

PROJET ACTUARIAT VIE

Produit de retraite et capital décès avec prime annuelle.

Groupe 4

Élaboré par :

Baccouche HOUSSEM
Mezghanni AHMED
Monastiri KHALIL
Ben Mansour MAHDI
Rahmouni GHASSEN
Khayati FEHD

Encadré par :

Mr. Maatoussi Anis

2021- 2022

Table des matières

Introduction	1
1 Maximum de vraisemblance	2
1.1 Introduction	2
1.2 Principe de la méthode	2
1.3 Conclusion	4
2 Modèle Lee Carter	5
2.1 Introduction	5
2.2 Présentation du modèle	5
2.2.1 Définition	5
2.2.2 La relation de Lee Carter avec le taux de mortalité	5
2.3 Estimation des paramètres avec la méthode des Moindres Carrés	6
2.3.1 Méthode des Moindres Carrés	6
2.3.2 Estimation du modèle Lee Carter	6
2.4 Conclusion	7
3 Valeur Actuelle Probable	8
3.1 Introduction	8
3.2 Valeur Actuelle Probable "VAP"	8
3.2.1 Valeur Actuelle	8
3.2.2 Valeur Actuelle Probable	8
3.3 Définition des rentes viagères	8
3.3.1 Rente viagère à termes anticipés	9
3.3.2 Rente viagère à termes échus	9
3.3.3 Rente viagère différée et temporaire	9
3.4 Définition de Taux d'intérêt :	9
3.5 Définition de Taux de mortalité :	9
3.6 Définition de la table de mortalité :	9
3.7 Définition de la table actuarielle :	10
3.8 Définition de Taux de mortalité :	11
3.9 Conclusion	11
4 Applications numériques en R	12
4.1 Introduction	12
4.2 Présentation et description des données	12
4.3 Calcul de la Valeur Actuelle Probable du contrat	13
4.4 Calcul de la Valeur Actuelle Probable en utilisant pour mortalité de référence les taux de 2016	15
4.5 Extrapolation des taux de mortalité par la méthode de Coale et Kisker	15
4.6 Estimation des paramètres du Lee Carter	16
4.6.1 Estimation par le modèle <code>lca()</code>	16
4.6.2 Estimation en utilisant le package <code>StMoMo</code>	16
4.7 Projection du taux de mortalité	19
4.7.1 Le Package <code>Forecast</code>	19
4.7.2 Mise en oeuvre avec la méthode <code>forecast</code>	20
4.8 Recalcul de la valeur actuelle probable en utilisant les taux projetés	21
4.9 Conclusion	21
Conclusion Générale	22

Table des figures

4.1	Logarithme de taux de mortalité (1872-2017) en Italie par genre	12
4.2	La table de mortalité	13
4.3	La table de survie	14
4.4	La table d'actuarielle	14
4.5	La table de mortalité en probabilité de décès 2016	15
4.6	La table actuarielle 2016	15
4.7	Les valeurs estimées des a_x , b_x et k_t du modèle	17
4.8	Les valeurs estimées de k_t du modèle avec lca()	17
4.9	Les valeurs estimées des a_x , b_x et k_t du modèle avec le package StMoMo	19
4.10	Détails forecast	20
4.11	Projection du taux de mortalité pour les 50 prochaines années	21

Introduction

Les dernières années ont été marquées par un intérêt croissant porté par les démographes sur les problèmes relatifs à la mortalité et à la longévité des populations. A cet égard, les statisticiens et les assureurs ont cherché à analyser ces phénomènes. Certes, l'analyse des tendances de mortalité n'est pas sans intérêt pour les spécialités de l'assurance vie.

Dans ce projet, on se propose d'estimer et de projeter la mortalité d'une cohorte d'assurés italiens afin d'étudier un contrat de retraite et un produit de capital décès. En fait, il existe plusieurs indicateurs pour le suivi de la mortalité de la population. Cependant, l'indicateur le plus utilisé reste le taux de mortalité. Ce taux est souvent utilisé par les financiers et les spécialistes d'actuariat dans la mesure où il conditionne l'engagement de l'assureur en matière de calcul des primes et l'estimation des rentes à distribuer. Rappelons que le contrat d'assurance vie garantit le versement d'une prestation sous forme de rente ou de capital à un bénéficiaire selon deux options :

- Une assurance vie en cas de vie qui garantit le versement d'un capital ou le service d'une rente si l'assuré est en vie à une date donnée.
- Une assurance vie en cas de décès par laquelle l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente en cas de décès qui peut intervenir à n'importe quelle époque ou avant un délais fixé à l'avance.

Dans les deux cas l'estimation de la rente (ou du capital) dépend du taux d'actualisation utilisé qui lui même dépend du taux d'intérêt en vigueur.

Notre étude s'intéresse particulièrement à estimer et projeter la mortalité d'une cohorte d'assurés italiens ayant contracté en 2015 (à l'âge de 40 ans) afin d'étudier un contrat de retraite et un produit de capital décès. Deux types de contrats : - Un contrat de retraite pour lequel l'assuré recevra un rente de $R = 1500$ euros à partir de l'âge de 65 ans, et paiera une prime annuelle jusqu'à 65 ans. - Un contrat de capital décès pour lequel les bénéficiaires de l'assuré recevront un capital de $K = 100\,000$ euros en échange du paiement d'une prime annuelle par l'assuré

Dans un premier chapitre, nous estimerons les paramètres du modèle de Lee Carter.

Un deuxième chapitre sera consacré aux fondements théoriques de la valeur actuelle probable.

Enfin un dernier chapitre nous permettra de tester empiriquement l'effet de la variation du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable moyennant le langage R.

Chapitre 1

Maximum de vraisemblance

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les fondements théoriques de la méthode de maximum de vraisemblance.

1.2 Principe de la méthode

La vraisemblance de l'échantillon s'exprime de la manière suivante[1]

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta),$$

où f désigne la fonction de masse de probabilité ou la densité suivant la loi retenue. L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ est la valeur $\hat{\theta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n)$ par rapport à θ (pour un jeu d'observation donné) sur son domaine de définition. De plus, ceci est équivalent à maximiser le logarithme de la vraisemblance (appelé log-vraisemblance) :

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta)$$

On définit les fonctions de score :

$$S_j(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \mathcal{L}(\theta), \quad \text{pour } j = 1, \dots, p$$

La maximisation de $\mathcal{L}(\theta)$ se résume donc à résoudre les équations normales

$$S_j(\theta) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, p$$

Généralement, il n'existe pas de formules fermées pour ces équations, on les résout numériquement.

Dans le cas de données groupées, où n_j représente le nombre de données dans la classe $]c_{j-1}, c_j]$, $j = 1, \dots, r$ la probabilité qu'une donnée tombe dans l'intervalle $]c_{j-1}, c_j]$ est $F(c_j) - F(c_{j-1})$. La fonction de vraisemblance est donc :

$$\mathcal{L}(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^r [F(c_i, \theta) - F(c_{i-1}, \theta)]^{n_i}$$

On trouvera dans tout bon livre de statistique mathématique (par exemple Hogg et al.[4](2005), Saporta[5](2006), Dagnelie[2](2007), Dalggaard[3](2008)) une étude détaillée des propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Aussi nous contenterons-nous, ici, de ne présenter que les principaux résultats.

Invariance Pour toute fonction bijective g , si $\hat{\theta}$ est l'EMV de θ , alors $g(\hat{\theta})$ est l'EMV de $g(\theta)$, soit :

$$\hat{g}(\theta) = g(\hat{\theta})$$

Biais et efficacité asymptotique Sous des conditions de régularité, l'EMV est asymptotiquement sans biais et efficace. C'est-à-dire que si $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ pour un échantillon (i.i.d.) de taille n , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\hat{\theta}_{n,i}] = \theta_i, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}[\hat{\theta}_{n,i}] = \frac{1}{I_n(\theta)_{ii}}, \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, p\},$$

où $I_n(\theta)$ désigne la matrice d'information de Fisher de taille $p \times p$ dont l'élément (i,j) est donné par :

$$I_n(\theta)_{ij} = -n\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln f(X,\theta)\right]$$

$(I_n(\theta)_{ii})^{-1}$ est appelée borne de Cramer-Rao.

Normalité asymptotique La distribution asymptotique de l'EMV est une loi normale multivariée de moyenne θ et avec matrice de variance-covariance $I_n(\theta)^{-1}$, i.e.

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \mathcal{N}(\theta, I_n(\theta)^{-1}),$$

où $I_n(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher donnée ci-dessus.

Concentrons-nous pour un instant sur le cas univarié ($p=1$), plus simple. Par la propriété de normalité asymptotique, on a que, pour de grands échantillons,

$$P\left[-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}} < z_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha,$$

où z_α est le $100(1 - \alpha)^e$ centile d'une $\mathcal{N}(0,1)$. On peut réécrire l'expression ci-dessus sous la forme :

$$P\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}} < \theta < \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}\right] = 1 - \alpha,$$

d'où

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}, \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour θ .

En pratique, la forme de l'information $I_n(\theta)$ rend souvent le calcul de l'intervalle de confiance ci-dessus est impossible. Deux cas de figure se présentent :

1. l'information est connue, mais dépend de θ d'une manière compliquée. On remplace alors θ par son estimation $\hat{\theta}$, ce qui résulte en une estimation de la variance et donc à l'intervalle de confiance

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)^{-1}}, \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{I_n(\hat{\theta}_n)^{-1}}\right]$$

2. l'information est inconnue, par exemple si l'espérance est trop compliquée. Dans un tel cas, on remplace l'espérance par une moyenne empirique : c'est **l'information observée**

$$\hat{I}_n(\hat{\theta}_n) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \ln f(x_i; \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = -\frac{\partial^2}{\partial^2\theta} l(\theta; x_1, \dots, x_n) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n}$$

L'intervalle de confiance pour θ est alors

$$\left[\hat{\theta}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{I}_n^{-1}(\hat{\theta}_n)}, \hat{\theta}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{I}_n^{-1}(\hat{\theta}_n)}\right]$$

Ces idées se généralisent au concept d'ellipse ou d'ellipsoïde de confiance dans le cas multivarié.

En pratique, il n'est pas rare que l'on souhaite estimer non pas θ , mais une fonction $h(\theta)$ de θ . On sait déjà que l'EMV de $h(\theta)$ est $h(\hat{\theta}_n)$, mais qu'en est-il d'un intervalle de confiance pour cette estimation ? En général, il s'agit d'un calcul difficile car la distribution de $h(\hat{\theta}_n)$ peut être très compliquée. On peut alors utiliser la méthode delta, qui est valide pour les grands échantillons. Ainsi dans le cas univarié et pour h continûment différentiable, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$h(\hat{\theta}_n) \sim \mathcal{N}(h(\theta), [h'(\theta)]^2 I^{-1}(\theta)),$$

d'où un intervalle de confiance de $h(\theta)$ est

$$\left[h(\hat{\theta}_n) - z_{\alpha/2}\sqrt{[h'(\theta)]^2 I(\theta)}, h(\hat{\theta}_n) + z_{\alpha/2}\sqrt{[h'(\theta)]^2 I(\theta)}\right]$$

Ce résultat s'étend aussi au cas multivarié. Si l'on souhaite estimer une fonction $h(\theta_1, \dots, \theta_p)$ des paramètres inconnus $\theta_1, \dots, \theta_p$, alors par la méthode delta, on a asymptotiquement

$$h(\hat{\theta}_n) \sim \mathcal{N}(h(\theta), \nabla h^T I_n^{-1}(\theta) \nabla h),$$

où ∇h^T représente la transposée du gradient ∇h est donné par

$$\nabla h(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} h(\theta) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_p} h(\theta) \end{bmatrix}$$

Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $h(\theta)$ est donc

$$\left[h(\hat{\theta}_n) - z_{\alpha/2} \sqrt{\nabla h^T I_n(\theta)^{-1} \nabla h}, h(\hat{\theta}_n) + z_{\alpha/2} \sqrt{\nabla h^T I_n(\theta)^{-1} \nabla h} \right]$$

Considérons l'exemple trivial : on choisit de calibrer la loi exponentielle de paramètre λ , alors on a

$$\log \mathcal{L}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \log \left(\lambda^n \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x_i} \right) = n \log(\lambda) + \sum_{i=1}^n (-\lambda) x_i$$

D'où l'estimateur de maximum de vraisemblance est $n / \sum_{i=1}^n X_i$

En pratique, il est plutôt rare de pouvoir obtenir explicitement l'expression du maximum de la fonction de vraisemblance. Dans de tels cas, il faut avoir recours à des méthodes numériques pour résoudre les équations normales (par exemple avec la méthode de Newton-Raphson) ou alors pour directement maximiser la fonction de vraisemblance ou, plus communément, de logvraisemblance.

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons parlé de l'aspect théorique de la méthode de maximum de vraisemblance et ses limites dans la pratique.

Chapitre 2

Modèle Lee Carter

2.1 Introduction

Dans le cadre de notre projet nous allons modéliser le taux de mortalité à travers Le modèle de Lee Carter. Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle de Lee Carter en identifiant la méthode des moindres carrés en mettant en évidence la relation de Lee Carter et le taux de mortalité.

2.2 Présentation du modèle

2.2.1 Définition

Le modèle original de Lee Carter, Lee et Carter (1992)¹, se concentre, en tant que principales méthodologies de prévision, sur les taux de mortalité centraux $\mu_{x,t}$ pour l'âge x au cours de l'année t définis comme le rapport entre nombre de décès $D(x,t)$, enregistrés au cours de l'année civile t pour les personnes âgées de x , et exposition au risque $E(x,t)$ obtenue en tant que nombre moyen de personnes vivant au cours du calendrier année t .

Nous rappelons que ce taux coïncide avec le taux central de mortalité sous l'hypothèse de constance par morceaux, ce qui conduit à :

$$\mu_{x,t} = \frac{\mathbb{E}(D_{x,t})}{\mathbb{E}(E_{x,t})}$$

Où :

$D_{x,t}$ est le nombre de décès d'âge x dans l'année t .

$E_{x,t}$ est l'exposition au risque d'âge x dans l'année t ou autrement dit, le nombre de vivants d'âge x observé au milieu de l'année t .

2.2.2 La relation de Lee Carter avec le taux de mortalité

D'après Lee et Carter, la relation entre la mortalité, le temps et l'âge est définie de la manière suivante : [6]

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

$\varepsilon_{x,t}$ est la structure gaussienne centrée (bruit blanc), a_x et b_x sont des composantes dépendant de l'âge et k_t la composante temporelle.

Le modèle nous laisse la liberté sur la modélisation de la structure d'évolution du terme temporel k_t .

— Coefficient a_x

Le Coefficient a_x est la composante du modèle liée à l'âge. Il décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps.

1. Le modèle Lee – Carter a été introduit par Ronald D. Lee et Lawrence Carter en 1992 avec l'article «Modeling and Forecasting the Time Series of US Mortality»

— Coefficient b_x

Le coefficient b_x est supposé invariant au fil du temps et il explique comment les taux diminuent rapidement ou lentement en réponse au changement de k_t .

$$\frac{d \ln(\mu_{x,t})}{dt} = b_x \cdot \frac{dk_t}{dt}$$

— Coefficient k_t

Le coefficient k_t reproduit la tendance temporelle sous-jacente, tandis que le terme b_x est considéré dans l'ordre de prendre en compte les différents effets du temps t à chaque âge.

$$\frac{d \ln(\mu_{x,t})}{dt} = k_t \cdot \frac{db_x}{dt}$$

— Coefficient $\varepsilon_{x,t}$

Le coefficient $\varepsilon_{x,t}$ implique les "bruits" ou la variance des taux centraux de mortalité. Ce coefficient $\varepsilon_{x,t}$ dont l'espérance = 0 et la variance = σ^2 reflète l'influence historique particulière de l'âge non prise en compte dans le modèle.

Des contraintes sur les paramètres doivent donc venir compléter le modèle. Lee et Carter proposent de fixer la valeur des sommes des b_x et des k_t

$$\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} b_x = 1$$

$$\sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} k_t = 0$$

2.3 Estimation des paramètres avec la méthode des Moindres Carrés

2.3.1 Méthode des Moindres Carrés

La méthode des moindres carrés était élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809. Elle permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données. La méthode des moindres carrés permet de minimiser l'impact des erreurs expérimentales en ajoutant de l'information dans le processus de mesure. [7]

2.3.2 Estimation du modèle Lee Carter

Pour que le modèle soit calibré, on utilise la méthode des moindres carrés ordinaires et décomposition en valeurs singulières. La méthode dite des moindres carrés pondérés (1993) estime les paramètres du modèle Lee Carter [8] en minimisant la fonction :

$$(\hat{a}_x, \hat{b}_x, \hat{k}_t) = \arg \min \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} [\hat{\ln}(\mu_{x,t}) - \ln(\mu_{x,t})]^2$$

Avec :

- $\ln(\mu_{x,t}) = a_x - b_x \cdot k_t$
- $\hat{\ln}(\mu_{x,t}) = \hat{a}_x - \hat{b}_x \cdot \hat{k}_t$

Etape 1 : Estimation des a_x

Les coefficients a_x sont estimés par les moyennes des $\ln(\mu_{x,t})$ au cours du temps.

$$\hat{a}_x = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} \ln \hat{\mu}_x(t)$$

Etape 2 : Estimation des b_x et k_t

Désignons par \mathbf{Z} la matrice de dimensions $(x_{max} - x_{min} + 1) \times (t_{max} - t_{min} + 1)$ dont l'élément (x, t) , noté $z_{x,t}$, est donné par

$$z_{x,t} = \ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{a}_x$$

Alors, il s'agit d'un centrage des $\ln \hat{\mu}_x(t)$ par rapport à leur moyenne temporelle. L'idée est d'approximer \mathbf{Z} par le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne

$$\mathbf{Z} \approx \hat{\beta} \hat{\mathbf{k}}'$$

- Finalement, il suffit de prendre :

$$\hat{b}_x = \frac{v_1}{\sum_j v_{j1}}$$

$$\hat{k}_x = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_j v_{j1} \right) u_1$$

avec

- $\hat{\beta} = (\hat{b}_{x_{min}}, \dots, \hat{b}_{x_{max}})'$
- $\hat{\mathbf{k}} = (\hat{k}_{t_{min}}, \dots, \hat{k}_{t_{max}})'$
- u_i c'est le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre normé de la matrice carrée $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ de dimensions $(t_{max} - t_{min} + 1) \times (t_{max} - t_{min} + 1)$ correspondant à la valeur propre λ_i
- v_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de la matrice carrée $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$ de dimensions $(x_{max} - x_{min} + 1) \times (x_{max} - x_{min} + 1)$, correspondant à la valeur propre λ_i

Etape 3 : Ajustement des paramètres k_t

À ce niveau du développement, nous possédons déjà des estimateurs \hat{a}_x , \hat{b}_x et \hat{k}_t . Néanmoins, en traitant directement les estimations brutes des taux instantanés de mortalité $\hat{\mu}_x(t)$, nous ne faisons que peu de cas de la qualité de l'ajustement du point de vue des nombres de décès. Donc Il est conseillé d'effectuer une étape de plus en exigeant par exemple que

$$\sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} D_{xt} = \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} E_{xt} \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t)$$

Le modèle de Lee Carter reproduirait maintenant fidèlement le nombre total de décès observés pour une année donnée. Alors, il convient de réestimer de nouveau le paramètre temporel k_t .

2.4 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté le modèle Lee Carter en identifiant la méthode des moindres carrés qui est une parmi plusieurs qui permet d'estimer les paramètres de notre modèle. Ainsi, nous avons mis en évidence la relation adéquate entre Lee Carter et le taux de mortalité. Dans le chapitre suivant, nous allons identifier les effets du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère.

Chapitre 3

Valeur Actuelle Probable

3.1 Introduction

Dans le cadre de notre projet, nous allons présenter l'influence du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère d'un portefeuille d'assurés italiens. Dans ce chapitre, nous allons aussi présenter la valeur actuelle probable, la définition d'une rentes viagères et finalement la table de mortalité ainsi que ses composants qui seront détaillés dans des formules mathématiques.

3.2 Valeur Actuelle Probable "VAP"

3.2.1 Valeur Actuelle

Dans la finance la valeur actuelle désigne la valeur actuelle des flux futures espérés, qui est actualisée au taux de rentabilité exigé par les investisseurs. Elle est toujours inférieure ou égale à la valeur future,[9] représentée par :

$$VA = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k 1C_k$$

avec :

F_K : une série de flux

V : facteur d'actualisation

C_k : des conditions de paiements aléatoires

3.2.2 Valeur Actuelle Probable

La valeur actuelle probable d'un engagement est définie comme le produit de la valeur actuelle de cet engagement par la probabilité de réalisation de l'engagement. Elle permet à l'assureur d'évaluer ces engagements et donc de les provisionner suffisamment. [9]

La Valeur Actuelle Probable est représentée par l'espérance de la valeur actuelle :

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^k P(C_k)$$

3.3 Définition des rentes viagères

La rente viagère est une somme d'argent versée, de manière régulière, à un bénéficiaire, ce qui lui donne une certaine analogie avec une retraite ou avec certaines pensions à vie jusqu'à son décès. En contrepartie, le capital ne peut pas être récupéré, ni être transmis aux héritiers. La rente cesse au décès de son bénéficiaire, exceptée si le contrat prévoit la réversion de la rente pour le conjoint ou tout autre bénéficiaire désigné.[10]

Il existe plusieurs types de rente viagère :

3.3.1 Rente viagère à termes anticipés

Une rente viagère à termes anticipés est une série annuelle de flux de l'individu à commencer d'aujourd'hui jusqu'au décès. [11]

Sa valeur actuelle probable est

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kP_x = \ddot{a}_x$$

avec :

x : l'âge de l'assuré à la souscription

${}_kP_x$: Probabilité de survie est égale à $P(T > x + k | T > x)$

v^k : un facteur d'actualisation compris entre 0 et 1 est égale à $(1 + i)^{-k}$ (i : le taux d'intérêt annuel)

3.3.2 Rente viagère à termes échus

Une rente viagère à termes anticipés est une série annuelle de flux de l'individu à partir de la première année jusqu'au décès. [11]

Sa valeur actuelle probable est

$$VAP(\text{rente}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_kP_x = a_x$$

La relation entre la Rente viagère à termes échus et la Rente viagère à termes anticipés est simplement :

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

3.3.3 Rente viagère différée et temporaire

Une rente viagère différée et temporaire est une série annuelle de flux de l'individu. Elle est versée pendant une durée déterminée entre $[s; s + t]$ et s'interrompt en cas de décès du bénéficiaire si sa durée de versement n'est pas garantie. [12]

Sa valeur actuelle probable est [11]

$$VAP(\text{difftemp}) = \sum_{k=s}^{s+t-1} v^k {}_kP_x = {}_s|_t\ddot{a}_x$$

La rente peut être seulement temporaire si le versement de l'individu à commencer d'aujourd'hui $s=0$ et notée

$${}_t\ddot{a}_x = {}_0|_t\ddot{a}_x$$

La rente peut être seulement différé de s années si $t = \infty$ et notée

$${}_t\ddot{s}_x = {}_s|\infty\ddot{a}_x$$

3.4 Définition de Taux d'intérêt :

Le taux d'intérêt i est un pourcentage de rémunération fixé à l'avance s'appliquant à une somme confiée par le créancier à son débiteur. C'est une rémunération ou une contrepartie du risque engendrée par le prêteur.

3.5 Définition de Taux de mortalité :

Le taux de mortalité q_x est une mesure du nombre de décès (en général ou dû à une cause spécifique) dans une population particulière, à l'échelle de la taille de cette population, par unité de temps.

3.6 Définition de la table de mortalité :

La table de mortalité appelée aussi table de survie est une table donnant, pour chaque âge, la probabilité annuelle de décès d'un individu. Elle est établie selon des données statistiques. Elle est utilisée en démographie pour étudier l'espérance de vie d'une population cible. [13]

La table de mortalité représente :

- x : Présente l'âge de l'assuré à la souscription
- d_x : Le nombre de décès entre l'âge x et $x+1$

$$d_x = l_x * q_x$$

- l_x : Présente le nombre de personne survivant jusqu'à l'âge x :

$$l_x = l_{x-1} * (1 - q_{x-1})$$

- L_x : Présente le nombre d'années des personnes vécues entre les âges exacts x et $x + 1$:

$$L_x = l_x - 5d_x$$

- T_x : Présente le nombre d'années des personnes vécues après l'âge exact x :

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + ..$$

- ${}^o e_x$: Présente le nombre moyen d'années de vie restant à l'âge exact x

$${}^o e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

3.7 Définition de la table actuarielle :

La table actuarielle est un outil statistique qui montre l'espérance de vie moyenne pour les personnes selon le sexe et l'âge. Elle hérite de la table de mortalité et ajoute de plus une colonne du taux d'intérêt.

La table de mortalité représente :

- l_x : Présente le nombre de personne survivant jusqu'à l'âge x :

$$l_x = l_{x-1} * (1 - q_{x-1})$$

- D_x : Présente le nombre de décès à l'âge x du dernier anniversaire dans une population au cours d'une année :

$$D_x = v^x * l_x$$

- N_x : Présente le nombre d'organismes d'âge x

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ..$$

- C_x : n'appartient pas dans la table de survie, elle est utilisée uniquement pour les calculs

$$C_x = v^{x+1} * d_x$$

- M_x : Présente le taux de mortalité central pour le sous-ensemble d'une population qui se situe entre les âges exacts x et $x + y$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ..$$

- v : C'est un facteur d'actualisation mais n'appartient pas dans la table de survie, elle est utilisée uniquement pour les calculs

$$v = \frac{1}{1+i}$$

avec i le taux d'intérêt

Avec la table de mortalité on peut déterminer les probabilités de vie et de décès p_x et q_x avec les formules suivantes :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad p_x = 1 - q_x$$

3.8 Définition de Taux de mortalité :

Le taux de mortalité est une mesure du nombre de décès (en général ou dû à une cause spécifique) dans une population particulière , à l'échelle de la taille de cette population, par unité de temps

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en premier lieu la valeur actuelle probable, en deuxième lieu la rente viagère et finalement la table de mortalité.

Dans le chapitre suivant, nous entamons la phase pratique de ces notions en R.

Chapitre 4

Applications numériques en R

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons projeter et estimer le taux de mortalité de la populations italiennes en utilisant le modèle lee Carter, calculer la valeur actuelle probable du contrat d'une rente viagère à terme anticipé et temporaire d'une durée de 15 ans, étudié la variation de la valeur actuelle probable en fonction du taux d'intérêt et finalement étudier l'influence du taux d'intérêt à l'influence de la variation des taux de mortalité.

4.2 Présentation et description des données

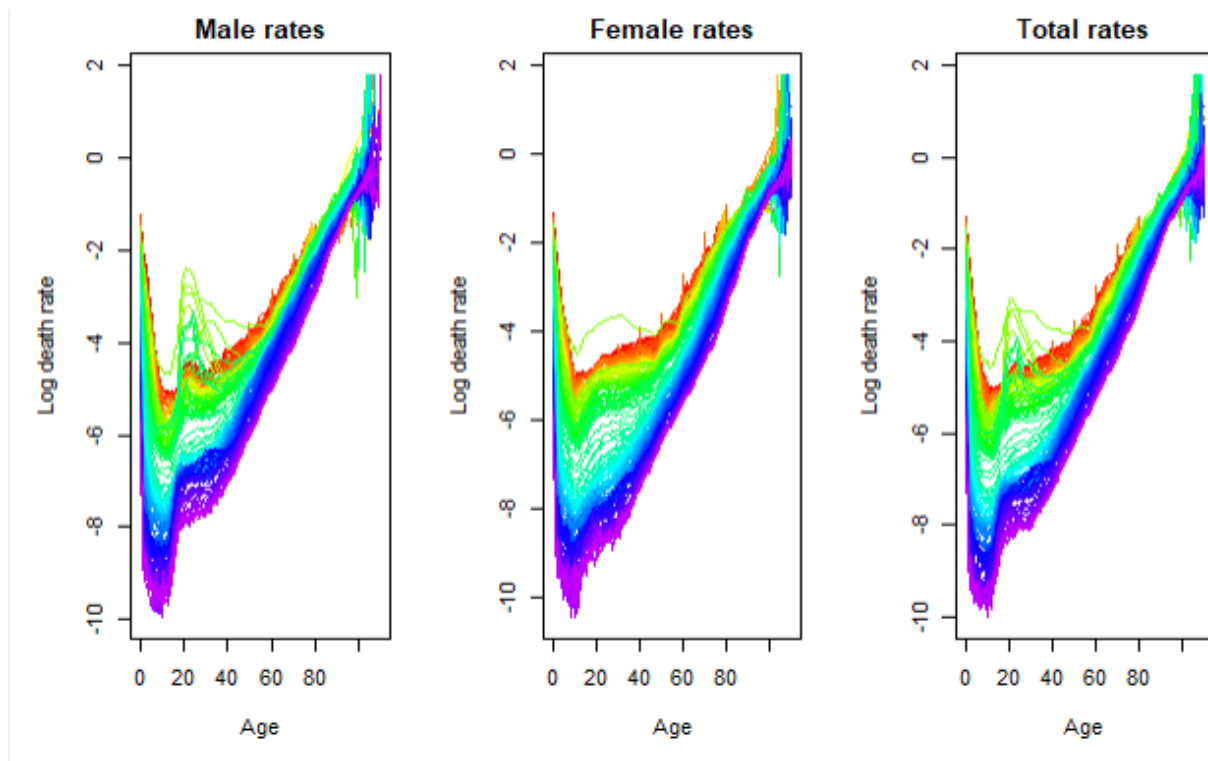


FIGURE 4.1 – Logarithme de taux de mortalité (1872-2017) en Italie par genre

Les données sur lesquelles nous travaillons sont celles provenant du site internet www.mortality.org. Il s'agit de *Human Mortality Database (HMD)*, une base de données qui a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité pour 47 populations homogènes dans différents pays et régions.

Dans le cadre de notre projet, nous nous sommes concentrés sur les données concernant l'Italie et qui se présentent comme ceci :

- **year** : les années pour lesquelles la mortalité a été observée entre **1872-2017**
- **age** : les âges pour lesquelles la mortalité a été observée entre **0-110**

- **pop** : une répartition de la population Italienne selon 3 modalités : année du décès, âge du décès et genre (H/F).
- **rate** : les taux de mortalité observés en Italie repartis selon 3 modalités : année, âge et genre (H/F).

Pour mieux analyser les données, nous commençons par tracer les logarithmes des taux de mortalité de la population Italienne âgée de 0 à 110 ans pour la période 1872-2017 :

4.3 Calcul de la Valeur Actuelle Probable du contrat

Le problème principal de l'assureur vie est de pouvoir déterminer à la date de souscription d'un contrat quelconque, la valeur d'un engagement à long terme dont la réalisation n'est pas certaine. Pour cela, il utilise la notion de valeur actuelle probable qui combine à la fois la notion de la valeur probable (calcul de probabilité) et celle de valeur actuelle (mathématiques financières).

Pour calculer la VAP, plusieurs étapes ont été réalisées. Nous avons affiché tout d'abord la table de mortalité qui nous permet de visualiser la probabilité annuel de décès d'un individu et la table actuarielle. Ensuite nous avons calculé la durée de vie attendu afin d'obtenir la valeur actuelle probable.

Étape 1 :

D'abord, nous avons converti les taux de mortalité en probabilités de décès pour la cohorte 1943 à l'aide de la fonction `mx2qx()` afin de construire la table de survie.

0	1	2	3	4	5
0.1212482813	0.0347963435	0.0132356372	0.0050692338	0.0027500116	0.0015704820
6	7	8	9	10	11
0.0012363386	0.0008794918	0.0008403576	0.0007478879	0.0006742684	0.0005802998
12	13	14	15	16	17
0.0005805259	0.0006879967	0.0008103134	0.0008587700	0.0009921124	0.0011407859
18	19	20	21	22	23
0.0012447676	0.0014467800	0.0015300909	0.0013814874	0.0014310501	0.0013020449
24	25	26	27	28	29
0.0013024771	0.0013598432	0.0013682449	0.0012613251	0.0012571191	0.0012443933

FIGURE 4.2 – La table de mortalité

Étape 2 :

Après, nous avons utilisé la fonction `probs2lifetable()` pour créer une nouvelle table de survie en précisant la génération de cette table à partir de la probabilité de décès q_x ou de survie p_x .

	x	lx	px	ex
1	0	10000.0000	0.8787517	66.5068441
2	1	8787.5172	0.9652037	74.6833161
3	2	8481.7437	0.9867644	76.3757078
4	3	8369.4824	0.9949308	76.4001481
5	4	8327.0556	0.9972500	75.7894116
6	5	8304.1561	0.9984295	74.9984081
7	6	8291.1145	0.9987637	74.1163770
8	7	8280.8639	0.9991205	73.2081234
9	8	8273.5810	0.9991596	72.2725660
10	9	8266.6282	0.9992521	71.3333519
11	10	8260.4457	0.9993257	70.3867412
12	11	8254.8759	0.9994197	69.4342327

FIGURE 4.3 – La table de survie

Étape 3 :

Ensuite, nous avons créé une nouvelle table actuarielle qui est générée à partir de la table de survie avec un taux d'intérêt égale à 1.5 % et qui contient tous les indicateurs nécessaires à l'analyse des résultats par période.

	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000.0000	10000.00000	389492.17847	1194.564348	4243.95795	197216.27662
2	1	8787.5172	8657.65240	379492.17847	296.802608	3049.39361	192972.31867
3	2	8481.7437	8232.90419	370834.52607	107.357373	2752.59100	189922.92506
4	3	8369.4824	8003.87828	362601.62188	39.973922	2645.23363	187170.33406
5	4	8327.0556	7845.62045	354597.74359	21.256697	2605.25970	184525.10044
6	5	8304.1561	7708.41862	346752.12315	11.927027	2584.00301	181919.84073
7	6	8291.1145	7582.57408	339043.70452	9.236088	2572.07598	179335.83772
8	7	8280.8639	7461.28024	331461.13045	6.465158	2562.83989	176763.76174
9	8	8273.5810	7344.54986	323999.85020	6.080836	2556.37473	174200.92185
10	9	8266.6282	7229.92888	316655.30034	5.327267	2550.29390	171644.54712
11	10	8260.4457	7117.75537	309425.37146	4.728352	2544.96663	169094.25322
12	11	8254.8759	7007.83852	302307.61609	4.006549	2540.23828	166549.28659
13	12	8250.0856	6900.26785	295299.77757	3.946585	2536.23173	164009.04831
14	13	8245.2962	6794.34686	288399.50972	4.605407	2532.28514	161472.81658
15	14	8239.6235	6689.33239	281605.16286	5.340350	2527.67974	158940.53143
16	15	8232.9468	6585.13491	274915.83047	5.571543	2522.33939	156412.85169
17	16	8225.8766	6482.24610	268330.69556	6.336075	2516.76784	153890.51231
18	17	8217.7156	6380.11329	261848.44945	7.170782	2510.43177	151373.74446
19	18	8208.3410	6278.65512	255468.33616	7.699967	2503.26099	148863.31269
20	19	8198.1235	6178.16714	249189.68105	8.806353	2495.56102	146360.05171
21	20	8186.2626	6078.05783	243011.51390	9.162543	2486.75467	143864.49068
22	21	8173.7369	5979.07177	236933.45607	8.137943	2477.59213	141377.73602
23	22	8162.4450	5882.57316	230954.38430	8.293849	2469.45418	138900.14389
24	23	8150.7641	5787.34473	225071.81114	7.424022	2461.16033	136430.68971
25	24	8140.1514	5694.39345	219284.46640	7.307209	2453.73631	133969.52938
26	25	8129.5491	5602.93264	213590.07295	7.506512	2446.42910	131515.79307
27	26	8118.4942	5512.62417	207987.14031	7.431152	2438.92259	129069.36396
28	27	8107.3861	5423.72567	202474.51614	6.739982	2431.49144	126630.44138
29	28	8097.1600	5336.83210	197050.79048	6.609885	2424.75146	124198.94994

FIGURE 4.4 – La table d'actuarielle

Étape 4 :

Pour le calcul de la valeur actuelle probable à partir d'un tableau actuariel, nous avons utilisé la fonction "axn" qui permet directement d'afficher le résultat.

Le résultat obtenu pour la valeur actuelle probable pour une cohorte des assurés ayant un contrat en 2015 à l'âge de 40 ans égale à **0.0001466153**

4.4 Calcul de la Valeur Actuelle Probable en utilisant pour mortalité de référence les taux de 2016

Pour calculer la VAP, plusieurs étapes ont été réalisées. Nous avons affiché tout d'abord la table de mortalité qui nous permet de visualiser la probabilité annuel de décès d'un individu et la table actuarielle. Ensuite nous avons calculé la durée de vie attendu afin d'obtenir la valeur actuelle probable.

	0	1	2	3	4	5
0	0.0539840970	0.0099610556	0.0029071822	0.0012548364	0.0008698185	0.0008021511
	6	7	8	9	10	11
1	0.0007037886	0.0005570919	0.0005041833	0.0005112063	0.0004505619	0.0004972024
	12	13	14	15	16	17
2	0.0005119887	0.0004813376	0.0006117721	0.0006704996	0.0008280854	0.0009687154
	18	19	20	21	22	23
3	0.0011234419	0.0010866741	0.0011110154	0.0011036388	0.0011381987	0.0010354054
	24	25	26	27	28	29
4	0.0010715648	0.0010419870	0.0010033881	0.0009757521	0.0009662738	0.0010180005

FIGURE 4.5 – La table de mortalité en probabilité de décès 2016

	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	0	10000.0000	10000.00000	441936.88416	517.884267	3468.91304	220204.20463
2	1	9474.3475	9334.33248	431936.88416	91.151735	2951.02877	216735.29159
3	2	9380.4407	9105.23495	422602.55168	26.041533	2859.87704	213784.26281
4	3	9353.2096	8944.63329	413497.31673	11.051245	2833.83551	210924.38577
5	4	9341.4802	8801.39535	404552.68344	7.539200	2822.78426	208090.55026
6	5	9333.3584	8663.78626	395751.28810	6.844217	2815.24506	205267.76600
7	6	9325.8746	8528.90580	387087.50183	5.911759	2808.40084	202452.52094
8	7	9319.3135	8396.95110	378558.59603	4.607459	2802.48909	199644.12010
9	8	9314.1232	8268.25076	370161.64494	4.106072	2797.88163	196841.63101
10	9	9309.4283	8141.95379	361893.39417	4.099660	2793.77555	194043.74939
11	10	9304.6705	8017.52969	353751.44038	3.558207	2789.67589	191249.97383
12	11	9300.4791	7895.48583	345733.91069	3.866679	2786.11769	188460.29794
13	12	9295.8561	7774.93709	337838.42486	3.920848	2782.25101	185674.18025
14	13	9291.0979	7656.11569	330063.48777	3.629842	2778.33016	182891.92924
15	14	9286.6268	7539.34129	322407.37208	4.542806	2774.70032	180113.59908
16	15	9280.9473	7423.37964	314868.03079	4.902173	2770.13751	177338.89876
17	16	9274.7265	7308.77235	307444.65115	5.960377	2765.25534	174568.74125
18	17	9267.0494	7194.80056	300135.87879	6.863389	2759.29496	171803.48591
19	18	9258.0766	7081.61007	292941.07823	7.833804	2752.43157	169044.19094
20	19	9247.6815	6969.12193	285859.46816	7.457194	2744.59777	166291.75937
21	20	9237.6378	6858.67279	278890.34623	7.503310	2737.14058	163547.16160
22	21	9227.3803	6749.80978	272031.67345	7.335216	2729.63727	160810.02102
23	22	9217.2022	6642.72368	265281.86367	7.444767	2722.30205	158080.38376
24	23	9206.7172	6537.11058	258639.13999	6.665081	2714.85728	155358.08171
25	24	9197.1894	6433.83796	252102.02940	6.788751	2708.19220	152643.22443
26	25	9187.3393	6331.96786	245668.19145	6.496938	2701.40345	149935.03222
27	26	9177.7712	6231.89504	239336.22359	6.157511	2694.90651	147233.62877

FIGURE 4.6 – La table actuarielle 2016

Le résultat obtenu pour la valeur actuelle probable en utilisant pour mortalité de référence les taux de 2016 pour une cohorte des assurés ayant un contrat en 2015 à l'âge de 40 ans égale à **0.0001248352**

4.5 Extrapolation des taux de mortalité par la méthode de Coale et Kisker

Choix de la plage d'âge : Fermeture de tables

Avant d'utiliser des modèles d'ajustement, il convient de "fermer" les tables, les taux bruts au delà de 90 ans étant inexploitable. Différentes méthodes existent sur ce point et nous retiendrons ici la méthode de Coale et Kisker (COALE et KISKER [1990])[14] qui conduit à des résultats satisfaisants. Cette méthode consiste à extrapoler les taux instantanés de mortalité aux grands âges (jusqu'à $x = 110$ ans par exemple) en se basant sur la formule

$$g_x = \ln\left(\frac{\hat{\mu}_x}{\hat{\mu}_{65}}\right)/(x - 65), x \geq 65$$

Coale et Kisker ont en effet remarqué empiriquement que les courbes des g_x possèdent en général un pic aux alentours de 80 ans avant de décroître linéairement. Ils ont par conséquent proposé l'équation :

$$g_x = g_{80} + s(x - 80), x \geq 80$$

Avec :

s le taux de croissance du taux à partir de 80 ans

$$s = -\frac{\ln(\hat{\mu}_{79} + 31g_{80})}{465}$$

et g_{80} représente l'étendue entre le log taux de mortalité à l'âge 65 ans et celui à 80 ans

$$g_{80} = \frac{\ln(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}})}{15}$$

A partir de la méthode de Coale et Kisker, nous pouvons affirmer que l'intervalle d'âge va être [80,110]. Puisque avec la fonction $g(x)$ nous avons la contrainte que l'âge doit être au delà de 80 ans.

Alors pour ce stade là, nous avons choisi comme âge maximum une valeur qui appartient à l'intervalle [80,110].

4.6 Estimation des paramètres du Lee Carter

4.6.1 Estimation par le modèle `lca()`

Pour s'adapter au modèle Lee-Carter (sans passer par les logarithmes), la fonction `lca()` (Latent Class Analysis) peut être utilisée. `LeeCarter` est ici appliqué séparément entre la population masculine, féminine et totale et en considérant un âge maximum appartient à [80,110]. Cette hypothèse sera utilisée pour la calibration dans le modèle de mortalité qui sera présenté dans les sections suivantes.

`lca` est un modèle de mesure dans lequel les individus peuvent être classés en types mutuellement exclusifs et exhaustifs, ou classes latentes, en fonction de leur modèle de réponses sur un ensemble de variables indicatrices catégorielles.

— `lca()` retourne un objet qui nous permet d'inspecter a_x , b_x et k_t . Les chiffres représentent les valeurs des paramètres estimés.

La Figure 4.7 représente cette estimation à partir des données masculines et féminines italiennes.

Un comportement similaire des paramètres est observé selon différents ensembles de données.

Comme prévu la mortalité moyenne augmente lorsque l'âge augmente (voir schéma \hat{a}_x).

En outre, il est clairement visible la jeune bosse de mortalité pour les hommes dans la tranche d'âge (20,30) en raison de décès accidentels.

Le coefficient estimé \hat{b}_x montre plutôt une valeur plus élevée pour les jeunes âges et une plus grande amélioration pour la tranche d'âge (60-80).

Enfin, comme prévu, \hat{k}_x a une tendance à la baisse avec l'augmentation de temps.

4.6.2 Estimation en utilisant le package `StMoMo`

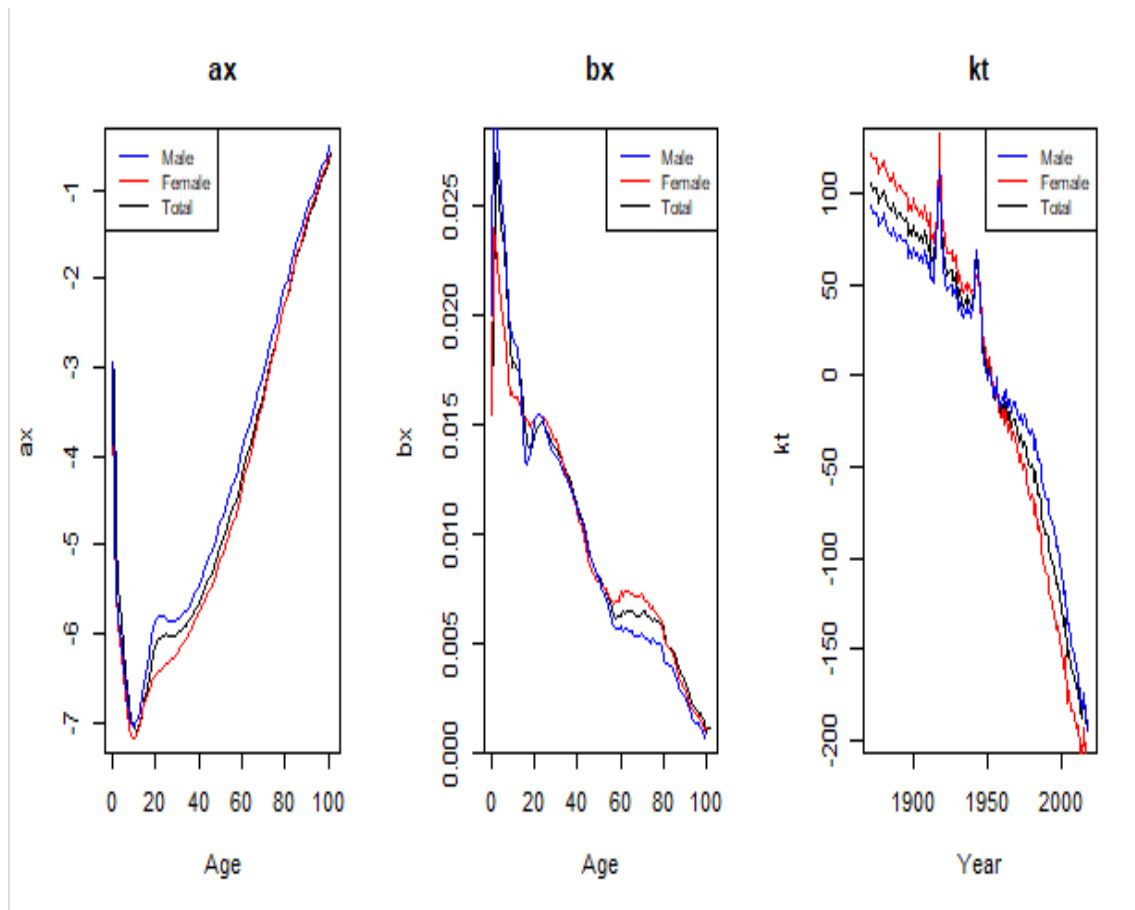
Package `StMoMo`

`StMoMo` (Stochastic Mortality Modeling) est un package R fournissant des fonctions pour spécifier et ajuster les modèles de mortalité stochastique, y compris les modèles Lee-Carter, le modèle CBD, le modèle APC et de nombreux autres modèles. L'ensemble comprend également des outils pour analyser la qualité de l'ajustement des modèles et effectuer des projections et des simulations de mortalité.[15]

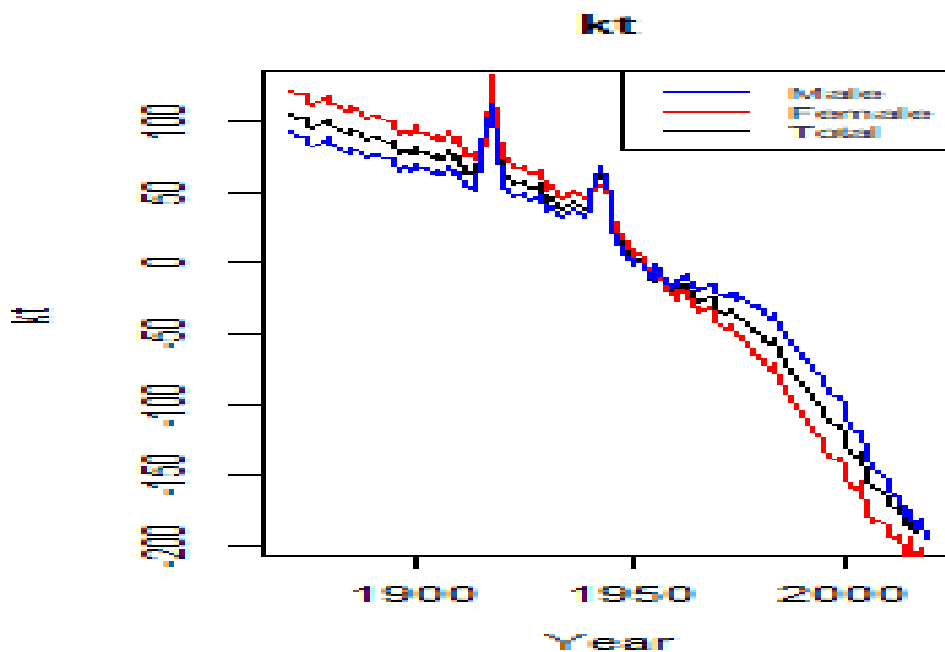
Choix de la période choisie

D'après la première méthode d'estimation des coefficients du modèle Lee Carter (avec la fonction prédéfinie `lca()`), nous avons provoqué qu'il faut restituer l'intervalle des années 1872-2017.

Dans la figure 4.8, la courbe montre que la valeur de k_t est presque stable, autour du valeur 100 de l'année 1872 jusqu'à 1900, avant de marquer une forte décroissance. Ainsi, cette courbe présente deux grands pics de

FIGURE 4.7 – Les valeurs estimées des a_x , b_x et k_t du modèle

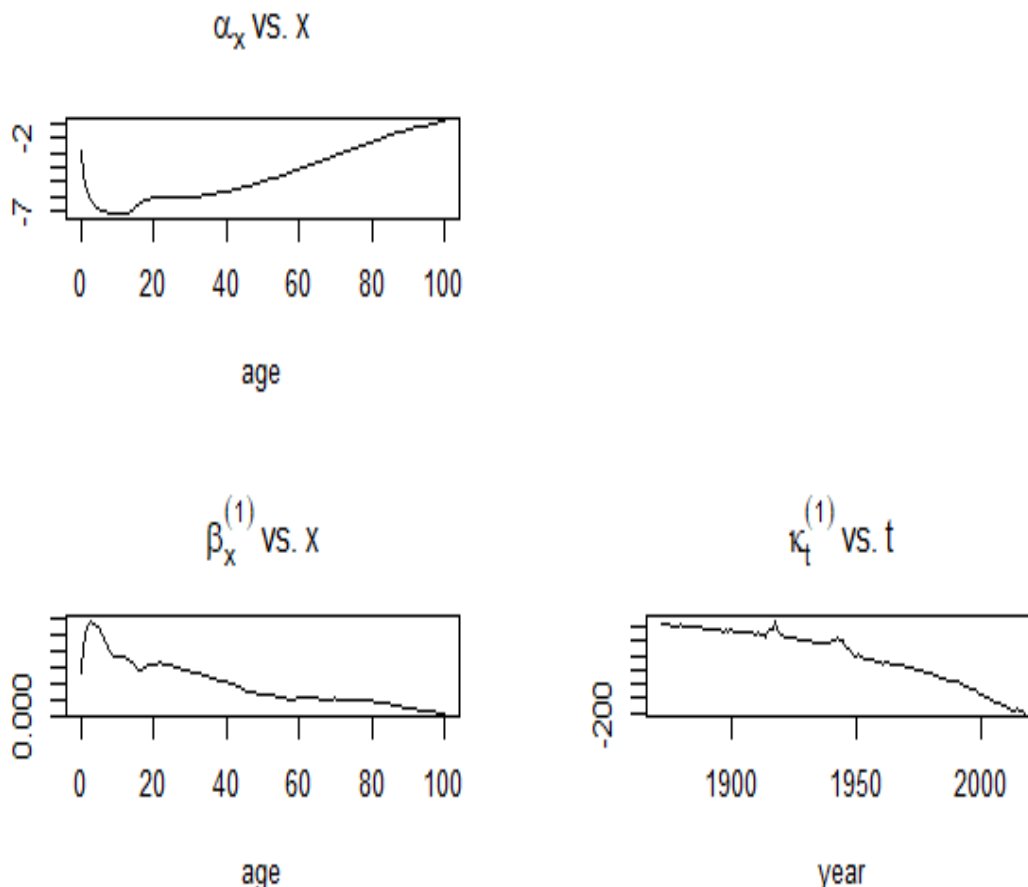
valeur de k_t qui expliquent que l'Italie a participé dans les deux guerres mondiales respectivement en 1914 et 1939. Alors, nous avons avoué une différence sur les années les plus récentes mais aucune sur les années les plus anciennes. Comme nous souhaitons projeter, nous allons restreindre notre étude aux années 1900 - 2017 pour la calibration de modèle de mortalité

FIGURE 4.8 – Les valeurs estimées de k_t du modèle avec `lca()`

Application de la méthode

On va estimer différemment les coefficients du modèle Lee Carter avec le package StMoMo en appliquant les étapes suivantes :

- Charger les données annuelles disponibles par années d'âge dans la base HMD.
- Appliquer une fonction qui va créer un objet StMoMoData adapté à l'ajustement d'un modèle de mortalité stochastique.
- Une transformation des données StMoMo des expositions centrales en expositions initiales sera appliquée. Les expositions initiales sont calculées en ajoutant la moitié des décès aux expositions centrales en utilisant la fonction **central2initial()**.
- Assumer à avoir un seuil d'âge égale à 100 ans.
- Générer une matrice de poids en fonction d'un groupe d'âge et d'années et d'un ensemble de cohortes étant donné un poids nul. Ceci est utile pour exclure certains points de données lors de l'ajustement d'une mortalité stochastique par la fonction **genWeightMat()**. Cette dernière comporte un argument à calibrer qui est *clip* qui est le nombre de cohortes dans la limite pour attribuer un poids nul. Cela peut être utilisé pour peser zéro certaines des premières et dernières cohortes dans les données. Dans l'exemple italien, nous avons pris la valeur de clip égale à 3.
- Estimer le modèle LC(Lee-Carter) avec le paramètre link qui définit la fonction de liaison et la composante aléatoire associées au modèle de mortalité. Nous avons opté pour "log" qui supposerait que les décès suivent une distribution de Poisson et utilisent un lien logarithmique tandis que "logit" supposerait que les décès suivent une distribution binomiale.

FIGURE 4.9 – Les valeurs estimées des a_x , b_x et k_t du modèle avec le package StMoMo

La figure 4.9 ci-dessus montre les ajustements LC.

Étape 1 : Estimation du coefficient \hat{a}_x

La courbe, relativement élevée chez les nouveaux-nés et décroît rapidement avec l'âge pour atteindre son minimum absolu vers l'âge de 10 ans. On survient d'ailleurs un pic de mortalité discrètement appelé "bosse-accident". Cette bosse, qui touche les jeunes d'une vingtaine d'années, est en fait essentiellement composée de deux sortes d'événements, suicides et accidents. Ensuite, les logarithmes moyens des taux instantanés de mortalité augmentent pratiquement linéairement avec l'âge.

Étape 2 : Estimation du coefficient \hat{b}_x

Les paramètres \hat{b}_x représentent l'interaction de l'effet des années calendaires sur les taux de mortalité. Cet effet est toujours positif mais la valeur ne cesse de diminuer avec l'âge. Autrement dit, l'effet des années calendaires agit majoritairement avant 60 ans et de moins en moins au delà. On constate une bosse à 22 ans. Au contraire, vers les âges élevés, \hat{b}_x avoisine zéro et la chute temporelle de la mortalité est donc beaucoup moins sensible.

Étape 3 : Estimation du coefficient \hat{k}_x

Enfin, comme prévu, \hat{k}_x a une tendance à la baisse avec l'aide de temps

4.7 Projection du taux de mortalité

4.7.1 Le Package Forecast

Le package contient des méthodes et des outils pour afficher et analyser des prévisions de séries temporelles univariées, y compris le lissage exponentiel via des modèles d'espace d'état et la modélisation automatique ARIMA. [16]

4.7.2 Mise en oeuvre avec la méthode forecast

Il s'agit d'une fonction générique de prévision à partir de séries temporelles ou de modèles de séries temporelles.

Choix du nombre d'année

Pour soumettre le forecast, La valeur horizon est mise à 50 ans.

```
Stochastic Mortality Model forecast  
Call: forecast.fitstMomo(object = LCfit, h = horizon)  
  
Poisson model with predictor:  $\log m[x,t] = a[x] + b1[x] k1[t]$   
  
kt model: mrwd  
Jump-off method: fit  
Data: Italy  
Series: total  
Years in forecast: 2019 - 2068  
Ages in forecast: 0 - 100
```

FIGURE 4.10 – Détails forecast

Application de la prévision

Forecast utilise des informations sur les fluctuations de la vitesse du changement dans le passé pour estimer l'intervalle de confiance pour l'incertitude qui enveloppe le taux de mortalité dans l'avenir.

Les valeurs prévues de k_t remises à zéro au cours de la dernière année observée (2017) sont rapportées ici.

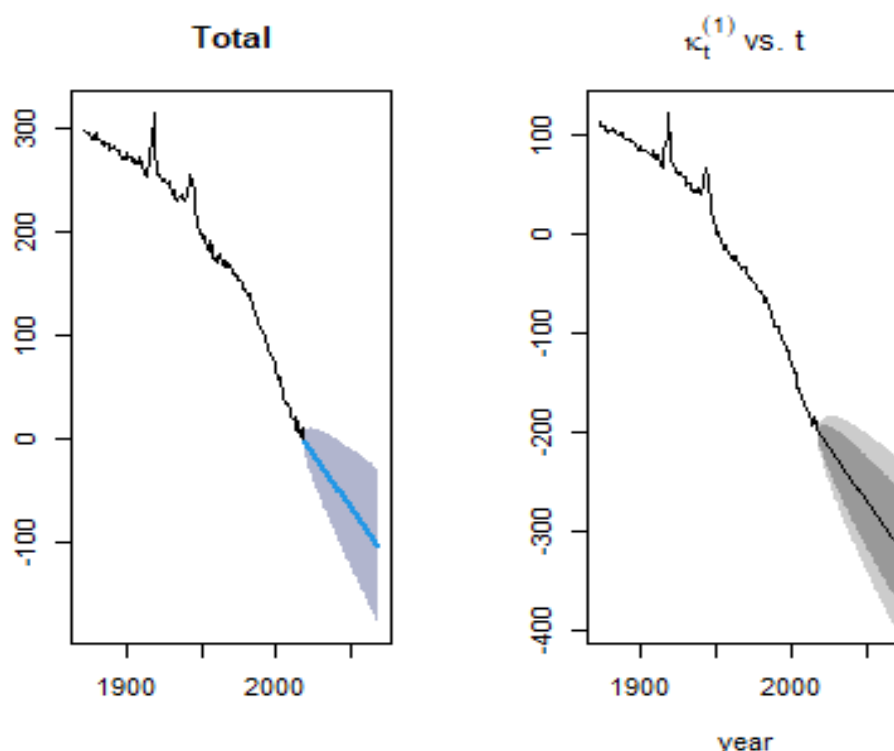


FIGURE 4.11 – Projection du taux de mortalité pour les 50 prochaines années

La Figure 4.11, nous trouvons les intervalles de confiance à 95% et les comparons avec les estimations du modèle classique de Lee et Carter. Remarquons que les taux de mortalité en 2050 générées par le modèle de Lee et Carter se situent dans cet intervalle. Ceci prouve qu'il n'existe pas une différence significative entre l'ajustement du modèle, du moins pour les données italiennes.

4.8 Recalcul de la valeur actuelle probable en utilisant les taux projetés

Pour recalculer la VAP, plusieurs étapes ont été réalisées. Nous avons projeté les taux de mortalité à l'aide de la fonction forecast puis on les a utilisés afin d'obtenir la valeur actuelle probable.

Le résultat obtenu pour la valeur actuelle probable en utilisant les taux de mortalité projetés égale à **0.5373275** qui est largement supérieur à la valeur actuelle probable qu'on a calculé à partir d'une table de mortalité donnée.

4.9 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons mis en évidence l'influence du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère sur les données italiennes. Nous avons défini les différentes étapes faites pour atteindre cet objectif. D'abord, nous avons estimé et projeté le taux de mortalité de la population italienne à l'aide du modèle Lee Carter, ensuite, nous avons calculé la valeur actuelle probable d'une rente viagère à terme anticipé et temporaire d'une durée de 15 ans, et pour finir nous avons étudié la variation du taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable et la variation du taux de mortalité sur la valeur du taux d'intérêt.

Conclusion Générale

L'objectif de ce projet est d'estimer l'impact des taux d'intérêt sur la valeur actuelle probable d'une rente viagère. Pour ce faire, nous avons procédé à une estimation du taux de mortalité de la population Italienne sur une période s'étalant de 145 ans (1872-2017).

Statistiquement, le taux de mortalité a connu une baisse sur la période d'analyse. Nous soulignons toutefois deux pics correspondants aux deux guerres mondiales (1914-1918 et 1941-1946).

La test d'un modèle stochastique (modèle de Lee-Carter) a permis de quantifier la longévité en deux étapes :

- une première étape consistant à l'estimation des paramètres de ce modèle selon deux modalités différentes : le modèle lca et le package StMoMo. Les résultats de ces estimations ont permis de conclure que la mortalité moyenne augmente avec l'âge avec une nette différence selon le genre pour la tranche d'âge 20-30 qui semble correspondre à des décès qualifiés d'accidentels pour les hommes.
- Dans une seconde étape, nous avons procédé à une projection des taux de mortalité sur une période de 50 ans. Cette projection a permis de conclure que les taux de mortalités générés par le modèle de Lee-Carter restent significatifs à 95%.

Par ailleurs, pour répondre à la question posée nous avons procédé au calcul de la valeur actuelle probable pour la cohorte 1943 et ce :

- Pour une rente viagère à terme anticipée estimée à 11.21
- Pour une rente viagère temporaire d'une durée de 15 ans estimée à 0.63

De plus, l'estimation de la variation de la valeur actuelle probable en fonction des taux d'intérêt a permis de conclure l'existence d'une relation inverse entre ces dernières : La valeur actuelle probable aura tendance à baisser quand le taux d'intérêt augmente.

Enfin, l'étude de la variation du taux d'intérêt en fonction de taux de mortalité montre que ce dernier baisse quand le taux d'intérêt augmente.

Il est ainsi possible d'infirmar que pour la gestion des contrats d'assurance vie, la sous estimation des taux de mortalité engendrera une réduction des prestations en valeur actuelle probable et donc taux d'intérêt plus important.

Bibliographie

- [1] Charpentier, A. Dutang, C. (2012). *Actuariat Avec R*. https://cran.r-project.org/doc/contrib/Charpentier_Dutang_actuariat_avec_R.pdf
- [2] Dagnelie, P. (2007), *Statistique théorique et appliquée* De Boeck Université. 21
- [3] Dalgaard, P. (2008), *Introductory Statistics with R* Springer. 21
- [4] Hogg, R. V., Craig, A. T. & McKean, J. W. (2005), *Introduction to Mathematical Statistics*, 6edn, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 21
- [5] Saporta, G. (2006), *Probabilités, analyse de données et statistique* Technip. 21, 29
- [6] VU Tuan Anh, *Modèle Lee Carter*. <https://www.institutdesactuaire.com/>
- [7] *Méthode des moindres carrés*. Consultée sur <http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/M%C3%A9thode%20des%20moindres%20carr%C3%A9s/fr-fr/>
- [8] Antoine Delwarde (2003-2004). *Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives*. <https://www.scor.com/fr>
- [9] Jakubowicz, L. (2019), *Valeur actuelle : définition, calcul, traduction*. La rédaction JDN, consultée sur <https://www.journaldunet.fr/business/dictionnaire-economique-et-financier/1198837-valeur-actuelle-definition-calcul-traduction/>
- [10] La Finance Pour Tous, (2019). *La rente viagère*. Consulté sur <https://www.lafinancepourtous.com/pratique/retraite/epargne-retraite/la-rente-viagere/>
- [11] Maatoussi, Anis, (2019-2020). *Cours actuariat vie 2019-2020*.
- [12] Dico Du Net, *Rente temporaire*. Consulté sur <http://www.dicodunet.com/definitions/economie/rente-temporaire.htm>
- [13] Felicitie C. Bell et Michael L. Miller. *Life Tables for the United States Social Security Area 1900-2100*. Consulté sur https://www.ssa.gov/oact/NOTES/as116/as116_IV.html
- [14] UTILISATION DES METHODES DE LEE-CARTER ET LOGPOISSON POUR L'AJUSTEMENT DE TABLES DE MORTALITE DANS LE CAS DE PETITS ECHANTILLONS, *Méthode de Coale et Kisker*. Consultée sur <http://www.ressources-actuarielles.net/>
- [15] Villegas, A., Kaishev, V. K., & Millossovich, P. (2015). *StMoMo : An R package for stochastic mortality modelling*. In 7th Australasian Actuarial Education and Research Symposium. <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf>
- [16] Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G., Bergmeir, C., Caceres, G., Chhay, L., O'Hara-Wild, M., ... Wang, E. (2020). *Forecasting Functions for Time Series and Linear Models*. <https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf>.