستخدم لحساب:
- الحجم: $\iiint_V 1\,dV = \text{Volume}$
- الكتلة: $\iiint_V \rho(x,y,z)\,dV$ إذا كانت ρ كثافة الجسم
- مركز الكتلة والعزم في الفيزياء والهندسة
مثال: احسب $\int_{[0 \text{ to } 1]}\int_{[0 \text{ to } 1]}\int_{[0 \text{ to } 1]} xyz\,dz\,dy\,dx$
الخطوة 1: $\int_{[0 \text{ to } 1]} xyz\,dz = xy[z^2/2] \text{ from } 0 \text{ to } 1 = xy/2$
الخطوة 2: $\int_{[0 \text{ to } 1]} xy/2\,dy = x/2[y^2/2] \text{ from } 0 \text{ to } 1 = x/4$
الخطوة 3: $\int_{[0 \text{ to } 1]} x/4\,dx = [x^2/8] \text{ from } 0 \text{ to } 1 = 1/8$

How It All Connects — ملخص الربط بين المفاهيم

الجدول التالي يُبيّن كيف تتدرج المفاهيم وترتبط ببعضها:

AI/ML تطبيق في	يُعتمد عليه في	المفهوم
تحليل خوارزميات	تعريف المشتقة والتكامل	النهايات
Backpropagation	التحسين وقواعد الاشتقاق	المشتقات
توزيعات الاحتمال	الاحتمالات، التوزيعات	التكامل
تدريب الشبكات العصبية	Gradient Descent	∇f التدرج
متقدمة Optimizers	Newton's Method	Hessian
فهم سلوك النماذج	تقريب الدوال	تيلر Series
مفاهيم Regularization	Constrained Opt.	اللاغرانجيان

— انتهت المذكرة —