به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۵

استقلال، پایه، بعد و رتبه | **تمرین تئوری دوم** | مهلت تحویل: ۲۲ اردیبهشت

پرسش ۱ (۳۰ نمره) بردار های $v_1, \dots, v_m \in V$ مستقل خطی هستند. ثابت کنید:

(الف) برای هر $1 < k \leq m$، بردارهای

$$v_1, \dots, v_{k-1},\ v_k - v_1,\ v_{k+1}, \dots, v_m$$

نیز مستقل خطی هستند.

(ب) برای هر $w \in V$

$$\dim \operatorname{span}(v_1 + w,\ v_2 + w, \dots, v_m + w) \geq m - 1.$$

پرسش ۲ (۳۰ نمره) فرض کنید $v_1, \dots, v_m \in V$، و

$$w_k = v_1 + \cdots + v_k, \qquad k = 1, \dots, m.$$

نشان دهید که $\{v_1, \dots, v_m\}$ پایه‌ای برای V است اگر و تنها اگر $\{w_1, \dots, w_m\}$ پایه‌ای برای V باشد.

پرسش ۳ (۴۰ نمره) فرض کنید A ماتریسی مربعی است و $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$ باشد. ثابت کنید دستگاه‌های $Ax = 0$ و $A^2x = 0$ فضای جواب یکسانی دارند.