به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی
بهار ۱۴۰۵

ضرب داخلی، تعامد | **تمرین تئوری چهارم** | غیرتحویلی

پرسش ۱ (۰ نمره) فرض کنید $v_1, \dots, v_n$ یک پایه برای فضای ضرب داخلی V باشد. ثابت کنید پایه‌ای مانند $u_1, \dots, u_n$ وجود دارد به طوری که

$$\langle v_j, u_k \rangle = \delta_{jk}.$$

یعنی

$$\langle v_j, u_k \rangle = 1 \quad \text{اگر} j = k,$$

و

$$\langle v_j, u_k \rangle = 0 \quad \text{اگر} j \neq k.$$

پاسخ بدون کاستن از کلیت، فرض کنید پس از اعمال فرایند گرام‌ـاشمیت روی $\{v_i\}$، پایه‌ی متعامد یکه‌ی $\{e_1, \dots, e_n\}$ را داشته باشیم به طوری که

$$\begin{aligned}
v_1 &= k_1^{(1)} e_1, \\
v_2 &= k_1^{(2)} e_1 + k_2^{(2)} e_2, \\
v_3 &= k_1^{(3)} e_1 + k_2^{(3)} e_2 + k_3^{(3)} e_3, \\
&\vdots \\
v_n &= k_1^{(n)} e_1 + k_2^{(n)} e_2 + \cdots + k_n^{(n)} e_n,
\end{aligned}$$

که در آن $k_j^{(j)} \neq 0$ و $\{e_i\}$ یک پایه‌ی متعامد یکه است. (دقت شود $k_j^{(j)} \neq 0$ زیرا v_i ها از یکدیگر مستقل هستند.)
اکنون $u_n, u_{n-1}, \dots, u_1$ را به صورت پس‌رو می‌سازیم.

مرحله ۱: یافتن u_n

شرایط:

$$\langle v_j, u_n \rangle = 0 \quad (j < n), \qquad \langle v_n, u_n \rangle = 1.$$

از آنجا که v_j برای $j < n$ فقط ترکیبی از $e_1, \dots, e_j$ است و فاقد e_n می‌باشد، شرط $\langle v_j, u_n \rangle = 0$ ایجاب می‌کند که u_n بر $e_1, \dots, e_{n-1}$ عمود باشد.
بنابراین

$$u_n = \alpha e_n.$$

از شرط $\langle v_n, u_n \rangle = 1$ داریم:

$$\langle k_n^{(n)} e_n, \alpha e_n \rangle = k_n^{(n)} \alpha = 1 \implies \alpha = \frac{1}{k_n^{(n)}}.$$

پس

$$u_n = \frac{1}{k_n^{(n)}} e_n.$$

مرحله ۲: یافتن u_{n-1}

شرایط:

$$\langle v_j, u_{n-1} \rangle = 0 \ (j < n-1), \quad \langle v_{n-1}, u_{n-1} \rangle = 1, \quad \langle v_n, u_{n-1} \rangle = 0.$$

برای $j < n-1$، v_j فقط ترکیبی از $e_1, \dots, e_j$ است و e_{n-1}, e_n در آن ظاهر نمی‌شوند. بنابراین u_{n-1} می‌تواند در $\operatorname{span}\{e_{n-1}, e_n\}$ باشد. می‌نویسیم:

$$u_{n-1} = a e_{n-1} + b e_n.$$

از $\langle v_{n-1}, u_{n-1} \rangle = 1$:

$$\langle k_{n-1}^{(n-1)} e_{n-1}, a e_{n-1} + b e_n \rangle = k_{n-1}^{(n-1)} a = 1 \implies a = \frac{1}{k_{n-1}^{(n-1)}}.$$

از $\langle v_n, u_{n-1}\rangle = 0$:

$$\langle k_{n-1}^{(n)} e_{n-1} + k_n^{(n)} e_n, a e_{n-1} + b e_n\rangle = k_{n-1}^{(n)} a + k_n^{(n)} b = 0.$$

با جایگذاری $a = 1/k_{n-1}^{(n-1)}$:

$$\frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_{n-1}^{(n-1)}} + k_n^{(n)} b = 0$$

پس

$$b = -\frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_n^{(n)} k_{n-1}^{(n-1)}}.$$

بنابراین

$$u_{n-1} = \frac{1}{k_{n-1}^{(n-1)}} e_{n-1} - \frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_n^{(n)} k_{n-1}^{(n-1)}} e_n.$$

مرحله ۳: ادامه به سمت u_1

به همین ترتیب، u_{n-2} در فضای $\operatorname{span}\{e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\}$ قرار دارد و ضرایب آن از شرایط متعامد بودن با $v_1, \ldots, v_{n-3}$ و شرط $\langle v_{n-2}, u_{n-2}\rangle = 1$ و شرط‌های متعامد بودن با v_{n-1}, v_n به دست می‌آید. این فرایند تا u_1 ادامه می‌یابد.

مرحله ۴: اثبات پایه بودن $\{u_k\}$

هر u_t ضریب غیرصفر برای e_t دارد (به مقدار $1/k_t^{(t)}$) و هیچ مؤلفه‌ای در $e_1, \ldots, e_{t-1}$ ندارد. بنابراین مجموعه $\{u_1, \ldots, u_n\}$ مستقل خطی است و چون n عضو دارد، یک پایه برای V تشکیل می‌دهد.

نتیجه

چنین پایه‌ای با استفاده از فرایند پس‌رو گرام‌ـاشمیت ساخته می‌شود و شرط $\langle v_j, u_k\rangle = \delta_{jk}$ را برآورده می‌کند.

پایه‌ی مطلوب وجود دارد و به صورت بالا ساخته می‌شود.

پرسش ۲ (۰ نمره)

فرض کنید V متمم متعامد W در $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی $V = W^\perp$.

آیا ماتریسی وجود دارد که فضای سطری آن V و فضای پوچ آن W باشد؟ با شروع از یک پایه برای V، چنین ماتریسی را بسازید و درستی آن را اثبات کنید.

پاسخ

بله، چنین ماتریسی وجود دارد.

ساخت ماتریس: فرض کنید $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ یک پایه برای V باشد (بنابراین $k = \dim V$). ماتریس A از نوع $k \times n$ را تعریف می‌کنیم که سطرهای آن همان بردارهای پایه باشند: ماتریس A از نوع $k \times n$ را تعریف می‌کنیم که سطرهای آن $v_1, \ldots, v_k$ هستند.

اثبات:

(آ) **فضای سطری A برابر V است:** سطرهای ماتریس A دقیقاً پایه V را تشکیل می‌دهند، بنابراین

$$\operatorname{row}(A) = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = V.$$

(ب) **فضای پوچ A برابر W است:** طبق تعریف داریم:

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

معادله $Ax = 0$ معادل است با این که تک‌تک سطرهای ماتریس A بر x عمود باشند:

$$v_i \cdot x = 0 \quad \text{برای همه } i = 1, \ldots, k.$$

یعنی x بر تمام بردارهای پایه‌ی V عمود است. پس $x \perp v$ برای هر $v \in V$، که یعنی $x \in V^\perp$. از آنجا که فرض شده $V = W^\perp$، طبق قضیه متمم متعامد داریم:

$$V^\perp = (W^\perp)^\perp = W.$$

در نتیجه $\ker(A) = W$.

نکته: اگر $V = \{0\}$ (یعنی $W = \mathbb{R}^n$)، ماتریس $0 \times n$ تعریف می‌شود که فضای پوچ آن تمام $\mathbb{R}^n$ است.

پرسش ۳ (۰ نمره)

فرض کنید W_1 و W_2 دو زیرفضا از یک فضای ضرب‌داخلی V باشند. نشان دهید که:

$$\text{(a)} \qquad (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp,$$

$$\text{(b)} \qquad (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$

پاسخ

(a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

از آن‌جا که

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2,$$

داریم:

$$(W_1 + W_2)^\perp \subseteq W_1^\perp.$$

به‌طور مشابه،

$$(W_1 + W_2)^\perp \subseteq W_2^\perp.$$

پس

$$(W_1 + W_2)^\perp \subseteq W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

اکنون عکس آن را نشان می‌دهیم. فرض کنید

$$u \in W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

در این صورت:

$$\langle u, w_1 \rangle = 0 \quad \text{برای همه} \quad w_1 \in W_1,$$

و همچنین:

$$\langle u, w_2 \rangle = 0 \quad \text{برای همه} \quad w_2 \in W_2.$$

هر $w \in W_1 + W_2$ را می‌توان به صورت

$$w = w_1 + w_2$$

نوشت، که در آن $w_1 \in W_1$ و $w_2 \in W_2$.

پس:

$$\langle u, w \rangle = \langle u, w_1 + w_2 \rangle = \langle u, w_1 \rangle + \langle u, w_2 \rangle = 0 + 0 = 0.$$

بنابراین

$$u \in (W_1 + W_2)^\perp.$$

در نتیجه:

$$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subseteq (W_1 + W_2)^\perp.$$

با ترکیب دو شمول نتیجه می‌گیریم:

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

(b) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

ابتدا نشان می‌دهیم

$$W_1^\perp + W_2^\perp \subseteq (W_1 \cap W_2)^\perp.$$

اگر $u \in W_1^\perp + W_2^\perp$، آنگاه $u = u_1 + u_2$ که $u_1 \in W_1^\perp$ و $u_2 \in W_2^\perp$. برای هر $w \in W_1 \cap W_2$ داریم $w \in W_1$ و $w \in W_2$، پس

$$\langle u, w \rangle = \langle u_1 + u_2, w \rangle = \langle u_1, w \rangle + \langle u_2, w \rangle = 0 + 0 = 0.$$

بنابراین $u \in (W_1 \cap W_2)^\perp$ و شمول بالا ثابت شد.

اکنون شمول عکس را نشان می‌دهیم. به دلیل متناهی‌بعد بودن (یا با استفاده از خاصیت $(S^\perp)^\perp = S$ برای زیرفضاها در فضای ضرب‌داخلی متناهی‌بعد)، از بخش (a) داریم:

$$(W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp} = W_1 \cap W_2.$$

با گرفتن متمم متعامد از دو طرف نتیجه می‌شود:

$$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$

پرسش ۴ (۰ نمره)

فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای ضرب داخلی V روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. نشان دهید که برای هر $x \in V$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i$$

و نیز برای هر k با $1 \leq k \leq n$:

$$\langle x, x \rangle \geq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

سپس توضیح دهید چرا بردارهای غیرصفر که دوبه‌دو متعامد هستند، مستقل خطی می‌باشند.

پاسخ

بخش اول: نمایش بردار بر حسب پایه

چون $\{v_i\}$ یک پایه برای V است، هر بردار x را می‌توان به طور یکتا به صورت ترکیب خطی نوشت:

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

برای یافتن a_i، از دو طرف با v_i ضرب داخلی می‌گیریم:

$$\langle x, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j, v_i \rangle.$$

از آنجا که پایه متعامد یکه است، $\langle v_j, v_i \rangle = \delta_{ji}$. پس فقط جمله $j = i$ باقی می‌ماند:

$$\langle x, v_i \rangle = a_i.$$

بنابراین:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i.$$

بخش دوم: نامساوی

می‌نویسیم:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i \ + \ \sum_{i=k+1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i =: u + w.$$

واضح است که u و w متعامدند (چون هر v_i با $i \leq k$ با هر v_j با $j > k$ متعامد است). پس:

$$\langle x, x \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle.$$

اما $\langle w, w \rangle \geq 0$ و

$$\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

در نتیجه:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, v_i \rangle|^2 + \langle w, w \rangle \geq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

بخش سوم: استقلال خطی بردارهای متعامد

فرض کنید $\{w_1, \dots, w_m\}$ بردارهای ناصفری باشند که دوبه‌دو متعامدند، یعنی $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ برای $i \neq j$. اگر ترکیب خطی صفر داشته باشیم:

$$c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m = 0,$$

برای هر j از دو طرف با w_j ضرب داخلی می‌گیریم:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} c_i w_i, w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle w_i, w_j \rangle = c_j \langle w_j, w_j \rangle = 0.$$

چون $w_j \neq 0$، داریم $\langle w_j, w_j \rangle > 0$، بنابراین $c_j = 0$. از آنجا که این کار برای همه j برقرار است، همه ضرایب صفرند و بردارها مستقل خطی هستند.

پرسش ۵ (۰ نمره) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد. ثابت کنید برای همه‌ی $u, v \in V$:

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|u+v\|^{۲} - \|u-v\|^{۲} + \|u+iv\|^{۲} i - \|u-iv\|^{۲} i}{۴}.$$

(در اینجا i یکهٔ موهومی است، یعنی $i^{۲} = -۱$.)

پاسخ برای اثبات، از رابطه‌ی بین نرم و ضرب داخلی استفاده می‌کنیم:

$$\|x\|^{۲} = \langle x, x\rangle.$$

گام اول: بسط هر جمله

ابتدا هر جمله را بر حسب ضرب داخلی می‌نویسیم.

$$\|u+v\|^{۲} = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle.$$

$$\|u-v\|^{۲} = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle.$$

$$\|u+iv\|^{۲} = \langle u+iv, u+iv\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,iv\rangle + \langle iv,u\rangle + \langle iv,iv\rangle.$$

می‌دانیم در فضای ضرب داخلی مختلط داریم:

$$\langle u, iv\rangle = -i\langle u,v\rangle,$$

پس:

$$\|u+iv\|^{۲} = \|u\|^{۲} - i\langle u,v\rangle + i\langle v,u\rangle + \|v\|^{۲}.$$

$$\|u-iv\|^{۲} = \langle u-iv, u-iv\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,-iv\rangle + \langle -iv,u\rangle + \langle -iv,-iv\rangle.$$

پس:

$$\|u-iv\|^{۲} = \|u\|^{۲} + i\langle u,v\rangle - i\langle v,u\rangle + \|v\|^{۲}.$$

گام دوم: ترکیب جملات

اکنون عبارت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\|u+v\|^{۲} - \|u-v\|^{۲} \\
&= \big(\|u\|^{۲} + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \|v\|^{۲}\big) - \big(\|u\|^{۲} - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \|v\|^{۲}\big) \\
&= ۲\langle u,v\rangle + ۲\langle v,u\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|u+iv\|^{۲} - \|u-iv\|^{۲} \\
&= \big(\|u\|^{۲} - i\langle u,v\rangle + i\langle v,u\rangle + \|v\|^{۲}\big) - \big(\|u\|^{۲} + i\langle u,v\rangle - i\langle v,u\rangle + \|v\|^{۲}\big) \\
&= -۲i\langle u,v\rangle + ۲i\langle v,u\rangle.
\end{aligned}$$

گام سوم: اعمال ضرایب و جمع نهایی

عبارت اصلی:

$$\frac{\big(\|u+v\|^{۲} - \|u-v\|^{۲}\big) + i\big(\|u+iv\|^{۲} - \|u-iv\|^{۲}\big)}{۴}.$$

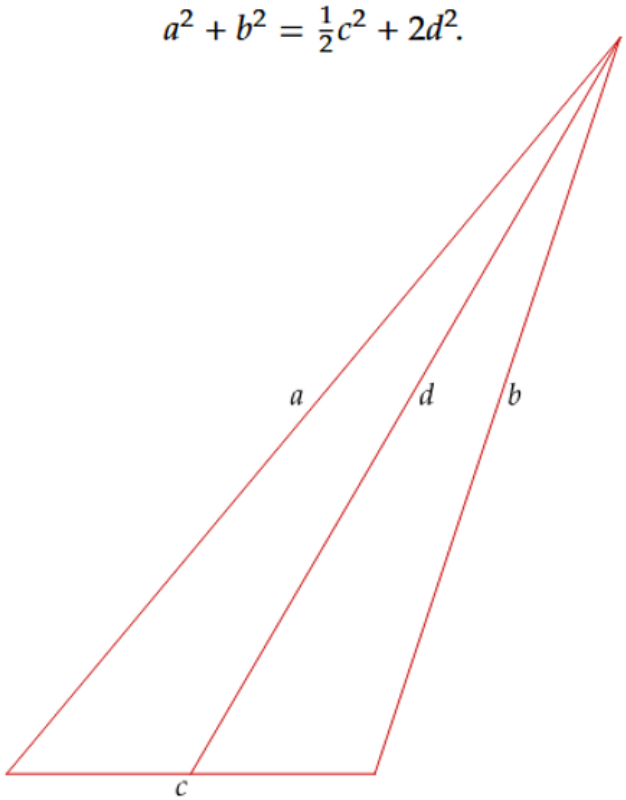
جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\big(۲\langle u,v\rangle + ۲\langle v,u\rangle\big) + i\big(-۲i\langle u,v\rangle + ۲i\langle v,u\rangle\big)}{۴} \\
&= \frac{۲\langle u,v\rangle + ۲\langle v,u\rangle + ۲\langle u,v\rangle - ۲\langle v,u\rangle}{۴} \\
&= \frac{۲\langle u,v\rangle + ۲\langle u,v\rangle}{۴} = \frac{۴\langle u,v\rangle}{۴} = \langle u,v\rangle.
\end{aligned}$$

و بدین ترتیب تساوی ثابت می‌شود.

پرسش ۶ (۰ نمره) از ضرب داخلی برای اثبات تساوی آپولونیوس استفاده کنید: در مثلثی با اضلاع به طول‌های a، b و c، فرض کنید d طول پاره‌خطی باشد که از وسط ضلع به طول c به رأس مقابل رسم شده است. آن‌گاه:

$$a^۲ + b^۲ = \frac{۱}{۲}c^۲ + ۲d^۲.$$



پاسخ برای سادگی، مبدأ را روی رأس C قرار می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$\vec{A} = \vec{u}, \quad \vec{B} = \vec{v}.$$

بنابراین:

$$CA = b = \|\vec{u}\|, \quad CB = a = \|\vec{v}\|, \quad AB = c = \|\vec{v} - \vec{u}\|.$$

وسط M روی AB برابر است با:

$$\vec{M} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{۲}.$$

میانه $d = CM$ نیز:

$$d = \|\vec{M}\| = \left\|\frac{\vec{u} + \vec{v}}{۲}\right\|.$$

$$a^۲ = \|\vec{v}\|^۲, \quad b^۲ = \|\vec{u}\|^۲.$$

$$a^۲ + b^۲ = \|\vec{u}\|^۲ + \|\vec{v}\|^۲. \tag{۱}$$

$$c^۲ = \|\vec{v} - \vec{u}\|^۲ = \|\vec{v}\|^۲ + \|\vec{u}\|^۲ - ۲\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle.$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}c^۲ = \frac{۱}{۲}\|\vec{u}\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|\vec{v}\|^۲ - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle. \tag{۲}$$

سپس:

$$d^۲ = \left\|\frac{\vec{u} + \vec{v}}{۲}\right\|^۲ = \frac{۱}{۴}\|\vec{u} + \vec{v}\|^۲ = \frac{۱}{۴}\big(\|\vec{u}\|^۲ + \|\vec{v}\|^۲ + ۲\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\big).$$

$$۲d^۲ = \frac{۱}{۲}\big(\|\vec{u}\|^۲ + \|\vec{v}\|^۲ + ۲\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\big) = \frac{۱}{۲}\|\vec{u}\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|\vec{v}\|^۲ + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle. \tag{۳}$$

$$\frac{۱}{۲}c^۲ + ۲d^۲ = \left(\frac{۱}{۲}\|\vec{u}\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|\vec{v}\|^۲ - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\right) + \left(\frac{۱}{۲}\|\vec{u}\|^۲ + \frac{۱}{۲}\|\vec{v}\|^۲ + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\right).$$

جملات $-\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ و $+\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ حذف می‌شوند:

$$\frac{۱}{۲}c^۲ + ۲d^۲ = \|\vec{u}\|^۲ + \|\vec{v}\|^۲.$$

از (۱) داریم:

$$a^۲ + b^۲ = \|\vec{u}\|^۲ + \|\vec{v}\|^۲.$$

پس:

$$a^۲ + b^۲ = \frac{۱}{۲}c^۲ + ۲d^۲.$$

$$\boxed{a^۲ + b^۲ = \frac{۱}{۲}c^۲ + ۲d^۲}$$

این همان قضیه آپولونیوس است که با استفاده از ضرب داخلی اثبات شد.