Q1.

1. What is the expression for h(n)?

a. $y[n] = 4{,}5x[n] + 0{,}8y[n-1]$

$$Y(e^{j\omega}) - 0{,}8e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = 4{,}5X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{4{,}5}{1-0{,}8e^{-j\omega}} \longrightarrow h[n] = 4{,}5\,(0{,}8)^n u[n]$$

b. $y[n] = x[n-1] + 0{,}2y[n-1] + 0{,}15y[n-2] + 1{,}7x[n-2]$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + 0{,}2e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + 0{,}15e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega}) + 1{,}7e^{-2j\omega}X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega})(1 - 0{,}2e^{-j\omega} - 0{,}15e^{-2j\omega}) = X(e^{j\omega})(e^{-j\omega} + 1{,}7e^{-2j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega}(1+1{,}7e^{-j\omega})}{1-0{,}2e^{-j\omega}-0{,}15e^{-2j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}+1{,}7e^{-2j\omega}}{(1+0{,}3e^{-j\omega})(1-0{,}5e^{-j\omega})} = 0{,}08 + \frac{1-0{,}28e^{-j\omega}}{(1+0{,}3e^{-j\omega})(1-0{,}5e^{-j\omega})}$$

$$= 0{,}08 + (-5)\cdot\frac{1}{1+0{,}3e^{-j\omega}} + 1{,}25\cdot\frac{1}{1-0{,}5e^{-j\omega}} - 0{,}28e^{-j\omega}\left[(-5)\cdot\frac{1}{1+0{,}3e^{-j\omega}} + \frac{1{,}25}{1-0{,}5e^{-j\omega}}\right]$$

$$h[n] = 0{,}8\delta[n] + (-5)(-0{,}3)^n u[n] + (1{,}25)(0{,}5)^n u[n] - 0{,}28(-5)(-0{,}3)^{n-1}u[n-1]$$
$$- 0{,}28(1{,}25)(0{,}5)^{n-1}u[n-1]$$

c. $y[n] = 4{,}5x[n] + 2{,}3x[n-2] + 4x[n-4]$

$$Y(e^{j\omega}) = 4{,}5X(e^{j\omega}) + 2{,}3e^{-2j\omega}X(e^{j\omega}) + 4e^{-4j\omega}X(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(4{,}5 + 2{,}3e^{-2j\omega} + 4e^{-4j\omega})$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 4{,}5 + 2{,}3e^{-2j\omega} + 4e^{-4j\omega} \longrightarrow h[n] = 4{,}5\delta[n] + 2{,}3\delta[n-2]$$
$$+ 4\delta[n-4]$$

2. Systems a and b are infinit in duration and therefor IIR
system c is finit in duration and therefor FIR

3. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0{,}5e^{-j\omega}} \rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}+1{,}7e^{-2j\omega}}{1+0{,}3e^{-j\omega}}$

 $y(-1) = 0$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{17}{3} e^{-j\omega} - \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{1+0{,}3e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \frac{17}{3}\delta[n-1] - \frac{14}{3}(-0{,}3)^n u[n]$$

Q_2: $y[n] = 4{,}5x[n] + ay[n-1]$ ① $a = 0{,}5$

$x[n] = 3\sin(2\pi 0{,}2n)$

$Y(e^{j\omega}) = 4{,}5X(e^{j\omega}) + a e^{-j\omega} Y(e^{j\omega})$

$Y(e^{j\omega})(1 - ae^{-j\omega}) = 4{,}5X(e^{j\omega})$

② $a = 0{,}9$ ③ $a = 1{,}2$ ④ $a = -0{,}5$

2: وقتی $a=1{,}2$ است $|a|>1$ می‌شود. در نتیجه ROC تبدیل Z آن شامل دایره یکه نخواهد شد و بنابراین ناپایدار شده است.

3: $$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right]$$

برای $A=16$، 9 دور طول کشید تا به 4 همگرا شود.

برای $A=4$، 8 دور طول کشید تا به 2 همگرا شود.

برای $A=5$، 8 دور طول کشید تا به $\sqrt{5}$ همگرا شود.

برای $A=3$، 8 دور 〃 〃 $\sqrt{3}$ 〃 〃

← پس 8 مرحله طول می‌کشد تا به مقدار واقعی همگرا شود با شرط $y(-1)=0{,}5$

★ بله به مقدار اولیه $y(-1)$ به شدت وابسته و حساس است. برای مثال اگر $y(-1)=4$ باشد و $A=16$، در این صورت تعداد مراحل به حداقل خود می‌رسد.

Q_3: همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش M که همان طول پنجره ما است، نمودار DTFT ما فشرده‌تر می‌شود یا به عبارتی تعداد صفرهای پاسخ فرکانسی ما افزایش می‌یابد. از طرفی max اندازه پاسخ فرکانسی افزایش یافته است. اما با افزایش M، علاوه بر افزایش max اندازه، عرض lobe ها کاهش یافته است.

← با افزایش طول پنجره، پهنای lobe اصلی کاهش می‌یابد