فصل هفتم

احتمال

مقدمه

تقریباً همهٔ مردم با مفهوم احتمال هر چند که توأم با بی‌دقتی است، آشنایی دارند. عباراتی از قبیل «احتمالاً امروز باران می‌بارد»، «مردی که ۲۰ سال سن دارد، به احتمال زیاد ۳۰ سال دیگر عمر می‌کند»، نمونه‌هایی از مواردی هستند که نشان می‌دهد چگونه مفهوم احتمال در زندگی روزمره ما ظاهر می‌شود. یکی از اهداف نظریهٔ احتمالات این است که به این نوع عبارات دقت ریاضی بخشد. این کار با معرفی عددی موسوم به احتمال یک پیشامد، صورت می‌پذیرد.

موضوع اساسی در نظریهٔ احتمال، مطالعهٔ در مورد شانس و تصادف است. برای شانس و تصادف، تعریف جامع و مانع در اختیار نیست و نظرات دربارهٔ آن متفاوت است. حتی برخی از فلاسفه آن را موهوم و غیرواقعی می‌دانند. با این همه ما در زندگی روزمره خود از آن متاثر می‌شویم و از آن صحبت می‌کنیم. ریاضیدانان سعی کرده‌اند این پدیدهٔ مبهم را از نظر ریاضی، مدل‌بندی کنند. در این فصل، مقدمات این مدل بندی را می‌آموزیم.

انواع آزمایش

اگر آزمایشی را تحت شرایط یکسان چندین بار انجام دهیم، نتیجه آزمایش را می‌توان به دو دستهٔ زیر تقسیم کرد:

دستهٔ اول، آزمایش نتیجهٔ قطعی دارد. یعنی هر چند باری که آزمایش را تکرار کنیم، فقط یک نتیجه به دست می‌آید.

دستهٔ دوم، نتیجهٔ آزمایش معلوم نیست و ممکن است با هر بار تکرار نتیجهٔ آن عوض شود، اما به هر حال تعداد نتایج محدود است.

به آزمایش‌های نوع اول که نتیجهٔ آنها را از قبل می‌توان پیش‌بینی کرد، آزمایش‌های قطعی یا قابل پیش‌بینی می‌گویند. به عنوان مثال، وقتی سنگی را به هوا پرتاب کنیم به یقین به زمین باز می‌گردد. بنابراین آزمایش پرتاب یک سنگ، آزمایشی است که نتیجهٔ آن از قبل معلوم است. بسیاری از پدیده‌هایی که در علومی مانند فیزیک یا شیمی مطرح هستند، ماهیت قابل پیش‌بینی دارند. اما پدیده‌هایی نیز وجود دارد که از نوع دوم هستند، یعنی به هیچ وجه نمی‌توان نتیجهٔ آنها را پیش‌بینی کرد، آنها را پدیده‌های غیر قابل پیش‌بینی می‌گویند. این نوع پدیده‌ها را بیشتر در اقتصاد، مدیریت و علوم اجتماعی و یا در زندگی روزمره

می‌توان یافت. برای مثال، در مورد تولد یک نوزاد، جنس بچه را نمی‌توان از قبل پیش‌بینی کرد و یا یک تولید کننده نمی‌تواند پیش‌بینی کند که چقدر از محصولات خود را می‌تواند به فروش برساند؟

آزمایش تصادفی

آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان پیش‌بینی کرد، ولی مجموعهٔ نتایج آن قابل پیش‌بینی است.

مثال (۱- ۷) - یک دستگاه برقی خریداری می‌شود. معلوم نیست که این دستگاه در مدت زمانی که ضمانت شده است، به تعمیر احتیاج پیدا می‌کند یا خیر؛ ولی در هر حال وضع این دستگاه از دو حالت خارج نیست.

مثال (۲-۷) - هر کدام از موارد زیر یک آزمایش تصادفی است.

الف) پرتاب یک سکه؛

ب) پرتاب یک تاس؛

ج) پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهدهٔ یک شیر؛

د) اندازه‌گیری درجه حرارت بدن یک بیمار در یک شبانه روز؛

هـ) اندازه‌گیری طول عمر یک لامپ؛

در هر یک از آزمایش‌های مثال (۲- ۷) نتیجهٔ آزمایش از قبل قابل تعیین نیست ولی کلیهٔ نتایج آزمایش قابل تعیین می‌باشند. مثلاً در پرتاب تاس یکی از اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ یا ۶ ظاهر می‌شود ولی قبل از آزمایش نمی‌توان گفت کدام عدد رخ می‌دهد.

(۲) تاس ← $۶^۲$

پرتاب ۳ سکه $۲^۳$

x^n حالت ممکن ← n تکرار

فضای نمونه

مجموعهٔ تمام نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند و آن را با نماد "S" نمایش می‌دهند.

مثال (۳-۷) - در مثال (۲-۷) فضای نمونهٔ آزمایش‌های تصادفی عبارت‌اند از :

الف) در پرتاب یک سکه داریم $S=\{H,T\}$ که در آن H نمایانگر رخداد « شیر » و T نمایانگر رخداد « خط » است، و در پرتاب دو سکه داریم : $S=\{HH,TH,HT,TT\}$

ب) در پرتاب تاس داریم: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

همینطور فضای نمونهٔ حاصل از پرتاب دو تاس عبارت است از:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۶,۶)\}=\{(x,y)\mid x,y=۱,۲,\dots,۶\}$$

ج) فضای نمونهٔ حاصل از پرتاب یک سکه تا مشاهدهٔ یک شیر عبارت است از:

$$S=\{H,TH,TTH,TTTH,\dots\}$$

د) اگر درجه حرارت بدن یک بیمار در شبانه روز را اندازه‌گیری کنیم آنگاه فضای نمونه عبارت است از $S=[۳۵,۴۲]$ که یک فاصلهٔ بسته است.

هـ) اگر طول عمر لامپ تولیدی یک کارخانه که حداکثر ۱۰۰۰ ساعت طول عمر دارد را اندازه‌گیری کنیم آنگاه فضای نمونه، فاصلهٔ $S=[۰,۱۰۰۰]$ است.

مثال (۴-۷) - از خط تولید یک کارخانه ۳ محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. این محصولات ممکن است خراب یا سالم باشند.

الف) اگر خراب بودن محصول را با D و سالم بودن آن را با N نمایش دهیم، آنگاه فضای نمونهٔ مورد نظر عبارت است از:

$S_1 = \{ NNN , NND , NDN , DNN , DDN , DND , NDD , DDD \}$

ب) اگر به تعداد قطعات خراب در بین ۳ قطعهٔ انتخابی توجه کنیم آنگاه فضای نمونه عبارت است از :

$S = \{0, 1, 2, 3\}$

با توجه به مثال‌های بالا می‌توان فضای نمونه را به دو گروه تقسیم نمود:

۱) فضای نمونهٔ گسسته

P(A) ∪ P(B) P(A∩B)

فضای نمونهٔ گسسته شامل دو حالت زیر است :

۱ - ۱) فضای نمونهٔ متناهی

در این حالت تعداد اعضای فضای نمونه متناهی است. مانند فضای نمونه پرتاب یک سکه ، و یا پرتاب یک تاس.

۱ - ۲) فضای نمونهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر

در این حالت فضای نمونه یک مجموعهٔ نامتناهی اما شمارش‌پذیر است. مانند پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهدهٔ یک شیر.

۲) فضای نمونهٔ پیوسته

فضایِ نمونهٔ پیوسته که اعضای آن به صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی یا . . . است. مانند اندازهٔ درجه حرارت بدن یک بیمار در یک شبانه روز، و یا اندازهٔ طول عمر یک لامپ.

پیشامد

در یک فضای نمونه متناهی، هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامند. پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد به پیشامد ساده موسوم است، و پیشامدی با تعداد اعضای بیشتر از یک عضو را پیشامد مرکب گویند. اگر پیشامدی دارای هیچ عضو نباشد آن را پیشامد محال یا تهی می‌نامند، و پیشامدی که برابر فضای نمونهٔ S باشد به پیشامد حتمی موسوم است.

مثال (۵-۷) - فرض کنید در یک بیمارستان در ۱۲ ساعت ۳ کودک به دنیا آمده باشند. فضای نمونهٔ مربوط به جنسیت این ۳ کودک به صورت زیر است («د» برای دختر و «پ» برای پسر):

S = { پ پ پ ، پ پ د ، پ د پ ، د پ پ ، د د پ ، د پ د ، پ د د ، د د د }

در این مثال، {پ پ پ ، د د د} = A یک پیشامد، و {د پ د} = B پیشامد دیگری است.

وقوع یک پیشامد

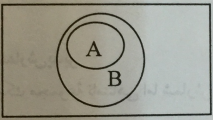
گوئیم پیشامد A رخ داده است هرگاه نتیجه آزمایش تصادفی منجر به مشاهدهٔ عضوی از پیشامد A گردد. برای مثال، در مثال (۵-۷) اگر هر سه فرزند متولد شده پسر باشد آنگاه گوئیم پیشامد A به وقوع پیوسته و پیشامد B رخ نداده است.

اعمال روی پیشامدها

چون پیشامدها زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه هستند پس می‌توان همانند مجموعه‌ها اعمال جبری روی آنها انجام داد. در این حالت فضای نمونه مجموعهٔ مرجع می‌باشد و توسط نمودار ون می‌توان پیشامدها و فضای نمونه را به صورت شکل (۱-۷) نمایش داد. بعضی از اعمال روی پیشامدها عبارتند از :

الف) زیر پیشامد

پیشامد A را زیر پیشامد، پیشامد B گویند هرگاه وقوع A، وقوع B را نتیجه دهد و آن را با نماد $A \subset B$ نشان می‌دهند (شکل (۱-۷)).



شکل (۱-۷) - $A \subset B$

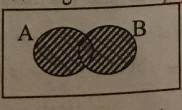
ب) دو پیشامد مساوی

دو پیشامد A و B را مساوی گویند هرگاه وقوع یکی وقوع دیگری را نتیجه دهد؛ یعنی :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A)$$

ج) اجتماع دو پیشامد

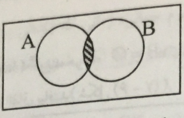
پیشامد $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ را اجتماع دو پیشامد A و B گویند. وقوع $A \cup B$ به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B است (شکل (۲-۷)).



شکل (۲-۷) - $A \cup B$

د) اشتراک دو پیشامد

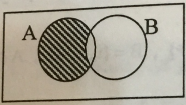
پیشامد $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ را اشتراک دو پیشامد A و B گویند. وقوع $A \cap B$ به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد A و B است (شکل (۳-۷)).



شکل (۷-۳) - $A \cap B$

د) تفاضل دو پیشامد

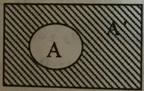
پیشامد $A-B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ را تفاضل دو پیشامد B از A گویند. وقوع $A-B$ به معنای وقوع «فقط پیشامد A و نه پیشامد B» است (شکل (۷-۴)).



شکل (۷-۴) - $A-B$

هـ) متمم یک پیشامد

پیشامد $A'=\{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$ را متمم پیشامد A گویند. وقوع A' به معنای عدم وقوع پیشامد A است (شکل (۷-۵)).



شکل (۷-۵) - A'

اشتراک و اجتماع بیش از دو پیشامد نیز به نحو مشابهی تعریف می گردد. اجتماع پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... و A_m شامل اعضایی است که حداقل به یکی از A_i ها متعلق باشد؛ یعنی:

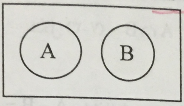
$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$$

اشتراک آنها نیز شامل اعضایی است که در همهٔ پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... و A_m باشند؛ یعنی:

$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$$

دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار (جدا) گویند هرگاه $A \cap B = \varnothing$؛ یعنی دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند هرگاه هر دو نتوانند همزمان اتفاق بیافتند(شکل (۶ - ۷)).



شکل (۶ - ۷)

مثال (۶ - ۷) - در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد مشاهدهٔ عدد زوج و B پیشامد مشاهدهٔ عدد فرد باشد، آنگاه:

$$A = \{۲, ۴, ۶\} \ , \ B = \{۱, ۳, ۵\} \ , \ A \cap B = \varnothing$$

بنابراین A و B ناسازگار هستند.

مفهوم احتمال[1]

پیشامدها از لحاظ امکان وقوع با یکدیگر تفاوت دارند؛ به عنوان مثال، اگر در یک کیسه ۹۹ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه باشد و پیشامد بیرون آمدن مهرهٔ سفید را با A و پیشامد بیرون آمدن مهرهٔ سیاه را با B نشان دهیم، بیرون آمدن مهرهٔ سفید یا مهرهٔ سیاه یک پیشامد تصادفی است ولی امکان وقوع A بیشتر از B است. اگر بتوانیم عددی برای امکان وقوع پیشامد در نظر بگیریم بطوری که این عدد بتواند هنگامی که امکان وقوع پیشامد زیاد است عددی بزرگ، و وقتی امکان وقوع پیشامد کم است عددی کوچک باشد، این عدد را احتمال پیشامد گوئیم، و آن را با P نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، برای وقوع پیشامد A، آن را با P(A) نشان می‌دهیم. به طور خلاصه، « احتمال یعنی اندازهٔ امکان وقوع پیشامد».

پیشامدهای هم‌شانس

یکی از مفاهیم اولیه در نظریهٔ احتمال، مفهوم « حالت‌های متساوی الاحتمال » یا « پیشامدهای هم‌شانس » است. کلمهٔ « هم‌شانس » مفهوم « هم احتمال بودن » را می‌رساند، و این مفهوم اساساً یک مفهوم شهودی است. برای مثال اگر تاسی را بریزیم، اغلب مردم تصور می‌کنند که وقتی تاس متوقف می‌شود، هر وجهی می‌تواند به اندازهٔ وجوه دیگر در بالا قرار گیرد؛ یعنی ۶ وجه تاس هم‌شانس هستند. در نتیجه، پرتاب یک تاس برای ما شش پیشامد هم‌شانس به ارمغان می‌آورد. عاملی که سبب می‌شود ما احساس کنیم در پرتاب یک تاس، همه وجوه هم‌شانسند، متقارن و همگن بودن تاس است. تجربه با سکه‌های معمولی نشان می‌دهد که آمدن شیر یا خط تقریباً یکسان است. در نتیجه همهٔ ما به طور منطقی هم‌شانس بودن را قبول می‌کنیم. تجربه‌های علمی فیزیکی نیز این ایدهٔ هم‌شانس بودن را تقویت می‌کند.

1 - Probability

جی. ای. کریچ [1] در خلال جنگ دوم جهانی، زمانی که زندانی بود، سکهٔ مخصوصی ساخت و این سکه را ۱۰۰۰ بار پرتاب کرد، و اینکار را ۱۰ مرتبه تکرار نمود، تعداد شیرهایی که در هر مرتبه به دست آورد به صورت زیر است:

۵۲۹ ، ۵۰۴ ، ۵۲۸ ، ۵۰۷ ، ۴۷۶ ، ۵۰۴ ، ۵۲۹ ، ۴۹۷ ، ۵۱۱ ، ۵۰۲

ملاحظه می‌کنید که این اعداد همه نزدیک به ۵۰۰ می‌باشند، گر چه هیچکدام دقیقاً مساوی ۵۰۰ نیستند.

به طور کلی، اگر نوعی تقارن در آزمایش وجود داشته باشد به طوری که مطمئن باشیم وقوع یک نتیجه همان قدر امکان دارد که وقوع یک نتیجهٔ دیگر، می گوییم اعضای فضای نمونه «متساوی الاحتمال» یا «هم‌شانس» هستند.

احتمال کلاسیک

اگر در گروه کامل پیشامدهای ناسازگار، پیشامدها هم شانس باشند، در این صورت احتمال پیشامدی مانند A را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و عبارت است از:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

حالات ممکن، تعداد پیشامدهای گروه کامل حوادث یا فضای نمونه و حالات مساعد تعداد زیر مجموعه‌ای از آن است.

نکته: در تعریف فوق که احتمال انجام آزمایش محاسبه می‌شود باید سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) وقوع یکی از پیشامدها حتمی باشد.

ب) پیشامدها ناسازگار باشند.

ج) پیشامدها هم‌تراز یا هم‌شانس باشند.

مثال (۷ - ۷) - یک سکهٔ سالم را پرتاب می کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه خط ظاهر شود.

حل: فرض کنید پیشامد A وقوع خط و پیشامد B وقوع شیر باشد، در این صورت $S=\{A,B\}$ [2]، و هر سه شرط فوق برقرار است؛ زیرا در انجام یک آزمایش حتماً یا A رخ می‌دهد و یا B. همچنین وقوع توأم A و B غیرممکن است (ناسازگار)، و بالاخره A و B هم‌شانس هستند؛ بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}$$

مثال (۸ - ۷) - یک تاس سالم را یک بار پرتاب می کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه:

الف) ۵ ظاهر شود؛

ب) عددی زوج ظاهر شود؛

1- J. E. Kerrich

۲ - ... های ناسازگار و هم‌شانس نیز می‌باشد.

حل:

الف) چون $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ (S دارای تمام شرایط ذکر شده می‌باشد)، و اگر $A=\{۵\}$ باشد، داریم:

$$n(S)=۶ \quad \text{و} \quad n(A)=۱$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

ب) اگر پیشامد B وقوع عدد زوج باشد، $B=\{۲,۴,۶\}$ و $n(B)=۳$ ؛ بنابراین:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال (۹ - ۷) - یک سکهٔ سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم(یا دو سکه را یک‌بار با هم پرتاب می‌کنیم) مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه لااقل یک‌بار شیر بیاید.

حل: $S=\{HH,TH,HT,TT\}$، اگر A پیشامد وقوع لااقل یک شیر باشد $A=\{HH,TH,HT\}$، داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

HH HT HT TT

مثال (۱۰ - ۷) - یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه:

الف) مجموع ۱۲ باشد؛ ب) مجموع ۷ باشد؛

حل: ابتدا مجموعه کامل پیشامدهای ناسازگار و هم‌شانس را مشخص می‌کنیم:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\ldots,(۶,۶)\} \quad \text{و} \quad n(S)=۳۶$$

الف) پیشامد A را وقوع مجموع ۱۲ فرض می‌کنیم، $A=\{(۶,۶)\}$ ؛ بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ HA(

ب) اگر B پیشامد مجموع ۷ باشد،

$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

آنگاه:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

احتمال آماری

در بسیاری از آزمایش‌ها پیشامدهای مقدماتی دارای شانس مساوی برای انتخاب شدن نیستند. در این صورت محاسبهٔ احتمال به صورت تعداد عناصر پیشامد مورد نظر به تعداد عناصر فضای نمونه نامناسب است. مثلاً وقتی که تاس ناسالمی را پرتاب می‌کنیم، وجوه مختلف را نمی‌توان هم‌شانس دانست؛ یا مثلاً تعداد ضایعات تولیدی در ابتدا و انتهای نوبت کاری باهم مساوی نیستند. همچنین تعداد تصادفات در

ساعات مختلف روز یکسان نیست. در چنین مواردی اگر بخواهیم احتمال وقوع پیشامدی را تعیین کنیم، باید فراوانی وقوع پیشامد را در صورتی که آزمایش تحت شرایط یکسان مکرراً انجام شده باشد، در نظر بگیریم که در این صورت از فراوانی نسبی کمک گرفته‌ایم. بنابراین فراوانی نسبی پیشامد A در n بار تکرار آزمایش چنین تعریف می‌شود:

$$\text{فراوانی نسبی پیشامد A} = \frac{\text{تعداد دفعاتی که A در n تکرار آزمایش روی می‌دهد}}{n}$$

در صورتی می‌توان از فراوانی نسبی به عنوان مبنای احتمال استفاده کرد که تعداد تکرارهای آزمایش (n) به سمت بی‌نهایت میل کند که به زبان ریاضی چنین تعریف می‌شود:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} (\text{فراوانی نسبی پیشامد A در n تکرار})$$

مثال (۱۱ - ۷) - تاسی که نمی‌دانیم همگن است ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده‌ایم. اطلاعات مربوط به این آزمایش به شرح زیر است:

وجه تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد دفعاتی که هر یک از وجه‌های تاس ظاهر شده‌اند	۱۶۵	۱۶۰	۱۶۴	۱۷۵	۱۶۶	۱۷۰

مطلوب است محاسبهٔ:

الف) احتمال اینکه وجوه فرد ظاهر شده باشد.

ب) احتمال اینکه وجه ۵ یا ۶ ظاهر شده باشد.

حل:

وجه تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد دفعاتی که هر یک از وجه‌های تاس ظاهر شده‌اند	۱۶۵	۱۶۰	۱۶۴	۱۷۵	۱۶۶	۱۷۰
احتمال رخداد هر یک از وجوه	۰/۱۶۵	۰/۱۶۰	۰/۱۶۴	۰/۱۷۵	۰/۱۶۶	۰/۱۷۰

فرض کنید که:

A: پیشامد ظاهر شدن وجوه فرد.

B: پیشامد ظاهر شدن ۵ یا ۶.

الف) $P(A) = ۰/۱۶۵ + ۰/۱۶۴ + ۰/۱۶۶ = ۰/۴۹۵$

ب) $P(B) = ۰/۱۶۶ + ۰/۱۷ = ۰/۳۳۶$

احتمال هندسی

محاسبهٔ احتمال به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ در حالت کلی کافی نیست. اگر فضای نمونه، شمارش ناپذیر باشد، قادر به شمارش تعداد حالات ممکن و مساعد نمی‌باشیم. به عنوان مثال، فرض کنید فضای

نمونه، قسمتی از یک طول یا مساحت و یا حجم باشد و به طور تصادفی نقطه‌ای از آنها انتخاب گردد، آنگاه احتمال پیشامد A ، یعنی تعلق نقطه به A ، عبارت است از :

$$P(A) = \frac{\text{A طول}}{\text{S طول}} \quad \text{،} \quad P(A) = \frac{\text{A مساحت}}{\text{S مساحت}} \quad \text{،} \quad P(A) = \frac{\text{A حجم}}{\text{S حجم}}$$

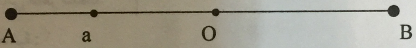
چنین فضای احتمال، یکنواخت نامیده می‌شود.

مثال (۱۲ - ۷) - فرض کنید R ناحیه‌ای در یک صفحه و r ناحیه‌ای درون R باشد. نقطه‌ای درون R انتخاب می‌شود، می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم که این نقطه درون r باشد. اگر A پیشامد واقع شدن نقطه درون ناحیه r باشد، آنگاه :

$$P(A) = \frac{\text{اندازهٔ مساحت ناحیهٔ r}}{\text{اندازهٔ مساحت ناحیهٔ R}}$$

مطلب فوق در مورد خط، حجم و . . . نیز صادق است.

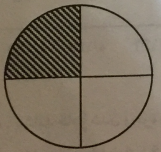
مثال (۱۳ - ۷) - پاره‌خط AB به طول l مفروض است. فرض کنید O وسط پاره خط باشد، نقطهٔ a را به تصادف روی خط انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال اینکه نقطه در فاصلهٔ AO باشد.



حل: طول $AB = l$ و طول $AO = l/۲$ ؛ بنابراین:

$$P(a \in AO) = \frac{\text{AO طول}}{\text{AB طول}} = \frac{l/۲}{l} = \frac{۱}{۲}$$

مثال (۱۴ - ۷) - دایره‌ای مطابق شکل زیر داریم، یک چهارم آن رنگی است، سوزنی را به طرف این دایره پرتاب می کنیم، با فرض آنکه سوزن به خارج از دایره اصابت نکند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه سوزن به منطقهٔ رنگی اصابت کند.



حل: فرض کنید R ناحیه دایره، r ناحیهٔ رنگی، و A پیشامد اصابت سوزن به ناحیهٔ رنگی باشد؛ داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت ناحیهٔ r}}{\text{مساحت ناحیهٔ R}} = \frac{۱}{۴}$$

مثال (۱۵ - ۷) - فرض کنیم دایره‌ای به شعاع R حول محور عمود بر مرکزش می‌چرخد و عقربکی ثابت در بالای دایره واقع است (مطابق شکل (۷ - ۷))، نقطه‌ای مانند A روی دایره مشخص است. مطلوب است :

الف) احتمال اینکه موقع توقف دایره، نقطهٔ A در مقابل نوک عقربک قرار گیرد.

ب) احتمال اینکه موقع توقف دایره، نقطهٔ A در مقابل نوک عقربک قرار نگیرد.

حل: الف) به عنوان اندازهٔ مجموعه نقاط بر روی دایره می‌توان طول محیط آن دایره را قبول کرد؛ در این صورت اندازهٔ مجموعه A که از یک نقطه بر روی آن دایره تشکیل شده است، صفر خواهد بود.

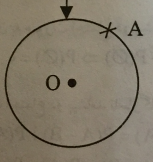
$$P_۱(A) = \frac{\text{طول نقطهٔ } A}{\text{طول محیط دایره}} = \frac{۰}{۲\pi R} = ۰$$

یعنی مقدار احتمال برابر صفر می‌شود. چه بسا ممکن است نقطهٔ A در مقابل عقربک قرار گیرد. بنابراین از صفر بودن احتمال پیشامد، غیر ممکن بودن پیشامد لزوماً نتیجه‌گیری نمی‌شود. در صورتی که عکس مطلب صادق است یعنی (احتمال پیشامد غیر ممکن صفر است).

ب) در این حالت احتمال مربوطه برابر یک خواهد بود.

$$P_۲(A) == \frac{۲\pi R}{۲\pi R} = ۱$$

از یک بودن احتمال پیشامد، یقین بودن پیشامد نتیجه نمی‌شود زیرا ممکن است نقطهٔ A در مقابل عقربک قرار گیرد. در اینجا نیز عکس مطلب صادق است یعنی (احتمال پیشامد یقین، یک است).



شکل (۷ - ۷)

اصول موضوعهٔ احتمالات

الف) اگر A' متمم پیشامد A باشد، داریم:

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

ب) $P(S) = ۱$؛

ج) چنانچه A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نکته: رابطهٔ بالا را می‌توان برای n پیشامد ناسازگار $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... و A_n به صورت زیر تعمیم داد:

$$P\left(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\right) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i)$$

قضایای مربوط به احتمال کلاسیک

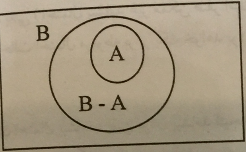
الف) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

ب) $A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$

ج) $P(\varnothing)=0$ و $P(S)=1$

د) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، آنگاه :
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
هـ) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند، داریم :
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
و) اگر A ، B و C سه پیشامد دلخواه باشند، آنگاه داریم :
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

اثبات الف) اگر $A\subset B$ باشد، B را می‌توان به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار نوشت:

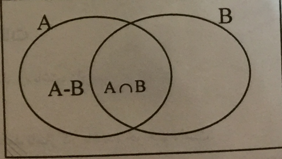


$$B=A\cup(B-A)$$

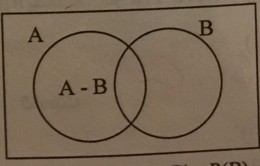
با توجه به اصل (ج) داریم:
$$P(B)=P(A)\cup P(B-A)$$
از طرفی $P(B-A)\geq 0$ ، بنابراین $P(B)\geq P(A)$ است .

اثبات ج) هر پیشامد دلخواه A را می‌توان به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار A و $\varnothing$ نوشت، بنابراین:
$$A=A\cup\varnothing\Rightarrow P(A)=P(A)+P(\varnothing)\Rightarrow P(\varnothing)=0$$

اثبات د) پیشامد A را می‌توان به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار A-B و $A\cap B$ نوشت، بنابراین:
$$A=(A-B)\cup(A\cap B)\Rightarrow P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$



اثبات هـ) پیشامد $A\cup B$ را می‌توان به صورت اجتماع دو پیشامد ناسازگار A-B و B نوشت ، بنابراین:



$$A\cup B=(A-B)\cup B\Rightarrow P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثال (۱۶ - ۷) – از ظرفی شامل ۲۰۰ لامپ سفید که ۸ تا از آن معیوب است و ۱۵۰ لامپ سبز که ۹ تا از آن معیوب می‌باشد، یک لامپ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که این لامپ، سفید یا معیوب باشد.

حل: پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : پیشامد سفید بودن؛   B : پیشامد معیوب بودن؛

بنابراین:

$$n(S)=۳۵۰\quad,\quad n(A)=۲۰۰\quad,\quad n(B)=۱۷\quad,\quad n(A\cap B)=۸$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۲۰۰}{۳۵۰}+\frac{۱۷}{۳۵۰}-\frac{۸}{۳۵۰}=\frac{۲۰۹}{۳۵۰}$$

مثال (۱۷ - ۷)- فرض کنید پیشامدهای A و B، با $P(A\cup B)=\frac{۳}{۴}$، $P(A')=\frac{۲}{۳}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$، مطلوب است:

$P(A)=\frac{1}{3}$

الف) $P(A)$ ب) $P(B)$ ج) $P(A\cap B')$

$P(A)-P(A\cap B)$

حل:

الف) $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$

ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۳}+P(B)-\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳}$

ج) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}$

مثال (۱۸ - ۷) - احتمال آنکه یک هواپیمای جدید، تایید طراحی را به دست آورد برابر ۰/۱۶، همچنین احتمال آنکه تایید کارایی استفاده از مواد را کسب کند برابر ۰/۲۴ و احتمال کسب هر دو تایید ۰/۱۱ است. مطلوب است :

الف) محاسبهٔ احتمال آنکه لااقل یکی از دو تایید را به دست آورد.

ب) محاسبهٔ احتمال آنکه فقط یکی از دو تایید را به دست آورد.   فقط = احتمال - اشتراک

حل: اگر A پیشامد تایید طراحی و B پیشامد تایید کارایی استفاده از مواد باشد، آنگاه داریم:

$$P(A)=۰/۱۶\quad,\quad P(B)=۰/۲۴\quad,\quad P(A\cap B)=۰/۱۱$$

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۰/۱۶+۰/۲۴-۰/۱۱=۰/۲۹$$

ب) پیشامد مورد نظر $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=۰/۲۹-۰/۱۱=۰/۱۸$$

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A هنگامی که پیشامد B قبلاً اتفاق افتاده باشد احتمال شرطی نامیده می‌شود و به صورت $P(A|B)$ نشان داده می‌شود. $P(A|B)$، «احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه پیشامد B قبلاً رخ داده باشد خوانده می‌شود.»

مثال (۱۹ - ۷) - دو تاس را با هم می‌ریزیم اگر مجموع شماره تاس‌های نشسته ۷ باشد احتمال حالتی را پیدا کنید که شمارهٔ یکی از تاس‌های نشسته ۳ باشد.

حل: فضای نمونه یعنی مجموعهٔ حالت‌هایی که شمارهٔ تاس‌های نشسته ۷ باشند عبارت است از :

$$B=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$$

حالات مساعد برای این فضای نمونه (۴ , ۳) و (۳ , ۴) است؛ به عبارتی فقط دو حالت وجود دارد که یکی از تاس‌ها ۳ باشد.

$$A=\{(3,4),(4,3)\}$$

بنابراین، بر طبق تعریف احتمال خواهیم داشت :

$$P(A\mid B)=\frac{2}{6}$$

اگر صورت و مخرج $\frac{2}{6}$ را بر ۳۶ تقسیم کنیم که تعداد کل حالات ممکن (فضای حوادث ساده) قبل از وارد کردن شرط وقوع حادثهٔ B می‌باشد، آنگاه این احتمال شرطی بر حساب احتمال‌های غیر شرطی $P(A\cap B)$ و $P(B)$ ، $P(A\mid B)=\frac{2}{6}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ بیان خواهد شد.

در این رابطه، صورت عبارت است از احتمال اینکه مجموع دو تاس ۷ باشد و یکی از رویه‌ها ۳ باشد. یعنی احتمال حالتی که A و B می‌توانند رخ دهد. در اینجا از کل ۳۶ حالت فقط دو حالت (۴ , ۳) و (۳ , ۴) مساعد می‌باشند. پس طبق تعریف احتمال $P(A\cap B)=\frac{2}{36}$. همینطور مخرج $P(B)$ عبارت است از احتمال تعداد حالت‌هایی که B می‌تواند رخ دهد. برای حالت B نیز تعداد حالت‌های مساعد برابر ۶ است،

در نتیجه:

$$P(B)=\frac{6}{36}$$

در نظریهٔ احتمال این نتیجهٔ به دست آمده را به عنوان تعریف احتمال شرطی قبول کرده‌اند.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{به شرط آنکه } P(B)\neq 0$$

به طور کلی، فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند به طوری که $B\neq\varnothing$. در این صورت، احتمال A به شرط B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

اگر صورت و مخرج کسر سمت راست را بر $n(S)$ تقسیم کنیم نتیجه می‌شود:

$$P(A\mid B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

بنابراین به تعریف زیر از احتمال شرطی می‌رسیم. در این تعریف لازم نیست اعضای فضای نمونه هم‌شانس باشند.

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، به طوری که $P(B) \neq 0$، آنگاه احتمال A به شرط B، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

در حالتی که $P(B) = 0$ باشد، $P(A|B)$ را مساوی صفر تعریف می کنیم؛ بنابراین:

$$P(A|B) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & , \quad P(B) \neq 0 \\ 0 & , \quad P(B) = 0 \end{cases}$$

هر احتمالی، با توجه به یک فضای نمونه حساب می‌شود. در واقع $P(A)$، همان $P(A|S)$ است که S فضای نمونه می‌باشد، و معمولاً S را دانسته فرض کرده و از نوشتن آن خودداری می کنند.

مثال (۲۰ - ۷) - جدول زیر یکصد دانشجوی دانشگاه را بر حسب وضع اشتغال و جنس نشان می‌دهد. یکی از دانشجویان را به تصادف انتخاب می کنیم به فرض آنکه پیشامدهای A و B چنین باشند:

A = پیشامد اینکه دانشجوی انتخاب شده مرد است ، B = پیشامد اینکه دانشجوی انتخاب شده شاغل است.

احتمال پیشامد A به شرط آنکه پیشامد B اتفاق بیافتد را بیابید(یعنی $P(A|B)$).

وضع اشتغال / جنس	شاغل	غیر شاغل	جمع
مرد	۵۶	۱۴	۷۰
زن	۲۴	۶	۳۰
جمع	۸۰	۲۰	۱۰۰

A = ۷۰
B = ۵۶

حل : تعداد حالات مساعد برابر با ۵۶ و تعداد حالات ممکنه برابر ۸۰ می‌باشد، پس احتمال اینکه دانشجوی انتخابی شاغل و مرد باشد برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{56}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{56}{80} = 0/7$$

مثال (۲۱ - ۷) - سازندهٔ قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه‌های گذشته می‌داند احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع تحویل مشتری شود برابر ۰/۸ است. احتمال اینکه سفارشی به موقع تحویل شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد چقدر است؟

حل: فرض می کنیم که:

A = پیشامد آماده بودن به موقع، برای ارسال

پیشامد تحویل به موقع سفارش، به مشتری $= B$

بنابر داده‌های مسأله، $P(A) = ۰/۹$ و $P(A \cap B) = ۰/۸$ است؛ زیرا پیشامد $A \cap B$ به معنای این است که سفارش هم به موقع آماده برای ارسال بوده و هم به موقع تحویل مشتری می‌شود. آنچه می‌خواهیم، $P(B|A)$ است، یعنی احتمال تحویل به موقع سفارش به مشتری به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد. بنابر تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۰/۸}{۰/۹} = \frac{۸}{۹}$$

قانون ضرب احتمالات

یکی از مهمترین کاربردهای احتمال شرطی محاسبهٔ $P(A \cap B)$ می‌باشد. قبلاً دیدیم که اگر $P(B) \neq ۰$، آنگاه $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ است. اگر طرفین این تساوی را در $P(B)$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$P(A \cap B) = P(A|B).P(B) \quad \alpha \qquad (۱)$$

حال اگر $P(A) \neq ۰$، آنگاه به طریق مشابه از $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ و با توجه به اینکه $A \cap B = B \cap A$، نتیجه می‌شود:

$$P(A \cap B) = P(A|B).P(A) \qquad (۲)$$

به هر یک از روابط (۱) و (۲) قانون ضرب احتمالات می گویند.

مثال (۲۲ - ۷) - جعبه‌ای محتوی ۱۲ لامپ است که می‌دانیم ۳ تای آنها معیوب‌اند. از این جعبه به تصادف ۱ لامپ برمی‌داریم. سپس مجدداً بدون جایگذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف برمی‌داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند چقدر است؟

A لامپ اول معیوب

B لامپ دوم معیوب

حل : ابتدا قرار می‌دهیم:

پیشامد معیوب بودن لامپ اول $= A$

$A \cap B = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

پیشامد معیوب بودن لامپ دوم $= B$

$\frac{۳}{۱۲} + \frac{۲}{۱۱} -$

بنابراین $A \cap B$ پیشامد معیوب بودن هر دو لامپ است. واضح است که : $P(A) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آنها معیوب است برمی‌داریم، پس : $P(B|A) = \frac{۲}{۱۱}$

لذا از قاعدهٔ ضرب احتمال داریم :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۱۱} = \frac{۱}{۲۲}$$

فرسا = بدون جایگذاری
نافرسا = با جایگذاری

قانون ضرب احتمالات را می‌توان به بیش از دو پیشامد نیز به کار برد. فرمول آن برای سه پیشامد به صورت زیر است[1]:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B \mid A).P(C \mid A \cap B)$$

این قانون را می‌توان طبق استقراء به صورت زیر تعمیم داد.

قضیه : برای پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... و A_n داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2 \mid A_1).P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})$$

مثال (۲۳ - ۷) - از ۱۲ قلم کالا، ۴ قلم آن معیوب است. ۳ قلم کالا یکی پس از دیگری از میان ۱۲ قلم مزبور به طور تصادفی بیرون کشیده می‌شود. احتمال p را در مورد سالم بودن هر سه قلم کالا پیدا کنید.

حل: از آنجا که ۸ قلم از ۱۲ قلم کالا سالم است بنابراین احتمال سالم بودن اولین قلم $\frac{8}{12}$ است. اگر قلم اول سالم باشد چون فقط ۷ قلم از ۱۱ قلم باقیمانده سالم است، آنگاه احتمال سالم بودن قلم بعدی $\frac{7}{11}$ خواهد بود. اگر دو قلم اول سالم باشد، در این حالت چون فقط ۶ قلم از ۱۰ قلم باقیمانده سالم است، بنابراین احتمال سالم بودن قلم سوم $\frac{6}{10}$ خواهد بود. به این ترتیب قضیه حاصلضرب چنین می‌شود:

$$p = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

پیشامدهای مستقل (نابسته)

دو پیشامد A و B را مستقل (نابسته) از هم نامند که وقوع یکی روی وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد؛ به عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد با احتمال شرطی آن پیشامد یکسان باشد. یعنی:

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{همچنین} \quad P(A \mid B) = P(A)$$

به عنوان مثال، اگر از یک جامعهٔ نمونه‌ای برداریم و دوباره آن نمونه را به جای خود برگردانیم، یعنی عمل جایگذاری را انجام دهیم، آنگاه پیشامد اول تأثیری بر احتمال پیشامد دوم نخواهد داشت. این مطلب در مورد پرتاب سکه و تاس همیشه برقرار است. مثلاً گیریم یک سکه را ده بار پرتاب کرده‌ایم. می‌خواهیم احتمال اینکه دفعه یازدهم شیر بیاید را پیدا کنیم. طبیعی است احتمال این پیشامد $\frac{1}{2}$ است. ملاحظه می‌شود

---

۱ - اگر A ، B و C، سه پیشامد از یک فضای نمونهٔ S باشند، داریم:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B \mid A).P(C \mid A \cap B)$$

اگر $A \cap B$ را برابر D قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(D \cap C) \\ &= P(D).P(C \mid D) \\ &= P(A \cap B).P(C \mid A \cap B) \\ &= P(A).P(B \mid A).P(C \mid A \cap B) \end{aligned}$$

که احتمال وقوع پیشامد در دفعهٔ یازدهم ربطی به ۱۰ بار قبل ندارد. از آنچه گذشت چنین نتیجه می‌شود که دو یا چند پیشامد را موقعی مستقل نامند که احتمال وقوع هر یک از آنها تحت تأثیر وقوع دیگری قرار نگیرد. در غیر این صورت پیشامدها مستقل نخواهد بود.

پیشامدهای نا مستقل (وابسته)

دو پیشامد A و B را وابسته به هم می‌نامند که وقوع یکی روی وقوع دیگری تأثیر داشته باشد. مثلاً گیریم در یک کیسه ۶ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است از آن کیسه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم و پس از ملاحظه رنگ، آن را کنار می‌گذاریم. دفعهٔ دوم یک مهرهٔ دیگر از کیسه به تصادف خارج می‌کنیم، ملاحظه می‌شود که در این حال احتمال دوم علاوه بر اینکه به رنگ مهرهٔ اول مربوط است به تعداد مهره‌های باقی مانده ($10-1=9$) در کیسه نیز مربوط می‌شود. پس اگر از یک جامعه نمونه‌ای برداریم و دوباره آن را در جای خود قرار ندهیم یعنی بدون جای گذاری نمونه‌گیری انجام دهیم آنگاه این دو پیشامد را وابسته به یکدیگر می‌نامند.

حال که با تعریف پیشامدهای مستقل و نامستقل آشنا شدیم اینک قضیه‌های مربوط به حاصلضرب پیشامدهای مستقل را بیان می‌کنیم. در زیر پیشامدهای مستقل مورد بررسی قرار گرفته است.

۱) دو پیشامد مستقل

اگر دو پیشامد A و B مستقل (نابسته) از هم باشند آنگاه احتمال حاصلضرب این دو پیشامد مساوی با حاصلضرب احتمال‌های آن دو پیشامد می‌باشد؛ یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

مثال (۲۴ - ۷) - احتمال اینکه دو تیر A و B به هدف بخورند به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{5}$ است. اگر A و B هر دو شلیک شوند احتمال اصابت هر دو تیر به هدف چقدر است؟

حل: با فرض $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{2}{5}$، در صدد پیدا کردن $P(A \cap B)$ هستیم. از طرف دیگر احتمال اصابت A یا B به هدف، تحت تأثیر یکدیگر نیست؛ یعنی پیشامد اصابت A از پیشامد اصابت B به هدف مستقل می‌باشد؛ یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

۲) سه پیشامد مستقل

سه پیشامد A، B و C مستقل می‌باشند هرگاه:

الف) $$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A).P(B) \\ P(A \cap C) = P(A).P(C) \\ P(B \cap C) = P(B).P(C) \end{cases}$$

یعنی هر یک از آنها دو به دو مستقل باشند.

ب) $$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

در مثال ذیل نشان می‌دهیم که سه پیشامد می‌توانند دو به دو مستقل باشند ولی هر سه از هم مستقل نباشند.

مثال (۲۵ - ۷) - فرض کنید که دو سکهٔ سالم پرتاب شود؛ برای این آزمایش، فضای نمونه عبارت از $S = \{HH, TH, HT, TT\}$ است. پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید:

$A = \{$سکهٔ اول شیر بیاید$\} = \{HH, HT\}$

$B = \{$سکهٔ دوم شیر بیاید$\} = \{HH, TH\}$

$C = \{$حتماً یکی از سکه‌ها شیر بیاید$\} = \{TH, HT\}$

آنگاه $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ و

$$\begin{cases} P(A)\times P(B) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \\ P(A)\times P(C) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \\ P(B)\times P(C) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

همچنین:

$$\begin{cases} P(A\cap B) = P(\{HH\}) = \frac{۱}{۴} \\ P(A\cap C) = P(\{HT\}) = \frac{۱}{۴} \\ P(B\cap C) = P(\{TH\}) = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

به این ترتیب شرط (الف) برقرار است، یعنی پیشامدها دو به دو مستقل می‌باشند. ولی $A\cap B\cap C = \varnothing$ و در نتیجه:

$$P(A\cap B\cap C) = P(\varnothing) = ۰ \neq P(A).P(B).P(C)$$

به عبارت دیگر با عدم برقراری شرط (ب)، سه پیشامد وابسته می‌باشند.

مثال (۲۶ - ۷) - احتمال اینکه سه مرد هدفی را بزنند به ترتیب مساوی $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۳}$ است. هر یک از آن سه مرد یک بار به هدف تیراندازی می کنند. احتمال اینکه فقط یکی از آنها هدف را بزند چقدر است؟

حل: فرض کنید:

$A =$ پیشامد این که اولین مرد، هدف را بزند.

$B =$ پیشامد این که دومین مرد، هدف را بزند.

$C =$ پیشامد این که سومین مرد، هدف را بزند.

بنابراین، پیشامد «فقط یکی، هدف را بزند» اجتماع سه پیشامد ناسازگار زیر است.

مرد سوم هدف را می‌زند ولی تیر دو نفر دیگر به هدف اصابت نمی کند. $A'\cap B'\cap C$	مرد دوم هدف را می‌زند ولی تیر دو نفر دیگر به هدف اصابت نمی کند. $A'\cap B\cap C'$	مرد اول هدف را می‌زند ولی تیر دو نفر دیگر به هدف اصابت نمی کند. $A\cap B'\cap C'$

بنابراین:

$$P_1 = P \text{(فقط یکی هدف را بزنند)}$$
$$= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$$

با توجه به اینکه A ، B و C مستقل اند، داریم:

$$P_1 = P(A).P(B').P(C') + P(A').P(B).P(C') + P(A').P(B').P(C)$$
$$= \frac{۱}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} + \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳} + \frac{۵}{۶} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۳۱}{۷۲}$$

تفاوت « مستقل بودن » و « ناسازگار بودن » پیشامدها

گاهی مفاهیم « مستقل بودن » و « ناسازگار بودن » دو پیشامد، با هم اشتباه می‌شوند. برای دوری از چنین اشتباهی، توضیح این نکتهٔ ضروری است که هرگاه در مورد مستقل بودن دو پیشامد A و B سخن به میان می‌آید، منظور این است که وقوع پیشامد A، هیچ ارتباطی به پیشامد B ندارد. در حالی که وقتی صحبت از ناسازگار بودن A و B می‌شود، مقصود این است که ، A و B نمی‌توانند هم‌زمان رخ دهند. شاید این اشتباه، از آنجا ناشی شده است که در نمودارهای ون، تصور بر این است، که دو پیشامد مستقل A و B نباید هیچ نقطهٔ مشترکی داشته باشند، در حالی که این تصور برای دو پیشامد ناسازگار درست است، نه برای دو پیشامد مستقل. مثلاً اگر A پیشامدی باشد با احتمالی برابر ۰/۲ و B پیشامد دیگری باشد با احتمالی مساوی ۰/۳ به طوری که بشود نوشت:

$$P(A) = ۰/۲ \quad \text{و} \quad P(B) = ۰/۳$$

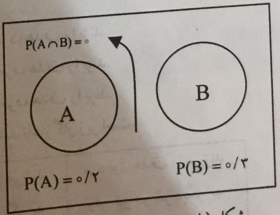
حال اگر A و B مستقل از یکدیگر باشند، خواهیم داشت:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = ۰/۲ \times ۰/۳ = ۰/۰۶$$

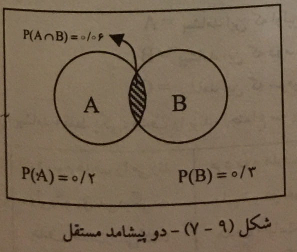
در حالی که اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، باید $A \cap B = \varnothing$ باشد، و چون $P(\varnothing) = ۰$ است، بنابراین:

$$P(A \cap B) = ۰$$

در نمودارهای (۸ - ۷) و (۹ - ۷) وضعیت دو پیشامد ناسازگار و دو پیشامد مستقل را به صورت هندسی مشاهده می‌کنید:



شکل (۸ - ۷) - دو پیشامد ناسازگار



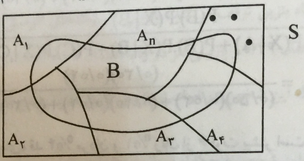
شکل (۹ - ۷) - دو پیشامد مستقل

قضیه « بیز »

مهم

تصور کنید که پیشامدهای A_1 ، A_2 ، . . . و A_n افرازی از فضای نمونهٔ S را تشکیل می‌دهند، یعنی پیشامدهای A_i ناسازگار می‌باشند و اجتماع آنها عبارت از S است. اکنون B را پیشامد دلخواه دیگری فرض کنید، آنگاه :

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$



B سایه خورده است

به طوری که $A_i \cap B$ نیز ناسازگار می‌باشد؛ بنابراین:

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \ldots + P(A_n).P(B|A_n) \qquad (1)$$

از طرف دیگر، به ازای هر i ، احتمال شرطی A_i با رخداد B چنین تعریف می‌شود:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

در این معادله از (۱) برای جایگزینی $P(B)$ و از $P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B|A_i)$ برای جایگزینی $P(A_i \cap B)$ استفاده می‌کنیم تا به قضیه زیر برسیم:

B

> **قضیه:** A_1 ، A_2 ، . . . و A_n را افراز S و B را پیشامد دلخواه در نظر بگیرید. آنگاه به ازاء هر i چنین داریم:
>
> $$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B|A_i)}{P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \ldots + P(A_n).P(B|A_n)}$$

مثال (۲۷ - ۷) - سه ماشین A ، B و C به ترتیب ۵۰٪ ، ۳۰٪ و ۲۰٪ از کل تعداد اقلام کارخانه‌ای را تولید می‌کنند. درصد محصولات معیوب این ماشین‌ها عبارتند از ۳٪ ، ۴٪ و ۵٪ است. فرض کنید که یک قلم محصول به طور تصادفی انتخاب شود و معیوب درآید.

الف) احتمال تولید این قلم محصول توسط ماشین A، یعنی $P(A|X)$ را پیدا کنید.

ب) احتمال تولید این قلم محصول توسط ماشین B، یعنی $P(B|X)$ را پیدا کنید.

حل:

الف)

$$P(A|X)=\frac{P(A).P(X|A)}{P(A).P(X|A)+P(B).P(X|B)+P(C).P(X|C)}$$

$$=\frac{(۰/۵۰)(۰/۰۳)}{(۰/۵۰)(۰/۰۳)+(۰/۳۰)(۰/۰۴)+(۰/۲۰)(۰/۰۵)}=\frac{۱۵}{۳۷}$$

ب)

$$P(B|X)=\frac{P(B).P(X|B)}{P(A).P(X|A)+P(B).P(X|B)+P(C).P(X|C)}$$

$$=\frac{(۰/۳۰)(۰/۰۴)}{(۰/۵۰)(۰/۰۳)+(۰/۳۰)(۰/۰۴)+(۰/۲۰)(۰/۰۵)}=\frac{۱۲}{۳۷}$$

مثال (۲۸ - ۷) - در دانشکده‌ای، قد ۴% مردان و ۱% زنان از ۶ فوت بیشتر است. گذشته از این، ۶۰% دانشجویان را زنان تشکیل می‌دهند. حال اگر دانشجویی به طور تصادفی انتخاب شود و قد او از ۶ فوت بیشتر باشد، احتمال زن بودن او چقدر است؟

حل: فرض کنید که:

$A =$ { دانشجویانی که قدشان بیشتر از ۶ فوت است }

مطلوب مسئله $P(W|A)$ است؛ یعنی می‌خواهیم بدانیم با فرض اینکه قد او از ۶ فوت بیشتر است، احتمال زن بودن او چقدر است؟ طبق قضیهٔ بیز چنین داریم:

$$P(W|A)=\frac{P(W).P(A|W)}{P(W).P(A|W)+P(M).P(A|M)}$$

$$=\frac{(۰/۶۰)(۰/۰۱)}{(۰/۶۰)(۰/۰۱)+(۰/۴۰)(۰/۰۴)}=\frac{۳}{۱۱}$$

تمرینات فصل

۱) فرض کنید که طول عمر یک ماشین تراش مخصوص از ۷ سال فراتر نمی‌رود:

الف) برای این ماشین تراش معین، فضای نمونه را مشخص کنید.

ب) پیشامد آن را معین کنید که عمر ماشین تراش مزبور از ۳ سال تجاوز نکند.

۲) تفاوت بین «مستقل بودن» و «ناسازگار بودن» دو پیشامد را بیان نمایید.

۳) مفهوم احتمال را با ذکر مثال بیان نمایید.

۴) پیشامدهای A و B را با $P(A)=\frac{۳}{۸}$ ، $P(B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$ در نظر بگیرید. احتمالات زیر را محاسبه نمایید.

الف) $P(A\cup B)$ ب) $P(A')$ ج) $P(B')$

د) $P(A'\cap B')$ هـ) $P(A'\cup B')$ و) $P(A\cap B')$

۵) سه لامپ را یکجا از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب است انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه:

الف) هیچکدام معیوب نباشند.

ب) فقط یکی معیوب باشد.

ج) اقلاً یکی معیوب باشد.

۶) شخصی که در جایگاه بنزین توقف می‌کند، بازبینی لاستیک‌های اتومبیل را با احتمال ۰/۱۲ و بازبینی روغن اتومبیل را با احتمال ۰/۲۹ و بازبینی هر دو را با احتمال ۰/۰۷ تقاضا می‌کند.

الف) احتمال اینکه این شخص درخواست بازبینی لاستیک یا روغن اتومبیل خود را داشته باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این شخص هیچکدام از بازبینی‌ها را درخواست نکند چقدر است؟

ج) احتمال اینکه این شخص بازبینی لاستیک‌ها را درخواست کند مشروط بر اینکه بازبینی روغن را در خواست کرده باشد.

۷) فرض کنید A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$؛

۸) مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $P(A|B)$ ب) $P(B|A)$ ج) $P(A\cup B)$ د) $P(B'|A')$ هـ) $P(A'|B')$

۹) در یک زندان معین معلوم شده است که $\frac{۲}{۳}$ از زندانی‌ها دارای سن کمتر از ۲۵ سال و $\frac{۳}{۵}$ از زندانی‌ها مرد و $\frac{۵}{۸}$ از زندانی‌ها زن یا دارای سن حداقل ۲۵ سال می‌باشند. احتمال اینکه یک زندانی که به طور تصادفی انتخاب شده است زنی با حداقل ۲۵ سال سن باشد را بیابید.

۱۰) گروهی از کارگران کارخانه‌ای را برگزیده و آنها را برحسب قابلیتشان در مهارت کاری و مهارت ارتباطات رده‌بندی کرده‌ایم. نسبت‌های مربوطه در جدول زیر آمده‌اند. اگر کارگری را به طور تصادف از این گروه انتخاب کنیم، احتمال اینکه:

الف) حداقل یک مهارت کارگر بالا باشد، چقدر است؟

ب) در مهارت ارتباطات پایین نباشد چقدر است؟

مهارت ارتباطات \ مهارت کاری	بالا	متوسط	پایین
بالا	۰/۰۶	۰/۱۱	۰/۱۸
متوسط	۰/۱۲	۰/۱۸	۰/۱۰
پایین	۰/۱۶	۰/۰۵	۰/۰۴

۱۱) سه جعبه داریم، که در جعبهٔ اول، ۱۰ لامپ وجود دارد و ۴ تای آن خراب است. در جعبهٔ دوم، ۶ لامپ وجود دارد که یکی از آنها خراب است. در جعبهٔ سوم، ۸ لامپ هست که سه تای آن خراب است. جعبه‌ای را به تصادف برگزیده و یک لامپ به تصادف از آن انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این لامپ خراب باشد چقدر است؟

۱۲) در یک انبار، ۱۰ کارتن یخچال، ۲۰ کارتن فریزر و ۲۰ کارتن یخچال ـ فریزر وجود دارد که از نظر ظاهر، شبیه هم هستند. اگر به تصادف ۳ جعبه از آنها را انتخاب کنیم، مطلوب است احتمال آنکه:

الف) هر سه کارتن یخچال باشند؛

ب) دو عدد فریزر و یکی یخچال ـ فریزر باشد؛

ج) هیچ کدام مثل هم نباشند.

۱۳) جدول زیر تعداد قطعات سالم و معیوب تولیدی توسط دو کارخانه ۱ و ۲ را نشان می‌دهد. اگر یک قطعه به طور تصادفی انتخاب شود و این قطعه سالم باشد، احتمال اینکه از کارخانه ۱ انتخاب شده باشد را بیابید.

	کارخانه ۱	کارخانه ۲	جمع
معیوب	۱۵	۵	۲۰
سالم	۴۵	۳۵	۸۰
جمع	۶۰	۴۰	۱۰۰

۱۴) یک تولید کننده حدس می‌زند احتمال آنکه کسی آگهی تبلیغاتی شرکت را بخواند برابر ۰/۴ است. احتمال اینکه کسی این آگهی را خوانده و محصول کارخانه را بخرد مساوی ۰/۰۱ است. احتمال اینکه کسی آگهی را خوانده و محصول را بخرد چقدر است؟

۱۵) یک ایستگاه آتش‌نشانی دارای دو ماشین آتش‌نشان است که به طور مستقل کار می‌کنند؛ احتمال اینکه یک ماشین آتش‌نشان در موقع نیاز موجود باشد ۰/۹۹ است. احتمال اینکه موقع نیاز حداقل یکی از این دو ماشین موجود باشند را بیابید.

۱۶) در یک سازمان تولیدی مشکلی در زمینهٔ طراحی قطعات محصولی بوجود آمده است. مدیر واحد طراحی مشکل مورد نظر را در قالب مسئله‌ای طرح نموده و حل آن را به سه تیم طراحی واگذار کرده است. احتمال اینکه تیم اول مسئله را حل کند ۰/۷ است و اینکه تیم دوم آن را حل کند ۰/۸ ، و سرانجام احتمال اینکه تیم سوم نیز حل کند ۰/۵ است. اگر هر سه تیم تصمیم به حل مسئله گرفته باشند احتمال اینکه مسئله حل شود چقدر است؟

۱۷) سه ماشین A ، B و C به ترتیب ۵۰٪ ، ۳۰٪ و ۲۰٪ از کل تعداد اقلام کارخانه‌ای را تولید می‌کنند. درصد محصولات معیوب این ماشین‌ها عبارتند از ۳٪ ، ۴٪ و ۵٪ است. اگر یک قلم

محصول به طور تصادفی انتخاب شود احتمال معیوب بودن آن را به دست آورید(X را پیشامد معیوب بودن کالا در نظر بگیرید.).

۱۸) اسناد فروش تمامی محصول یک کارخانه توسط سه نفر مامور فروش یک ، دو و سه نوشته می‌شود؛ به طوری که مامور فروش ۱ ، ۳۵٪ اسناد فروش را تهیه می کند و مامور شماره ۲، ۵۰٪ و مامور شماره ۳ نیز، ۱۵٪ اسناد فروش را می‌نویسند. احتمال اشتباه کردن از این ماموران فروش در نوشتن سند به ترتیب برابر با ۵٪ ، ۷٪ و ۲٪ می‌باشد. در زمان حسابرسی، یک سند فروش را به طور تصادفی انتخاب نموده و مشاهده می کنیم که در نوشتن آن اشتباه رخ داده است. چقدر احتمال دارد که این سند توسط مامور شماره ۲ نوشته شده باشد؟

۱۹) تلفن‌های یک مؤسسه به وسیلهٔ سه تلفنچی وصل می‌شود. تلفنچی اول ۴۰٪، تلفنچی دوم ۵۰٪ و تلفنچی سوم ۱۰٪ تلفن‌های مؤسسه را وصل می کنند. طبق تحقیق انجام شده می‌دانیم که تلفنچی اول ۳۰ تلفن وصل شده ۲ تلفن را اشتباهی وصل می کند. همچنین تلفنچی دوم از بین ۴۰ تلفن وصل شده ۵ تلفن ،و تلفنچی سوم از بین ۲۰ تلفن وصل شده ۲ تلفن را اشتباهی وصل می‌کنند. حال اگر تلفن رئیس خدمات پرسنلی به صدا درآید:

الف) احتمال اشتباه وصل شدن تلفن را محاسبه کنید.

ب) اگر تلفن اشتباه وصل شده باشد، چه احتمالی وجود دارد که از سوی تلفنچی سوم باشد.

تست‌های فصل هفتم

۱) به طور کلی ۲۰٪ از لیوان‌های بلور تولید شده در یک کارخانه غیراستاندارد هستند. هر یک از اقلام پس از تولید کنترل شده و به دو گروه استاندارد و غیر استاندارد طبقه‌بندی می‌شوند. اگر مامور کنترل در تشخیص هر یک از دو گروه ۱۰٪ اشتباه کند، چه درصدی از لیوان‌ها را استاندارد طبقه‌بندی خواهد نمود؟

الف) ۸۰ ب) ۷۲ ج) ۹۰ د) ۷۴

۲) در یک کلاس ۸۰٪ پسر و ۲۰٪ دانشجویان دختر هستند. می‌دانیم ۱۰٪ پسران و ۴٪ دختران در درس آمار مردود شده‌اند، اگر دانشجویی به تصادف انتخاب شود ، معلوم گردد که مردود شده است، احتمال این که پسر باشد، چقدر است؟

الف) $\frac{۱۶}{۱۸}$ ب) $\frac{۳}{۱۱}$ ج) $\frac{۸}{۸۸}$ د) $\frac{۸۰}{۸۸}$

۳) دستگاه الکترونیکی از ۵ جزء یکسان تشکیل شده است که بدون وقفه با ۴ جزء و بیشتر می‌تواند کار کند، در طول زمان t هر یک از اعضاء مستقل از هم با احتمال ۰/۲ می‌تواند متوقف شود (از کار بیافتد). احتمال این که این دستگاه متوقف شود، چقدر است؟

الف) ۰/۷۳۷۲۸ ب) ۰/۲۶۲۷۲ ج) ۰/۴۵۷۶۲ د) ۰/۳۲۷۶۸

۴) کدام یک از عبارات زیر تعریف مفهوم احتمال است؟

الف) اندازهٔ امکان وقوع حادثه را احتمال گویند.

ب) احتمال نسبت حالت‌های مساعد را بیان می کند.

ج) احتمال درصد حالت‌های مساعد وقوع حادثه را بیان می کند.

د) احتمال تعداد حوادث را در فضای نمونه‌ای بیان می کند.

۵) اگر A_1 و A_2 ، ... ، A_n رویدادهای با $A_i \cap A_j = \varnothing$ باشند، در این صورت:

الف) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ ب) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

ج) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_i)$ د) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) > \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

۶) در پرتاب یک تاس همگن، دو حادثهٔ (پیشامد) $A = \{1,3,5\}$ و $B = \{3,4\}$ را در نظر می گیریم:

الف) A و B ناسازگارند.

ب) A و B مستقل‌اند.

ج) A و B مستقل نیستند.

ج) A و B دو ناسازگار و اجتماع آنها فضای نمونه را تشکیل می‌دهد.

۷) احتمال موفقیت شخص A در یک آزمایش $P(A) = 0/7$ و احتمال موفقیت شخص B در همان آزمایش $P(B) = 0/4$ می‌باشد. احتمال این که فقط شخص A موفق شود، چقدر است؟

الف) ۰/۱۲ ب) ۰/۲۸ ج) ۰/۱۸ د) ۰/۴۲

۸) اگر A و B مستقل، $P(A) = 0/3$ ، $P(A \cap B) = 0/06$ باشد، $P(A \cup B)$ برابر است با:

الف) ۰/۱۸ ب) ۰/۴۴ ج) ۰/۵ د) ۰/۵۶

۹) می‌خواهیم از محل A به B و سپس به مقصد C حرکت کنیم. از A به B دو راه وجود دارد که احتمال مسدود بودن هر یک ۲۰% است. از B به C نیز دو راه وجود دارد که احتمال مسدود بودن هر یک ۳۰% است. چنانچه احتمال مسدود بودن هرکدام از راه‌ها مستقل از دیگری باشد، شانس رسیدن به مقصد چقدر است؟

الف) ۰/۵۶ ب) ۰/۸۷۳۶ ج) ۰/۹۳۲۶ د) ۰/۹۴

۱۰) ۳ دانشجوی کارشناسی ارشد و ۲ دانشجوی کارشناسی به تصادف در یک ردیف قرار می‌گیرند. احتمال آن که دانشجویان کارشناسی در کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

الف) ۰/۱ ب) ۰/۲ ج) ۰/۳ د) ۰/۴

۱۱) سه نفر هر یک به یک هدف تیر می‌اندازند، احتمال این که تیر هر یک به هدف اصابت کند، به ترتیب برابر $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ است. احتمال اینکه حداقل یک تیر به هدف اصابت کند، چقدر است؟

الف) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{1}{60}$ ج) $\frac{12}{60}$ د) $\frac{2}{5}$

۱۲) اگر $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۵}$ باشد و A و B از هم مستقل باشند، آنگاه $P(A'\cup B')$ برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۱۵}$ ب) $\frac{۷}{۱۵}$ ج) $\frac{۸}{۱۵}$ د) $\frac{۱۴}{۱۵}$

صفحه ۱۲۰ ج ۵.۴

۱۳) اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B|A')=\frac{۱}{۴}$، مقدار $P(B)$ برابر است با:

الف) $\frac{۳}{۱۶}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۳}{۴}$

۱۴) فرض این که احتمال آمدن برف در امروز ۰/۲ و فردا ۰/۲۲ باشد. احتمال برف آمدن فردا به شرط آن که امروز برف بیاید، ۰/۷ است. احتمال برف نیآمدن فردا به شرط آن که امروز برف نیاید، چقدر است؟

[illegible]

الف) ۰/۳ ب) ۰/۷۲ ج) ۰/۷۸ د) ۰/۹

۱۵) فرض کنید ۵ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سفید در کیسهٔ اول و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سفید در کیسهٔ دوم باشد. اگر مهره‌ای به تصادف از کیسهٔ اول به دوم انتقال یابد و سپس از کیسهٔ دوم یک مهره انتخاب شود، احتمال آبی بودن آن چیست؟

الف) $\frac{۴}{۹}$ ب) $\frac{۵}{۱۰}$ ج) $\frac{۴۱}{۹۰}$ د) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۱۶) در آزمایش حادثهٔ A باعث وقوع حادثهٔ B می‌گردد. کدام یک از عبارات زیر دربارهٔ احتمال‌های این حوادث صحیح است؟

الف) $P(A)>P(B)$ ب) $P(A)\leq P(B)$

ج) $P(A)\neq P(B)$ د) $P(A)\geq P(B)$

۱۷) فرض کنید ۲۰ درصد کلی پروازهای داخلی تأخیر دارند و ۵۰ درصد پروازها بین ظهر تا نیمه شب انجام می‌شود و ۷۵ درصد پروازهای دارای تأخیر از پروازهای بین ظهر تا نیمه شب است. احتمال این که یک پرواز منتخب از بین پروازهای ظهر تا نیمه شب تأخیر نداشته باشد، چقدر است؟

الف) ۰/۲۵ ب) ۰/۹۰ ج) ۰/۴۵ د) ۰/۷۰

۱۸) سه کودک پسر و سه کودک دختر در یک ردیف نشسته‌اند. احتمال این که دخترها و پسرها به طور متناوب نشسته باشند، کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۱۰}$ ب) $\frac{۱}{۵}$ ج) $\frac{۱}{۲۰}$ د) ۱

۱۹) اطلاعات زیر داده شده است:

$P(A|B_۱)=۰/۰۱$ و $P(B_۱)=۰/۲$

$P(A|B_۲)=۰/۰۲$ و $P(B_۲)=۰/۳$

$P(A|B_۳)=۰/۰۵$ و $P(B_۳)=۰/۲$

احتمال $P(B_۲ | A)$.

الف) $\frac{۲}{۳۳}$ ب) $\frac{۱}{۱۶}$ ج) $\frac{۲}{۱۱}$ د) $\frac{۳}{۴}$

۲۰) دو تلفنچی شماره ۱ و ۲ به ترتیب ۴۰ % و ۶۰% تلفن‌های شرکت را وصل می کنند. تلفنچی شماره ۱ در ۲% موارد و شماره ۲ در ۵% موارد دچار خطا در وصل تلفن می‌شوند. چند درصد تلفن‌های شرکت اشتباهاً وصل شوند؟

الف) ۲/۷% ب) ۳/۸% ج) ۷% د) ۱/۰۷%

۲۱) چهار حرف به طور تصادفی از کلمهٔ RANDOMLY انتخاب می‌شود. احتمال این که ۴ حرف انتخاب شده جزو حروف بی‌صدا باشند برابر است با:

الف) $\frac{۶}{۷}$ ب) $\frac{۳}{۷}$ ج) $\frac{۳}{۱۴}$ د) $\frac{۳}{۴}$

۲۲) یک شرکت نفتی آزمایشات خود را در دو منطقه دنبال می کند. مدیران شرکت شانس وجود نفت در منطقهٔ اول ۰/۶ و در منطقهٔ دوم ۰/۸ می‌دانند. احتمال این که در یک فقط در یک منطقه نفت وجود داشته باشد، کدام است؟

الف) ۰/۰۸ ب) ۰/۳۲ ج) ۰/۴۴ د) ۰/۴۸

۲۳) فرض کنید دو تاس به همراه سکه‌ای پرتاب شود. درخت این آزمایش چند شاخه دارد؟

الف) ۱۴ ب) ۳۸ ج) ۷۲ د) ۷۴

۲۴) اگر $P(A)=۰/۳۰$، $P(B)=۰/۴۰$، $P(E | A)=۰/۱۰$ و $P(E^c | B)=۰/۸۰$، باشد احتمال E چقدر است؟

الف) ۰/۱۱ ب) ۰/۱۸ ج) ۰/۳۰ د) ۰/۳۵

۲۵) شرکتی ۸۰۰ کارمند دارد. ۲۰% از کارمندان دارای درجات دانشگاهی هستند ولی نیمی از آنها در سمت‌های غیر مدیریتی کار می کنند. ۳۰% از کارمندان بدون درجات دانشگاهی در سمت‌های مدیریتی قرار دارند. اگر یکی از کارمندان که به طور تصادفی انتخاب شده است، مدیر باشد، احتمال این که دانشگاهی باشد ، چقدر است؟

الف) ۰/۱۷ ب) ۰/۲۹ ج) ۰/۳۴ د) ۰/۴۲

۲۶) در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ سبز ، ۵ مهرهٔ سفید وجود دارد. اگر سه مهره به تصادف (به صورت باجایگذاری) از این جعبه انتخاب شود، احتمال آن که مهره‌ها هم‌رنگ نباشند، چقدر است؟

الف) ۰/۰۳ ب) ۰/۰۶ ج) ۰/۱۸ د) ۰/۳۰

۲۷) سیستمی دارای دو جزء است که احتمال کار کردن هر یک از آنها ۰/۹۰ است. اگر اجزاء به صورت موازی قرار گرفته باشند و مستقل از همدیگر کار کنند، احتمال کار کردن سیستم چقدر است؟

الف) ۰/۱۰ ب) ۰/۸۱ ج) ۰/۹۰ د) ۰/۹۹

۲۸) در یک خانوادهٔ دو نفری می‌دانیم که یکی از فرزندان پسر است، با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان دختر است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۳}{۴}$

۲۹) یک جعبه ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ سفید دارد. دو مهره به طور متوالی بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. ملاحظه شده که مهرهٔ دوم سفید است. احتمال اینکه مهرهٔ اول هم سفید باشد چقدر است؟

الف) $\frac{۳}{۹}$ ب) $\frac{۳}{۸}$ ج) $\frac{۳}{۱۱}$ د) $\frac{۴}{۹}$

جواب تست‌های فصل هفتم

۱) گزینهٔ «الف»؛ زیرا:

$$P=\frac{۰/۱\times۰/۸}{۰/۱\times۰/۲+۰/۱\times۰/۸}=\frac{۰/۰۸}{۰/۱}=۰/۸=\%۸۰$$

۲) گزینهٔ «ج»؛ زیرا:

$$P=\frac{۰/۱۰\times۰/۸۰}{۰/۱۰\times۰/۸۰+۰/۲۰\times۰/۰۴}=\frac{۰/۰۸}{۰/۰۸۸}=\frac{۸۰}{۸۸}$$

۳) گزینهٔ «ب»؛ زیرا، اگر پیشامد کار کردن دستگاه‌ها را به ترتیب با حروف A ، B ، C ، D و E نمایش دهیم؛ داریم:

$$\text{احتمال کار کردن دستگاه}=P(ABCDE)+P(ABCD\overline{E})+P(ABC\overline{D}E)$$
$$+P(AB\overline{C}DE)+P(A\overline{B}CDE)+P(\overline{A}BCDE)$$

$$\text{احتمال کار کردن دستگاه}=(\frac{۸}{۱۰})^۵+۵(\frac{۸}{۱۰})^۴(\frac{۲}{۱۰})=۰/۷۳۷۲۸$$

$$\text{احتمال کار \underline{نکردن} دستگاه}=۱-۰/۷۳۷۲۸=۰/۲۶۲۷۲$$

۴) گزینه «الف» صحیح است.

۵) گزینه «ب» صحیح است.

۶) گزینهٔ «ب»؛ زیرا:

$$P(A)=\frac{۳}{۶}\quad,\quad P(B)=\frac{۲}{۶}\quad,\quad P(A\cap B)=P(\{۳\})=\frac{۱}{۶}$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}=P(A\cap B)$$

۷) گزینهٔ «د»؛ زیرا:

$$\text{احتمال این که فقط شخص A موفق شود}=P(A)\times P(\overline{B})=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۴۲}{۱۰۰}$$

۸) گزینهٔ «ب»؛ زیرا:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۳P(B)=۰/۰۶\Rightarrow P(B)=۰/۲$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۳+۰/۲-۰/۰۶=۰/۴۴$$

۹) گزینهٔ «الف»؛ زیرا:

۱۰) گزینهٔ «د»؛ زیرا:

$$n(S)=۵!=۱۲۰\quad,\quad n(A)=۲\times۴!=۴۸\quad\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۸}{۱۲۰}=۰/۴$$

۱۱) گزینهٔ «د»؛ زیرا:

$$\text{احتمال آن که هیچ یک به هدف برخورد نکند}=(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۵})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

۱۲) گزینهٔ «د»؛ زیرا:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۱۵}$$

$$P(A'\cup B')=P[(A\cap B)']=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

۱۳) گزینهٔ «الف»؛ زیرا:

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(A')=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(B\cap A')=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

$$P(A'|B)=\frac{P(B\cap A')}{P(B)}\Rightarrow P(A'|B)=۱-P(A|B)=\frac{P(B\cap A')}{P(B)}$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۳}=\frac{P(B\cap A')}{P(B)}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{\frac{۱}{۸}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۱۶}$$

۱۴) گزینهٔ «د»؛ زیرا:

A: احتمال برف آمدن در امروز B: احتمال برف آمدن در فردا

$$P(A)=۰/۲\Rightarrow P(A')=۱-۰/۲=۰/۸\quad,\quad P(B)=۰/۲۲\quad,$$

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow P(B\cap A)=۰/۷\times۰/۲=۰/۱۴$$

$$P(B\cup A)=P(B)+P(A)+P(B\cap A)=۰/۲+۰/۲۲-۰/۱۴=۰/۲۸$$

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{P[(B\cup A)']}{P(A')}=\frac{۱-P(B\cup A)}{P(A')}=\frac{۱-۰/۲۸}{۰/۸}=۰/۹$$

۱۵) گزینهٔ «د»؛ زیرا:

$$P_۱=P(\text{احتمال آبی بودن به شرط اینکه مهرهٔ انتقال یافته آبی باشد})=\frac{۵}{۹}\times\frac{۵}{۱۰}=\frac{۲۵}{۹۰}$$

$$P_۲=P(\text{احتمال آبی بودن به شرط اینکه مهرهٔ انتقال یافته سفید باشد})=\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۶}{۹۰}$$

$$P=P_۱+P_۲=\frac{۲۵}{۹۰}+\frac{۱۶}{۹۰}=\frac{۴۱}{۹۰}$$

۱۶) گزینه «ب»؛ زیرا:

$$A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

۱۷) گزینه «د»؛ زیرا:

احتمال این که یک پرواز از بین پروازهای ظهر، تا نیمه شب تأخیر داشته باشد $=P_۱=۰/۲\times۰/۷۵=۰/۱۵$

احتمال این که کل پروازهای با تأخیر، بین ظهر تا نیمه شب رخ دهد $=P_۲=۰/۵۰\times۰/۱۵=۰/۳$

احتمال تأخیر نداشتن $=P=۱-۰/۳=۰/۷$

۱۸) گزینه «الف»؛ زیرا:

$$n(S)=۶! \quad , \quad n(A)=۲\times۳!\times۳! \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۳!\times۳!}{۶!}=\frac{۱}{۱۰}$$

۱۹) گزینه «ج»؛ زیرا:

$$P(B_۲|A)=\frac{P(B_۲)P(A|B_۲)}{P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+P(B_۳)P(A|B_۳)}$$

$$=\frac{۰/۳\times۰/۰۲}{۰/۲\times۰/۰۱+۰/۳\times۰/۰۲+۰/۲\times۰/۰۵}=\frac{۰/۰۰۶}{۰/۰۳۳}=\frac{۲}{۱۱}$$

۲۰) گزینه «ب»؛ زیرا: $P=۰/۴۰\times۰/۰۲+۰/۶۰\times۰/۰۵=۰/۰۳۸=\%۳/۸$

۲۱) گزینه «ج»؛ زیرا: $P=\dfrac{\binom{۶}{۴}}{\binom{۸}{۴}}=\dfrac{۱۵}{۷۰}=\dfrac{۳}{۱۴}$

۲۲) گزینه «ج»؛ زیرا:

A: پیشامد وجود نفت در منطقهٔ اول   B: پیشامد وجود نفت در منطقهٔ دوم

احتمال این که فقط در یک منطقه نفت وجود داشته باشد. $=P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

$$=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=(۱-P(A))P(B)+P(A)(۱-P(B))$$

$$=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}=\frac{۴۴}{۱۰}$$

۲۳) گزینه «ج»؛ زیرا: $N=۶\times۶\times۲=۷۲$

۲۴) گزینه «الف»؛ زیرا:

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)$$

$$=P(A)P(E|A)+P(B)(۱-P(E^c|B))=۰/۱\times۰/۳+۰/۴\times۰/۲=۰/۱۱$$

۲۵) گزینه «ب»؛ زیرا:

A: درجات دانشگاهی داشتن   B: مدیر بودن

$$P(A)=۰/۲۰ \quad , \quad P(B|A)=۰/۵۰ \quad , \quad P(B)=۰/۸۰ \quad , \quad P(B|A')=۰/۳۰$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}=\frac{۰/۵۰\times۰/۲۰}{۰/۵۰\times۰/۲۰+۰/۳۰\times۰/۸۰}=۰/۲۹$$

۲۶) گزینه «د»؛ زیرا:

احتمال قرمز بودن یک مهره $\frac{۳}{۱۰}$، احتمال سبز بودن یک مهره $\frac{۲}{۱۰}$، احتمال سفید بودن یک مهره $\frac{۵}{۱۰}$

تعداد حالات جا به جایی این سه مهره $=۳!$

$$P=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰}\times۳!=۰/۱۸$$

۲۷) گزینه «ج»؛ زیرا: $P($کار کردن سیستم$)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

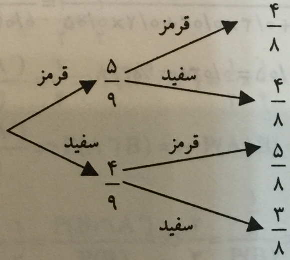
$$= P(A)+P(B)-P(A)P(B) = ۰/۹+۰/۹-(۰/۹\times ۰/۹) = ۰/۹۹$$

۲۸) گزینه «ب»؛ زیرا:

فضای نمونه $S=\{PP, PD, DP, DD\}$

$$P(\text{لااقل یکی دختر} \mid \text{یکی پسر است}) = \frac{\frac{۲}{۴}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$

۲۹) گزینه «ب»؛ زیرا:



$$P(\text{سفید بودن مهرهٔ اول} \mid \text{مهرهٔ دوم سفید است}) = \frac{\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}} = \frac{۳}{۸}$$