

سؤالات تئوری

1. در یک کارگاه چوب بری، می‌خواهیم چوبی به طول n متر را به تکه‌های کوچکتر تبدیل کنیم. طول قطعه‌های ایجاد شده عدد صحیحی است و هر کدام ارزش خاصی دارد. الگوریتمی ارائه دهید که مقدار بیشترین ارزش ممکنه از این برش‌ها به دست بیاید.
مثال: اگر طول چوب برابر 8 باشد و جدول ارزش بر حسب اندازه به شکل زیر باشد

length		1	2	3	4	5	6	7	8
--------	--	---	---	---	---	---	---	---	---

price		1	5	8	9	10	17	17	20
-------	--	---	---	---	---	----	----	----	----

ماکسیمم ارزش برابر 22 خواهد بود (با تقسیم چوب به قطعه‌های 2 متری و 6 متری)
و یا اگر طول چوب برابر 8 باشد و جدول ارزش به شکل

length		1	2	3	4	5	6	7	8
--------	--	---	---	---	---	---	---	---	---

price		3	5	8	9	10	17	17	20
-------	--	---	---	---	---	----	----	----	----

باشد ماکسیمم ارزش برابر 24 خواهد بود (با تقسیم چوب به 8 چوب یک متری)

راهنمایی : الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد

2. در یک آرایه ی نامرتب، الگوریتمی پیشنهاد دهید که حاصل جمع بزرگترین زیرآرایه ی متوالی از نظر جمع اعضا را ارائه دهد
مثال : در آرایه ی

$\{-2,-3,4,-1,-2,1,5,-3\}$

بزرگترین زیرآرایه ی متوالی از نظر جمع اعضا برابر

$\{4,-1,-2,1,5\}$

است و خروجی الگوریتم شما باید 7 باشد.

همچنین ممکن است این زیر دنباله یکتا نباشد که در این صورت پیدا کردن تنها یکی از آن‌ها کافی است.
نکته : الگوریتم شما باید از $O(n)$ باشد

3. ما در نقطه ی (m,n) قرار داریم (m و n بزرگتر یا مساوی 0 هستند) و می‌خواهیم به نقطه ی $(0,0)$ بازگردیم. در هر مرحله می‌توانیم یا یک خانه به پایین حرکت کرده یا یک خانه به سمت چپ. یعنی حرکت‌های مجاز ما در هر مرحله $(m-1, n)$ و یا $(m, n-1)$ است.

الگوریتمی ارائه دهید که تعداد حالت‌هایی که میتوانیم با استفاده از حرکت‌های مجاز به خانه ی 0,0 بازگردیم را به دست آورد.
نکته : الگوریتم شما باید از $O(n*m)$ باشد.

4. بر روی یک رشته به طول n ، الگوریتمی ارائه دهید طول بزرگترین زیر رشته ی متقارن آن را به دست آورید.
مثال : برای رشته ی BBABCBCAB خروجی الگوریتم شما باید 7 باشد زیرا BABCBAB بزرگترین زیر رشته ی متقارن آن است. زیر رشته‌های متقارن دیگری مانند BBBB و BBCBB نیز وجود دارد که بزرگترین نیستند.

نکته : الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد

5. در یک ماتریس صفر و یک، بزرگترین زیر ماتریس مربعی را بیابید که تمام عناصر آن یک باشد.

مثال : در ماتریس زیر

1	1	1	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0

بزرگترین زیر ماتریس مربعی تمام 1 برابر با

1	1
1	1

است. در این حالت خروجی الگوریتم شما باید 2 باشد. (اندازه ی بزرگترین زیر ماتریس)

نکته: الگوریتم شما باید از $O(m*n)$ باشد (m تعداد سطر های ماتریس اصلی و n تعداد ستون ماتریس اصلی است)

سؤال‌های امتیازی :

1. در یک دنباله ی اعداد نامرتب، زیر دنباله ای را زیردنباله ی «خاص» مینامیم که اولاً یک زیردنباله ی متوالی از دنباله ی اصلی باشد و ثانیاً اگر طول این زیردنباله m باشد و مقدار کوچکترین عضو این زیردنباله k باشد مقدار نظیر این زیر دنباله را $m * k$ در نظر میگیریم. بدیهی است که یک دنباله میتواند مقداری زیادی زیر دنباله ی «خاص» داشته باشد. برای یک دنباله ی دلخواه زیردنباله ی «خاصی» را بیابید که مقدار نظیر آن از همه ی زیردنباله های «خاص» دیگر بیشتر باشد.

مثال : دنباله ی $\{1,2,3\}$ دارای زیر دنباله های خاص زیادی است. یکی از آن ها $\{1,2\}$ است که مقدار نظیر آن برابر 2 است. یکی دیگر $\{2,3\}$ است که مقدار نظیر آن 4 است. زیر دنباله ی خاص ماکسیمم این دنباله برابر 4 است.

مثال 2 : دنباله ی $\{6, 1, 5, 4, 5, 2, 6\}$ دارای زیردنباله ی خاص $\{5,4,5\}$ است که این زیردنباله ی خاص از تمام زیردنباله های خاص دیگر بزرگتر است.

نکته: الگوریتم شما باید از $O(n)$ باشد

2. در یک ماتریس صفر و یک، بزرگترین زیرماتریس مستطیلی شکلی را بیابید که تمام عناصر آن 1 باشد.

مثال : در ماتریس زیر

1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1
0	1	0	0	0

بزرگترین زیر ماتریس که همه ی عناصر آن 1 باشد برابر

1	1
1	1
1	1

است که دارای حاصل 6 می باشد. پس خروجی الگوریتم شما باید 6 باشد.

راهنمایی : میتوانید از قسمت قبل و الگوریتم مربوط به زیرمجموعه ی «خاص» استفاده کنید

نکته : الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد

سؤالات کلاس حل تمرین::

1. در یک دنباله ی اعداد نامرتب، طول بزرگترین زیردنباله را بیابید که تمام اعضای آن اکیدا صعودی باشد.

مثال: برای دنباله ی $\{10, 22, 9, 33, 21, 50, 41, 60, 80\}$ بزرگترین زیردنباله ای که اکیدا صعودی باشد برابر $\{10, 22, 33, 50, 60, 80\}$ خواهد بود و خروجی الگوریتم شما باید 6 باشد.

همچنین ممکن است این زیردنباله یکتا نباشد و چند زیر دنباله با شرایط بالا وجود داشته باشد که در این صورت پیدا کردن تنها یکی از آن ها کافی است.

نکته : الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد

2. یک دنباله دو بخشی نامیده می شود اگر ابتدا صعودی و سپس نزولی باشد. یک دنباله ی یک دنباله ی صعودی نیز دو بخشی است (با بخش نزولی به طول صفر) و همچنین یک دنباله ی نزولی نیز دوبخشی حساب میشود.

با داشتن یک دنباله، طول بزرگترین زیر دنباله ی دوبخشی آن را به دست آورید.

نکته : الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد.
راهنمایی : میتوانید از الگوریتم خود را که برای «بزرگترین زیر دنباله ی صعودی» ارائه دادید را کمی تغییر دهید تا این مسأله را حل کند.

3. بزرگترین زیر دنباله ی زیگ زاگی

4. ضرب ماتریس ها همیشه یک مسأله ی مهم در محاسبات است. فرض کنید n ماتریس دارید که ماتریس A ابعاد $m_i \times k_i$ است. ما میتوانیم این ماتریس ها را به شکل های مختلف در یکدیگر ضرب کنیم. درواقع ما میتوانیم به شکل های مختلف پرانتز گذاری کنیم. ضرب ماتریسی با ابعاد $m \times n$ و ماتریسی با ابعاد $n \times k$ دارای هزینه ی $m \times n \times k$ است. الگوریتمی را پیشنهاد دهید که با انجام پرانتز گذاری مناسب کمترین هزینه ی لازم برای ضرب ماتریس ها را به دست آورد.
خروجی الگوریتم شما باید کمترین هزینه ی لازم باشد.

مثال : فرض کنید ضرب ماتریسی زیر وجود دارد:

$$A * B * C$$

که ابعاد ماتریس ها به شکل زیر است

$$A = 3 * 2$$

$$B = 2 * 5$$

$$C = 5 * 4$$

این ضرب را میتوان به دو صورت پرانتز گذاری کرد

$$(A * B) * C$$

$$A * (B * C)$$

که هزینه ی ضرب به شکل اول به اندازه ی ::

$$3 * 2 * 5 + 3 * 5 * 4 = 90$$

و هزینه ی ضرب به شکل دوم به اندازه ی ::

$$3 * 2 * 4 + 2 * 5 * 4 = 64$$

است پس خروجی الگوریتم ما باید عدد 64 باشد.

5. independent set بر روی درخت

6. Tiling problem : یک زمین به طول 2 در m داریم که میخواهیم با موزائیک های 2 در 1 فرش کنیم. هر موزائیک را میتوان عمودی یا افقی قرار داد. به چند حالت میتوان این زمین را فرش کرد؟

سؤالات عملی

1. آرایه سازی : آرش میخواهد یک آرایه ی سورت شده بسازد.

او در ابتدا یک آرایه ی به طول n دارد و میخواهد با شرایط تعریف شده ی زیر، از روی آرایه ی اصلی یک زیر آرایه ی دیگر بسازد.

آرش به ترتیب عضو های آرایه ی اصلی (که نام این آرایه را A مینامیم) نگاه میکند. هنگامی که این عضو را نگاه میکند میتواند یکی از سه کار زیر را انجام دهد

1. این عضو را نادیده بگیرد و عضو بعدی آرایه ی اصلی (A) را نگاه کند

2. این عضو را به انتهای آرایه ی فرعی (B) اضافه کند

3. این عضو را به ابتدای آرایه ی فرعی (B) اضافه کند.

آرش میخواهد که نهایتاً آرایه ی فرعی که میسازد (B) بیشترین طول را داشته باشد و یک آرایه ی صعودی باشد.

با دانستن آرایه ی اصلی (A) به آرش بگویید طول بزرگترین آرایه ی فرعی که میتواند بسازد چقدر است.

راهنمایی : الگوریتم شما باید از $O(n^2)$ باشد

مثال : در آرایه ی

{10, 3, 13, 1, 4, 9, 8, 12, 6, 14, 5, 7, 2, 0, 11}

خروجی الگوریتم شما باید 9 باشد.

2. زیر ماتریس بزرگ : به شما یک ماتریس $N * N$ داده میشود. بزرگترین زیر ماتریس از نظر جمع را برای این ماتریس پیدا کنید.

راهنمایی : الگوریتم شما باید از $O(n^3)$ یا $O(n^4)$ باشد

3. شرط بندی : سؤال 2 تئوری (بزرگترین زیرمجموعه ی متوالی از نظر جمع) در قالب یک سؤال عملی مطرح شد