دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

هوش مصنوعی

بهار ۱۴۰۵

استاد: ماری‌اوریاد
گردآورندگان: ریحانه ابراهیم زاده، پارسا پورنعمت، فاطیما تیمارچی، باران حسینی، آریانا زال نژاد، امید شفاعت

تمرین سوم — **شبکه‌های بیزین و مدل‌های مخفی مارکوف** — مهلت ارسال: ۸ خرداد

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمارین تا سقف ۴ روز و در مجموع ۱۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال‌شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر ساعت تأخیر غیر مجاز ۰.۵ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- پاسخنامه سوالات را در سامانه کوئرا و به فرمت AI_HW3_<STUDENT_ID> بارگزاری کنید.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

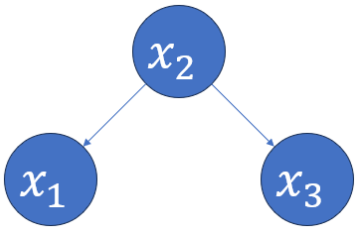
۱. (۲۰ نمره) درستی و نادرستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

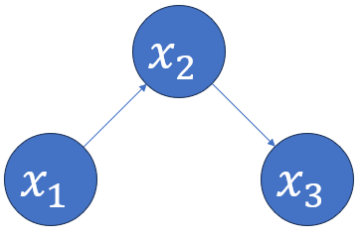
(آ) در یک شبکه‌ی بیزی، همواره هر گره به شرط دیدن والدین خود، از تمام گره‌های غیرفرزند خود مستقل شرطی است.

(ب) در ساختار common effect به صورت $X \to C \leftarrow Y$، اگر ما گره A را که یکی از اجداد گره C است مشاهده کنیم، مسیر بین X و Y فعال می‌شود.

(ج) الگوریتم d-separation شرط لازم و کافی‌ای برای استقلال است، به این معنی که اگر دو متغیر X و Y طبق این‌الگوریتم از هم جدا نشوند (یعنی تمام مسیرهای میان آن‌ها غیرفعال نباشد)، آنگاه این دو متغیر قطعا مستقل نمی‌باشند.

(د) هر توزیع توأم $P(X_1, X_2, X_3)$ که با استفاده از توزیع‌های احتمال شرطی (CPD) در شبکه بیزی سمت چپ قابل بیان باشد، با اعمال تغییرات مناسب روی CPD ها در شبکه بیزی سمت راست نیز قابل بیان است.





(ه) در یک شبکه‌ی بیز با دامنه‌ی مقادیر باینری، پیچیدگی زمانی الگوریتم Inference by Enumeration برای محاسبه‌ی $P(X|\mathbf{e})$ همواره $O(2^n)$ است که در آن n تعداد کل متغیرهای شبکه می‌باشد.

(و) در الگوریتم Variable Elimination، اگر دو فاکتور هیچ متغیر مشترکی نداشته باشند، join کردن آن‌ها بی‌فایده است.

(ز) حذف یک متغیر در Variable Elimination همیشه باعث کوچک‌تر شدن فاکتورها می‌شود.

(ح) در هنگام انجام Inference در یک شبکهٔ بیزی می‌توان همهٔ متغیرهایی را که از اجداد متغیرهای Query و Evidence نیستند، در نظر نگرفت.

(ط) اندازهٔ جداول احتمالات شرطی در یک شبکهٔ بیزی با N متغیر، با دامنه‌هایی حداکثر D عضوی، به شرطی که هر رأس حداکثر K پدر داشته باشد، دارای کران بالای $N \times D^{K+۱}$ است.

(ی) Inference by Enumeration و Variable Elimination هر دو همواره مقادیر احتمال پسین یکسانی را تولید می‌کنند، اما حذف متغیر معمولاً سریع‌تر است، زیرا متغیرها را در اولین فرصت marginalize می‌کند، نه پس از محاسبهٔ کامل توزیع مشترک.

۲. (۲۰ نمره) یک موزه دارای سیستم امنیتی هوشمند است. در هر شب، وضعیت واقعی موزه (متغیر مخفی) یکی از دو حالت زیر است:

$$X_t \in \{N, T\}$$

N: وضعیت عادی (Normal) - T: وجود دزد در موزه (Thief)

مشاهدات سیستم امنیتی در هر شب (خروجی قابل مشاهده) یکی از مقادیر زیر است:

$$E_t \in \{\text{silent}, \text{motion}, \text{alarm}\}$$

silent : بدون هشدار - motion : سنسور حرکتی - alarm : آژیر اصلی

پارامترهای مدل

$$P(X_۱ = T) = ۰/۳, \quad P(X_۱ = N) = ۰/۷$$
$$P(X_t = T \mid X_{t-۱} = T) = ۰/۸, \quad P(X_t = N \mid X_{t-۱} = T) = ۰/۲$$
$$P(X_t = T \mid X_{t-۱} = N) = ۰/۱۵, \quad P(X_t = N \mid X_{t-۱} = N) = ۰/۸۵$$

Observation E_t	$P(E_t \mid X_t = T)$	$P(E_t \mid X_t = N)$
silent	۰.۱	۰.۷
motion	۰.۳	۰.۲
alarm	۰.۶	۰.۱

فرض کنید در دو شب متوالی داریم:

$$E_۱ = \text{motion}, \quad E_۲ = \text{alarm}$$

(آ) تمام حالات ممکن $(X_۱, X_۲)$ را نوشته و برای هر کدام مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$P(X_۱, E_۱, X_۲, E_۲)$$

(ب) احتمال زیر را محاسبه کنید:

$$P(X_۲ = T \mid E_۱ = \text{motion}, E_۲ = \text{alarm})$$

۳. (۱۵ نمره) یک تیم فوتبال در هر مسابقه می‌تواند یکی از سه نتیجه را کسب کند: W = برد، D = مساوی، L = باخت

تحلیلگر تیم متوجه شده است که نتیجه مسابقه بعد فقط به نتیجه مسابقه فعلی بستگی دارد. ماتریس احتمال انتقال P به صورت زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۳ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۰/۴ & ۰/۲ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

ترتیب ستون‌ها از چپ به راست $\mathrm{W, D, L}$ است. یعنی:

- بعد از برد (W) ← با احتمال ۰/۵ دوباره برد، ۰/۳ مساوی، ۰/۲ باخت
- بعد از مساوی (D) ← با احتمال ۰/۴ برد، ۰/۴ مساوی، ۰/۲ باخت
- بعد از باخت (L) ← با احتمال ۰/۲ برد، ۰/۳ مساوی، ۰/۵ باخت

(آ) نمودار حالت (State Diagram) این زنجیره مارکوف را رسم کنید.

(ب) اگر توزیع اولیه در مسابقه اول به صورت زیر باشد:

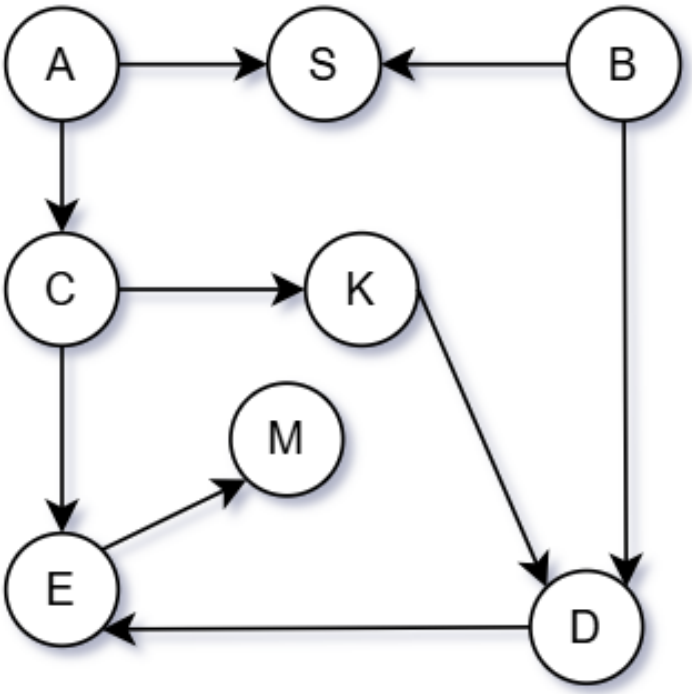
$$P(X_۱ = W) = ۰/۴, \quad P(X_۱ = D) = ۰/۴, \quad P(X_۱ = L) = ۰/۲$$

آنگاه محاسبه کنید:

$$P(X_۱ = L,\, X_۲ = D,\, X_۳ = W) = ?$$

(ج) با فرض توزیع اولیه بالا، احتمال اینکه تیم در مسابقه سوم ببرد را محاسبه کنید.

۴. (۲۰ نمره) شبکه بیزی زیر را در نظر بگیرید. درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های استقلال شرطی زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.



(آ) $A \perp B$

(ب) $A \perp B \mid M$

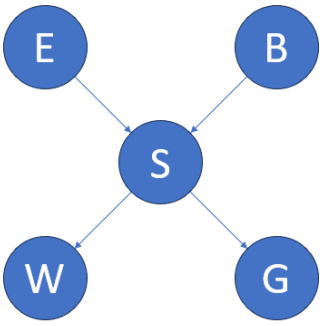
(ج) $A \perp B \mid \{M, K\}$

(د) فرض کنیم گره‌های S و M مشاهده شده باشند. آیا میتوان با اضافه کردن گره‌های دیگری به مجموعه شواهد، متغیرهای A و B را از یکدیگر کاملاً مستقل کرد؟

۵. (۱۵ نمره) در شبکه‌ی بیز با توزیع‌های داده‌شده‌ی زیر، مقادیر خواسته شده را محاسبه کنید.

(آ) $P(W \mid S, G)$

(ب) $P(E \mid G)$



S	B	E	$P(S \mid B, E)$
$+s$	$+b$	$+e$	۰.۹
$+s$	$+b$	$-e$	۰.۸
$+s$	$-b$	$+e$	۰.۲
$+s$	$-b$	$-e$	۰
$-s$	$+b$	$+e$	۰.۱
$-s$	$+b$	$-e$	۰.۲
$-s$	$-b$	$+e$	۰.۸
$-s$	$-b$	$-e$	۱

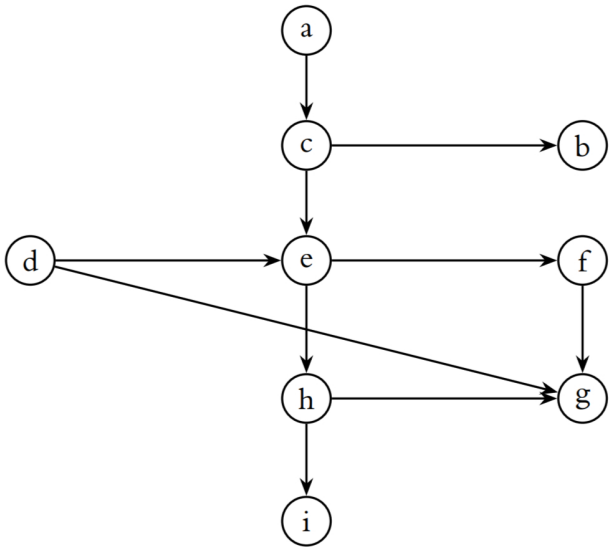
B	$P(B)$
$+b$	۰.۱
$-b$	۰.۹

E	$P(E)$
$+e$	۰.۱
$-e$	۰.۹

W	S	$P(W \mid S)$
$+w$	$+s$	۰.۸
$+w$	$-s$	۰.۳
$-w$	$+s$	۰.۲
$-w$	$-s$	۰.۷

G	S	$P(G \mid S)$
$+g$	$+s$	۰.۵
$+g$	$-s$	۰.۴
$-g$	$+s$	۰.۵
$-g$	$-s$	۰.۶

۶. (۱۰ نمره) گراف زیر را در نظر بگیرید:



(آ) فرض کنید متغیرهای a, b, e, h, i دو مقداری، متغیرهای c, f, g سه مقداری و متغیر d چهار مقداری است. با توجه به والدهای هر گره در گراف بالا، کمترین تعداد سطر موردنیاز برای جدول‌های احتمالات شرطی هر گره (CPT) را مشخص کنید.

(ب) با استفاده از Variable Elimination، مقدار زیر را حساب کنید:

$$P(e, f, c, g, i)$$

ابتدا ترتیب دلخواه خود را نوشته و سپس محاسبات خود را کامل بنویسید. جواب نهایی و مراحل شما باید به صورت روابط ریاضیاتی مختلف روی توزیع‌های احتمالاتی مختلف موجود در شبکه باشند.