

بسمه تعالی

محمد مهدی عبدالله پور - ۹۵۳۱۰۵۷

(تحلیل کدها بعد از حل سوال های تئوری آمده است)

## Theory Questions

### Question 1

a.

$$P(B|A) = P(BA)/P(A) = 0.4/0.5 = 0.8$$

b.

$$P(B|!A) = ?$$

We know,  $P(B|A)P(A) + P(B|!A)P(!A) = P(B)$ .

$$\text{So, } P(B|!A) = (P(B) - P(B|A)P(A)) / P(!A) = (0.7 - 0.8 * 0.5) / 0.5 = 0.6$$

### Question 2

A.

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f_x dx$$

$$\text{if } t \geq 5, F(t) = \int_0^1 0.25 dx + \int_3^5 0.375 dx = 1 * 0.25 + (5 - 3) * 0.375$$

$$\text{if } 3 \leq t < 5, F(t) = \int_0^1 0.25 dx + \int_3^t 0.375 dx = 0.25 + (t - 3) * 0.375$$

$$\text{if } 1 < t < 3, F(t) = \int_0^1 0.25 dx = 0.25$$

$$\text{if } 0 < t \leq 1, F(t) = \int_0^t 0.25 dx = 0.25 * t$$

$$\text{if } t \leq 0, F(t) = 0$$

b.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d(F_Y(y))}{dy} = (-1) \left( \frac{d\left(F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{dy} \right) = \frac{f_X\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}}, \text{ we know } f_X \text{ so we have } f_Y(y)$$

Question 3

$$\begin{aligned} \text{if } V(X) = 0 \text{ then, } \sum p(x) * (x - E(X))^2 &= 0 = \\ &> \text{only } p(x = E(x)) \text{ can be nonzero, } \sum_{-\infty}^{\infty} p(x) \text{ should equal to 1, so } p(x \\ &= E(x)) \text{ has to be 1, so there is a constant } c \text{ (which is also } E(x)) \text{ that } p(x = c) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Proving other side

We know, If  $p(x=c)=1$  then for all  $d \neq c$   $p(x=d)=0$

$$E(X) = \sum p(x) * x = 1 * c = c$$

$$\text{So, } V(X) = E(X - E(X))^2 = \sum p(x) * (x - c)^2 = 1 * (0)^2 = 0$$

Question 4

$$E(X) = \int_0^1 16xy \, dy = \left(\frac{1}{2}\right) 16x$$

$$E(Y) = \int_0^{0.5} 16xy \, dx = \left(\frac{1}{2}\right) 16 * \left(\frac{1}{2}\right) y$$

Question 5

$$CDF_{Y_n}(y = t) = P_{Y_n}(y < t) = \left(P_{Unif}(x < t)\right)^n = t^n$$

$$f(t) = PDF_{Y_n} = \frac{d(CDF_{Y_n}(t))}{dt} = n * t^{n-1}$$

$$E(Y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * t \, dt = \int_0^1 n * t^{n-1} * t = \frac{n}{n+1}$$

Question 6

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2-2x+1)}{2} + \frac{1}{2}} dx = \left( \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) * \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} du \, dv = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi$$

$$I = \sqrt{2\pi}$$

$$E[Y] = e^{\frac{1}{2}}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2-4x+4)}{2} + 2} dx = \left( \frac{e^2}{\sqrt{2\pi}} \right) * \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) = e^2$$

$$V[Y] = e^2 - e$$

Question 7

A.

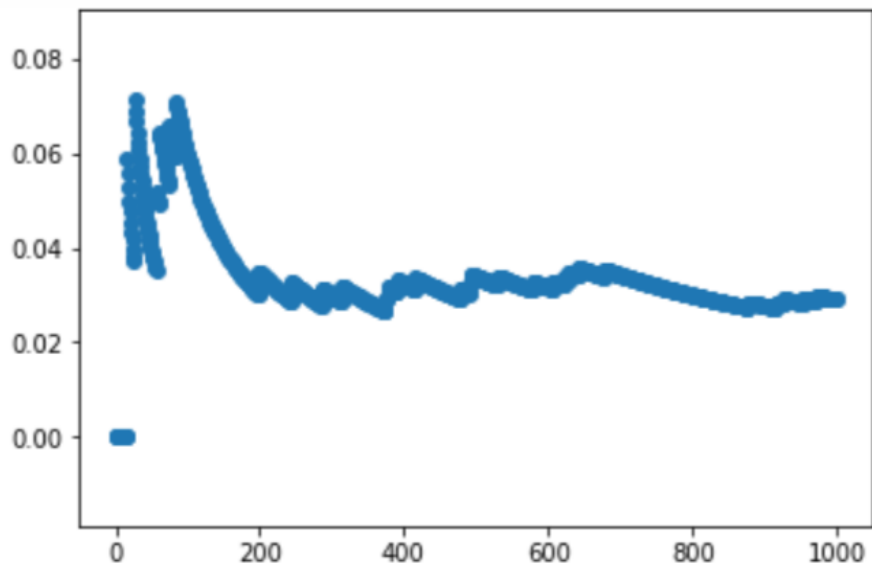
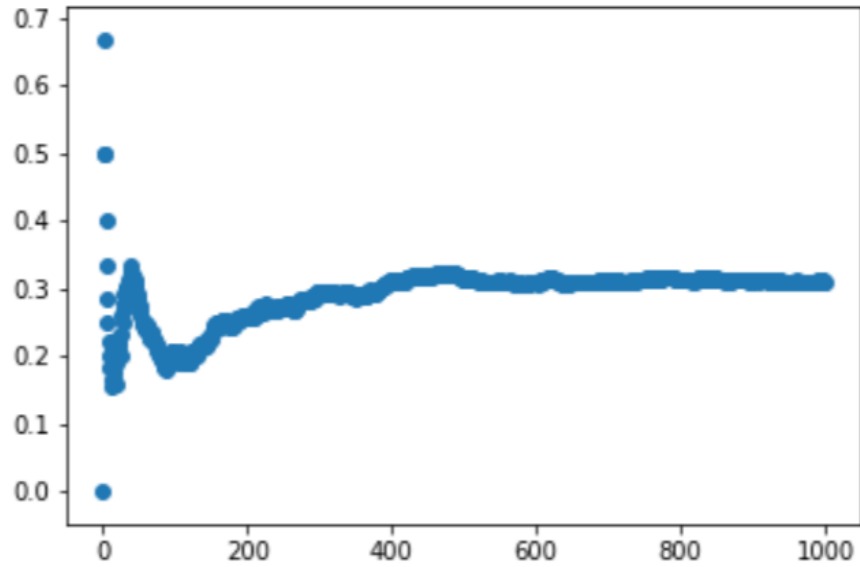
$$E(X) = \int_0^1 \frac{1}{2} t \, dt + \int_3^4 \frac{1}{2} t \, dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (16 - 9) = 2$$

B.

$$V(X) = \int_0^1 \frac{1}{2} (t-2)^2 \, dt + \int_3^4 \frac{1}{2} (t-2)^2 \, dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} * ((2)^3 - 1) = 4/3$$

## گزارش تحلیل تمرین های برنامه نویسی

سوال اول)



در هر دو مورد بعد از کمی نویز در ابتدا، نسبت تعداد head ها به  $p$  همگرا می شود.

سوال دوم)

X: 1 , np: 3.0 , n: 10 , p: 0.3

X: 38 , np: 30.0 , n: 100 , p: 0.3

X: 296 , np: 300.0 , n: 1000 , p: 0.3

می‌بینیم که میانگین X به np نزدیک می‌شود. هر چه n بزرگتر باشد این نتیجه به np بهتر نزدیک می‌شود.

سوال سوم)

A [2, 4, 6]

B [1, 2, 3, 4]

Theoretical:  $P(A) = 3/6 = 1/2$  ,  $P(B) = 4/6 = 2/3$  ,  $P(AB) = 2/6 = 1/3$

$P(A) = 0.484$

$P(B) = 0.665$

$P(A) * P(B) = 0.32186$

$P(AB) = 0.314$

-----  
A [2, 4]

B [2, 3, 4]

Theoretical:  $P(A) = 2/6 = 1/3$  ,  $P(B) = 3/6 = 1/2$  ,  $P(AB) = 2/6 = 1/3$

$P(A) = 0.336$

$P(B) = 0.498$

$P(A) * P(B) = 0.167328$

$P(AB) = 0.336$

با مقایسه مقادیر محاسبه شده تئوری و مقادیر بدست آمده از آزمایش، می‌بینیم که رابطه  $P(AB)=P(A)P(B)$  برای مجموعه‌های مستقل به صادق است.

سوال چهارم)

Changing the door 0.675

Not changing the door 0.348

وقتی که یکی از خانه‌های پوچ را می‌بینیم اطلاعات جدید به ما اضافه می‌کند. در واقع، وقتی یک خانه حذف شد، خانه‌ای که باقی می‌ماند به احتمال  $2/3$  جایزه در آن است. زیرا در ابتدا به احتمال  $1/3$  جایزه در خانه‌ای است که ما انتخاب کردیم و به احتمال  $2/3$  در دو خانه دیگر. اما حالا تمام این  $2/3$  مربوط به خانه باقی مانده است چون شریک آن به عنوان پوچ معرفی شد.

سوال پنجم)

a. 0.604

b. 0.3756

x: 29 c. 0.0535

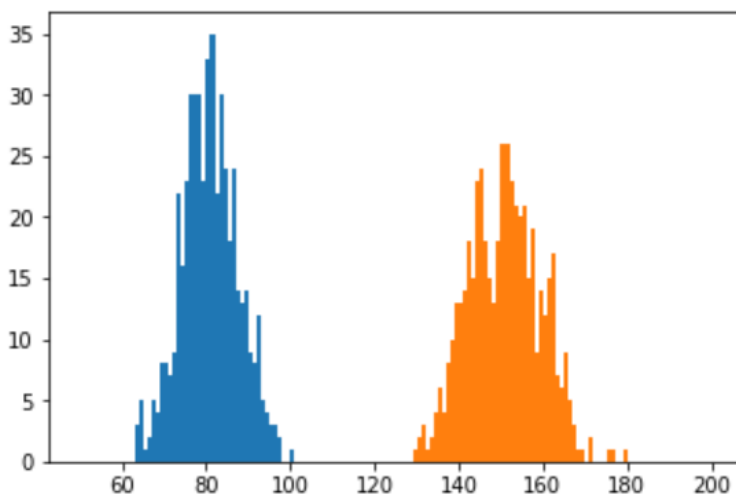
d. 0.1006

e. 0.0998

x: 31 f. 0.0577

با تغییر مقدار  $x$  برای قسمت  $c$  و  $f$  مقدار مناسب  $x$  را پیدا کردم.

سوال ششم)



$X1 + X2 = \text{Binomial}(n1, p1)$

$p1 = 0.4386248599666409$

$n1 = 183.1587931566624$

$X2 + X3 = \text{Binomial}(n2, p2)$

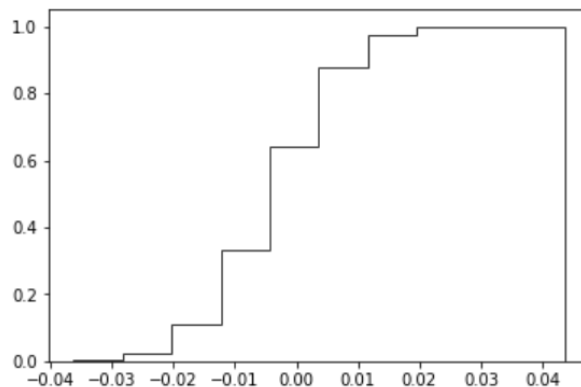
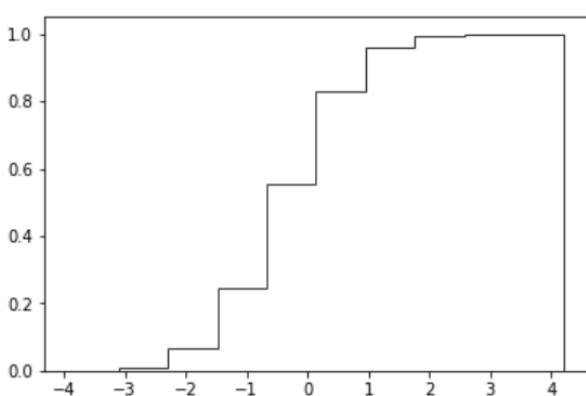
$p2 = 0.5080238161763728$

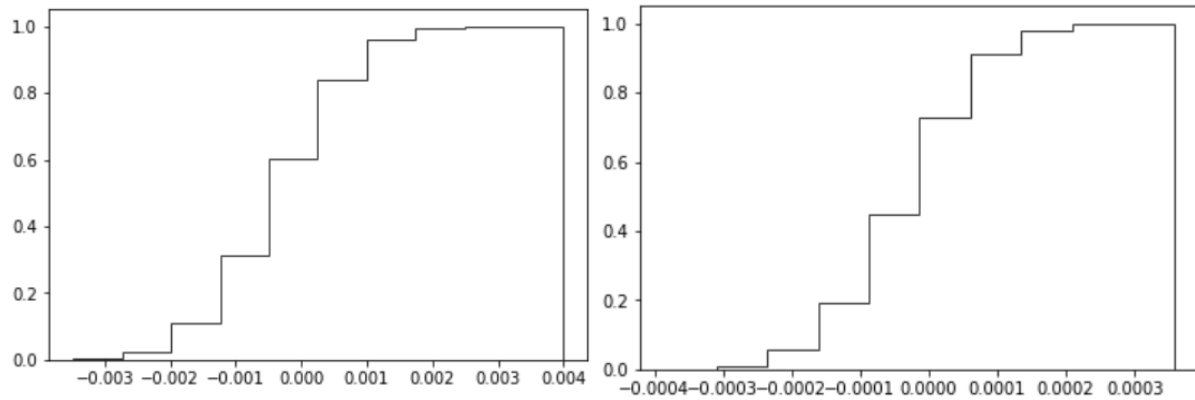
$n2 = 295.8877029257492$

$X1 + X2$  یک توزیع binomial با میانگین ۸۰ و  $X2 + X3$  یک توزیع binomial با میانگین ۱۵۰ است.

پارامترهای بدست آمده با مقادیر تئوری برای هر کدام همخوانی دارد.

سوال هفتم)





همانطور که از CDF ها پیدا است توزیع دارد به یک point-mass در صفر تبدیل می شود چون در نقطه صفر تابع CDF تقریباً از صفر به یک می رود.

و طبق شبیه سازی احتمال  $P(|X_i| > \epsilon)$  برای  $i$  های داده شده

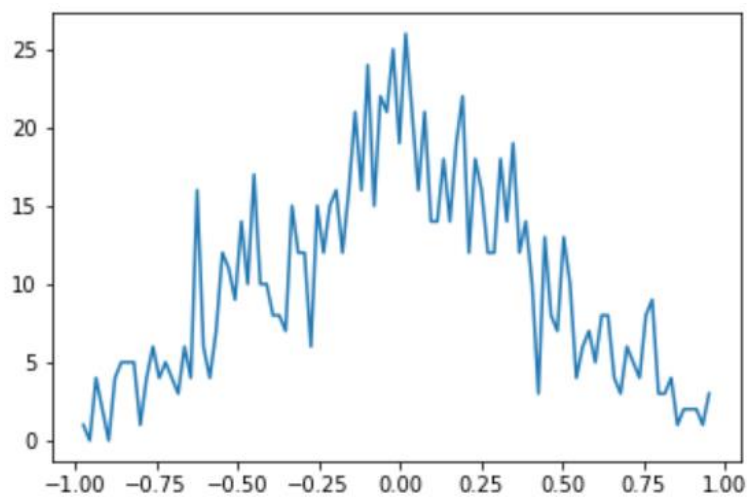
0.9989  
0.8409  
0.0469  
0.0

است که به صفر میل می کند.

( $\epsilon$ : 0.002)

سوال هشتم)

$X-Y$



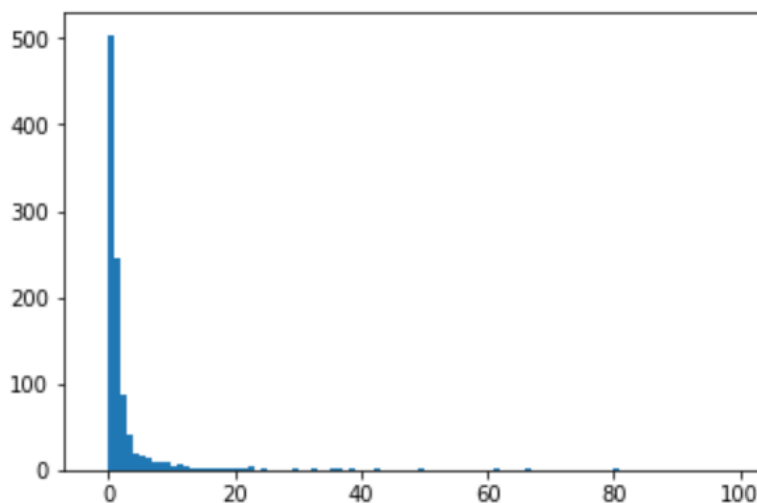
نمودار با نتایج تئوری همخوانی دارد.

$$Y = X_1 - X_2, X_1, X_2 \sim \text{Unif}(0,1)$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X_1 - X_2 \leq y) \\ &= \begin{cases} \int_0^{1+y} \int_{x_1-y}^1 1 \, dx_2 \, dx_1 & -1 < y < 0 \\ 1 - \int_y^1 \int_0^{x_1-y} 1 \, dx_2 \, dx_1 & 0 \leq y < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} y^2/2 + y + 1/2 & -1 < y < 0 \\ -y^2/2 + y + 1/2 & 0 \leq y < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + 1 & -1 < y < 0 \\ 1 - y & 0 \leq y < 1 \end{cases}$$

X/Y

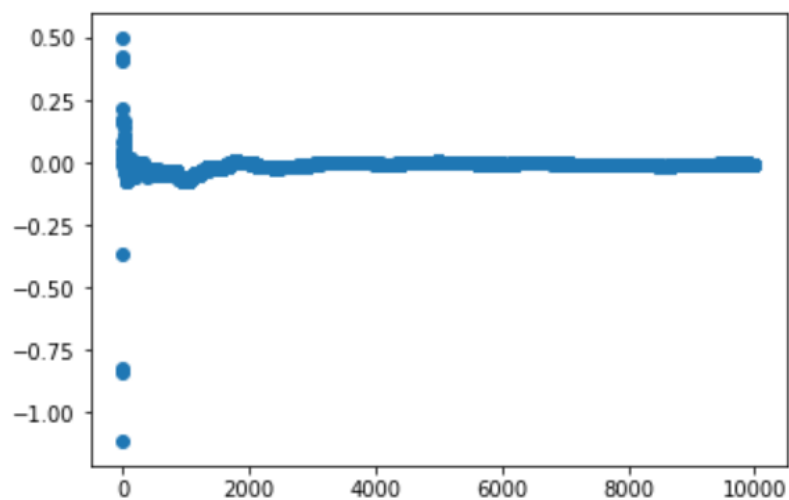


این هیستوگرام از ۱۰۰۰ سمپل این توزیع گرفته شده است و با تابع چگالی احتمال تئوری آن تطابق دارد.

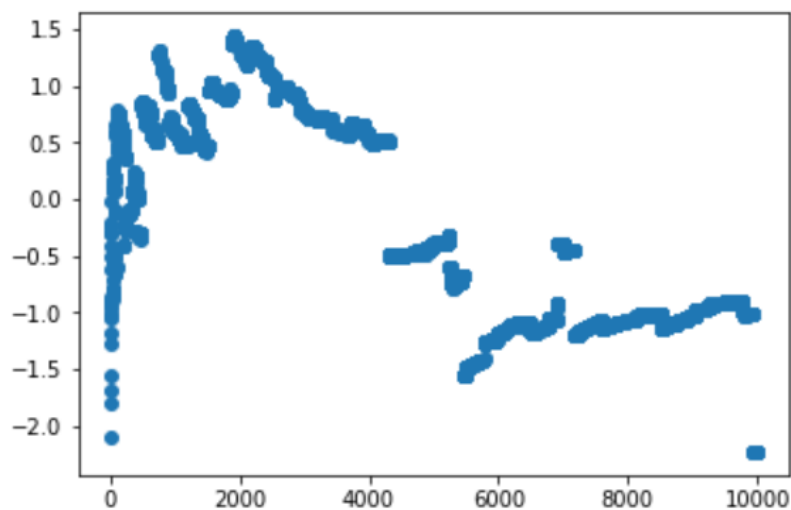
$$P(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \int_0^1 x \, dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} & \text{for } 0 \leq u \leq 1 \\ \int_0^{1/u} x \, dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{1/u} = \frac{1}{2u^2} & \text{for } u > 1. \end{cases}$$



سوال هشتم)



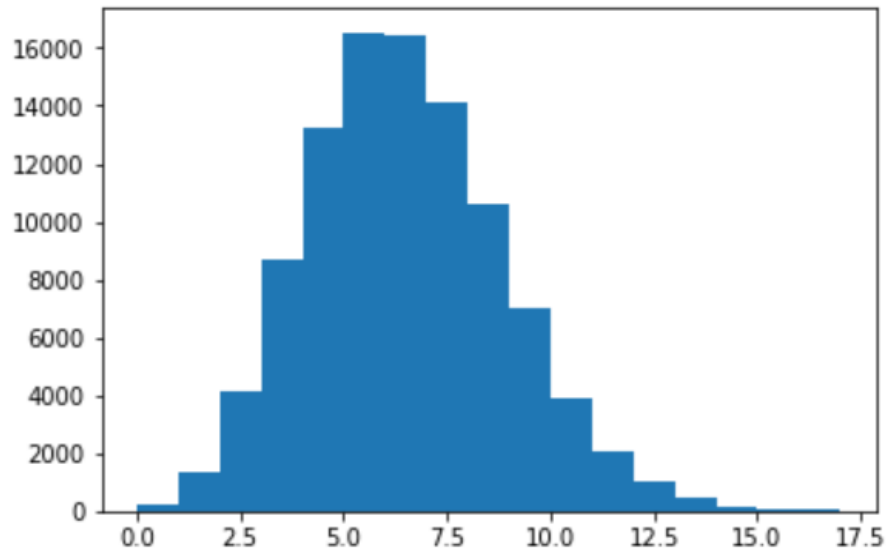
برای توزیع نرمال  $X_n$  ها به میانگین یعنی صفر همگرا می شوند.



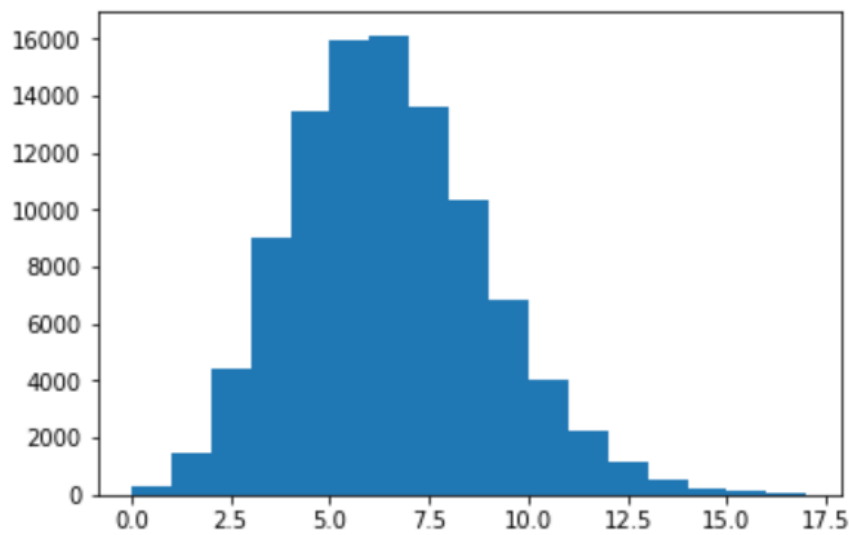
ولی در توزیع کوشی همگرا نمی شوند چون برای آن میانگین وجود ندارد.

سوال نهم)

اگر در binomial،  $np$  برابر با  $\lambda$  در پواسون باشد، می توان آن را با پواسون تخمین زد.



توزیع Binomial



توزیع پواسون

Binomial mean 5.99649  
Poisson mean 6.00049

سوال یازدهم)

باید از `multivariate_normal` استفاده کرد تا دو توزیع کواریانس مورد نظر را داشته باشند.

X1 avg 0.004661219197629751

X2 avg -0.003723325897208582  
[[1.01295404 0.51526447]  
[0.51526447 0.34443367]]  
COV(x1,x2) 0.5152644706577626

سوال دوازدهم)

P = 0.3  
0.05  
0.025  
0.016666666666666666  
0.0125  
0.01  
0.008333333333333333  
0.007142857142857143  
0.00625  
0.005555555555555556  
0.005  
Ex 5.3 bound 0.0625  
Ex 5.6 bound 0.0006709252558050237

P = 0.5  
0.06  
0.03  
0.02  
0.015  
0.012  
0.01  
0.008571428571428572  
0.0075  
0.006666666666666667  
0.006  
Ex 5.3 bound 0.0625  
Ex 5.6 bound 0.0006709252558050237

مقادیر به صفر میل میکنند و محدوده ی 5.3 را زودتر از 5.6 رد میکنند. برای این که احتمال از محدوده ی 5.6 کمتر شود باید مقدار n را بیشتر گرفت. (برای ۱۰۰۰۰ آزمایش و نمونه برداری در هر ۱۰۰ جواب داد به طور مثال)