



تمرین دوم شبیه سازی درس کنترل تطبیقی

مهدی عبدالله چالکی (۸۱۰۶۰۰۲۹۰)

دانشکده مهندسی مکانیک تهران

اردیبهشت ۱۴۰۱

فهرست

جایابی قطب حداقل درجه با فیدبک دینامیکی.....	۳
STR با جایابی قطب حداقل درجه برای سیستم مینیمم فاز.....	۹
STR با جایابی قطب برای سیستم پیوسته.....	۲۸

جایابی قطب حداقل درجه با فیدبک دینامیکی

در این سوال قصد داریم ابتدا سیستم دینامیکی زیر را گسسته‌سازی کرده و سپس کنترلر جایاب قطب دیجیتالی برای آن طراحی کنیم:

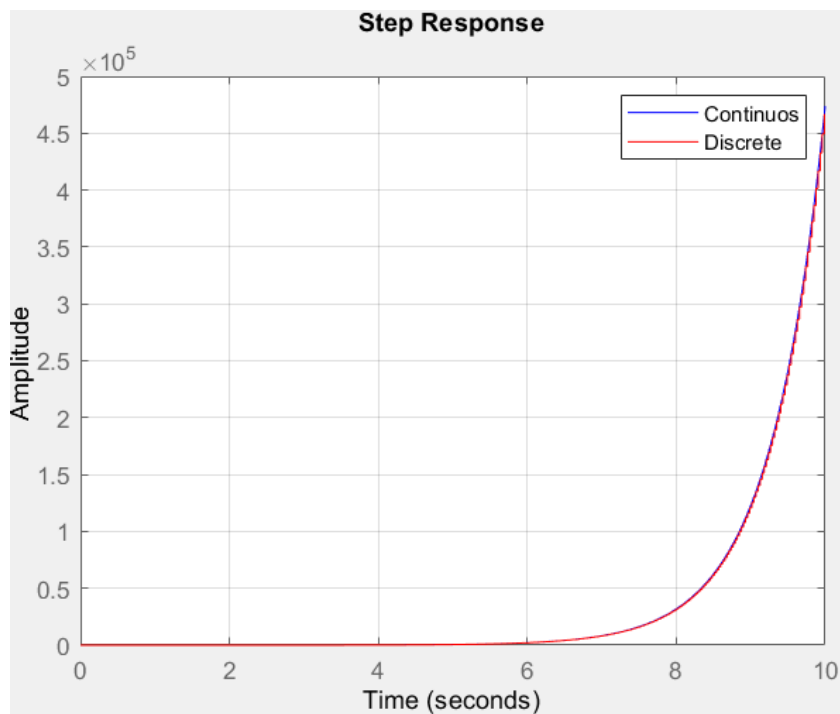
$$G = \frac{0.45(s + 1.9)(s + 3.4)}{(0.55s + 4)(0.2s + 1.4)(s - 1.35)}$$

سیستم مورد نظر باید دارای زمان نشست ۳ ثانیه و بالازدگی ۱۰٪ باشد و قطب دیگر نسبت به قطب‌های غالب حداقل ۵ / ۳ برابر از محور موهومی دورتر باشد.

در گام اول، سیستم را به روش ZOH و با فرکانس نمونه‌برداری که بیست برابر پهنای باند تابع G است، گسسته‌سازی می‌کنیم:

$$G(z) = \frac{0.1028 z^2 - 0.191 z + 0.08867}{z^3 - 2.678 z^2 + 2.375 z - 0.698}$$

پاسخ پله این دو تابع تبدیل به شکل زیر است:



به دلیل وجود قطب در سمت راست محور موهومی، تابع حلقه باز ناپایدار می‌شود.

سیستم مد نظر که دارای ویژگی‌های خواسته‌شده در سوال باشد و نیز درجه‌ی صورت و مخرج آن برابر با سیستم اصلی باشد را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$\sigma \geq \frac{4.6}{t_s}$$

$$M_p \approx e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

که نتیجه می‌دهد مقدار $\omega_n = 2.59 \frac{rad}{s}$ و $\zeta = 0.59$ باید باشد. همچنین قطب سوم را در 15- در نظر می‌گیریم که از دو قطب دیگر به مقدار کافی دورتر باشد.

در دو بخش بعدی، برای حالت بدون حذف صفر و با حذف صفر این مساله حل خواهد شد:

الف - با حذف صفر:

در این حالت، صفرهای جدید را در 20- و 25- در نظر می‌گیریم. سیستم دیجیتالی مد نظر برابر خواهد شد با:

$$G_m(z) = \frac{0.007665 z^2 - 0.008071 z + 0.002104}{z^3 - 2.572 z^2 + 2.179 z - 0.605} = \frac{B_m}{A_m}$$

حال پس از مشخص شدن سیستم موجود و سیستم مد نظر، باید کنترلر طراحی شود. معادله‌ی دیوفانتین در حالت با حذف صفر، معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$B^+ = \frac{B}{b_0}$$

$$B^- = b_0$$

$$R' = 1$$

$$A_0 = 1$$

$$R = R' * B^+ = B^+$$

$$s0 = (am1-a1)/b0;$$

$$s1 = (am2-a2)/b0;$$

$$s2 = (am3-a3)/b0;$$

$$S = [s0 \ s1 \ s2];$$

$$B'_m = \frac{B_m}{b_0}$$

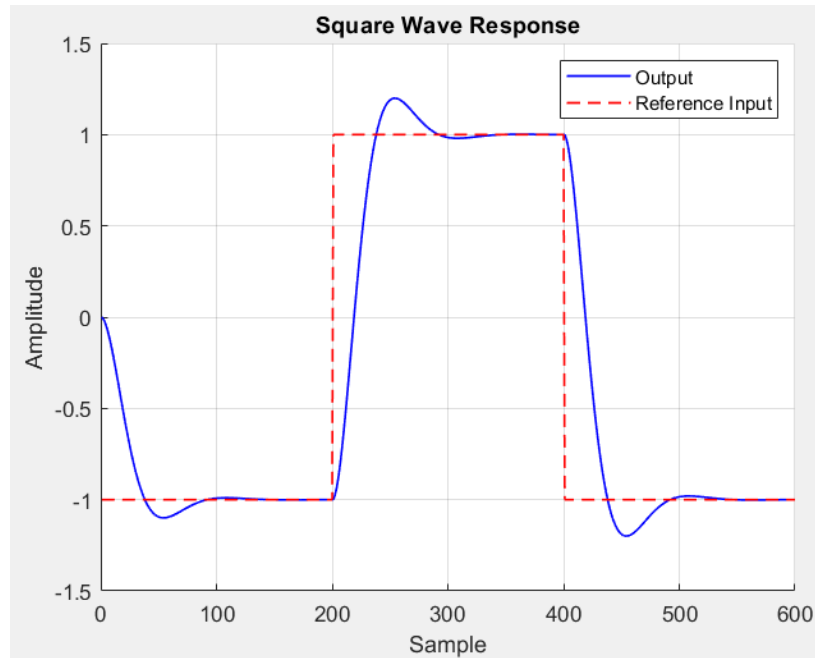
$$T = A_0 * B'_m$$

بدین ترتیب، پارامترهای کنترلی STR بدست می‌آیند. در نهایت، مقادیر خروجی سیستم و ورودی کنترلی باید محاسبه گردند که با توجه به عدم وجود اغتشاش در این حالت، از روابط زیر بدست می‌آیند:

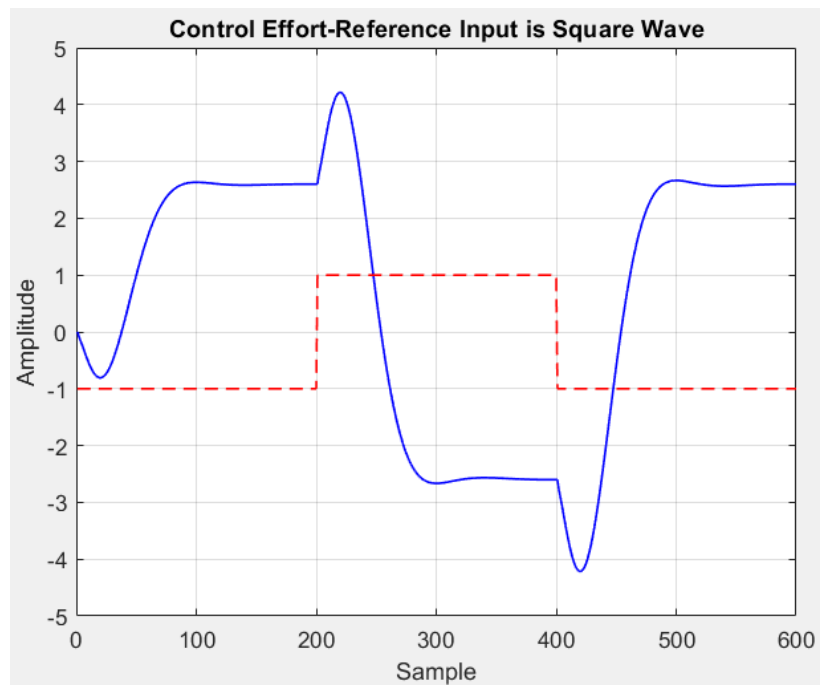
$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_c(t)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_c(t)$$

ورودی $u_c(t)$ را به صورت پله اعمال می‌کنیم. خروجی سیستم بدین صورت خواهد بود:



همچنین ورودی کنترلی بدین صورت است:



مقادیر اورشوت و زمان نشست، در بازه مجاز سوال قرار دارند. همچنین مقادیر پارامترهای کنترلی بدین صورت خواهد بود:

$$R = q^2 - 1.8582 q + 0.8628$$

$$S = 1.0312 q^2 - 1.9077 q + 0.905$$

$$T = 0.0746 q^2 - 0.0785 q + 0.0205$$

ب - بدون حذف صفر:

در این حالت، صفرهای صورت حذف نمی‌شوند. بنابراین سیستم مورد نظر بدین صورت خواهد بود:

$$G_m(z) = \frac{(0.3657 z^2 - 0.6795 z + 0.3155)}{z^3 - 2.572 z^2 + 2.179 z - 0.605}$$

حال پس از مشخص شدن سیستم موجود و سیستم مد نظر، باید کنترلر طراحی شود. معادله دیوفانتین در حالت بدون حذف صفر، معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$B^+ = 1$$

$$B^- = B$$

$$A_o = q^2$$

```
H = [1 0 b0 0 0;...
      a1 1 b1 b0 0;...
      a2 a1 b2 b1 b0;...
      a3 a2 0 b2 b1;...
      0 a3 0 0 b2];

h = [am1+ao1-a1;...
      am2+ao2+ao1*am1-a2;...
      am3+ao1*am2+ao2*am1-a3;...
      am3*ao1+am2*ao2;...
      am3*ao2];

RS = (inv(H)*h)';
R = [1 RS(1:2)];
S = RS(3:5);

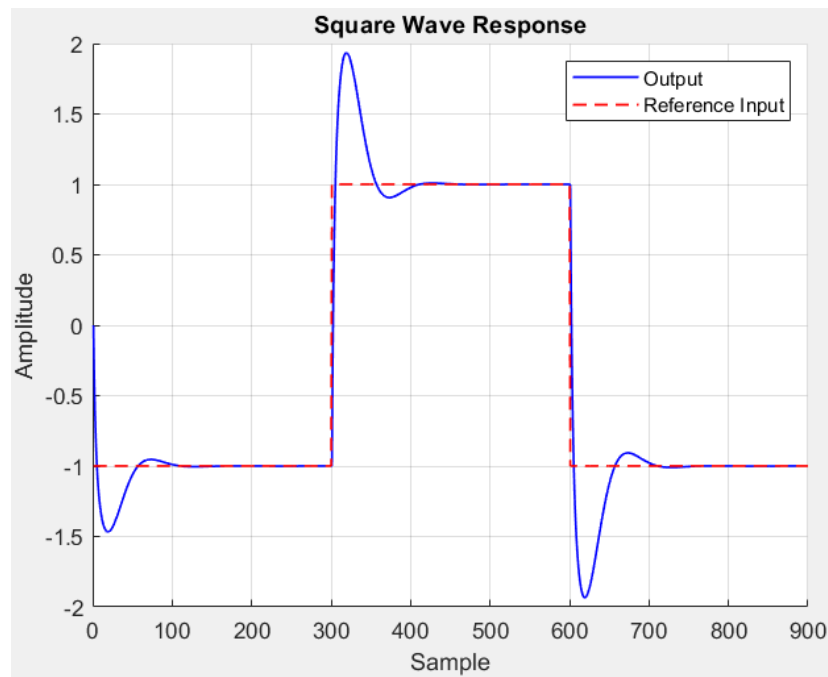
beta=(1+am1+am2+am3)/(b0+b1+b2);
T = beta*Ao;
```

بدین ترتیب، پارامترهای کنترلی STR بدست می‌آیند. در نهایت، مقادیر خروجی سیستم و ورودی کنترلی باید محاسبه گردند که با توجه به عدم وجود اغتشاش در این حالت، از روابط زیر بدست می‌آیند:

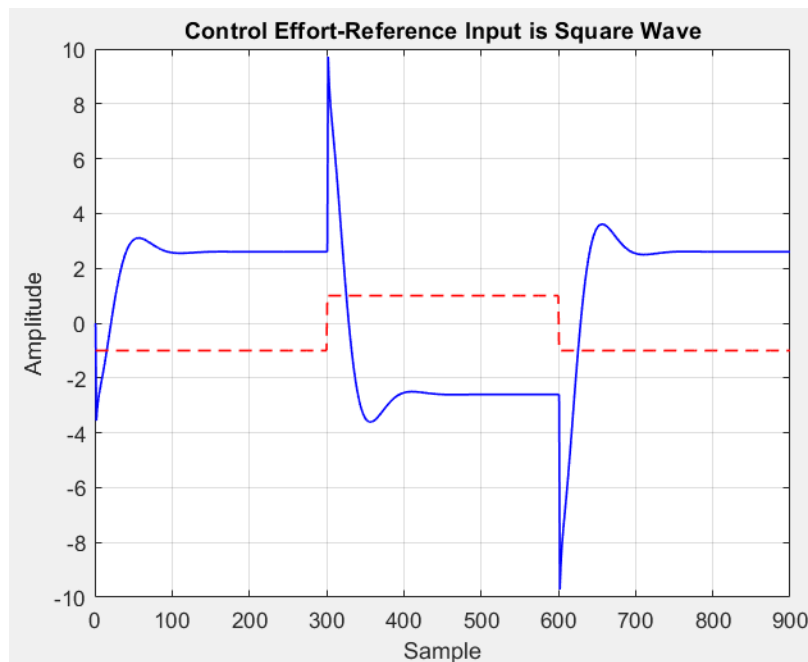
$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_c(t)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_c(t)$$

ورودی $u_c(t)$ را به صورت پله اعمال می‌کنیم. خروجی سیستم بدین صورت خواهد بود:



همچنین ورودی کنترلی بدین صورت است:



مقادیر اورشوت و زمان نشست، در بازه مجاز سوال قرار دارند. همچنین مقادیر پارامترهای کنترلی بدین صورت خواهد بود:

$$R = q^2 + 11.2562 q - 12.1345$$

$$S = -108.5016 q^2 + 207.8967 q - 95.5205$$

$$T = 3.5582 q^2$$

مقایسه:

مشاهده می‌شود در حالتی که حذف صفرهای پایدار سیستم مجاز است، می‌توانیم به پاسخ مطلوب از نظر زمان نشست و مقدار اورشوت برسیم. اما در حالت بدون حذف صفر، مقادیر پارامترهای کنترلی نیز بزرگتر شده و تلاش بیشتری باید انجام دهد که نیازمند عملگرهای قوی‌تری است تا اشباع نشود. همچنین به مقادیر مطلوب سوال نیز نتوانسته‌ایم برسیم.

STR با جایابی قطب حداقل درجه برای سیستم مینیمم فاز

در این سوال، قصد داریم تا با تخمین پارامترهای مدل، کنترلر STR طراحی کنیم و به مقادیر مطلوب دست پیدا کنیم. ورودی را به صورت پله اعمال می‌کنیم و برای آن نویز با واریانس ۰.۰۱ در نظر می‌گیریم.

(a) روش غیر مستقیم، بدون حذف صفر و قطب، بدون نویز

سه پارامتر در صورت تابع تبدیل و سه پارامتر در مخرج باید تخمین زده شوند. پس از آن، با استفاده از تابع WOZC مقادیر SRT تخمین زده شده و خروجی‌های نهایی و ورودی کنترلی بدست می‌آیند. مقدار خروجی در هر مرحله بدین صورت بدست می‌آید:

$$y(k) = [-y(k-1) - y(k-2) - y(k-3) \text{ ContrINPUT}(k-1) \text{ ContrINPUT}(k-2) \text{ ContrINPUT}(k-3)] * \theta;$$

بقیه مقادیر نیز بدین صورت محاسبه شده‌اند:

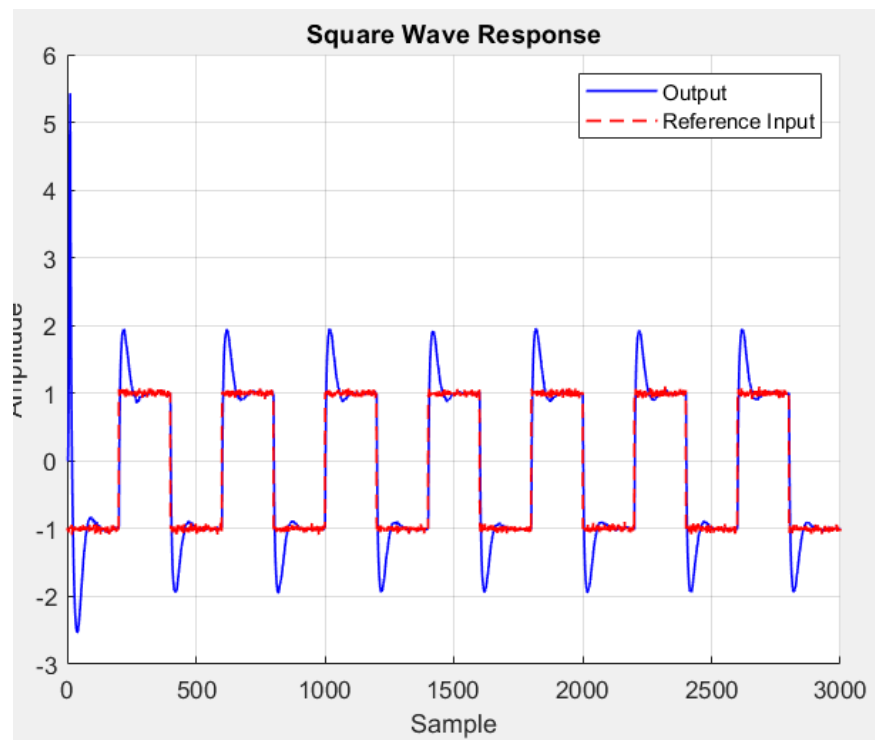
```
Phi(k,:) = [-y(k-1) -y(k-2) -y(k-3) ContrINPUT(k-1) ContrINPUT(k-2) ContrINPUT(k-3)];
P = P - P*Phi(k,:) * (1+Phi(k,:)*P*Phi(k,:)) \ Phi(k,:)*P;
K = P * Phi(k,:);
theta_hat(:,k) = theta_hat(:,k-1) + K*(y(k)-Phi(k,:)*theta_hat(:,k-1));
y_hat(k) = Phi(k,:)*theta_hat(:,k);
Error(k) = y(k) - y_hat(k);

A_hat = [1 theta_hat(1:3,k)'];
B_hat = [theta_hat(4:end,k)'];
[R,S,T] = WOZC(Am,Ao,A_hat,B_hat);
```

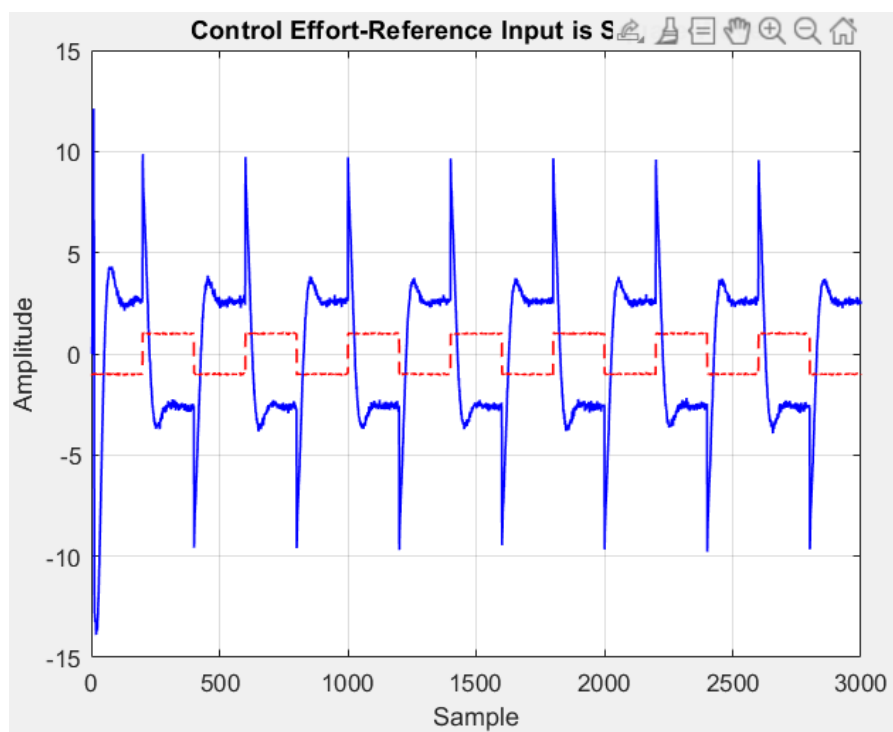
در نهایت نیز ورودی کنترلی محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{ContrINPUT}(k) = & T * [u(k,:,i) \ u(k-1,:,i) \ u(k-2,:,i)]' \dots \\ & + S * [-y(k) \ -y(k-1) \ -y(k-2)]' \dots \\ & - R(2:\text{end}) * [\text{ContrINPUT}(k-1) \ \text{ContrINPUT}(k-2)]'; \end{aligned}$$

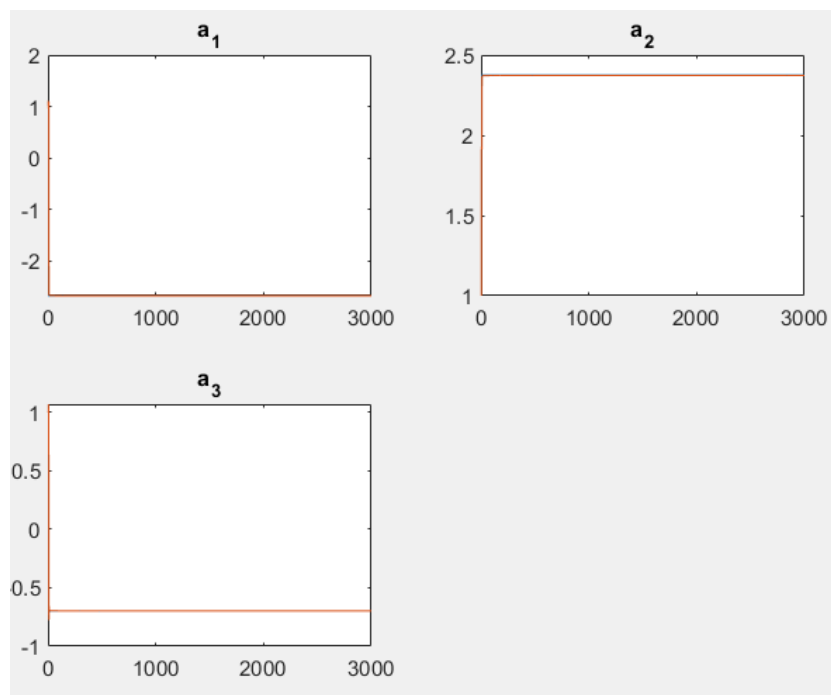
در این حالت، خروجی سیستم به صورت زیر خواهد بود:



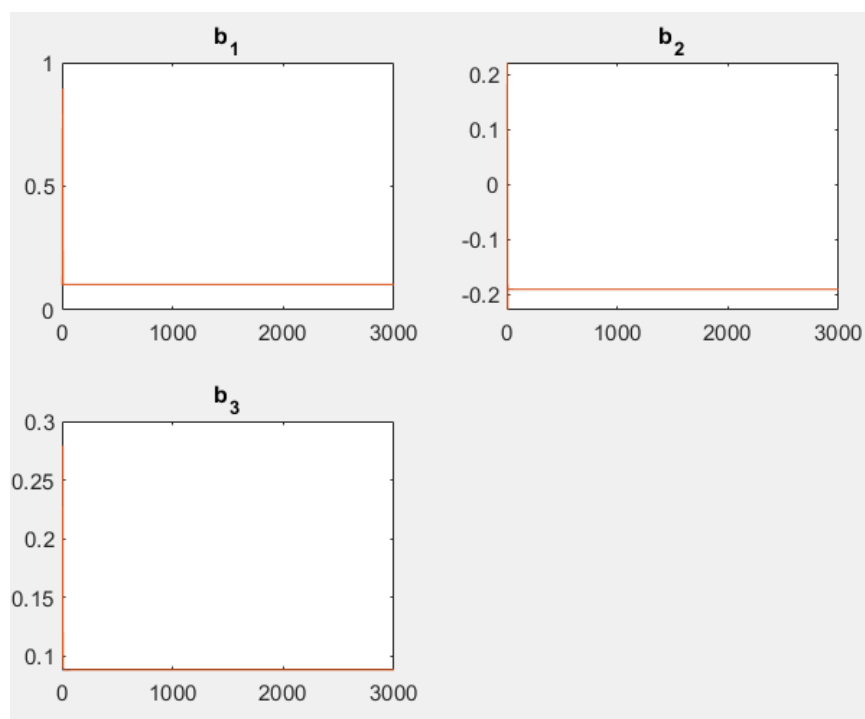
ورودی کنترلی نیز به شکل زیر است:



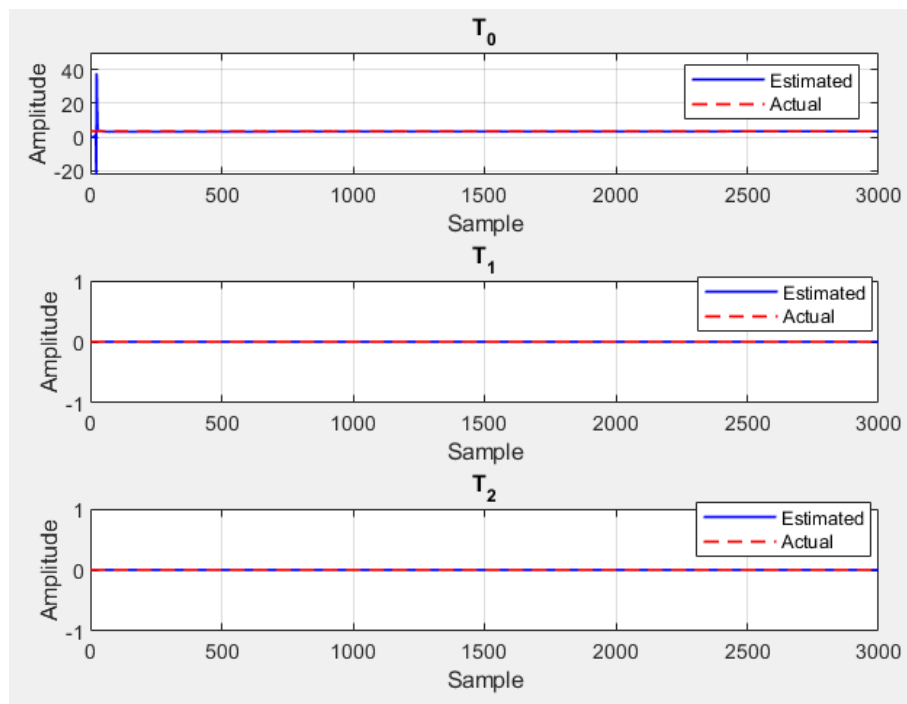
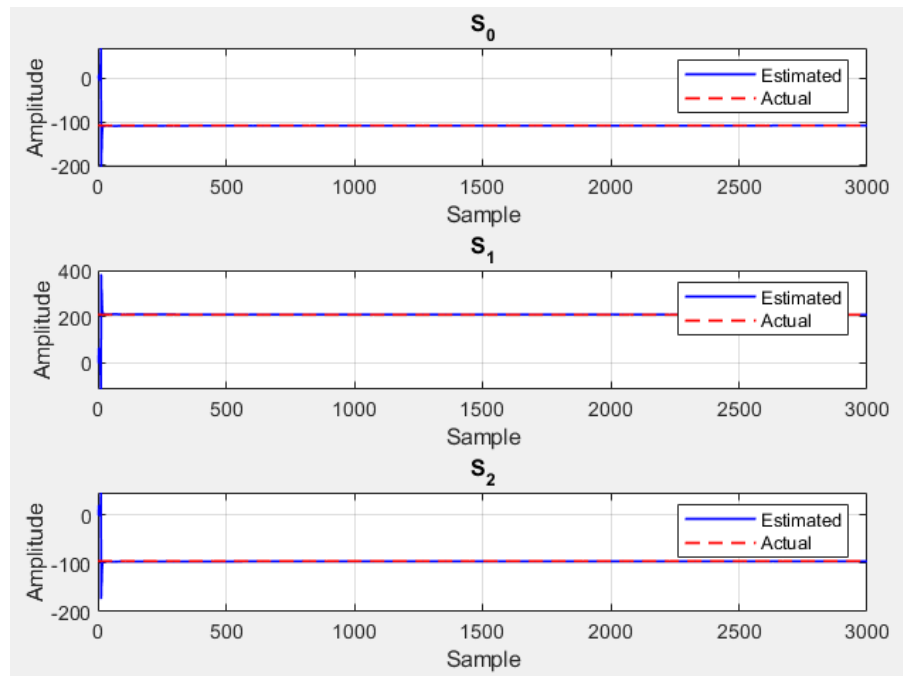
پارامترهای مخرج بدین صورت تخمین می‌خورند:

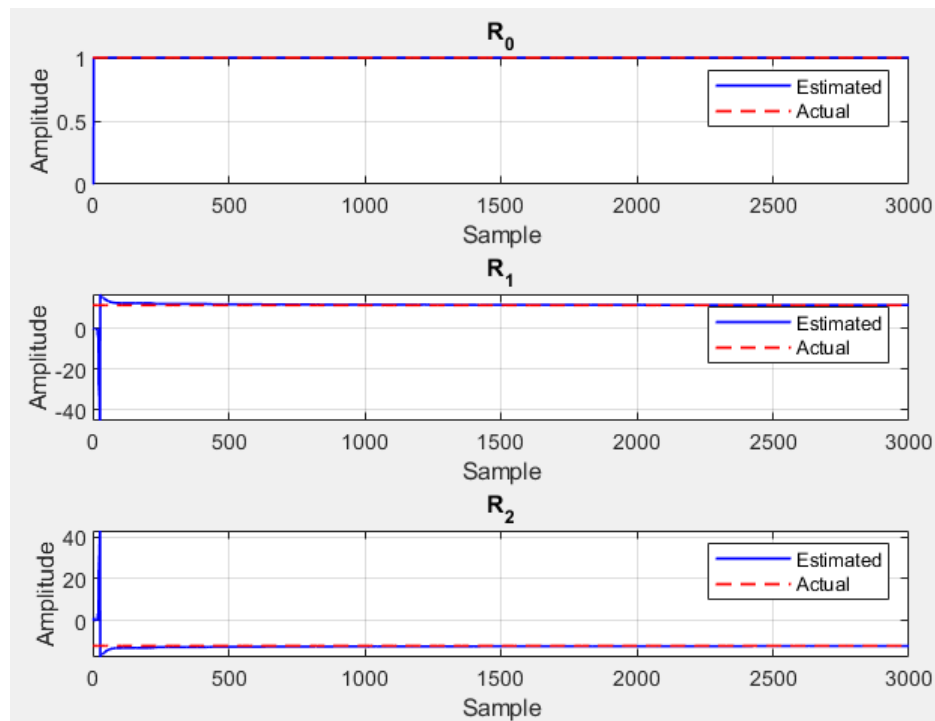


پارامترهای صورت نیز بدین شکل می‌شوند:



پارامترهای کنترلی نیز در این حالت، در مقایسه با مقادیری که از سوال ۱ بدست آوردیم رسم شده‌اند:



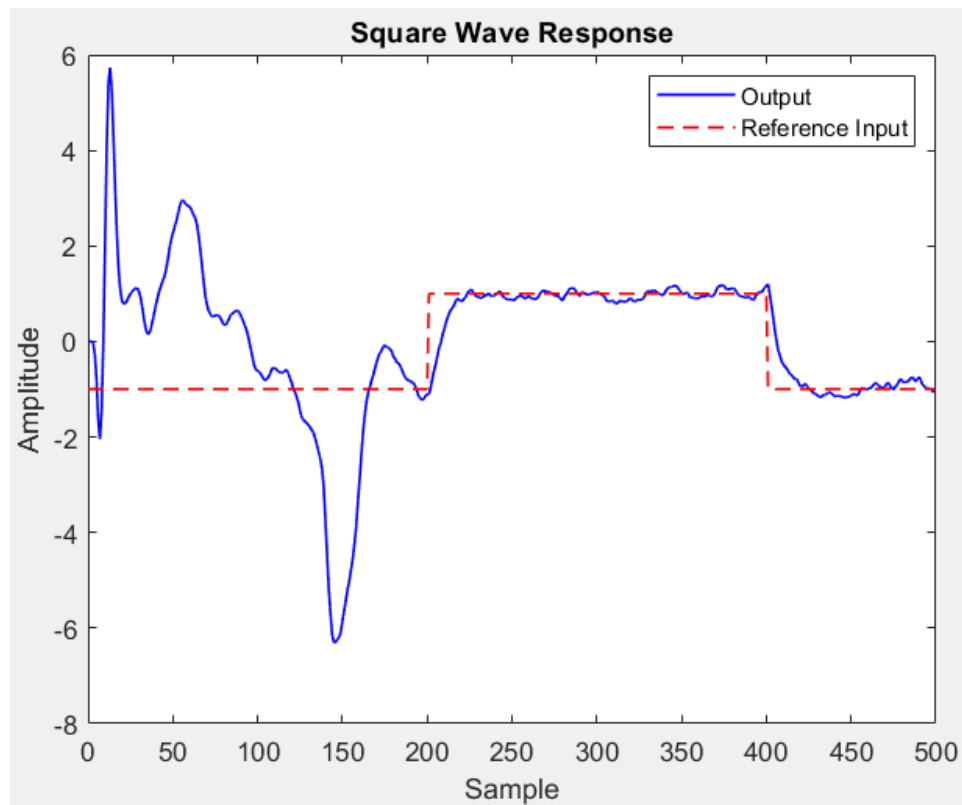


مشاهده می‌شود که این پارامترها نیز به خوبی به مقادیری که باید می‌رسیدند، همگرا شده‌اند. این نمودارها در بخش‌های بعدی به دلیل جلوگیری از طولانی شدن گزارش، آورده نشده‌اند. چرا که وقتی خروجی بتواند ورودی را دنبال کند، پارامترهای کنترلی درست هستند.

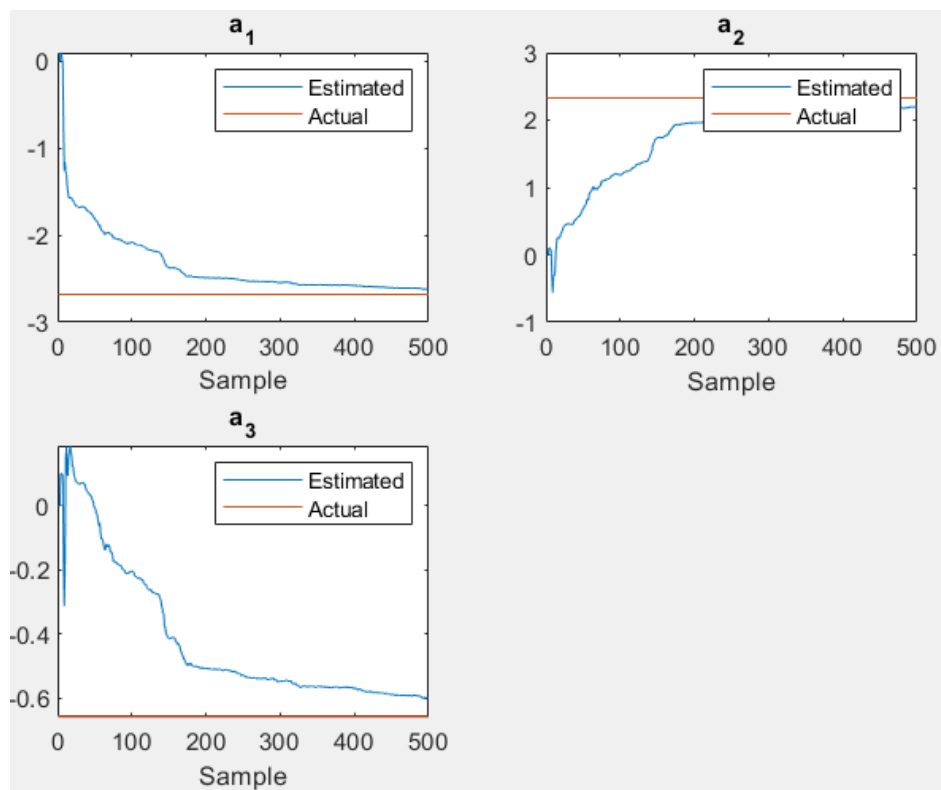
(A2) روش غیر مستقیم، بدون حذف صفر و قطب، با نویز

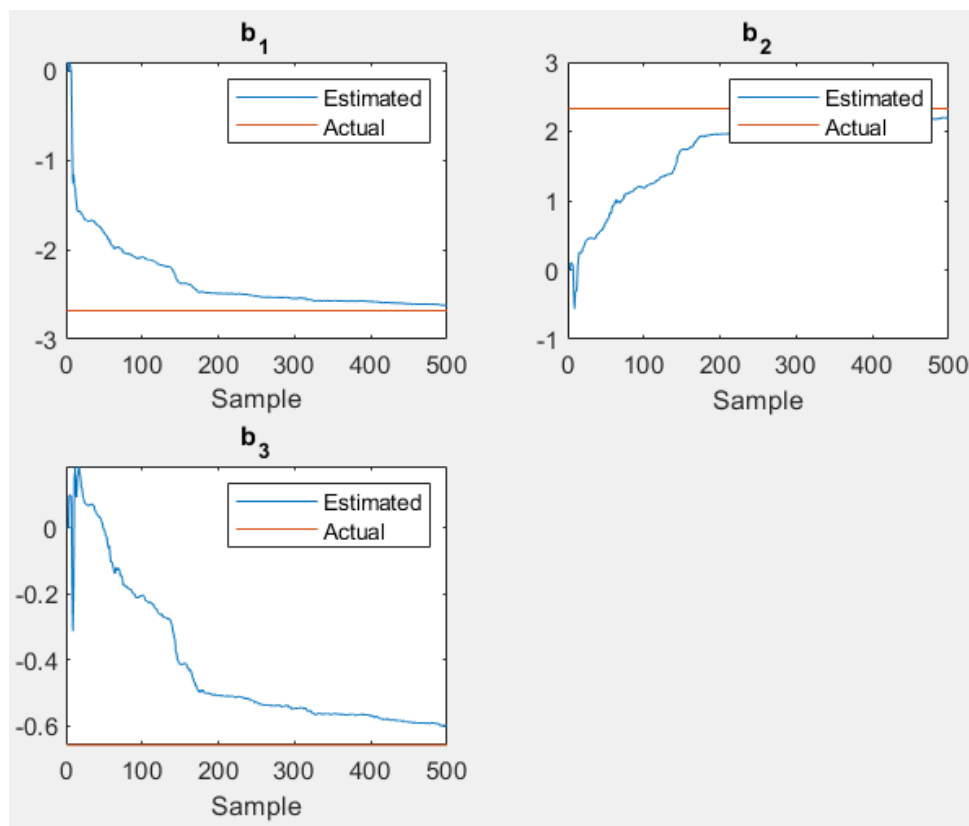
در این حالت، نویز رنگی نیز به سیستم اضافه می‌شود. برای دینامیک نویز رنگی، ابتدا یک نویز سفید با واریانس ۰.۰۱ تعریف می‌کنیم و سپس هر سمپل نویز رنگی را میانگین سمپل فعلی و قبلی نویز سفید در نظر می‌گیریم. برای شناسایی سیستم در این حالت، لازم است تا از روش ELS استفاده شود. همچنین یک درایه به ماتریس فی اضافه می‌شود.

خروجی این بخش بدین صورت خواهد بود:

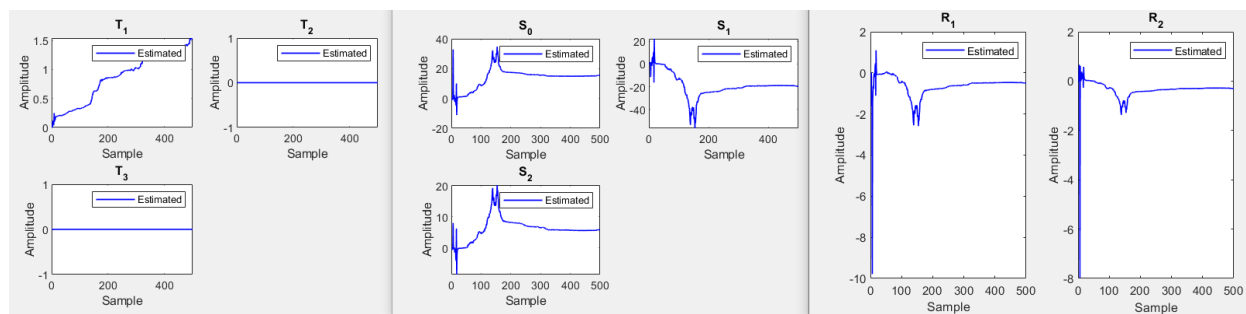


همچنین پارامترهای تخمینی به صورت زیر بدست می‌آیند:





پارامترهای کنترلر نیز بدین شرح اند:

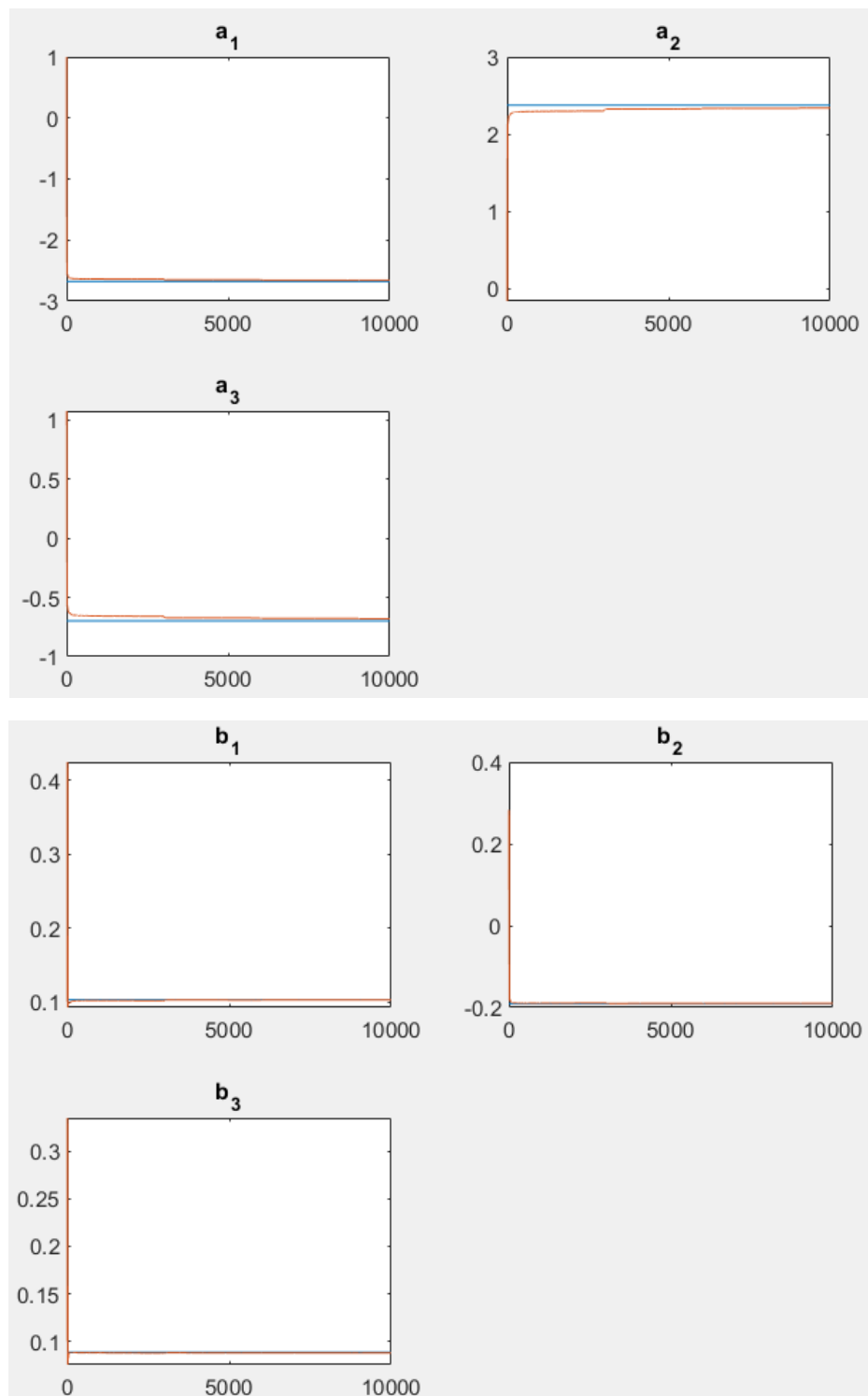


(B2) روش مستقیم، بدون حذف صفر و قطب، با نویز

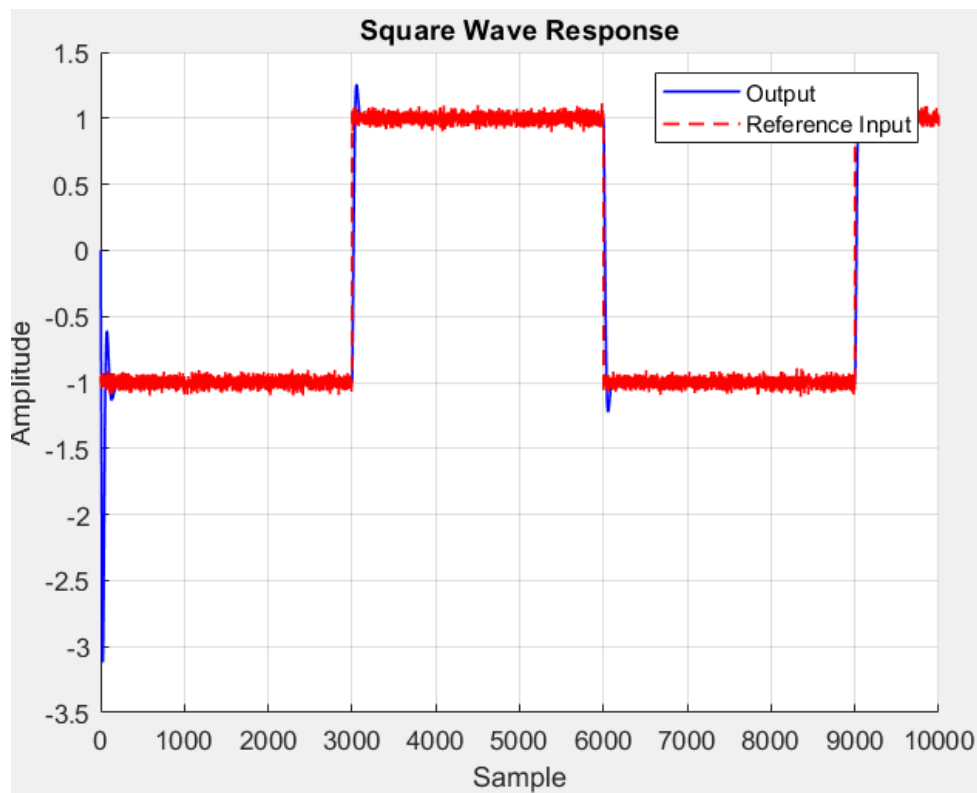
در این حالت، سیستم ناپایدار می شود و ریشه های مشترک نمی توانند حذف شوند.

(C1) روش غیر مستقیم، با حذف صفر و قطب، بدون نویز

در این حالت، پارامترهای تخمین خورده به صورت زیر هستند:



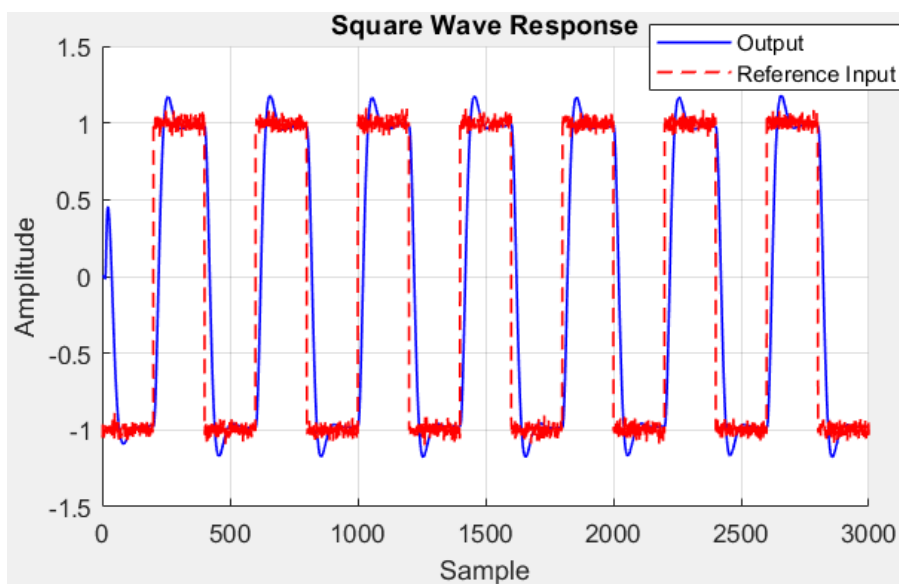
همچنین خروجی به صورت زیر است:



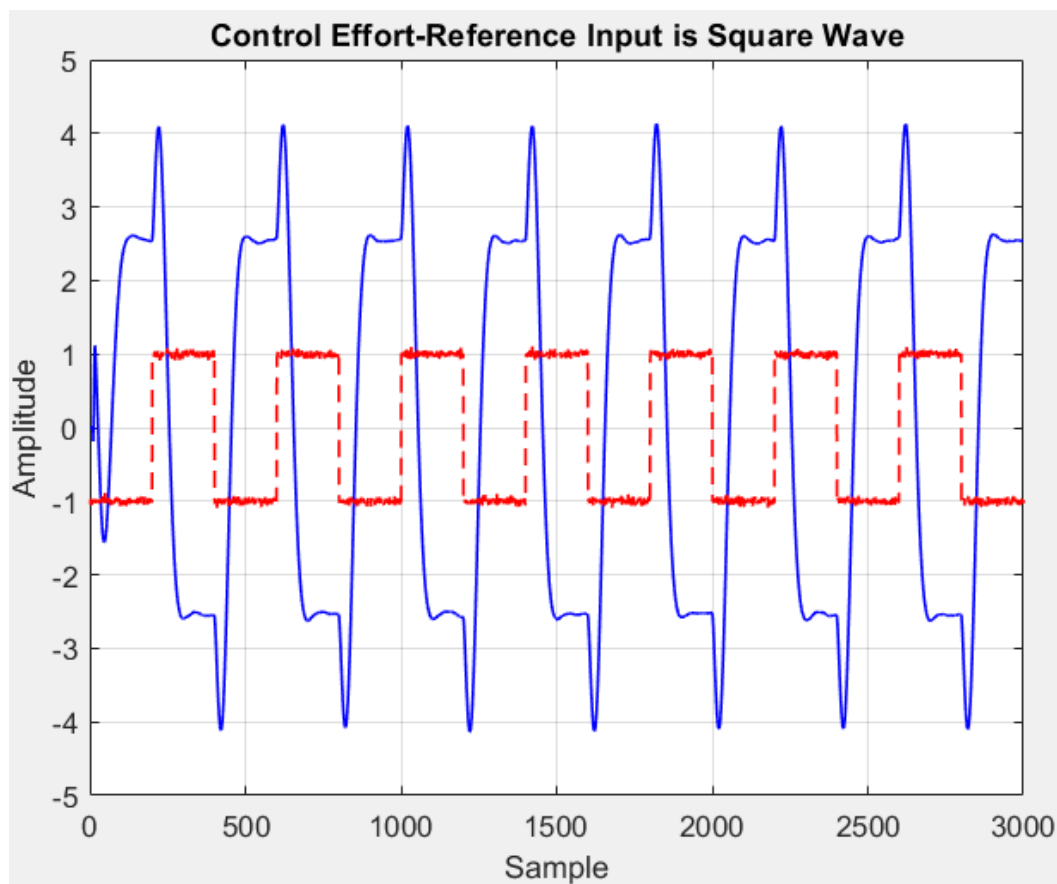
مشاهده می‌شود که مدل به خوبی و با سرعت همگرا شده و اورشوت کمی دارد.

(D1) روش مستقیم، با حذف صفر و قطب، بدون نویز

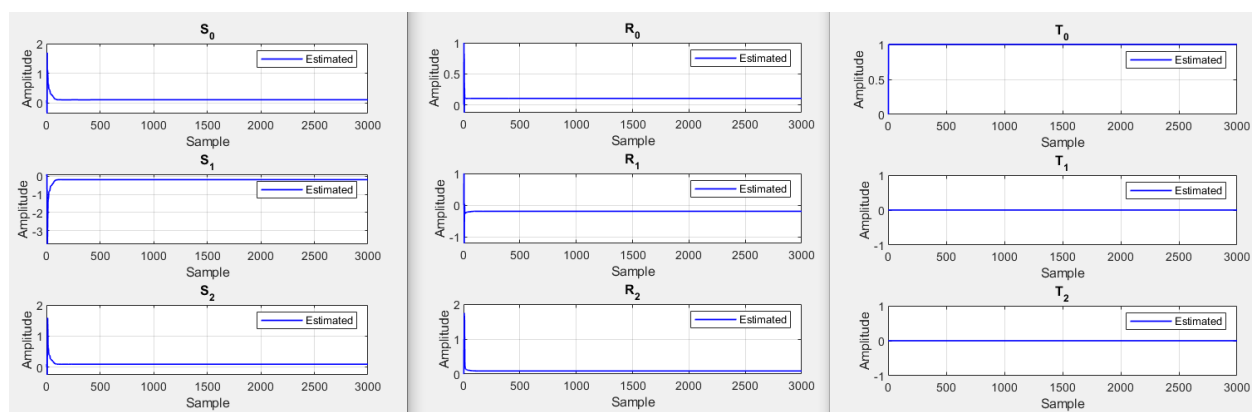
در این حالت خروجی‌ها مستقیماً تخمین می‌خورند. خروجی این مدل به صورت زیر است:



همچنین ورودی کنترلی به صورت زیر است:



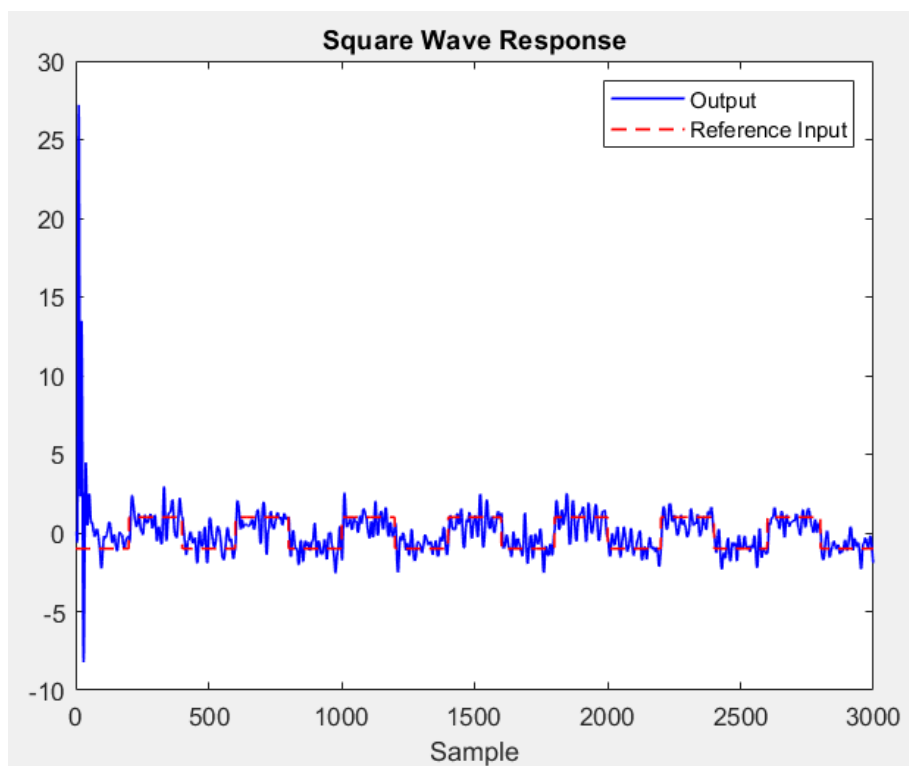
پارامترهای کنترلی نیز بدین صورت هستند:



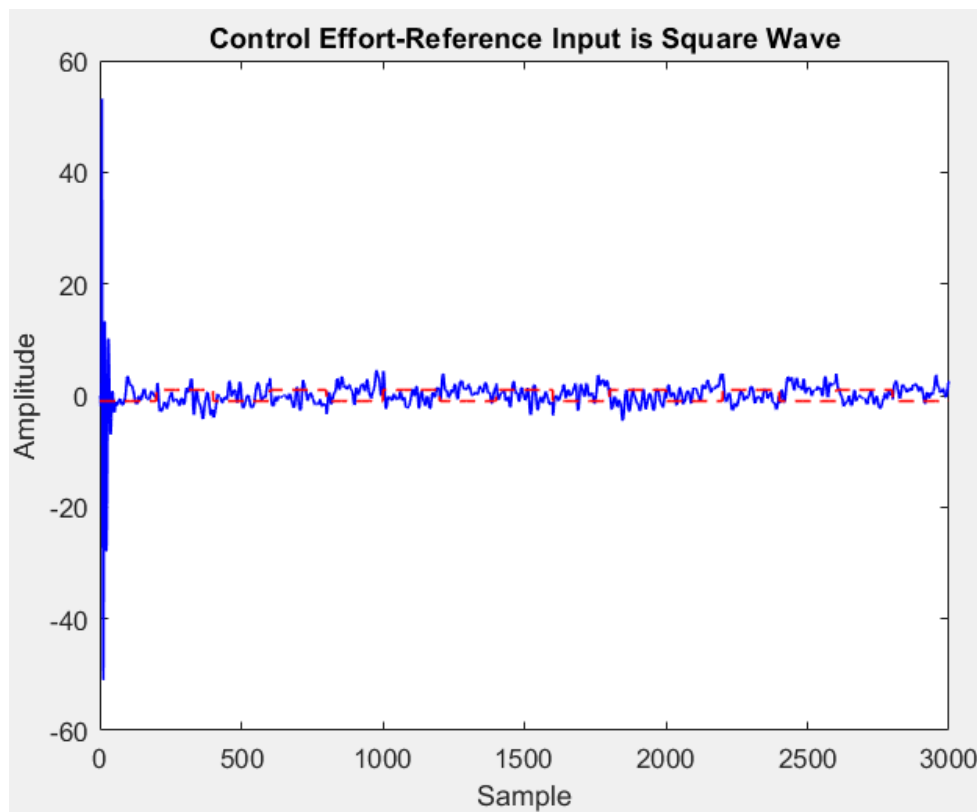
که به مقادیر نهایی خود همگرا شده‌اند. در این مدل، با توجه به حذف شدن صفرها و استفاده از مقادیر جایگزین، همگرایی نسبتاً سریع بوده، اما از حالت غیر مستقیم که پارامترها تخمین خورده‌اند اندکی کندتر است.

(D2) روش مستقیم، با حذف صفر و قطب، با نویز

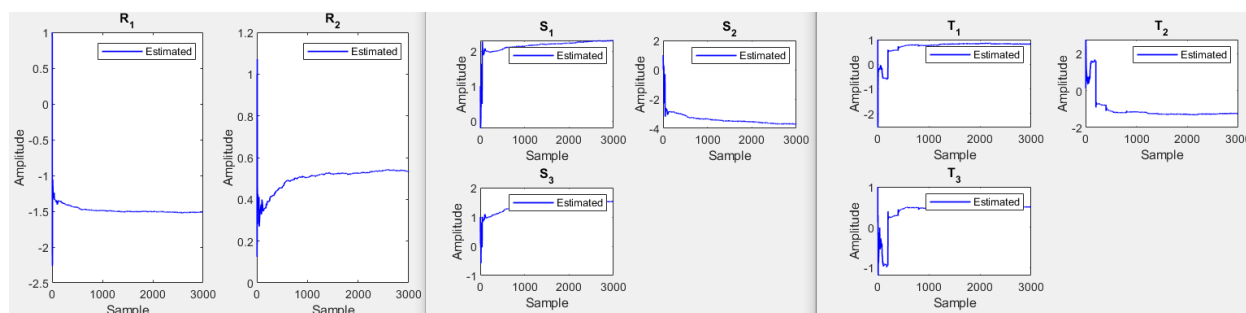
در این حالت خروجی‌ها مستقیماً تخمین می‌خورند. خروجی این مدل به صورت زیر است:



همچنین ورودی کنترلی به صورت زیر است:

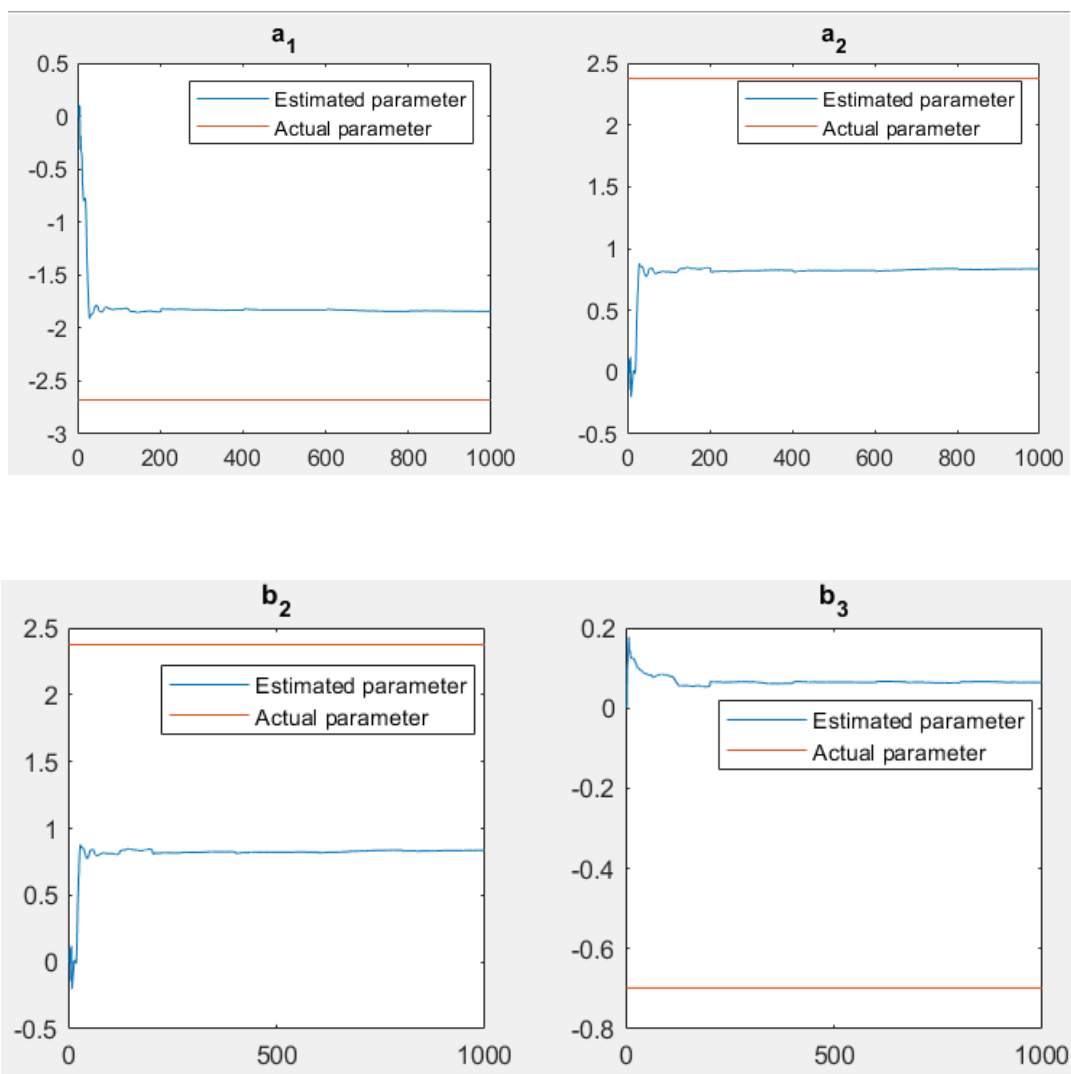


پارامترهای کنترلی نیز بدین صورت هستند:

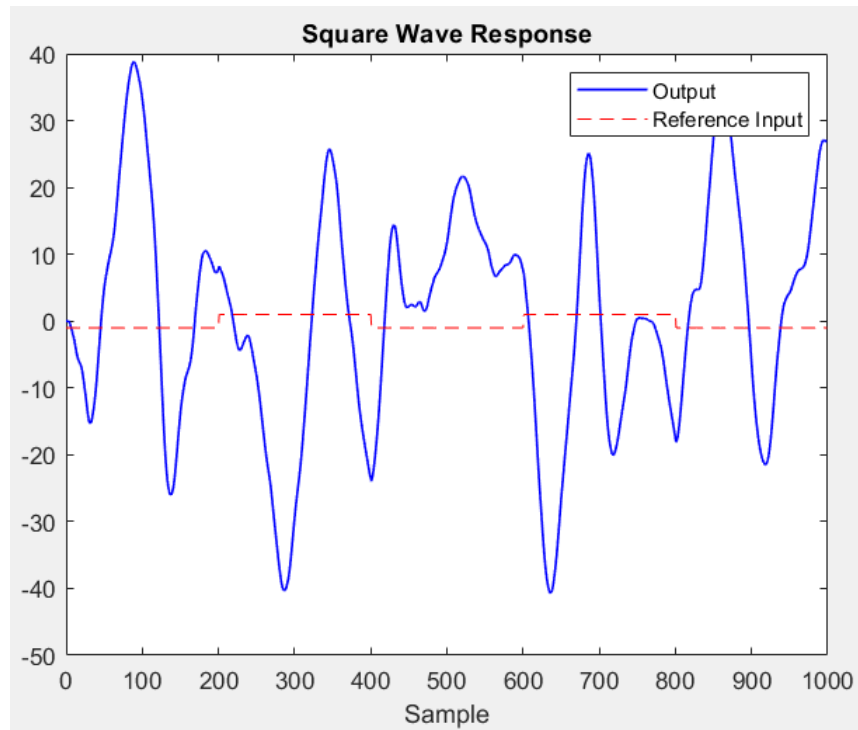


ب) اثر **Overparameter** و **Underparameter** بودن مدل

در حالت اول، فرض می‌کنیم که درجات صورت و مخرج یکی کمتر شوند. بدین ترتیب، در هر یک از مخرج و صورت دو پارامتر باید تخمین بخورند. تغییرات این پارامترها بدین صورت است:

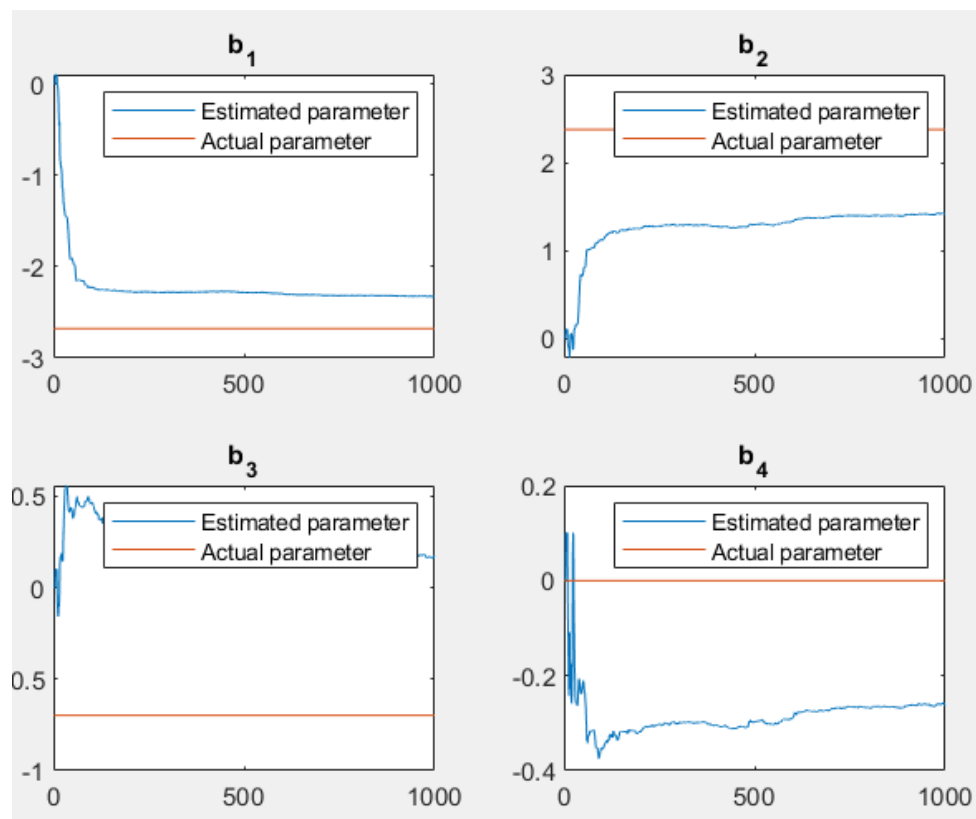
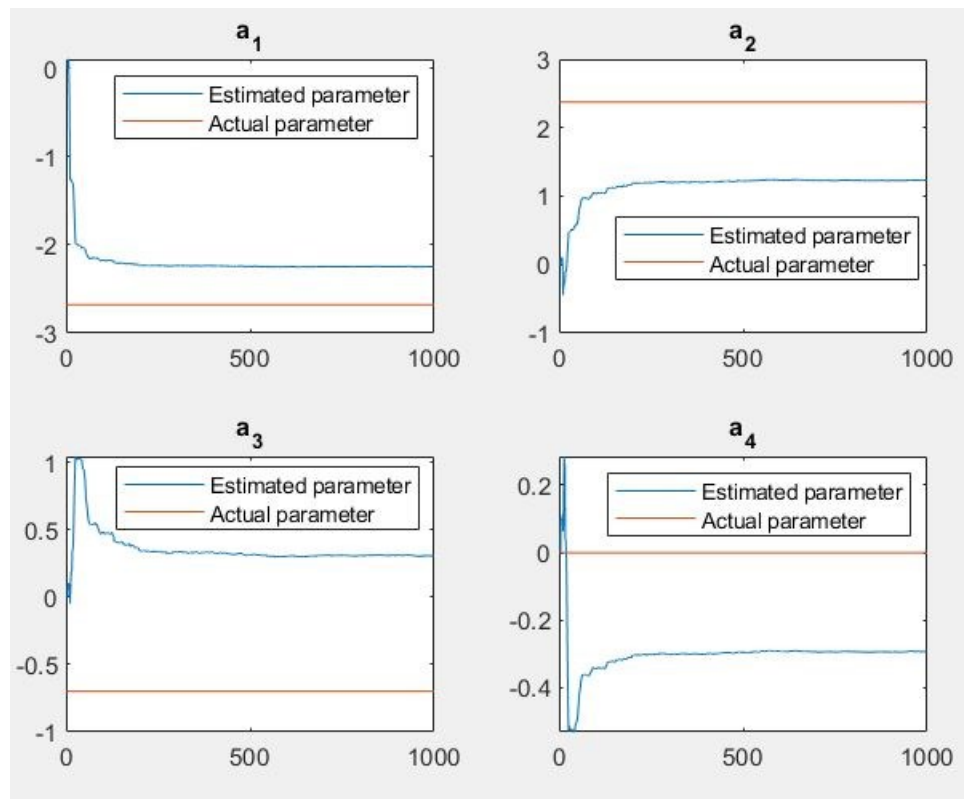


همچنین خروجی این مدل به صورت زیر است:

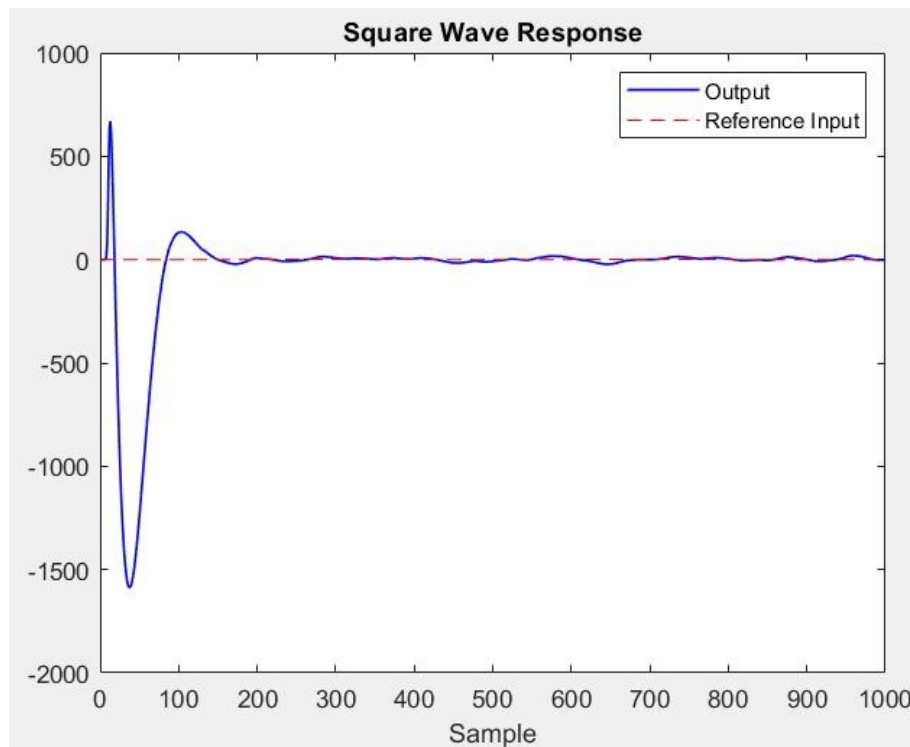


مشاهده می‌شود که مدل نتوانسته‌است خروجی را به خوبی دنبال کند. همچنین پارامترها نیز به مقادیر مد نظر همگرا نشده‌اند و این موضوع نشان از اشتباه بودن مدل دارد.

در حالت بعدی، فرض می‌کنیم درجات صورت و مخروط یکی بیشتر شوند. بنابراین، هر یک دارای ۴ پارامتر برای تخمین خوردن هستند. تغییرات این پارامترها بدین صورت است:



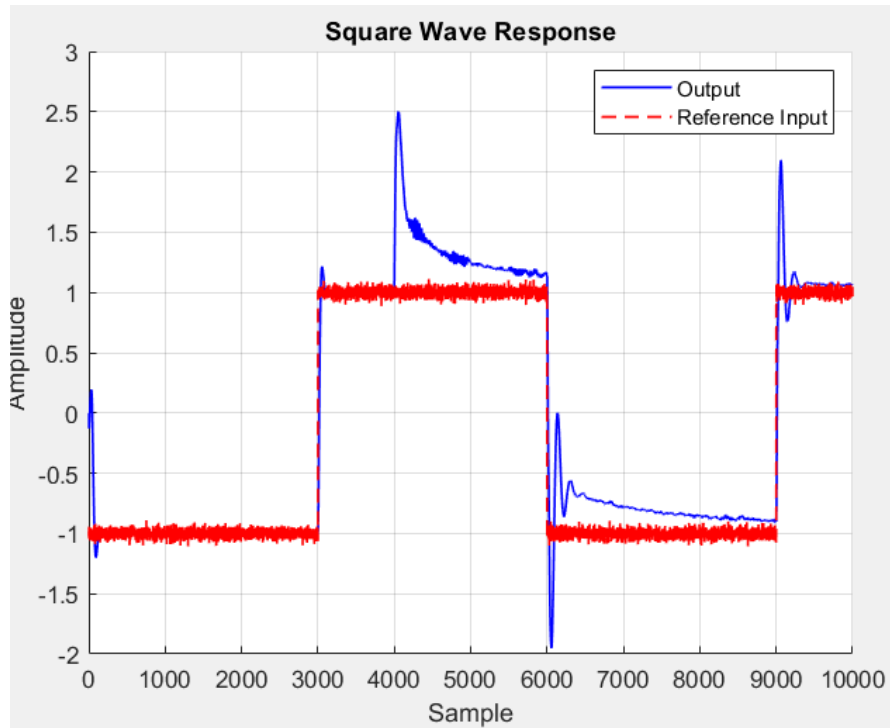
همچنین خروجی این مدل به صورت زیر است:



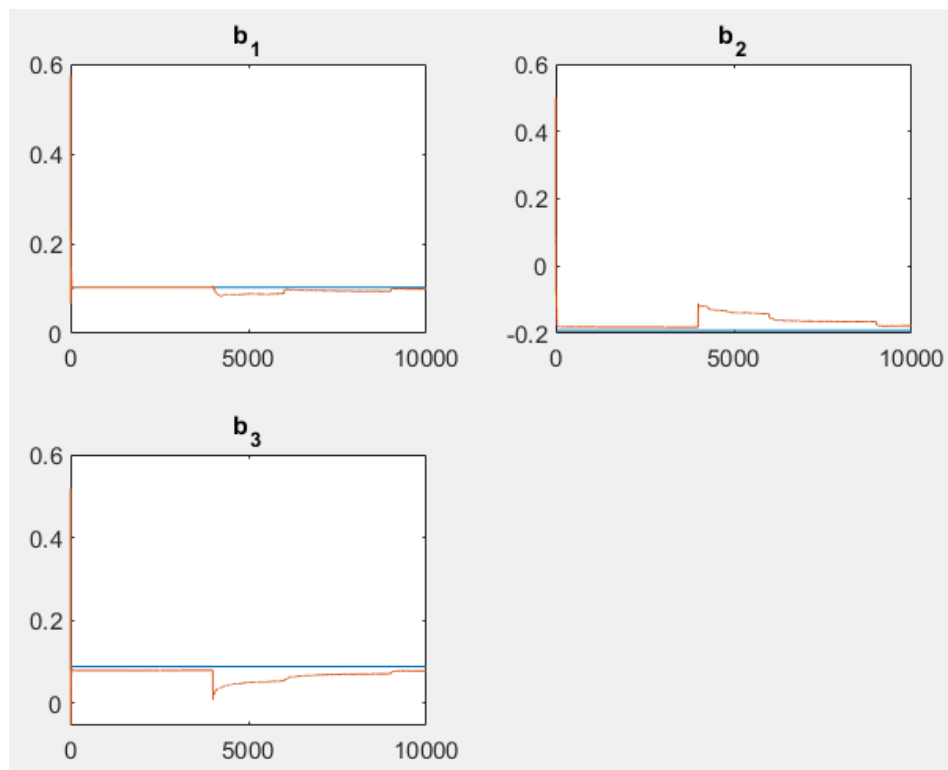
مشاهده می‌شود علی‌رغم اینکه مدل خروجی را به خوبی دنبال می‌کند، همچنان پارامترها نیز به مقادیر مد نظر همگرا نشده‌اند و این موضوع نشان از اشتباه بودن مدل دارد. این مدل می‌تواند رو سیستم اورفیت شود و در مقابله با نویز و اغتشاشات، ضعیف عمل کند.

ت) اثر اغتشاش پله

در این بخش، یک اغتشاش پله به اندازه ۱ و از سمپل ۴۰۰۰ به بعد وارد می‌شود. خروجی سیستم بدین صورت است:



مشاهده می‌شود پس از وارد شدن اغتشاش، مدل به کندی می‌تواند ورودی را دنبال کند. همچنین برای مثال پارامترهای تخمین خورده صورت به صورت زیر هستند:



پارامترها نیز بعد از ورود اغتشاش، به خوبی همگرا نشده‌اند.

حال با کمک مکانیزم اصلاحی، کنترلر را اصلاح می‌کنیم. این پارامتر بدین صورت عمل می‌کند:

$$R = XR^0 + YB$$

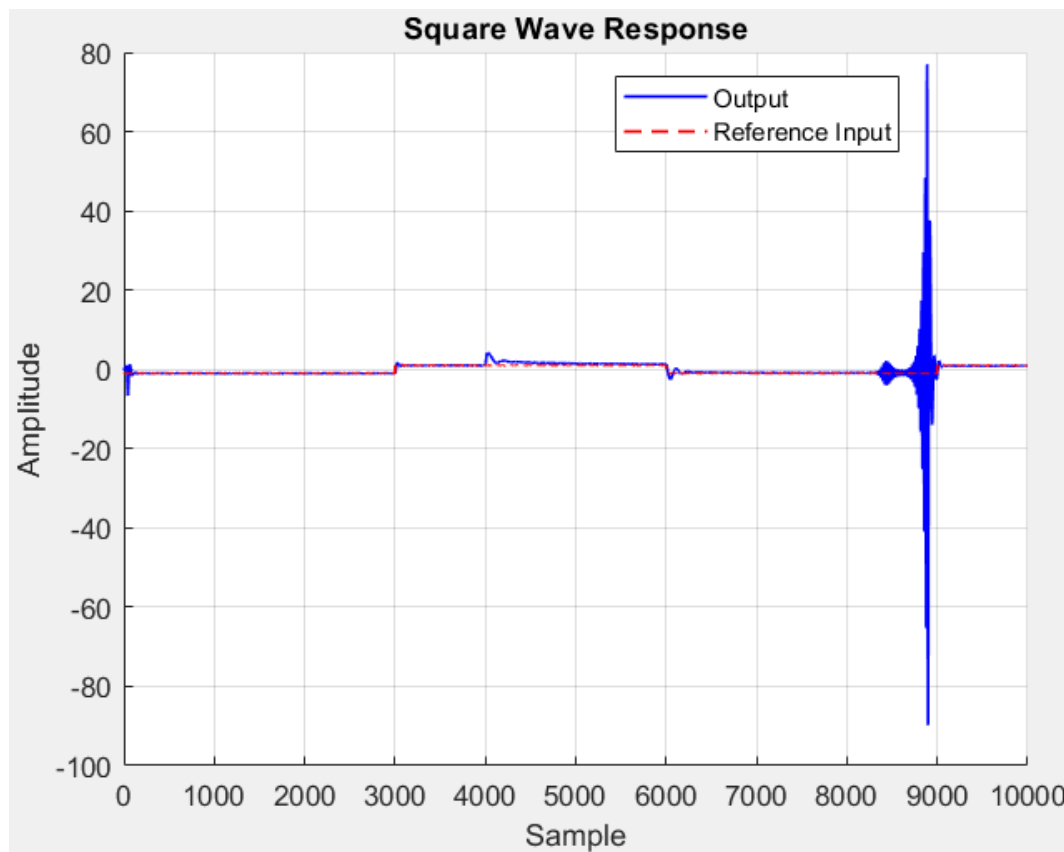
$$S = XS^0 - YA$$

با جایگذاری مقادیر X و Y از کتاب، این روابط بدین صورت در خواهند آمد:

$$R = \text{conv}([1 \ 0], R) - [0 \ (\text{sum}(R)/\text{sum}(B_hat)) * B];$$

$$S = \text{conv}([1 \ 0], S) + (\text{sum}(R)/\text{sum}(B_hat)) * A;$$

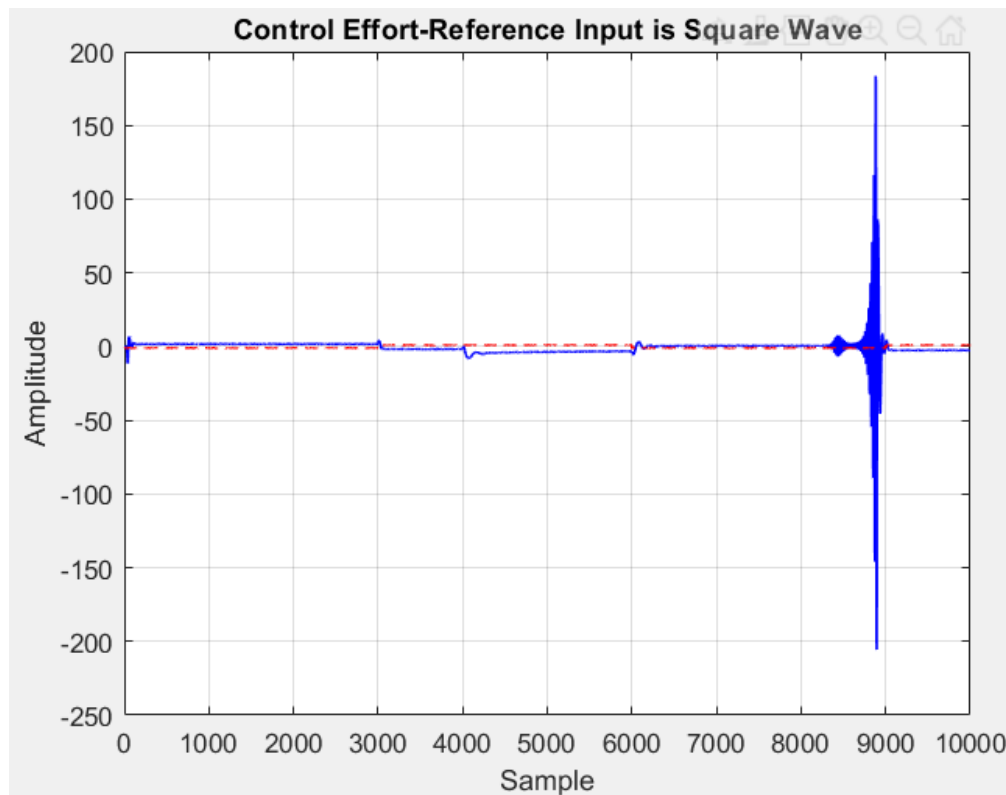
و توجه داریم که به مرتبه این چند جمله‌ای‌ها، یک واحد اضافه می‌شود. خروجی این مدل به صورت زیر است:



که پس از ورود اغتشاش، به خوبی اثر آن را خنثی می‌کند.

(ث) شبیه‌سازی طولانی مدت

در حالت قبل وقتی ورودی کنترلی را ترسیم کنیم، بدین شکل خواهد بود:



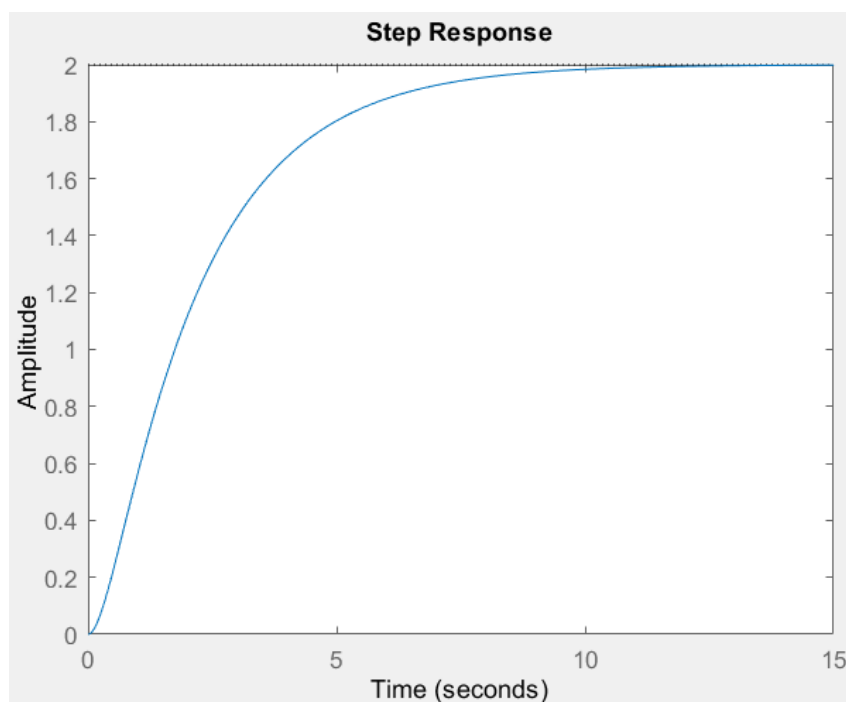
در سمپل‌های انتهایی، مقدار ورودی کنترلی بسیار زیاد می‌شود و سیستم ناپایدار می‌شود. مکانیزم اصلاحی، توسط یک انتگرال‌گیر می‌تواند باعث شود تا مقادیر بعد از اغتشاش خطا نداشته باشند. اما تجمیع خطاها پس از سمپل‌های زیاد باعث می‌شود تا ورودی کنترلی مقادیر بیشتری به خود گرفته و در نهایت سیستم ناپایدار شود.

STR با جایابی قطب برای سیستم پیوسته

در این سوال، قصد داریم تا برای سیستم پیوسته‌ی زیر کنترل کننده جایاب قطب تطبیقی با RLS پیوسته در محیط سیمولینک طراحی کنیم. (بدون حذف صفر و قطب) سیستم به شکل زیر است:

$$G(s) = \frac{3}{(s + 0.5)(s + 3)}$$

خروجی پله این سیستم به شکل زیر است:



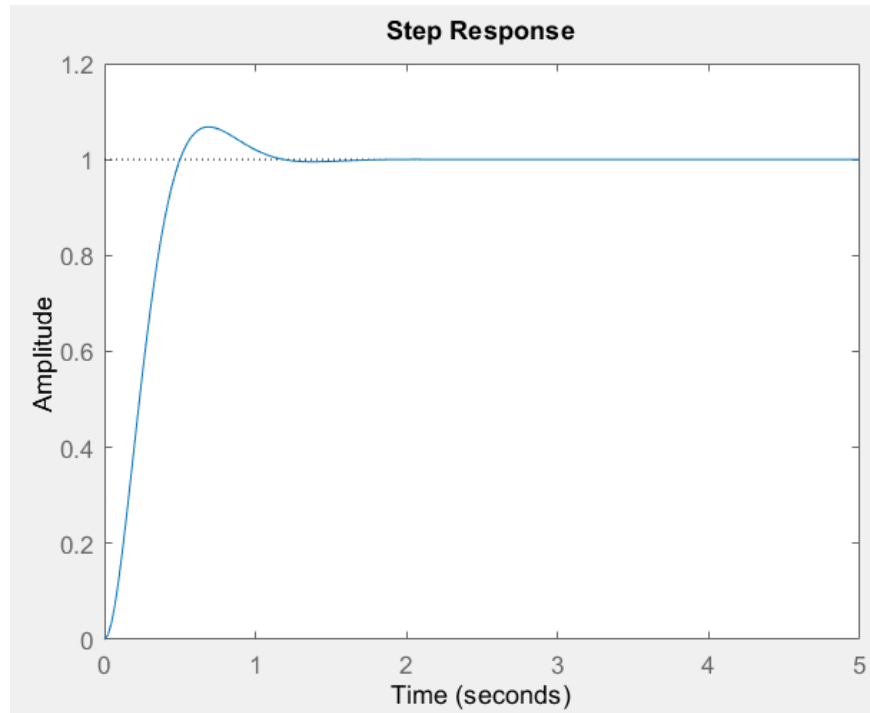
سیستم را با پارامترهای مجهول بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_0s + a_1}$$

مقادیر $\omega_n = 6 \text{ Hz}$ و $\zeta = 0.65$ را برای سیستم مطلوب در نظر گرفته و این سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

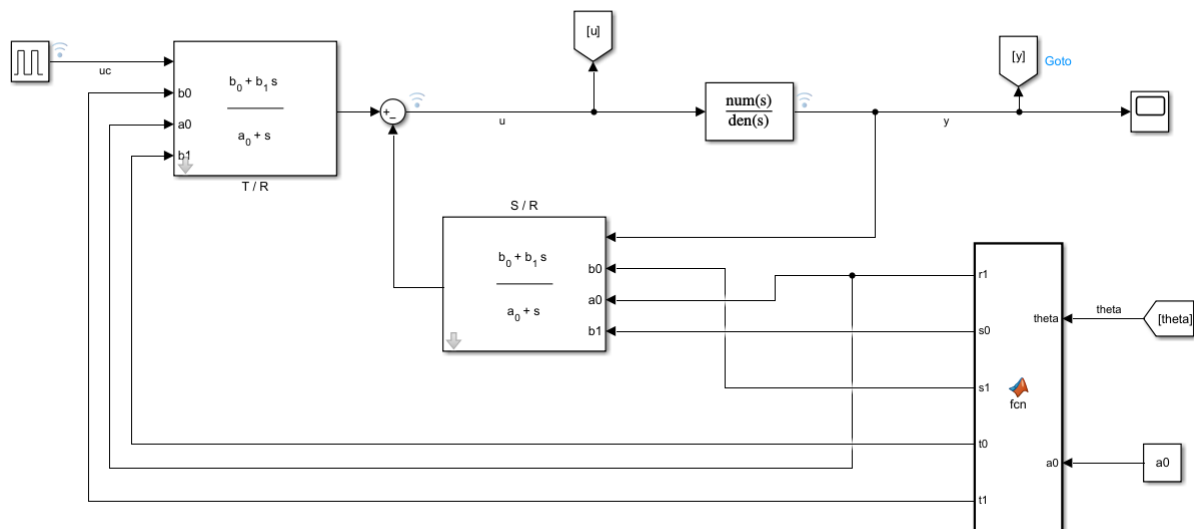
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}$$

خروجی پله این سیستم به شکل زیر است:



همچنین مرتبه A_0 برابر یک بوده و به صورت $(s+k)$ خواهد بود. محل قطب را هر چه دورتر از محور موهومی قرار دهیم بهتر خواهد بود. پس k را برابر ۳۰ در نظر می‌گیریم. ماتریس P را باید در ابتدا مقداردهی کنیم که ماتریس قطری مربعی 3×3 با مقادیر روی قطر برابر $10e6$ در نظر گرفته‌ایم.

پس از این مرحله، به سراغ مدل‌سازی بلوکها در محیط سیمولینک می‌رویم. بخش اول، حلقه‌ی کنترلی است:



در این حلقه یک کنترلر STR قرار دارد که بخش S/R به صورت فیدبک و بخش T/R به صورت فیدفوروارد قرار دارند. پارامترهای S و R و T (که هر سه از درجه ۱ بوده و همچنین چند جمله‌ای R مونیک است) در هر مرحله تخمین می‌خورند و در این توابع تبدیل قرار می‌گیرند. این پارامترها بدین صورت محاسبه می‌شوند:

```
function [r1,s0,s1,t0,t1] = fcn(theta,a0)

    wn = 6;
    zeta = 0.65;

    r1 = 2*zeta*wn + a0 -theta(1);
    s0 = (wn^2 + 2*a0*zeta*wn - theta(1)*r1 - theta(2))/theta(3);
    s1 = ((wn^2*a0)-theta(2)*r1)/theta(3);
    t0 = wn^2/theta(3);
    t1 = a0 * wn^2 /theta(3);

end
```

که جمله اول تتا برابر a0 و جمله دوم آن برابر a1 خواهد بود. اما یکی از ورودی‌های این تابع، مقادیر تتا هستند که موجود نیستند و باید تخمین زده شوند. بنابراین باید روش RLS پیوسته را برای این سیستم پیاده کنیم. فرمول‌های کلی این بخش بدین صورت است:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} &= P(t)\varphi(t)e(t) \\ e(t) &= y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= \alpha P(t) - P(t)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t)\end{aligned}$$

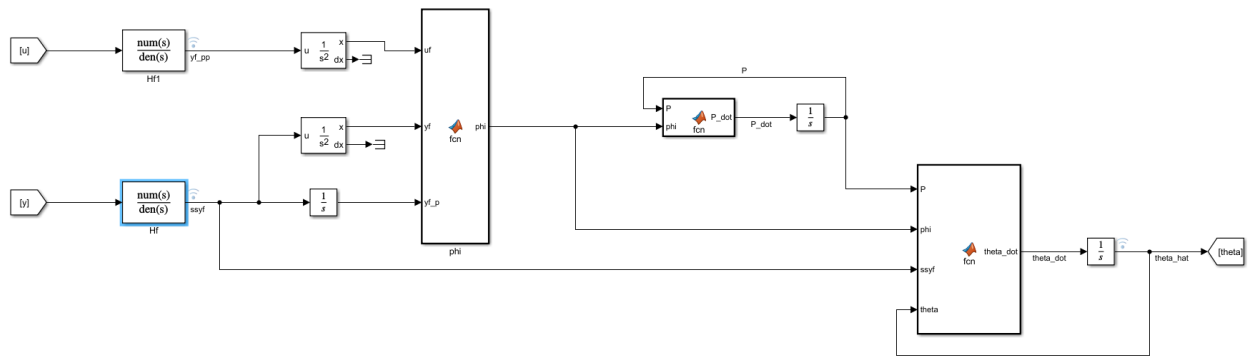
همچنین داریم:

$$y_f'' = (-y_f', -y_f, u_f) * [a_0, a_1, b]'$$

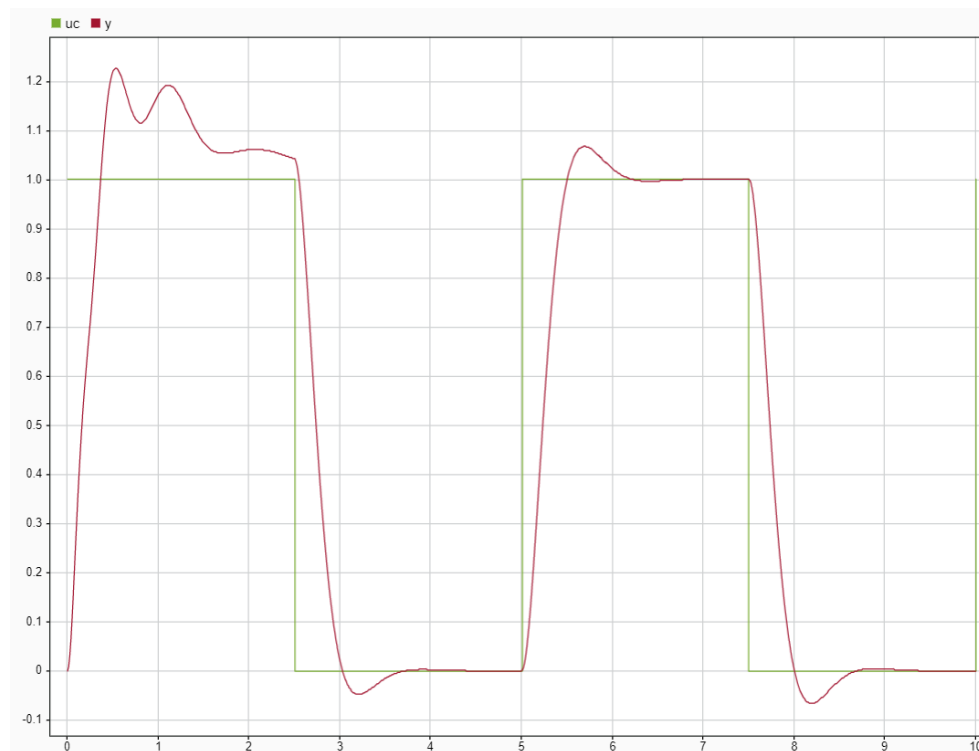
که بخش φ خواهد بود:

$$\varphi' = [-y_f', -y_f, u_f]$$

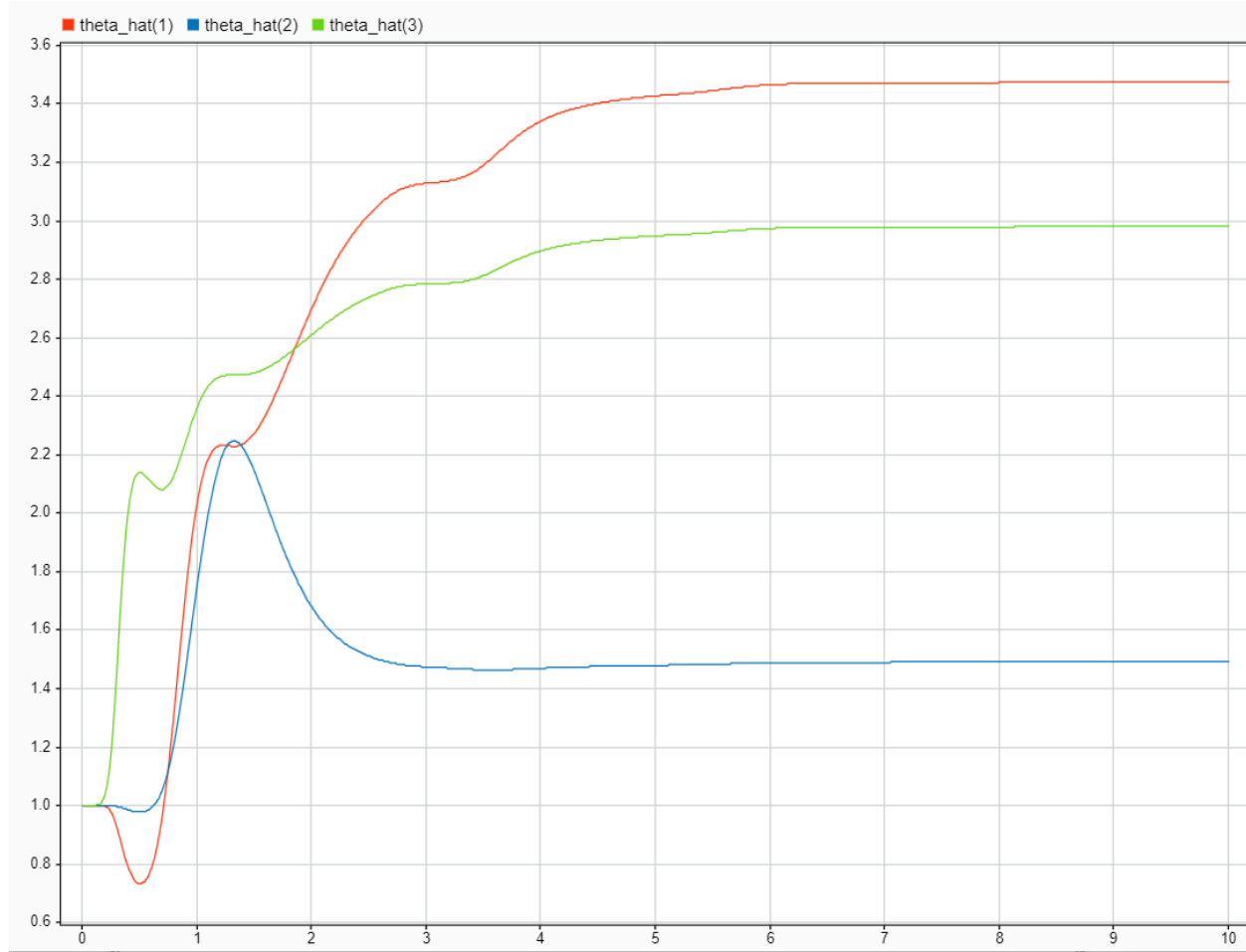
ورودی‌ها و خروجی‌ها فیلتر شده‌اند. تابع تبدیل فیلتر به صورت $\frac{1}{A_m}$ است. نمای کلی بخش تخمین پارامترها به صورت زیر است:



در نهایت خروجی‌های این بخش (پارامترهای a_0 a_1 b) به بخش کنترلر وارد شده و حلقه نهایی شکل می‌گیرد. تابع ورودی به سیستم به تابع موج پله‌ای است. ورودی و خروجی سیستم در شکل زیر رسم شده‌است:



ملاحظه می‌شود سیستم با زمان نشست و اورشوت قابل قبولی می‌تواند ورودی را رهگیری کند. همچنین مقدار پارامترهای تخمینی بدین صورت هستند:



که نشان می‌دهد هر یک به مقادیر حقیقی خود همگرا شده‌اند. (تتا ۱ باید به مقدار ۳.۵، تتا ۲ به مقدار ۱.۵ و تتا ۳ باید به مقدار ۳ می‌رسیدند که چنین شده‌است).