

Zusammenfassung

Mihir Mahajan

April 8, 2022

Contents

1	Statik	3
1.1	Grundbegriffe	3
1.1.1	Invarianzoperationen Kräftesystem	3
1.1.2	(Dreh-)Moment	3
1.1.3	Gleichgewicht	4
1.2	Freischneiden	4
1.2.1	Tragwerkskomponente	4
1.2.2	Lagerräume	4
1.2.3	Statische Bestimmtheit	4
1.2.4	Haftreibung	6
1.3	Schwerpunkt	6
1.3.1	Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Einzelkräfte . . .	6
1.3.2	Verallgemeinerung auf kontinuierliche Kräfte	6
1.4	Balken	7
1.4.1	Schnittgrößen	7
1.4.2	Einzellasten	8
1.4.3	Kontinuierliche Lasten	8
1.5	Arbeit, Potential, Stabilität	8
1.5.1	Arbeit	8
1.5.2	Potential	9
1.5.3	Energie	9
1.5.4	Stabilität	9
2	Elastostatik	10
2.1	Grundbegriffe	10
2.1.1	Spannung	10
2.1.2	Dehnung	10

2.1.3	Zusammenhang Dehnung und Spannung	10
2.1.4	Formänderungsenergie	10
2.2	Spannungszustand	11
2.2.1	Spannungstensor	11
2.2.2	TODO Gleichgewichtsbedingungen	11
2.2.3	Koordinatentransformation	11
2.2.4	Hauptspannungen	11
2.2.5	Mohrscher Spannungskreis	12
2.2.6	Verzerrungszustand	12
2.2.7	Materialgesetz	12
2.2.8	Festigkeitshypothesen	13
2.3	Biegebalken	13
2.3.1	Verzerrung und Materialgesetz	13
2.3.2	Schnittgrößen und Spannungsgrößen	14
2.3.3	Flächenträgheitsmoment	14
2.4	Bernoullibalken	15
2.4.1	Hypothesen	15
2.4.2	Biegelinie $w(x)$	15
2.4.3	Randbedingungen	15
3	Kinetik	16
3.1	Kinematik eines Massepunktes	16
3.1.1	Grundbegriffe	16
3.1.2	geradlinige Bewegung	16
3.1.3	Polarkoordinaten	17
3.1.4	Kreisbewegung	17
3.1.5	Newtonsche Gesetze	17
3.1.6	Freie Bewegung	17
3.1.7	Trockene Reibung	17
3.1.8	Widerstand im Fluid bei kleinen Geschwindigkeiten . .	18
3.2	Stoßprozesse	18
3.2.1	zeitlicher Ablauf	18
3.2.2	Stoßvorgänge	18
3.2.3	Impulssatz	18
3.2.4	Systeme von Massepunkten	19
3.2.5	Drallsatz	19
3.2.6	Körper mit veränderlicher Masse	19

1 Statik

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Invarianzoperationen Kräftesystem

1. Verschieben einer Kraft in Richtung ihrer Wirkungslinie

(Linienflüchtigkeit von Kräften auf starre Körper)

1. Zusammenfassen von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt
2. Zerlegen von Kräften in Komponenten:

$$F_{res} = F_1 + F_2$$

1. Hinzufügen von Nullkräften:

$F_1 - F_1 = 0$ (z.B. zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit gleicher Wirkungslinie)

1.1.2 (Dreh-)Moment

1. Kräftepaar

- Rotation wird als Vektor dargestellt.
- Richtung über Rechte Hand Regel
- Länge des Vektors bezeichnet Größe der Rotationswirkung
- Kann an beliebiger Stelle des Körpers angreifen und ist somit nicht an Wirkungslinie gebunden: **freier Vektor** (= nicht an Bezugspunkt gebunden)
- Betrag des Moments M ergibt sich durch $M = h * F$, wobei h der senkrechte Abstand der beiden Kräfte ist (F und $-F$)
- Greifen mehrere Kräftepaare an so kann man die Momente einfach addieren

2. Einzelkraft Eine an einem starren Körper in A angreifende Einzelkraft F vom Betrag F hat die gleiche Wirkung auf den Körper wie die in einen Bezugspunkt B parallel verschobene Kraft und ein Moment M_B welches den rotationswirksamen Anteil von F bzgl. B angibt.

- $\underline{M_B} = r_{BA} \times F \rightarrow |\underline{M_B}| = h * F$

1.1.3 Gleichgewicht

Ein Körper ist in der x,y-Ebene im Gleichgewicht wenn die Summe aller Kräfte in jeweils x und y Richtung null sind und die Summe aller Momentvektoren für beliebigen Bezugspunkt 0 ist.

1.2 Freischneiden

1.2.1 Tragwerkskomponente

- Seil: Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine

Längsabmessung ($d \ll l$); nur auf Zug in Richtung seiner Längsachse belastbar

- Stab: Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine

Längsabmessung ($d \ll l$); belastbar auf Zug und Druck, aber nur in Richtung seiner Längsachse

- Balken: Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen deutlich kleiner sind als seine

Längsabmessung ($d \ll l$); jedoch in allen Richtungen auf Zug und Druck belastbar

1.2.2 Lagerräume

1.2.3 Statische Bestimmtheit

- Ein n-teiliges mechanisches System heißt statisch bestimmt, wenn alle Lager- und Verbindungsreaktionen eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen berechenbar sind.
- Andernfalls heißt es statisch unbestimmt.
- Die Anzahl möglicher Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich als ‘Anzahl der Freiheitsgrade je Teil’ \times ‘Anzahl Teile’.
- Bsp:
 - Im Raum hat jeder Körper 6 Freiheitsgrade ($3 \times$ Translation, $3 \times$ Rotation),
 - in der Ebene: 3 Freiheitsgrade ($2 \times$ Translation, $1 \times$ Rotation).

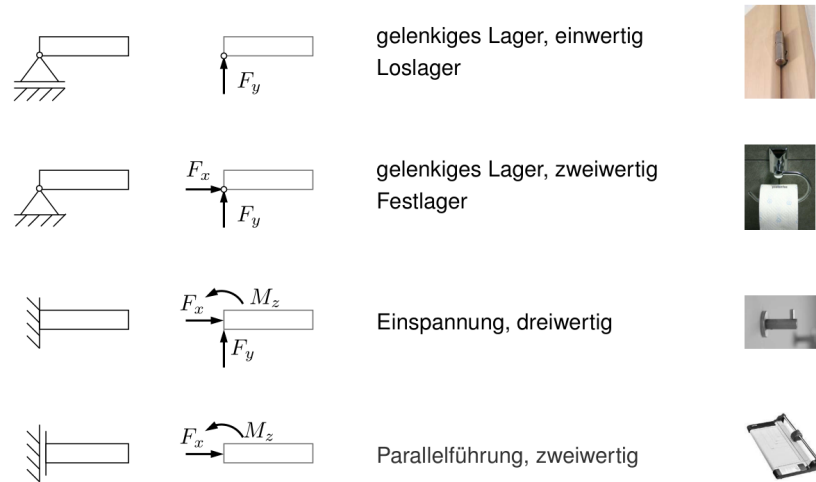


Figure 1: Lagerräume ebener Systeme

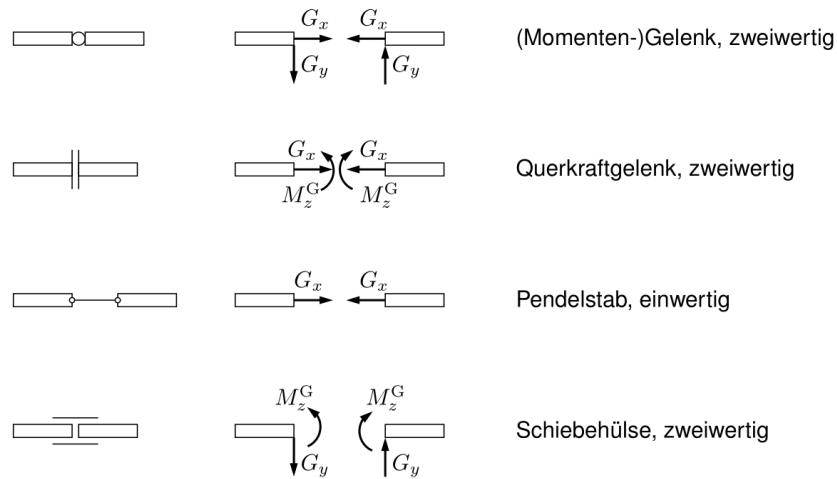


Figure 2: Lagerräume ebener Systeme

- Es muss demnach für ebene n-teilige Systeme gelten: $r + v = 3n$

In anderen Worten prüfen wie viel wertig jedes Lager ist (r) und wie viele Lager es gibt (v)

1.2.4 Haftreibung

- $|F_T| \leq \mu_0 * |F_N|$

1.3 Schwerpunkt

1.3.1 Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Einzelkräfte

Eine Kräftegruppe $\{F_i\}$ parallel wirkender Einzelkräfte (hier: $F_i e_z$) lässt sich durch eine resultierende Einzellast R , welche am Schwerpunkt (der Kräftegruppe) $S = (x_S, y_S)$ angreift

- $\underline{R} = \sum_i \underline{F_i}$
- $x_S = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}$
- $y_S = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}$

1.3.2 Verallgemeinerung auf kontinuierliche Kräfte

1. Linienlast Sind diese parallelen Kräfte kontinuierlich und nur entlang einer Linie verteilt, so spricht man von einer **Linienlast** $q(x)$ [N/m].

Diese lässt sich durch eine in $S_q = x_S$ angreifende Einzelkraft R_q ersetzen, wobei gilt: $R_q = \int q(x) dx$, $x_S = \frac{\int x q(x) dx}{R_q}$

2. Flächenlast Sind die parallelen Kräfte kontinuierlich über eine Fläche verteilt, so spricht man von einer Flächenlast $p(x, y)$ [N/m²] (Druck). Diese lässt sich durch eine in $S_P = (x_S, y_S)$ angreifende Einzelkraft P ersetzen, wobei gilt:

$$P = \int p(x, y) dA, \quad x_S = \frac{\int x p(x, y) dA}{P}, \quad y_S = \frac{\int y p(x, y) dA}{P}$$

3. Volumenkraft Eine parallel wirkende Volumenkraft $f(x, y, z)$ [N/m³] lässt sich durch eine Einzelkraft F ersetzen, welche in einem Angriffspunkt $S_F = (x_S, y_S, z_S)$ angreift, wobei gilt: $F = \int f(x, y, z) dV$, $x_S = \frac{1}{F} \int x f(x, y, z) dV$, $y_S = \frac{1}{F} \int y f(x, y, z) dV$, $z_S = \frac{1}{F} \int z f(x, y, z) dV$

4. Flächenmittelpunkt

Mittelpunkt bzw geometrischer Schwerpunkt $S = (x_S, y_S)$ einer ebenen Fläche der Größe A ist definiert durch $x_S = \frac{1}{A} \int x dA$ $y_S = \frac{1}{A} \int y dA$

(a) Sonderfälle:

- Schwerpunkt einer achsensymmetrischen Fläche liegt auf der achse
- Eine Fläche aus mehreren Teilflächen mit Flächenschwerpunkten $S_i = (x_i, y_i)$: $x_S = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$ $y_S = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}$
- Löcher zählen als negative Fläche

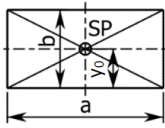
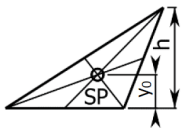
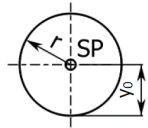
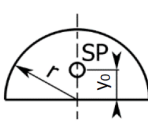
Rechteck	Dreieck	Kreis	Halbkreis
			
$y_0 = \frac{b}{2}$ (4.1)	$y_0 = \frac{h}{3}$ (4.2)	$y_0 = r$ (4.3)	$y_0 = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$ (4.4)

Figure 3: Besondere Schwerpunkte

5. Volumenmittelpunkt

- $x_S = \frac{1}{V} \int x dV$
- $y_S = \frac{1}{V} \int y dV$
- $z_S = \frac{1}{V} \int z dV$

Bei homogener Masseverteilung ist **Massemittelpunkt** = **Volumenmittelpunkt** Sonst Masseverteilungen bzw Dichte verteilung formel

(a) Rotationskörper $\int z dV = \int_0^z \int_0^{r(z)} \int_0^{2\pi} z r d\phi dr dz$

1.4 Balken

1.4.1 Schnittgrößen

- Querkraft (senkrecht zur Balkenachse) Q

- Normalkraft (in Richtung der Balkenachse, normal zur schnittebene)
N
- Biegemoment (y-Komponente des Vektors beschreibt Biegebelastung)
M

1.4.2 Einzellasten

- Egal wo wir zwischen zwei Einzelkräften schneiden, die Gleichung für das Kräftegleichgewicht bleibt dieselbe, und somit ist die Querkraft zwischen zwei Kraftangriffspunkten **konstant**.
- Anders das Moment, welches zwischen den Kraft-Angriffspunkten eine lineare Funktion in x darstellt, und somit dort **Knicke** aufweist.
- Am Angriffspunkt einer Einzelkraft F hat also Q(x) einen Sprung (um F), und M(x) einen Knick.

1.4.3 Kontinuierliche Lasten

- $\frac{dQ}{dx} = -q(x)$
- $\frac{dN}{dx} = -n(x)$
- $\frac{dM}{dx} = Q(x)$

Integration der differentiellen Zusammenhänge liefert:

- $Q(x) = Q(x_0) - \int_{x_0}^x q(u) du$
- $M(x) = M(x_0) - \int_{x_0}^x Q(u) du$

1.5 Arbeit, Potential, Stabilität

1.5.1 Arbeit

Wenn ein Körper mit konstanter Kraft F eine Strecke s verschoben wird so wird Arbeit aufgewandt: $W = F * s$ Allgemein (also wenn Kraft nicht konstant ist) gilt: $W = \int_a^b F ds$ Ein Moment, dass einen Körper um einen Winkel ϕ dreht leistet Arbeit: $W = \int M d\phi$

1.5.2 Potential

Hängt die Arbeit nur von der Lage der Endpunkte der Kraft ab und nicht von der gewählten Bahn so handelt es sich um eine Potentialkraft. $\Pi = -W = -\int_a^b F \, ds$

1. Beispiele: Federpotential: $\Pi_{Feder} = W_{Feder} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ Schwerepotential: $\Pi_{Lage} = W_{Lage} = mgh$

1.5.3 Energie

Energieerhaltungssatz: In einem System ist die Energie am Ende eines Vorgangs gleich groß wie die Energie am Anfang des Vorgangs, vermehrt um die dem System zugeführte Arbeit und verringert um die vom System abgeführte Arbeit.

1.5.4 Stabilität

1. **stabiles Gleichgewicht:** Bei einer kleinen Störung (Auslenkung) nimmt das Potential des

Systems zu \rightarrow nach Wegnahme der Störung geht das System in die ursprüngliche Lage zurück. Kriterium: $\frac{d^2\Pi}{dq^2} > 0$

1. **indifferentes Gleichgewicht:** Bei einer kleinen Störung verändert sich das Potential des

Systems nicht \rightarrow nach Wegnahme der Störung bleibt das System in der neuen Gleichgewichtslage. Kriterium: $d^2\Pi/dq^2 = d^3\Pi/dq^3 = \dots = 0$

1. **instabiles Gleichgewicht:** Bei einer kleinen Störung nimmt das Potential des Systems ab

\rightarrow nach Wegnahme der Störung bewegt sich das System weiter von der alten Gleichgewichtslage fort. Kriterium: $d^2\Pi/dq^2 < 0$

Ein Zustand / System heißt stabil, wenn sein charakteristisches Verhalten auch bei kleinen Störungen erhalten bleibt.

Systeme mit nur einem Freiheitsgrad q sind somit im Gleichgewicht, wenn gilt: $\frac{d\Pi}{dq} = 0$

2 Elastostatik

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Spannung

Normalspannung in einem Körper $\sigma = \frac{F_N}{A^*}$, (negativ: Druckspannung im Körper, positiv: auseinanderziehen im Körper) Schubspannung in einem Körper $\tau = \frac{F_T}{A^*}$

2.1.2 Dehnung

Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ $\epsilon > 0$ Verlängerung, $\epsilon < 0$ Verkürzung

1. Ortsabhängige Dehnung Verschiebung $u(x)$ Differenz von Lage eines materiellen Punktes nach der Belastung, $x + u(x)$, und ursprünglicher Lage x . Betrachte differentielles Element der Länge dx an der Stelle x .

$$\epsilon(x) = \frac{du}{dx}$$

2. Temperatur abhängige Dehnung $\epsilon_T(x) = \alpha * \Delta T(x)$, α ist Wärmeausdehnungskoeffizient

2.1.3 Zusammenhang Dehnung und Spannung

Für eindimensionale Probleme (Stäbe) und kleine Dehnungen gilt ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und elastischem Anteil der Dehnung: $\sigma = E * \epsilon_e$ (Hooksches Gesetz) Analog Feder: $F = k * \Delta x$

Unter Wirkung von Spannung + Temperaturänderung \rightarrow Gesamtdehnung = Superposition von spannungsinduzierter und thermischer Dehnung: $\epsilon_{Ges} = \epsilon_e + \epsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$ Für die Verschiebung ergibt sich somit die Differentialgleichung: $\frac{du}{dx} = \epsilon_e + \epsilon_T = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T$ N ist die in Stabrichtung wirkende Kraft (Normalkraft); EA := Dehnsteifigkeit des Stabs.

2.1.4 Formänderungsenergie

$W = \int dW = \int_0^{\Delta x} F du$ Bei linear elastischen Stäben gilt: $F = \frac{EAu}{l} = \sigma * A$
Also: $W = \frac{1}{2} Fu$

2.2 Spannungszustand

2.2.1 Spannungstensor

Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ Momentengleichgewichte um

Achsen durch den Quadermittelpunkt liefern Symmetrie: $\tau_{ij} = \tau_{ji} \forall i, j \in \{x, y, z\}$ Den Spannungsvektor in einer Fläche mit Normale \underline{n} erhält man damit aus: $\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}}^T * \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}} * \underline{n}$

1. Sonderfall: Ebener Spannungstensor: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$

2.2.2 TODO Gleichgewichtsbedingungen

2.2.3 Koordinatentransformation

Gegeben seien zwei Basen eines Vektorraums: $\{e_x, e_y\}$ und $\{e_\xi, e_\eta\}$ Es beschreibe die Matrix $T = \{a_{ij}\}$ die Darstellung der $\xi\eta$ -Basis als Linearkombination der

$$\xi\eta\text{-Basis: } \begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \end{pmatrix} = T * \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

Transformation eines Ortsvektors: $P^{xy} \rightarrow P^{\xi\eta}$

$$P^{\xi\eta} = T * P^{xy}$$

Sowie für die Transformation von Tensoren, hier am Beispiel des Spannungstensors:

$$\sigma^{\xi\eta} = T * \sigma^{xy} * T^{-1}$$

1. Spezielle Koordinatentransformation: Ebene Drehung

$$\text{Transformationsmatrix: } T = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\phi - \tau_{xy}\sin 2\phi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi$$

2.2.4 Hauptspannungen

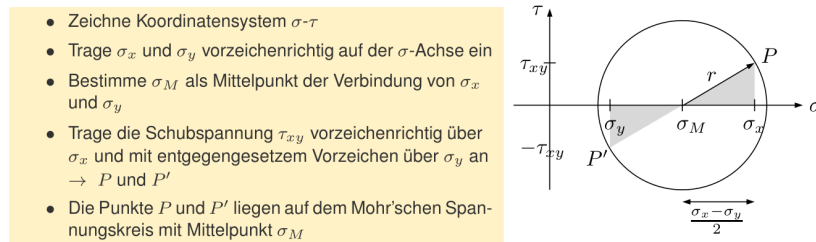
1. Hauptrichtung $\phi^* \tan 2\phi^* = \frac{2\tau_{\xi\eta}}{\sigma_\xi - \sigma_\eta} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$
2. Hauptspannungen Setzt man ϕ^* in die Transformationsgleichungen ein, so ergeben sich die Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2$, die Schubspannungen

verschwinden in diesen Richtungen: $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau_{12} = 0$

2.2.5 Mohrscher Spannungskreis

Kreisgleichung: $(\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = r^2$

1. Interpretation Normal- und Schubspannungen und für beliebige Schnitte durch einen Materialpunkt einer Scheibe liegen in der -Ebene auf einem Kreis um M mit Radius r, dem sogenannten Mohr'schen Spannungskreis (nach Mohr, 1835-1918). Der Spannungszustand in einem Punkt einer Scheibe wird also vollständig durch den Mohr'schen Spannungskreis beschrieben.
2. Konstruktion



P gehört z.B. zu dem Schnitt, in dem σ_x und τ_{xy} wirken, P' zu dem dazu senkrechten Schnitt.

Figure 4: Mohrscher Spannungskreis Konstruktion

2.2.6 Verzerrungszustand

Der Verschiebungsvektor ist der Differenzvektor zwischen der Lage eines Materialelements nach und vor der Verformung: $\underline{u}(x, y, z) = \underline{P}(x, y, z) - \underline{P}(x, y, z)$

Verzerrungstensor $\underline{\underline{\varepsilon}}(x, y, z) = \frac{1}{2}(\Delta \underline{u} + (\Delta \underline{u})^T)$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{d\xi_j} + \frac{du_j}{d\xi_i} \right)$$

2.2.7 Materialgesetz

Zusammenhang zwischen σ und ε (Spannungstensor und Verzerrungstensor)

1. Hooksches Gesetz $\sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z))$, $\tau_{xy} = 2G\epsilon_{xy}$
 $\sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z))$, $\tau_{yz} = 2G\epsilon_{yz}$
 $\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y))$, $\tau_{xz} = 2G\epsilon_{xz}$
 $E = 2G(1 + \nu)$
2. Berechnung des Spannungszustands $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$, $\tau_{xy} = 2G\epsilon_{xy}$
 $\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$
3. Berechnung des Verzerrungszustands $\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$, $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy}$
 $\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$

2.2.8 Festigkeitshypothesen

1. Dimensionskriterien Vergleichsspannung σ_V
 $\sigma_V \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{Grenz}}{S}$
2. maximale Normalspannung (Rankine) $\sigma_V = \sigma_{max} =$ betragsmäßig maximale Hauptnormalspannung
Eignung: gut für spröden Bruch senkrecht zu σ_{max} , nicht geeignet für Plastifizierung
3. maximale Schubspannung (Tresca) $\sigma_V = 2\tau_{max} = 2 \cdot$ maximale Schubspannung Eignung: gut für Plastifizierung (unter Berücksichtigung der Lage von σ_M , sh. Mohr'scher Kreis)
4. maximale Gestaltänderungsenergie (Mises) Liefert schließlich basierend auf den Hauptspannungen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ $\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$
Eignung: bis heute die (insbesondere für Plastifizierung) am besten funktionierende Hypothese

2.3 Biegebalken

2.3.1 Verzerrung und Materialgesetz

- geometrische Beziehung: $u(x, z) = \psi(x) \cdot z$
- $\sigma = \sigma_x = E\epsilon_x = E\psi'z = \frac{M}{I}z$
- $\tau = \tau_{xz} = 2G\epsilon_{xz} = G(\omega' + \psi)$ (ω ist Neigung der verformten Balkenachse (lokal))

2.3.2 Schnittgrößen und Spannungsgrößen

- $Q = \int \tau dA = \int G(\omega' + \psi) dy dz = GA_s(\omega' + \psi)$ (A:= Schubfläche, AG:=Schubsteifigkeit)
- $N = \int \sigma dA = E\psi' \int z^2 dA = EI\psi'$ mit $I = I_y = \int z^2 dA$ (I:= Flächenträgheitsmoment bzgl der y-Achse, EI:=Biegesteifigkeit)
- $M = M_y = \int z \sigma dA$

2.3.3 Flächenträgheitsmoment

$I_y = \int z^2 dA$ (axiales FTM bzgl y-Achse)

$I_z = \int y^2 dA$ (axiales FTM bzgl z-Achse)

$I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dA$ (Deviationsmoment)

Die Größe der Flächenträgheitsmomente ist von der Lage des Ursprungs und von der Richtung der Achsen abhängig. Das Deviationsmoment verschwindet, $I_{yz} = 0$, falls y oder z Symmetrieachse ist.

1. Zusammengesetzte Flächen $A = \sum_i A_i$, $I_* = \sum_i I_*^{(i)}$
2. Parallele Koordinatensysteme (Satz von Steiner) Bei parallelen KoSys gilt: $\bar{y} = y + \bar{y}_S$, $\bar{z} = z + \bar{z}_S$
 - $I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_S^2 A$
 - $I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_S^2 A$
 - $I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} + \bar{y}_S \bar{z}_S A$
3. Flächenträgheitsmomente einiger Geometrien:

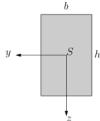
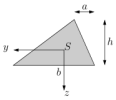
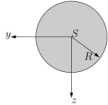
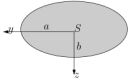
	I_y	I_z	I_{yz}		I_y	I_z	I_{yz}
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh(b^2 - ba + a^2)}{36}$	$\frac{bh^2(b - 2a)}{72}$
	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0		$\frac{\pi a b^3}{4}$	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	0

Figure 5: Flächenträgheitsmomente einiger Geometrien

4. Rotierte KoSy Flächenträgheitstensor $\underline{I} = \begin{pmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{zy} & I_z \end{pmatrix}$

$$\underline{I}^{\eta\zeta} = \underline{T} * \underline{I}^{yz} * \underline{T}^{-1}$$

- $I_\eta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\varphi) + I_{yz}\sin(2\varphi)$
- $I_\zeta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\varphi) - I_{yz}\sin(2\varphi)$
- $I_\zeta = -\frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2\varphi) - I_{yz}\cos(2\varphi)$

5. Hauptträgheitsmomente $\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \quad I_{12} = 0$$

2.4 Bernoullibalken

2.4.1 Hypothesen

1. Bernoullihypothese: Die Balkenquerschnitte bleiben unter der Deformation eben, und Ihre Form bleibt erhalten (w unabhängig von z, s.u.)
 $\rightarrow N = 0$
2. Bernoullihypothese: Querschnitte, die vor der Deformation senkrecht auf der Balkenachse standen, stehen auch nach der Belastung noch senkrecht auf der deformierten Balkenachse (schubstarrer Balken) \rightarrow
 $\frac{dw}{dx} = \omega' \sim -\psi(x)$

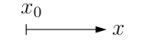




2.4.2 Biegelinie $\omega(x)$

$\omega''(x) = -\frac{M(x)}{EI} \sim \kappa$, mit κ ist die **Krümmung** der Biegelinie welche für kleine Durchbiegungen ca. $\omega''(x)$ ist

- $EI\omega''(x) = -M(x)$
- $EI\omega'''(x) = -Q(x)$
- $EI\omega^{(4)} = q(x)$

2.4.3 Randbedingungen

#+CAPTION Einige Randbedingungen

	statische Randbedingungen		geometrische Randbedingungen	
	$Q(x_0)$	$M(x_0)$	$w(x_0)$	$w'(x_0)$
	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$
	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0
	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0
	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$

3 Kinetik

3.1 Kinematik eines Massepunktes

3.1.1 Grundbegriffe

- Ortsvektor $r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$
- Geschwindigkeit $v(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$
- Beschleunigung $a(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$
- Betrag eines Vektors: $\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3.1.2 geradlinige Bewegung

- gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit): $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$, (Linear)

- gleichmäßig beschleunigte Bewegung (konstante Beschleunigung): $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$ (Parabel förmig)
- zeitabhängig beschleunigte Bewegung: $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tilde{t})d\tilde{t}$, $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tilde{t})d\tilde{t}$

3.1.3 Polarkoordinaten

$$\underline{e}'_r = \varphi' \underline{e}_\varphi, \underline{e}'_\varphi = -\varphi' \underline{e}_r$$

- Ortsvektor: $\underline{r}(t) = r(t) * \underline{e}_r$
- Geschwindigkeit: $\underline{v}(t) = r' * \underline{e}_r + r\varphi' \underline{e}_\varphi$
- Beschleunigung: $\underline{a}(t) = (r'' - r\varphi'^2) * \underline{e}_r + (r\varphi'' + 2r'\varphi')\underline{e}_\varphi$
- $\omega = \varphi'$

3.1.4 Kreisbewegung

- $v_\varphi = \bar{r}\omega$
- $a_\varphi = r\omega'$
- $a_r = -r\omega^2$

3.1.5 Newtonsche Gesetze

Impuls: $\underline{p} = m\underline{v}$

1. Wenn auf einen Massenpunkt keine Kraft wirkt, so ist der Impuls konstant.
2. Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft. $F = ma = \frac{dp}{dt}$
3. actio = reactio

3.1.6 Freie Bewegung

Einfach intuitiv $F=ma$ drauf klatschen

3.1.7 Trockene Reibung

$$R = N\mu$$

3.1.8 Widerstand im Fluid bei kleinen Geschwindigkeiten

- $F_W = kv$
- $F_W^{Stokes} = 6\pi\nu r v$

3.2 Stoßprozesse

3.2.1 zeitlicher Ablauf

- Kompressionsperiode: $\hat{F}_K = \int_{t_0}^{t_M} F(t) dt$
- Restitutionsperiode: $\hat{F}_R = \int_{t_i}^{t_{end}} F(t) dt$

3.2.2 Stoßvorgänge

- elastischer Stoß (Billiard) $\hat{F}_K = \hat{F}_R$
- teilelastischer Stoß: Teil der kinetischen Energie wird in Schwingung oder bleibende Verformung umgewandelt
- ideal plastischer Stoß: Nur verformung

#+CAPTION zentraler Stoß mit glatten Wand

'Starre, glatte Wand' $\perp \underline{e}_x$ liefert folgende **Vereinfachungen**: $F_y = 0 \rightarrow v_{y,0} = v_{y,end}, v_{M,x} = 0$

1. elastischer Stoß

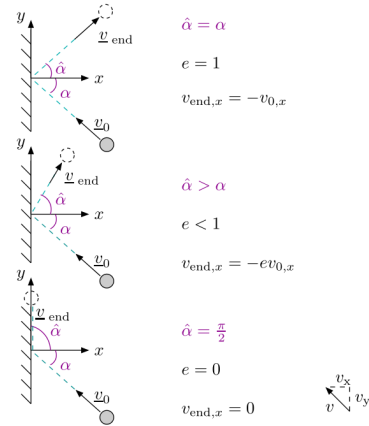
$$\begin{aligned}\hat{F}_K &= \hat{F}_R \\ mv_{M,x} - mv_{0,x} &= mv_{end,x} - mv_{M,x} \\ -v_{0,x} &= v_{end,x}\end{aligned}$$

2. teilelastischer Stoß

$$\begin{aligned}e \cdot \hat{F}_K &= \hat{F}_R \\ e \cdot (mv_{M,x} - mv_{0,x}) &= mv_{end,x} - mv_{M,x} \\ -ev_{0,x} &= v_{end,x}\end{aligned}$$

3. ideal plastischer Stoß

$$\begin{aligned}0 &= \hat{F}_R \\ 0 &= mv_{end,x} - mv_{M,x} \\ 0 &= v_{end,x}\end{aligned}$$



3.2.3 Impulssatz

- Kraftstoß: $\hat{F} = \int_{t_0}^{t_{end}} F dt$
- Impulssatz: $\hat{F} = mv(t_{end}) - mv(t_0)$

3.2.4 Systeme von Massepunkten

- Schwerpunktsatz: $m_{ges}\underline{a}_S = \underline{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i$
- Impulssatz: $\hat{\underline{F}}_{ext} = m_{ges}\underline{v}_S(t_{end}) - m_{ges}\underline{v}_S(t_0)$, mit $\underline{v}_S = \frac{\sum_i(m_i \underline{v}_i)}{\sum_i m_i}$

3.2.5 Drallsatz

Drehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

Aus dem 2ten Newtonschen gesetz: $\underline{r} \times \underline{p}' = \underline{r} \times \underline{F} \rightarrow \underline{L}' = \underline{M}$

3.2.6 Körper mit veränderlicher Masse

$$\underline{F} = m\underline{a} + m'\underline{a}$$