تمرین پنجم شبیه سازی

درس کنترل تطبیقی

مهدی عبداله چالکی (۸۱۰۶۰۰۲۹۰)

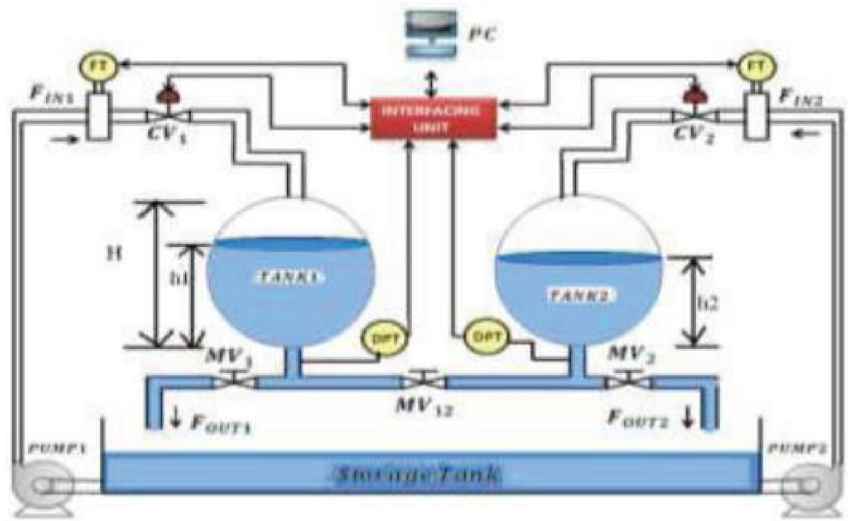
دانشکده مهندسی مکانیک تهران

تیر ۱۴۰۱

فهرست

صورت پروژه

در این تمرین، هدف کنترل سطح مایع درون یک سیستم به شکل زیر است:



مدل ریاضی سیستم و پارامترها به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\mathrm{dh1}}{\mathrm{dt}} = 0.75\left\{\frac{\text{Fin } - \beta_{12}(\sqrt{\mathrm{h1}} - \mathrm{h2}) - 1.33\mathrm{h1}\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dt}}}{\mathrm{A}}\right\}$$

$$\frac{\mathrm{dh2}}{\mathrm{dt}} = 0.75\left\{\frac{\beta_{12}(\sqrt{\mathrm{h1}} - \mathrm{h2}) - \beta_2\sqrt{\mathrm{h2}} - 1.33\mathrm{h2}\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dt}}}{\mathrm{A}}\right\}$$

ρ = density

F_{IN} = Volumetric flow rate for inlet stream

F_{OUT} = Volumetric flow rate for outlet stream

A = Area of the spherical tank with respect to change in flow

h1, h2 = Height of spherical tank 1 and 2

dh/dt = Change in height of liquid level

تابع تبدیل از ورودی جریان اول (F_{IN}) و خروجی ارتفاع تانک دوم (h2) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial h_2}{\partial F_{in1}} = \frac{R_2}{(\tau_1\tau_2)s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A(h_1)R_2)s + 1}$$

$$A(h_1) = 1$$

جدول پارامترهای مدل به صورت زیر است:

پارامتر	مقدار
C1	*0.2*
C2	*1.1*
R1	*0.9*
R2	*1.1*
τ_1	*63.85*
τ_2	*1048.2575*

در بخش‌های بعدی، به بررسی روش‌های گرادیان (*MIT*)، گرادیان نرمالایز شده و نیز *MRAS* پایدار بر اساس پایداری لیاپانوف می‌پردازیم. در هر بخش، تاثیر تغییر پارامترهای مربوطه را بررسی می‌کنیم.

۱- روش گرادیان (MIT)

با توجه به شماره دانشجویی و معادلات داده‌شده، تابع تبدیل سیستم حلقه باز به صورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1.643 * 10^{-5}}{s^2 + \ 0.01663\ s \ + \ 1.494 * 10^{-5}}$$

برای استفاده از قانون *MIT*، باید تابع حلقه بسته مطلوبی در نظر بگیریم. از آنجا که سیستم مکانیکی است، نمی‌توان انتظار پاسخ سریعی برای آن داشت. بنابراین فرکانس را ۱۰ رادیان بر ثانیه و ضریب دمپینگ را ۰.۷ در نظر می‌گیریم. بنابراین سیستم حلقه بسته مطلوب به صورت زیر خواهد بود:

$$G_m(s) = \frac{b_m}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} = \frac{10}{s^2 + 14s + 10}$$

با تبدیل این تابع تبدیل‌ها به معادلات دیفرانسیلی، به فرم‌های زیر خواهیم رسید:

$$\ddot{y} = -a_1 \dot{y} - a_0 y + bu$$
$$\ddot{y}_m = -a_{1m} \dot{y}_m - a_{0m} y_m + b_m u_c$$

همچنین قانون کنترلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y - \theta_3 \dot{y}$$

این ورودی را در معادله جلقه باز قرار داده تا به معادله حلقه بسته برسیم:

$$\ddot{y} = b\theta_1 u_c - (b\theta_3 + a_1)\dot{y} - (b\theta_2 + a_0)y$$

با مقایسه‌ی این معادله با معادله‌ی مطلوب داریم:

$$b\theta_1 = b_m$$

$$b\theta_2 + a_0 = a_{0m}$$

$$b\theta_3 + a_1 = a_{1m}$$

و یا:

$$\theta_1 = \frac{b_m}{b}$$

$$\theta_2 = \frac{a_{0m} - a_0}{b}$$

$$\theta_3 = \frac{a_{1m} - a_1}{b}$$

برای استفاده از قانون *MIT*، باید یک تابع خطا تعریف کنیم. این خطا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = y - y_m$$

پارامترهای کنترلر به گون‌های بدست می‌آیند تا تابع هزینه زیر حداقل گردد:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$$

نحوه‌ی تغییر پارامترها در معادله‌ی زیر بیان شده است:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta}$$

حال برای مشتق جزیی گرفتن از *e*، باید بتوانیم از *y* مشتق بگیریم. پس ابتدا *y* را بر حسب تتاها بازنویسی می‌کنیم:

$$y = \frac{b\theta_1 u_c}{P^2 + P(b\theta_3 + a_1) + (b\theta_2 + a_0)}$$

با توجه به ثابت بودن *ym*، مشتقات جزیی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial e}{\partial\theta_1} = \frac{bu_c}{P^2 + P(b\theta_3 + a_1) + (b\theta_2 + a_0)}$$

$$\frac{\partial e}{\partial\theta_2} = \frac{-b^2u_c}{\left(P^2 + P(b\theta_3 + a_1) + (b\theta_2 + a_0)\right)^2} = -\frac{b}{P^2 + P(b\theta_3 + a_1) + (b\theta_2 + a_0)}y$$

$$\frac{\partial e}{\partial\theta_3} = \frac{-b^2u_cP}{\left(P^2 + P(b\theta_3 + a_1) + (b\theta_2 + a_0)\right)^2} = -\frac{Pb}{P^2 + P(b\theta_3 + a_1) + (b\theta_2 + a_0)}y$$

حال با توجه به این مقادیر، مشتقات تتا نسبت به زمان بدست می‌آیند:

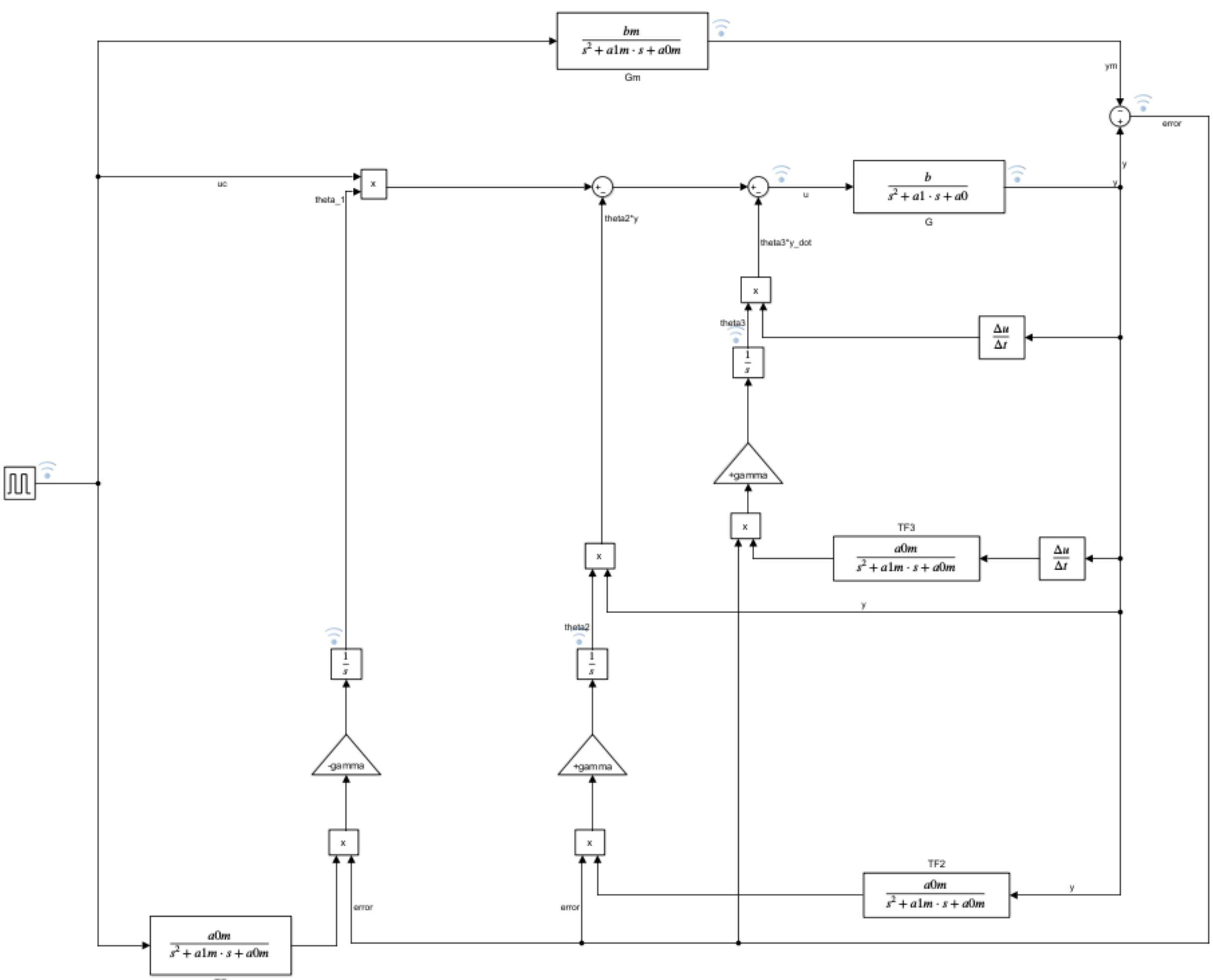
$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma e\left(\frac{bu_c}{P^2 + P\big(b\theta_3 + a_1\big) + \big(b\theta_2 + a_0\big)}\right) = -\gamma' e\left(\frac{a_{0m}u_c}{P^2 + P\big(a_{1m}\big) + \big(a_{0m}\big)}\right)$$

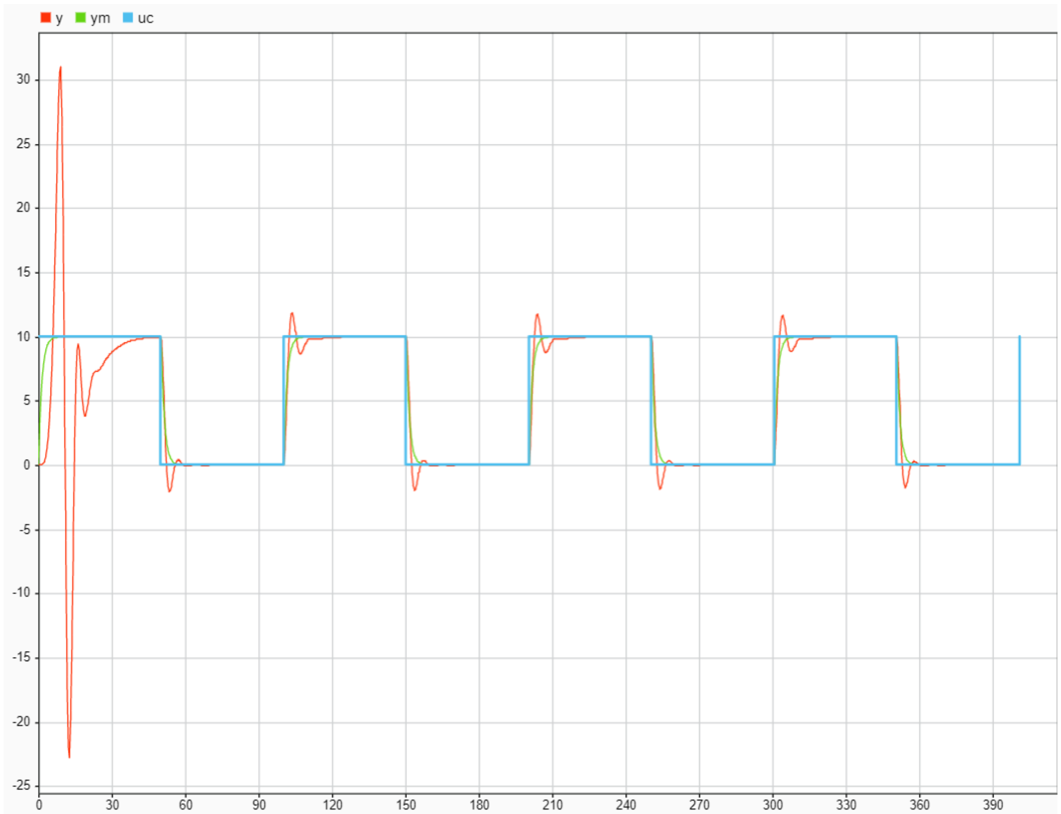
$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\gamma e\left(\frac{-by}{P^2 + P\big(b\theta_3 + a_1\big) + \big(b\theta_2 + a_0\big)}\right) = +\gamma' e\left(\frac{a_{0m}y}{P^2 + P\big(a_{1m}\big) + \big(a_{0m}\big)}\right)$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = -\gamma e\left(\frac{-Pby}{P^2 + P\big(b\theta_3 + a_1\big) + \big(b\theta_2 + a_0\big)}\right) = +\gamma' e\left(\frac{Pa_{0m}y}{P^2 + P\big(a_{1m}\big) + \big(a_{0m}\big)}\right)$$

که در این معادلات، جملات $b\theta_3 + a_1$ و $b\theta_2 + a_0$ با a_{1m} و a_{0m} تقریب زده‌شده‌اند و $\gamma' = \frac{\gamma b}{a_{0m}}$ در نظر گرفته شده‌است. با استفاده از این معادلات، سیستم مورد نظر در سیمولینک پیاده سازی شده‌است:

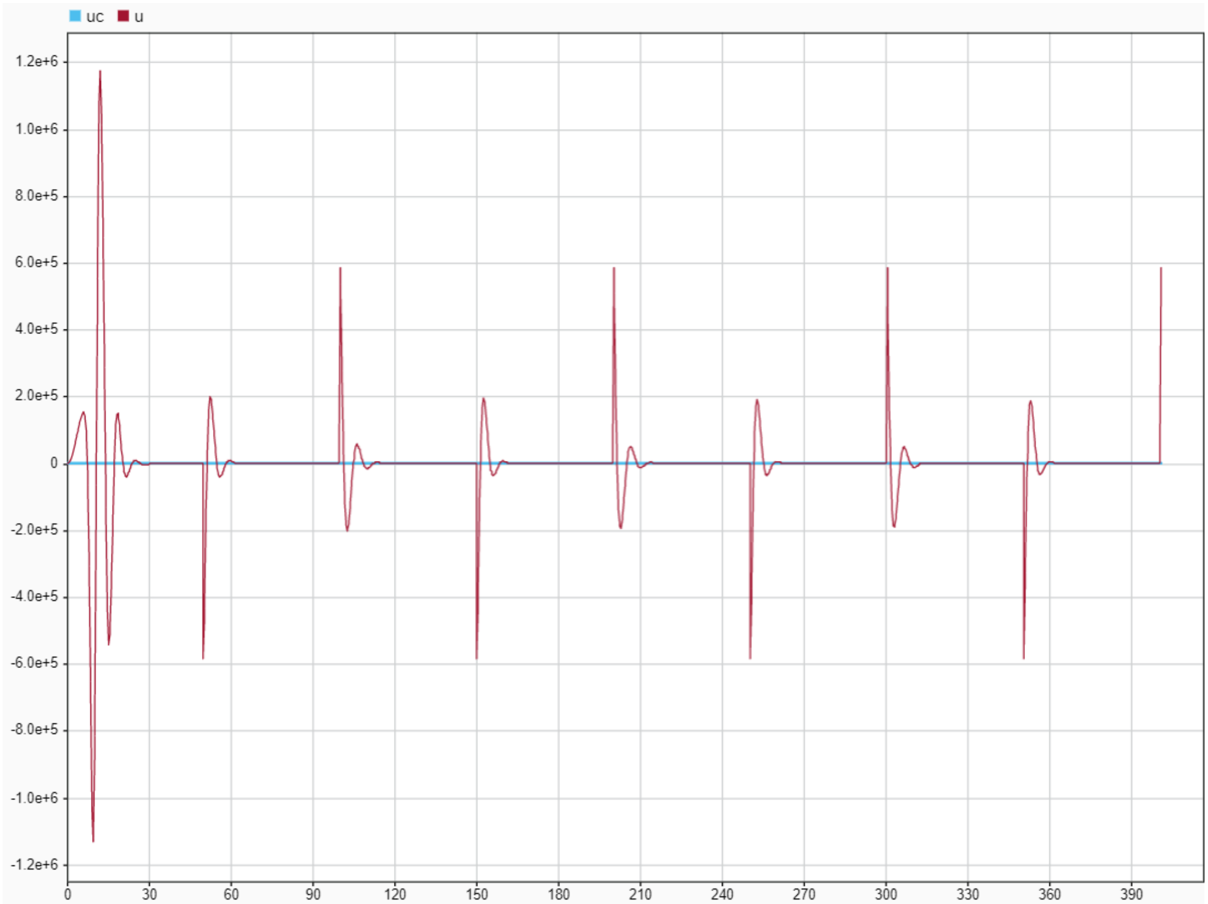


ورودی مرجع سیستم پالس‌های مربعی با دامنه ۱۰ در نظر گرفته شده‌است. همچنین مقدار γ' را ۵۰ گرفته‌ایم. خروجی سیستم، خروجی مطلوب و ورودی مرجع به شکل زیر هستند:



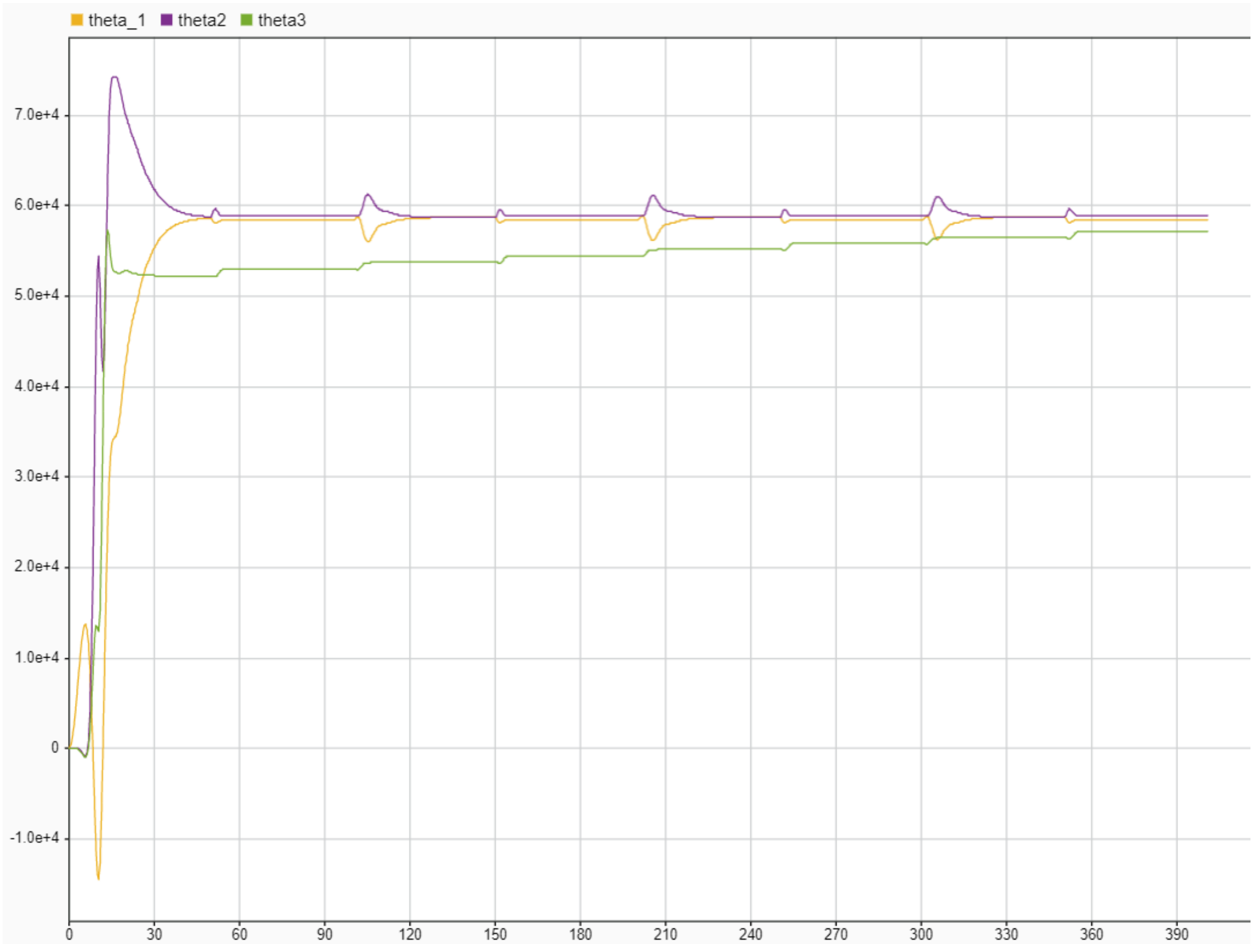
مشاهده می‌شود پس از طی چند ثانیه اول و یک اورشوت بزرگ، سیستم تقریبا توانسته‌است به خوبی ورودی را ردیابی کند. در هر بار تغییر ورودی مرجع نیز یک اورشوت به اندازه تقریبا ۲۰ درصد داریم که مقدار خوبی است.

همچنین خروجی کنترلر به شکل زیر است:



مشاهده می‌شود مقدار این سیگنال، بسیار بزرگ است. می‌توان گفت که سیستم مکانیکی دارای ثابت زمانی بزرگی است و در صورتی که بخواهد تغییرات شدیدی را دنبال کند، نیازمند ورودی بسیار بزرگی (بر حسب سیستم، از نوع جریان آب یا ولتاژ یا دما و ...) است.

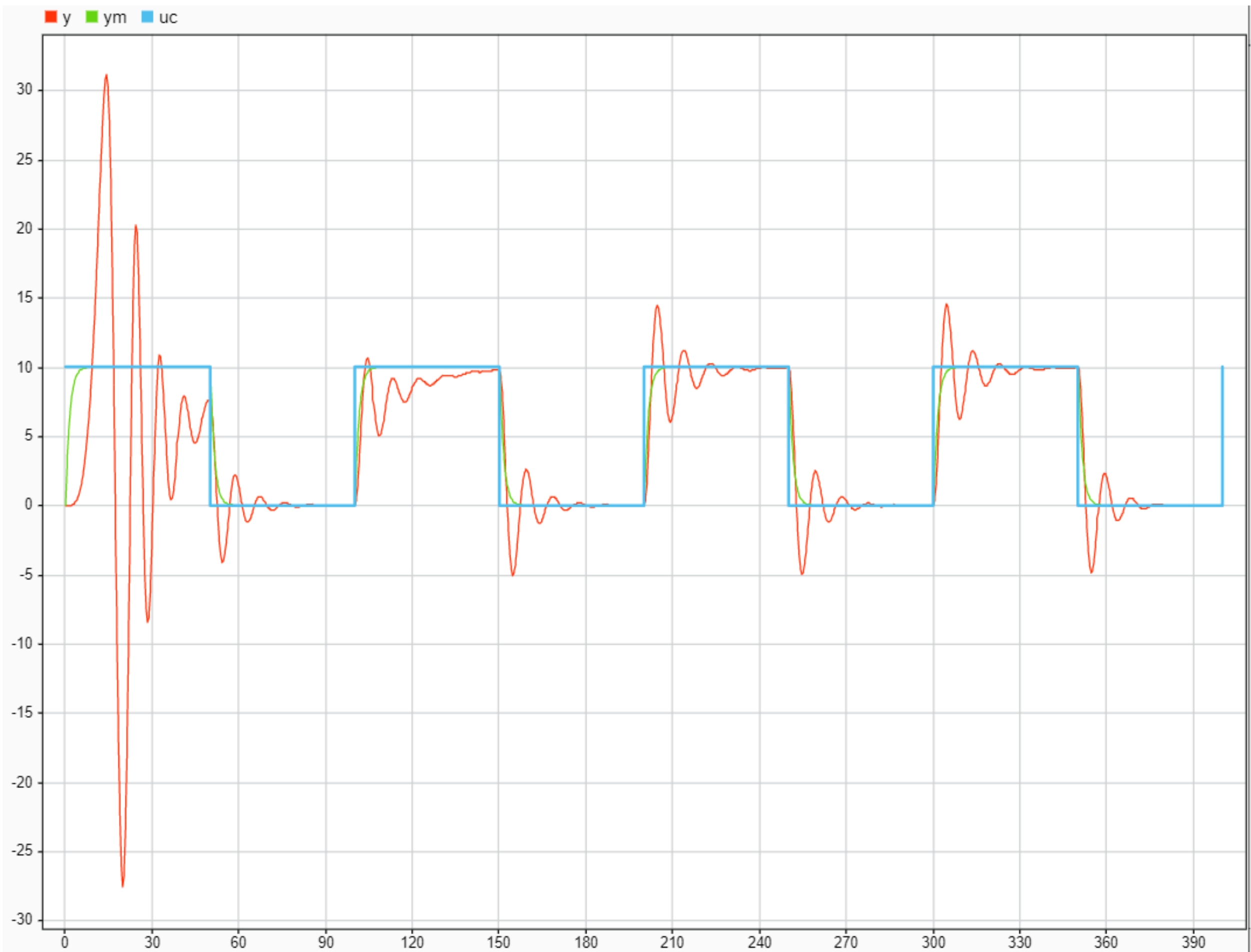
در شکل زیر نیز تغییرات پارامترهای تتا مشهود است:



که این پارامترهای تتا۱ و تتا۲ با سرعت بیشتر و تتا۳ با سرعت کمتر، به مقادیر نهایی خود میل می‌کنند.

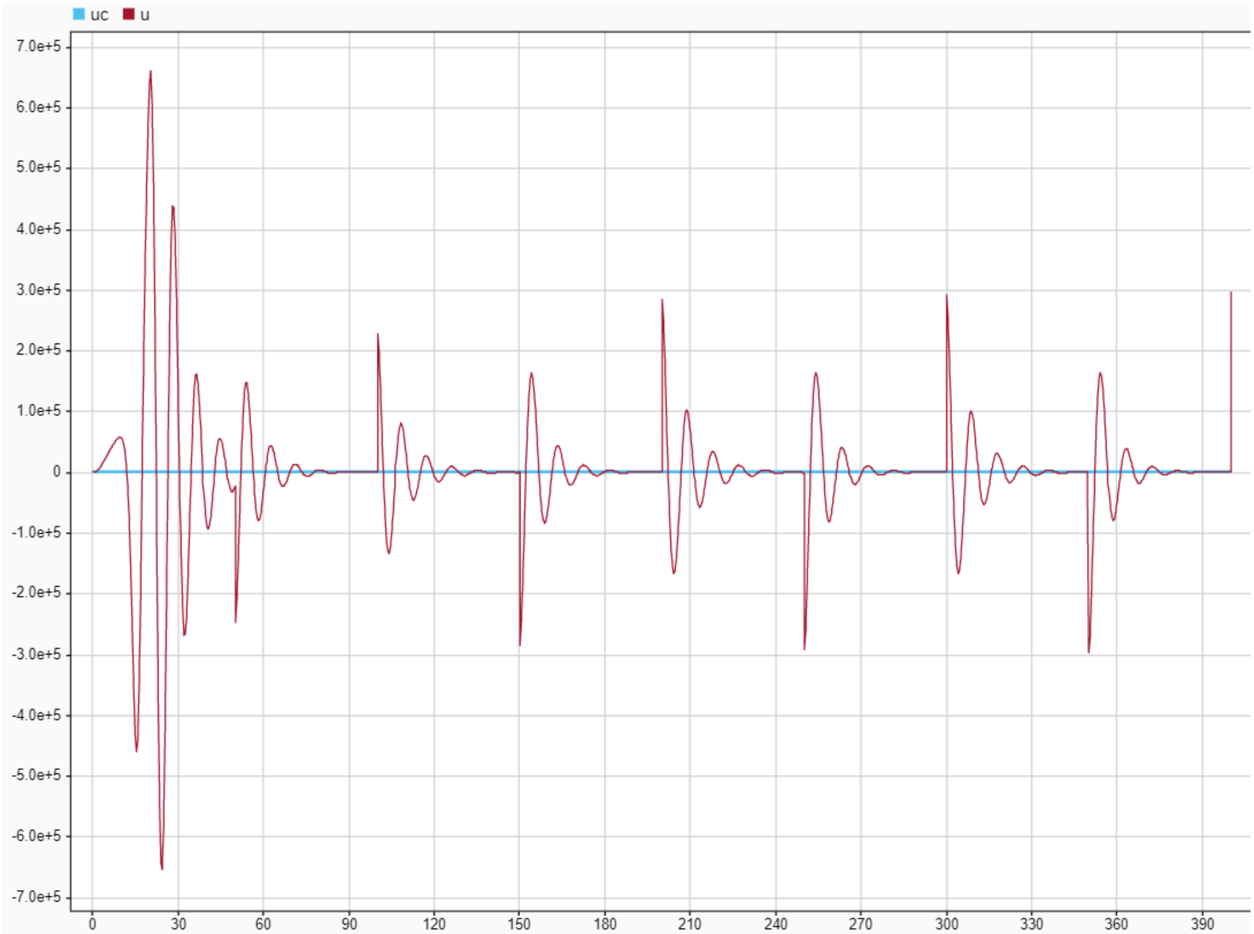
بررسی اثر تغییر پارامتر یادگیری

در این بخش، پارامتر یادگیری را روی عدد ۱۰ تنظیم کرده و پاسخ را مقایسه می‌کنیم. خروجی سیستم، خروجی مطلوب و ورودی مرجع به شکل زیر هستند:



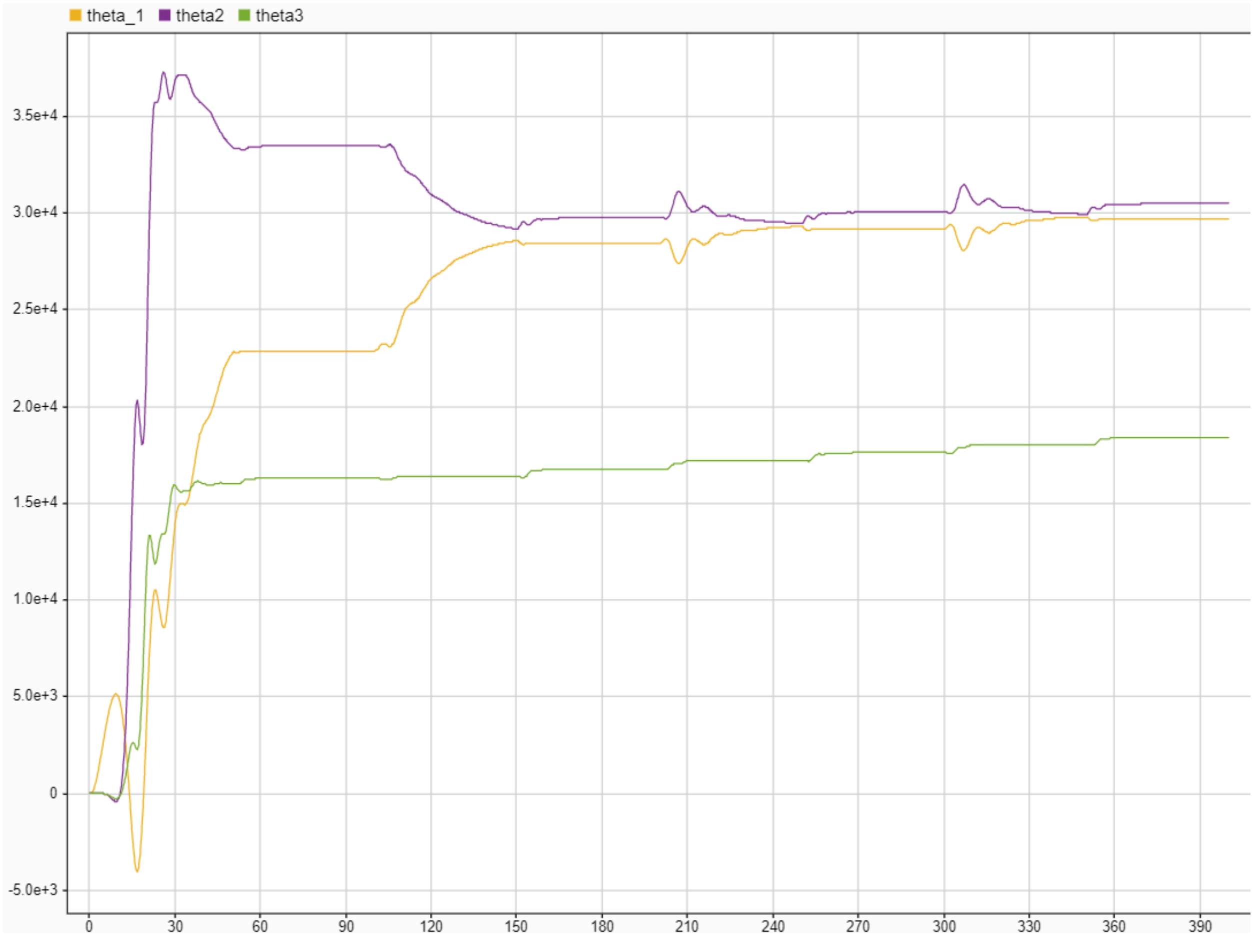
مشاهده می‌شود پاسخ سیستم بسیار کند بوده و در انتهای بازه‌های ۵۰ ثانیه‌ای تقریبا می‌تواند به مقدار مطلوب برسد. میزان اورشوت‌ها در ابتدای هر مرحله نیز به حدود ۵۰ درصد رسیده است. تفاوت دیگر، مربوط به نوسانات بیشتر خروجی نسبت به حالت قبلی است.

خروجی کنترلر به شکل زیر است:



با اینکه این ورودی کنترلی به میزان قابل توجهی کمتر از قبل شده‌است، اما همچنان مقدارش بسیار زیاد است. تفاوت دیگر، نوسانات زیاد ورودی کنترلی نسبت به حالت قبل است.

نمودار تغییرات پارامترها نیز در شکل زیر آمده است:

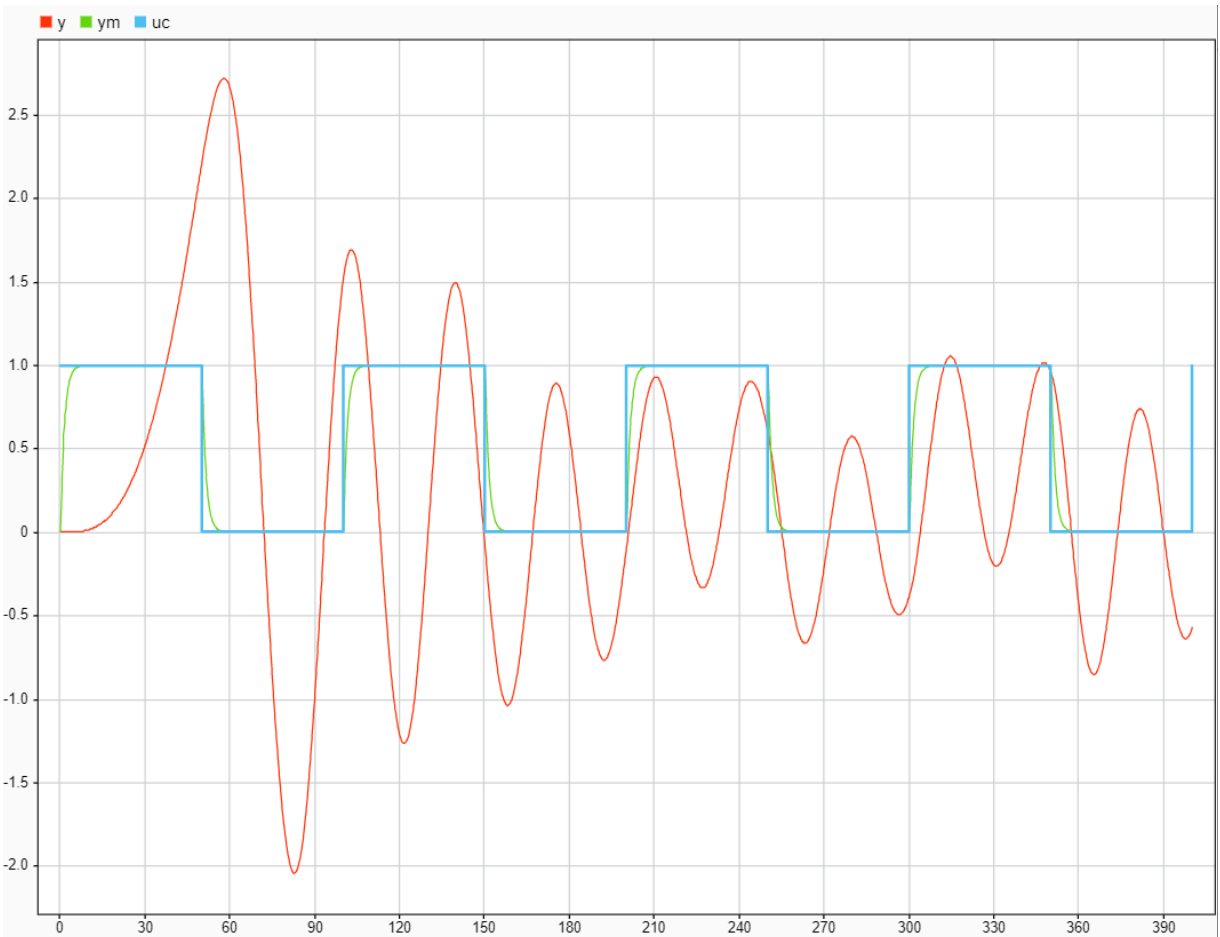


با مقایسه با حالت قبلی، سرعت همگرایی پارامترها بسیار کمتر بوده و تتا۳ به زمان بیشتری نیاز دار تا به مقدار نهایی خود همگرا شود.

با مقایسه این دو حالت می‌توان دریافت که با کاهش نرخ یادگیری، الگوریتم گام‌های کوتاه‌تری را طی کرده و دیرتر می‌تواند به مقدار بهینه خود برسد. همچنین این از ضعف‌های الگوریتم *MIT* است که نسبت به تغییر پارامتر یادگیری حساسیت بالایی داشته و با افزایش نرخ یادگیری ممکن است ناپایدار شود و با کاهش آن سرعت همگرایی بسیار کند می‌شود.

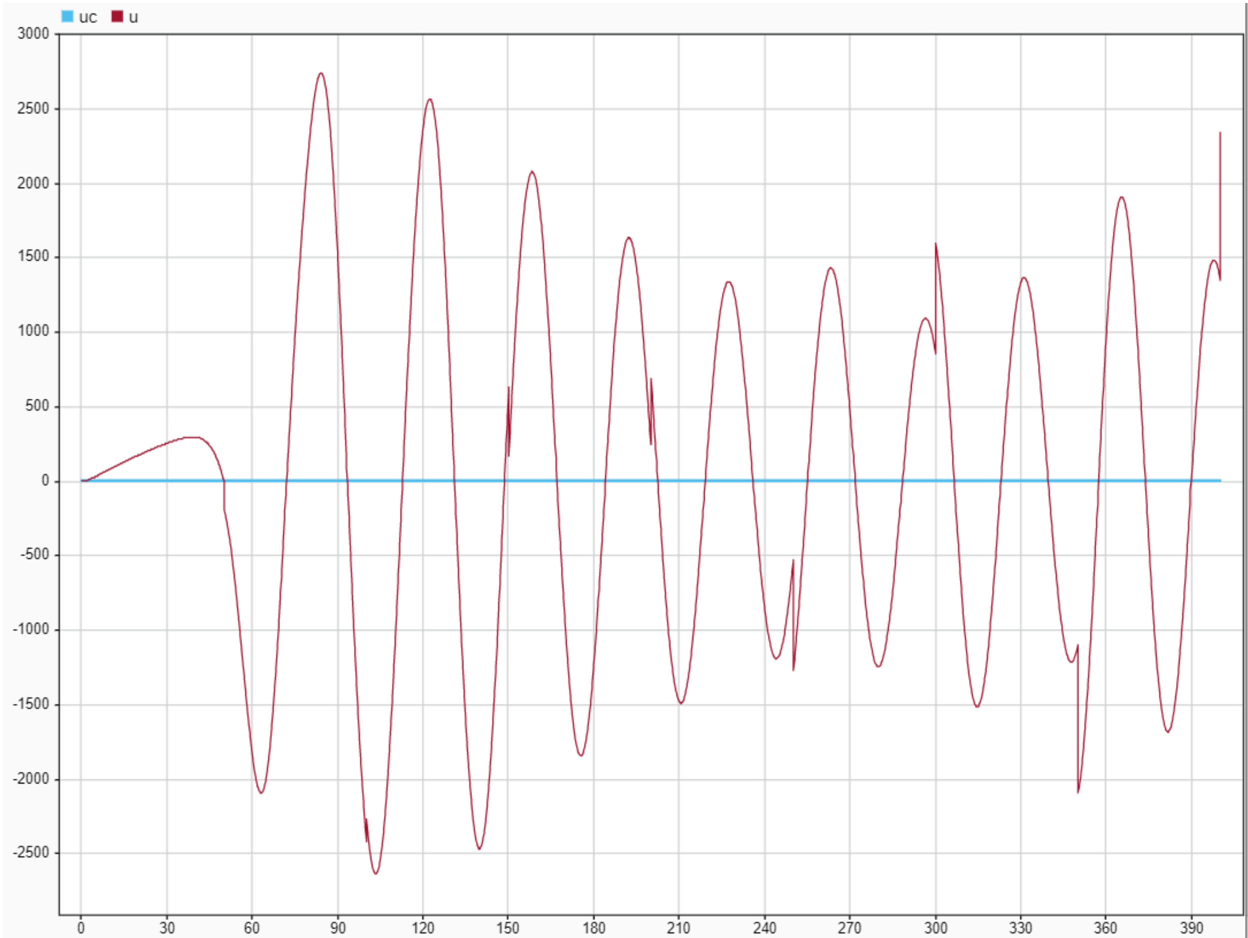
بررسی اثر تغییر ورودی مرجع

در این بخش ورودی مرجع را به جای ۱۰، به ۱ کاهش می‌دهیم و نمودارها را بررسی می‌کنیم. خروجی سیستم، خروجی مطلوب و ورودی مرجع به شکل زیر هستند:



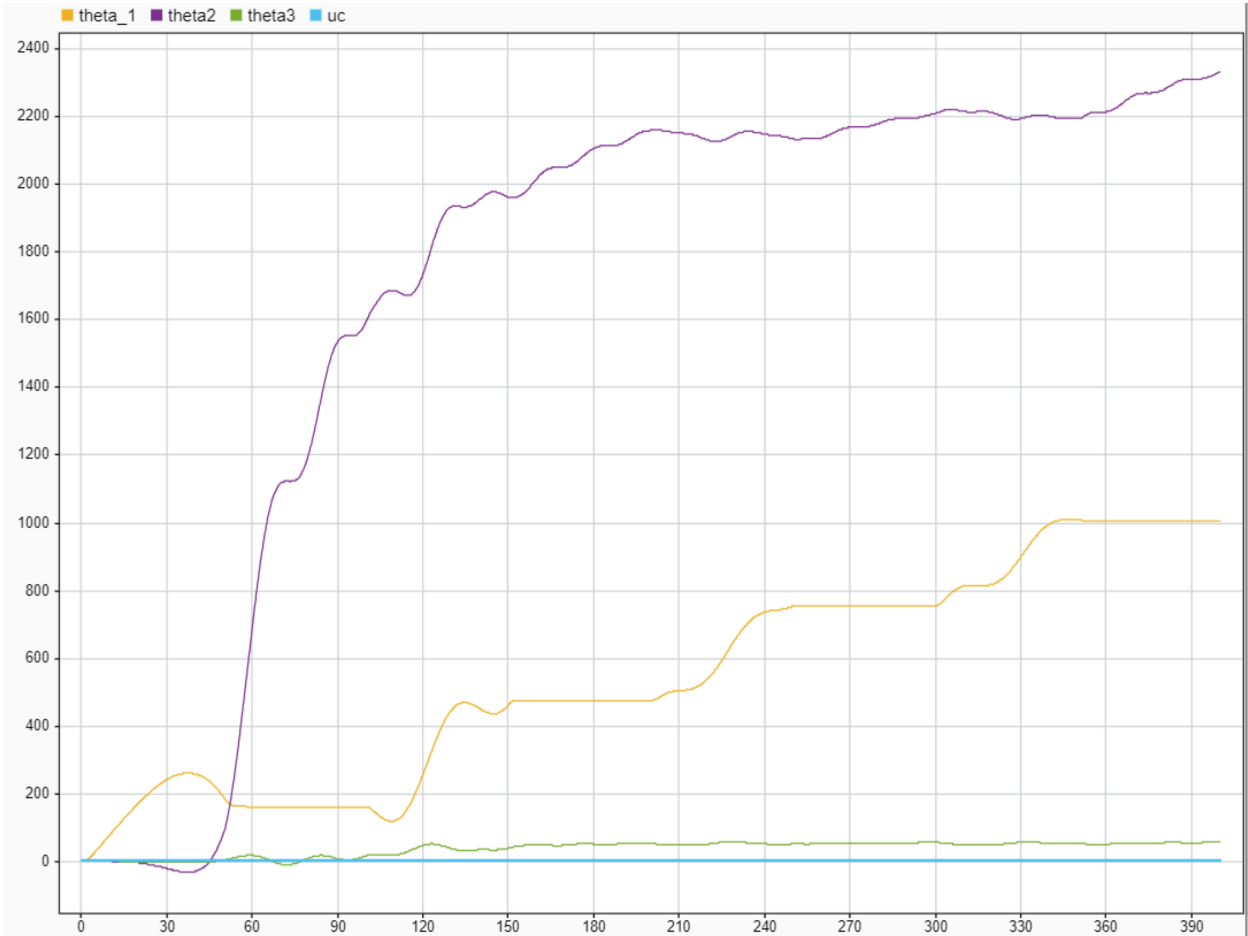
مشاهده می‌شود که خروجی سیستم، اصا به خروجی نهایی همگرا نشده است.

تلاش کنترلی سیستم نیز به شکل زیر است:



این ورودی کنترلی نیز به هیچ مقدار خاصی همگرا نمی‌شود و علی رغم کاهش بسیار که ناشی از کاهش نرخ یادگیری است، اما باعث همگرایی پاسخ نهایی نمی‌شود.

در نهایت، نمودار تغییرات پارامترها نیز در شکل زیر آمده است:

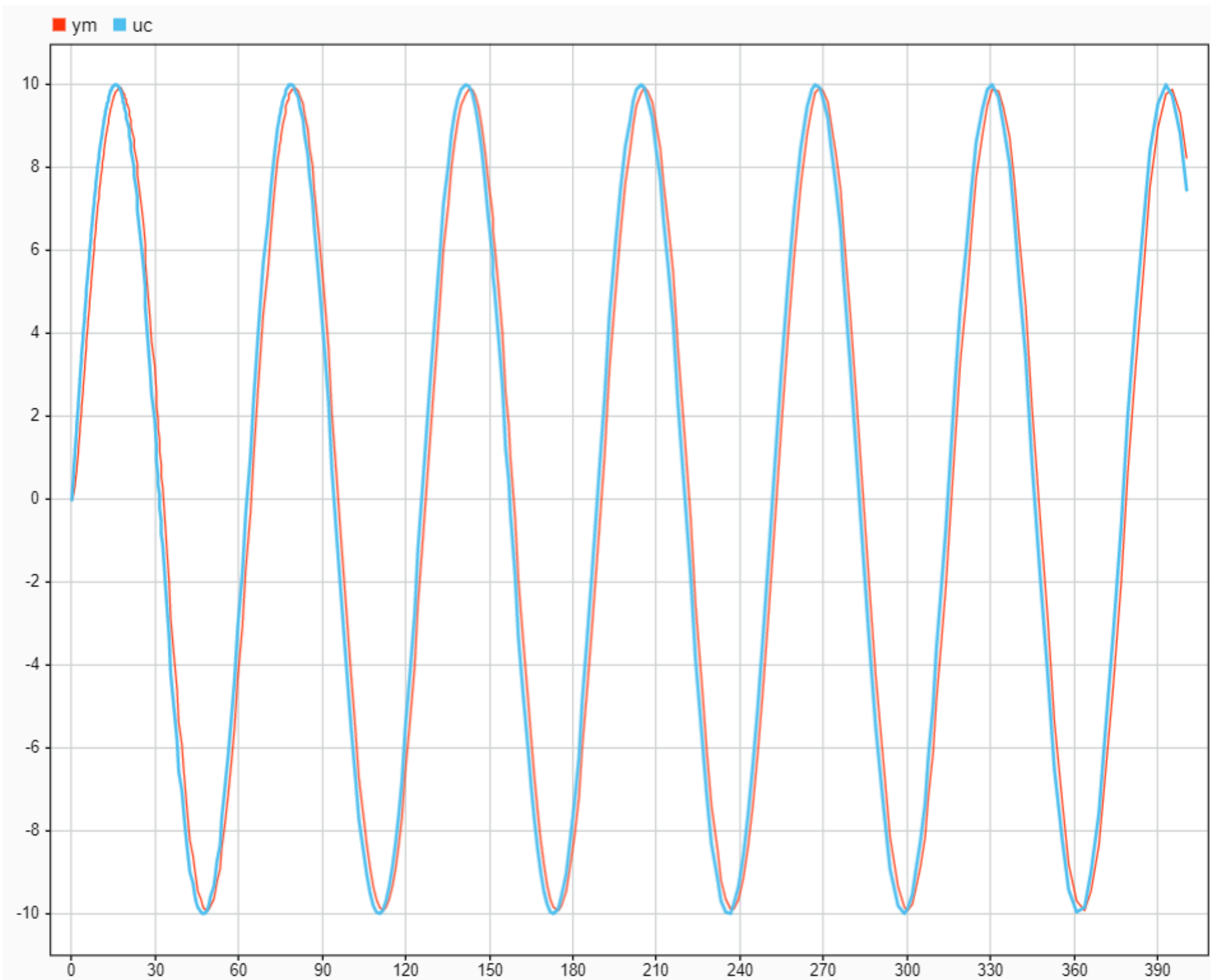


در اینجا نیز پارامترها با سرعتی بسیار کند به مقادیر نهایی خود می‌رسند و زمانی بسیار طولانی نیاز است تا الگوریتم بتواند خروجی را دنبال کند.

بررسی پاسخ به ورودی سینوسی

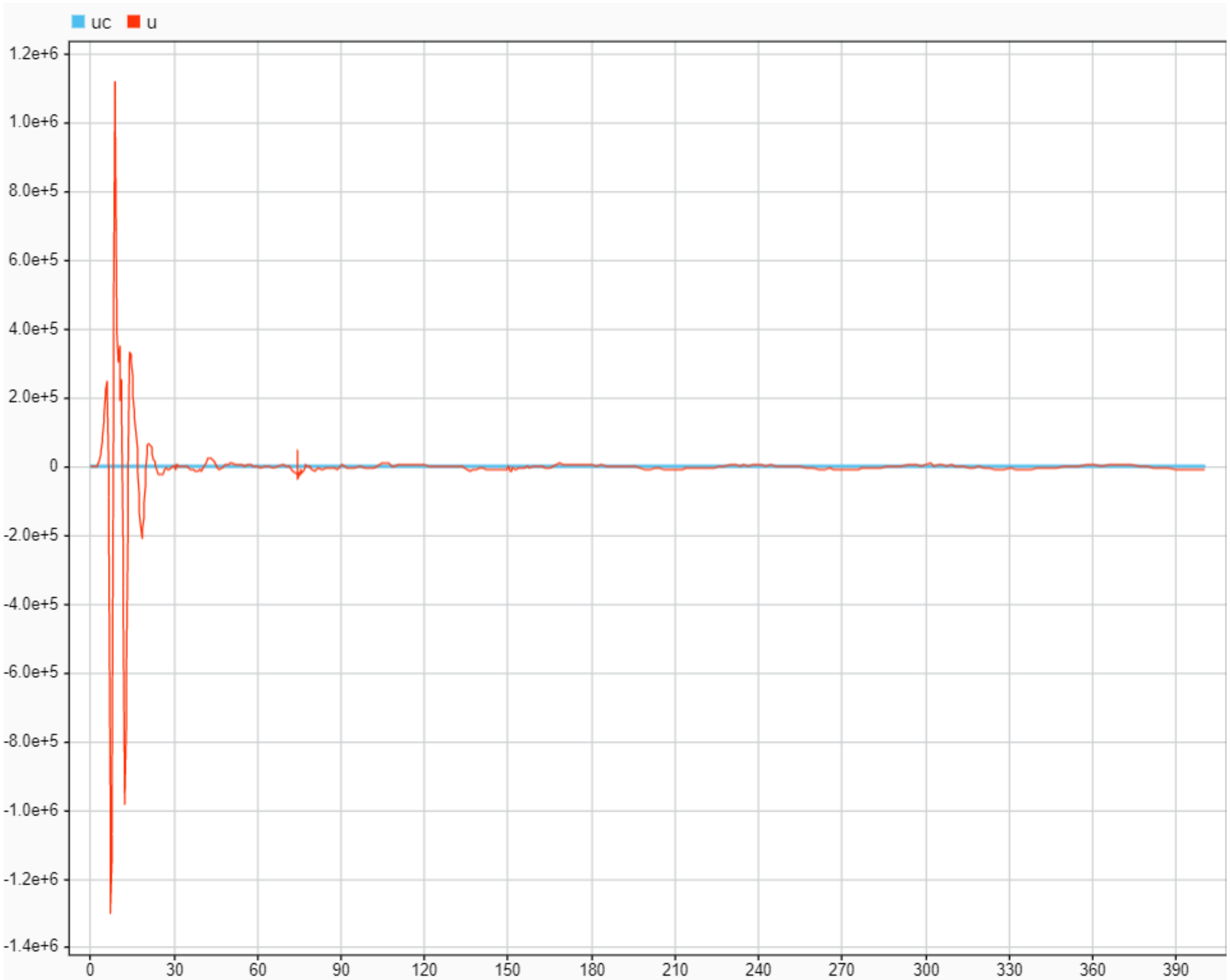
در این حالت، یک سیگنال سینوسی با دامنه ۱ و فرکانس ۰.۱ رادیان بر ثانیه به سیستم وارد می‌شود. پاسخ به تغییرات نسبت به پارامترها و اندازه‌های ورودی، مانند ورودی مربعی است و مجددا بررسی نمی‌شود.

نمودار خروجی سیستم به شکل زیر است:



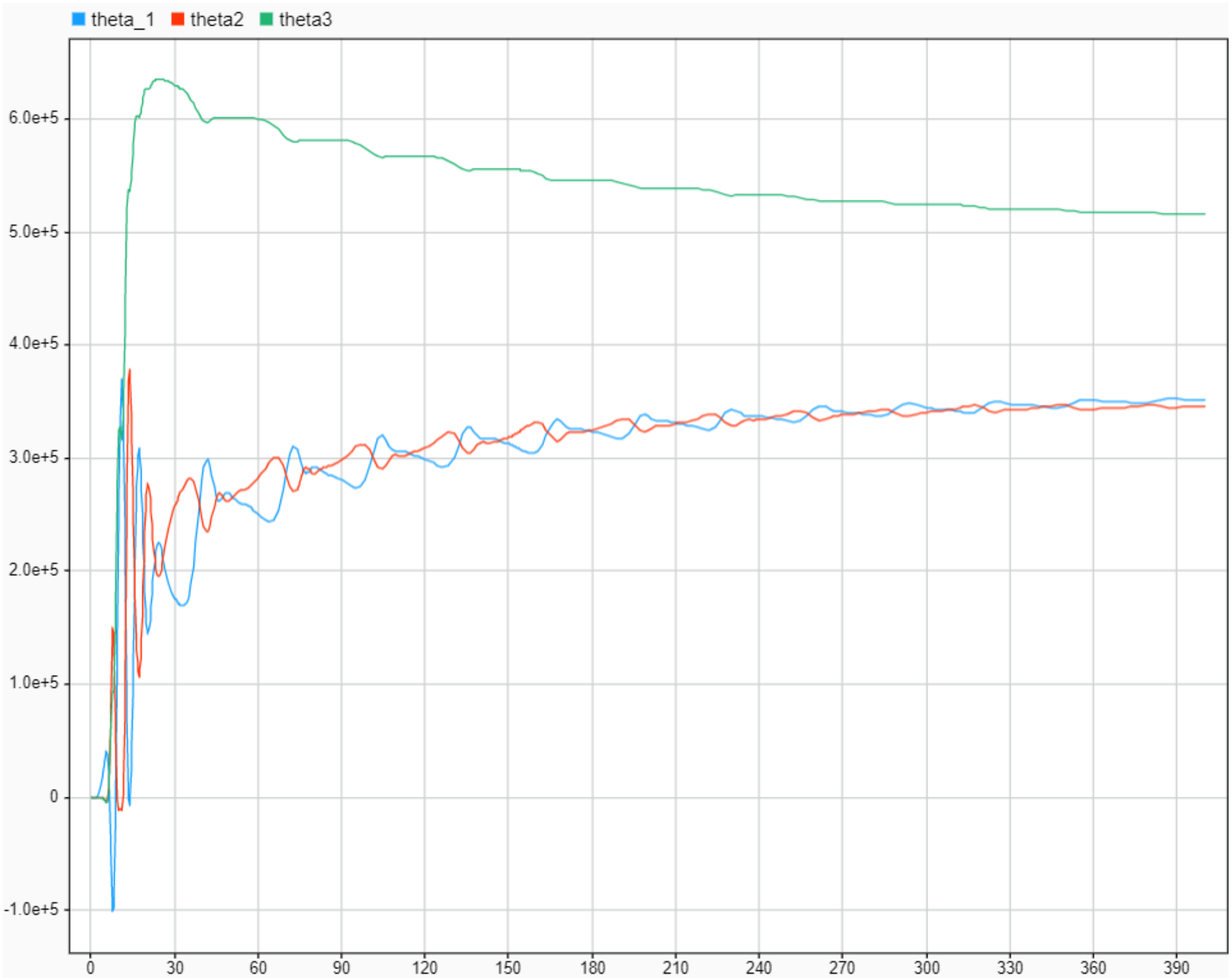
مشاهده می‌شود سیستم با اندکی تاخیر، توانسته است به خوبی سیگنال مرجع را ردیابی کند.

نمودار ورودی کنترلی به شکل زیر است:



این سیگنال در ابتدا مقدار بسیار بزرگی داشته، اما پس از چند ثانیه‌ی اول، به مقدار بسیار کمتری رسیده‌است و نوسان سینوسی می‌کند.

نمودار تغیرات پارامترها هم به شکل زیر است:



در این شکل، مشاهده می‌شود که پارامترهای سیستم پس از طی کردن حدود ۳۵۰ ثانیه، به مقدار نهایی خود رسیده‌اند.

با مقایسه با حالات پیشین، بدیهی است که الگوریتم *MIT* نسبت به ورودی مرجع بسیار حساس بوده و تغییرات آن می‌تواند به کل باعث ناپایداری و عدم همگرایی شود. این مشکل را می‌توان با استفاده از الگوریتم نرمالایز شده *MIT* تا حدودی حل کرد.

۲- روش گرادیان نرمالیزه‌شده

در این روش، سعی می‌کنیم تا حساسیت سیستم حلقه بسته طراحی شده به سطح سیگنال را کاهش دهیم. به همین منظور، یک پارامتر φ به صورت زیر تعریف می‌شود:

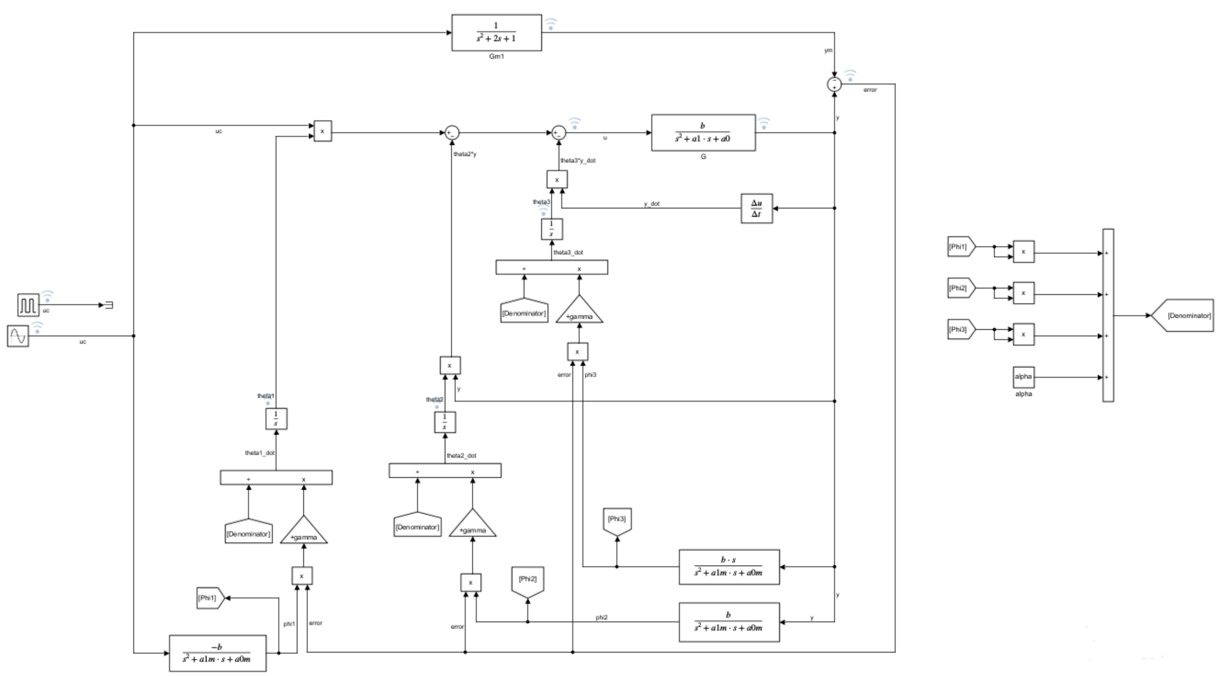
$$\varphi = -\frac{\partial e}{\partial \theta}$$

این پارامتر با توجه به تعریف *e*، عملا یک *uc* در داخل خود دارد. همچنین قاعده‌ی مورد استفاده در این روش به شکل زیر است:

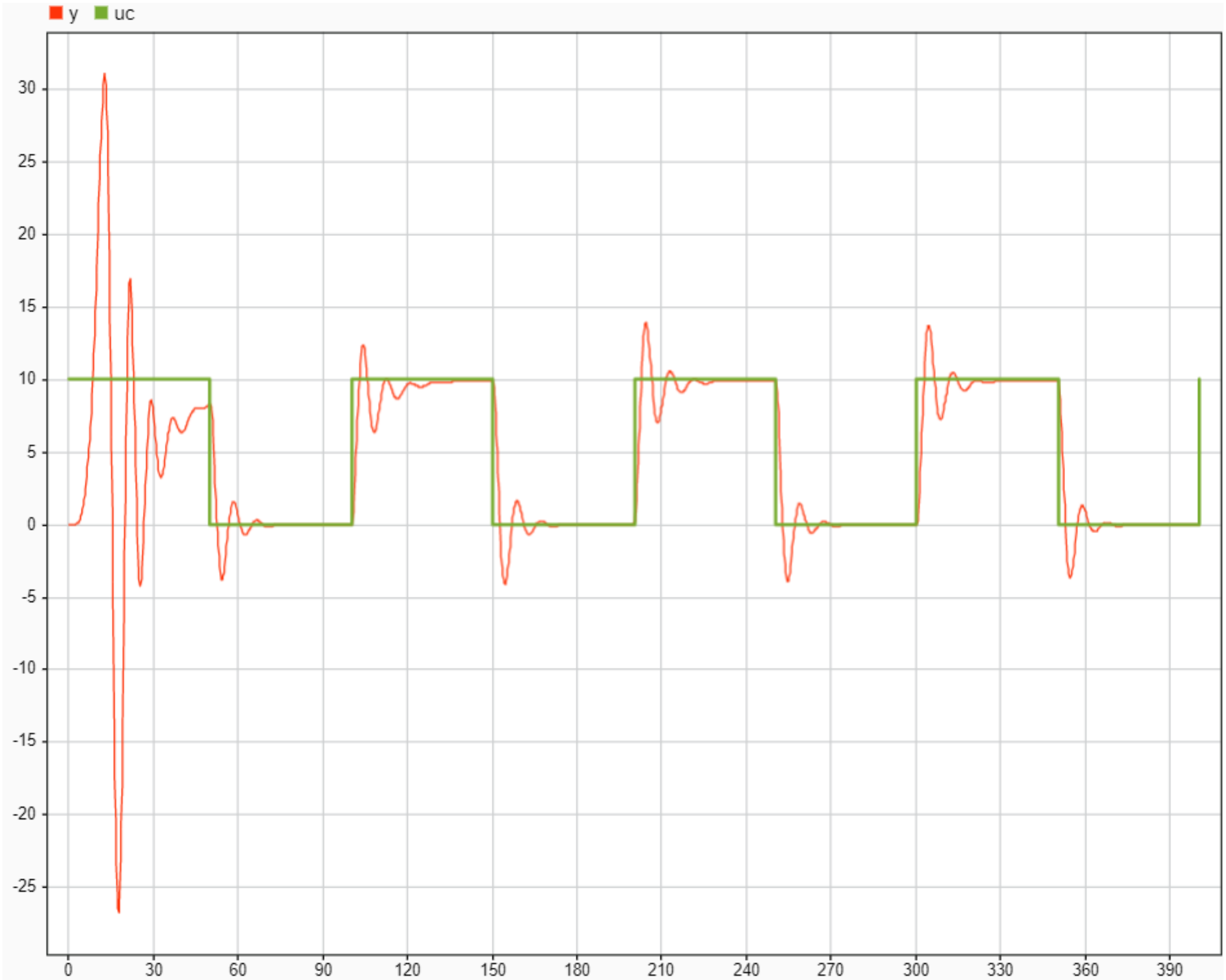
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma\varphi}{\alpha + \varphi^T\varphi} e$$

در روابط بالا، φ و θ هر دو بردار هستند. البته می‌توان برای هر تتا، در صورت همان فی مربوطه را در نظر گرفت. پارامتر آلفا نیز مقداری بسیار کوچک (۰.۰۰۱) برای صفر نشدن مخرج در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه مخرج شامل یک عبارت *uc* به توان دو است، عملا اثر اندازه ورودی با صورت خنثی می‌شود. مجددا با مقادیر قسمت قبلی شبیه‌سازی را انجام می‌دهیم و نمودارها را بررسی می‌کنیم.

مدل سیمولینک این سیستم به شکل زیر است:

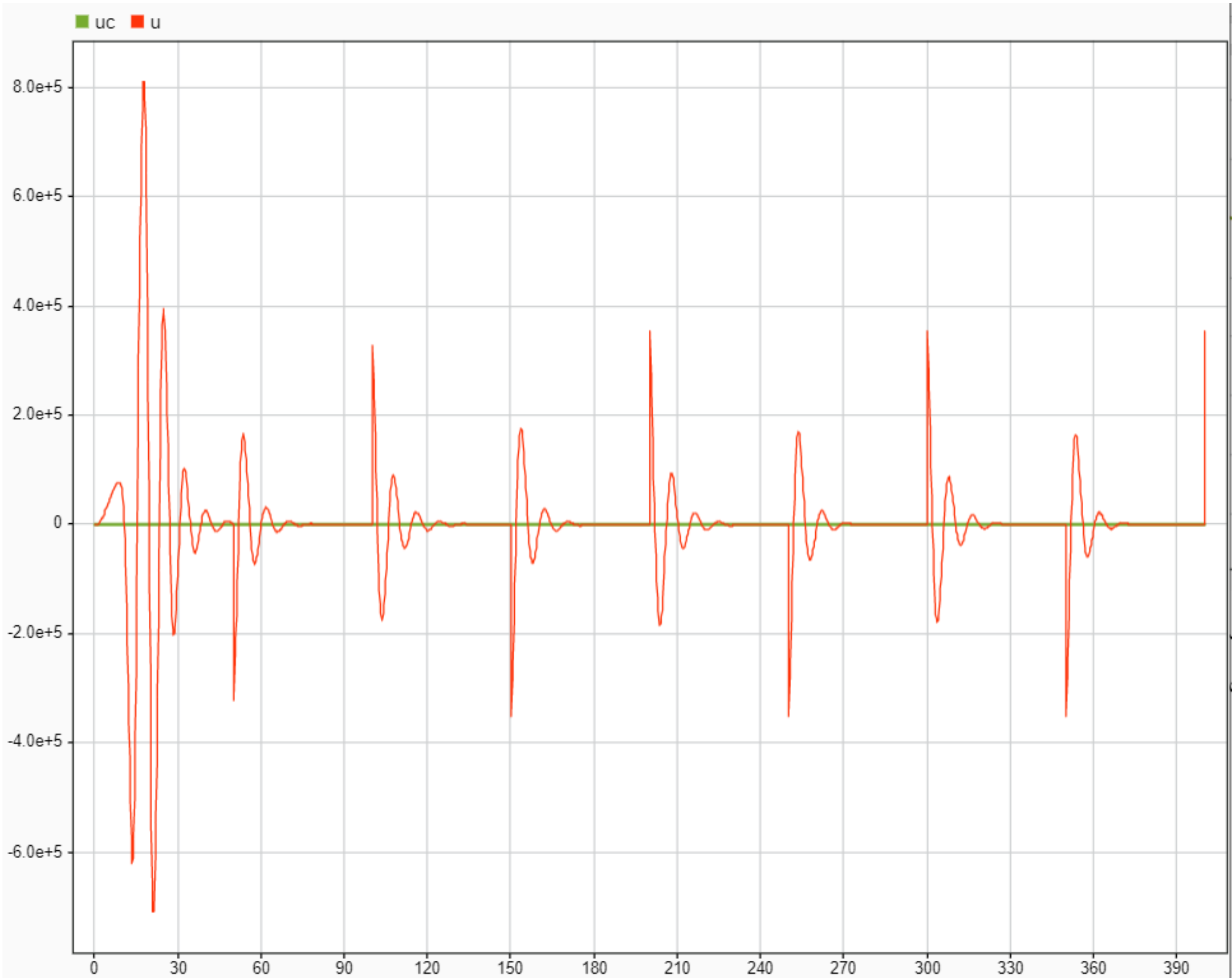


نمودار خروجی سیستم و ورودی آن، به شکل زیر است:



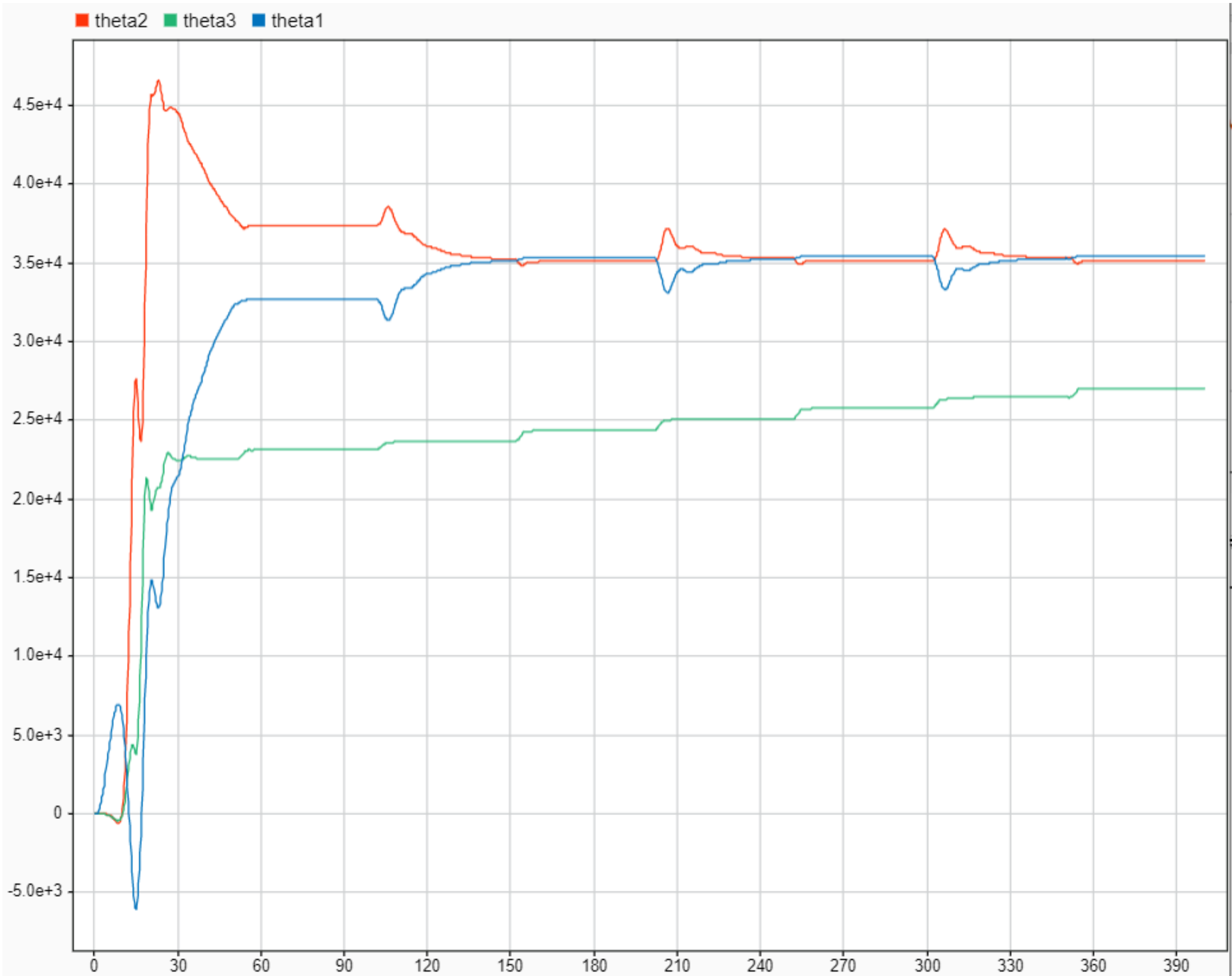
ملاحظه می‌شود که پس از طی کردن پالس اول، سیستم توانسته است پس از هر تغییر و گذشت مدت محدود، به مقدار نهایی خود برسد. در این آزمایش، مقدار نرخ یادگیری روی ۱۰۰۰ قرار داده شده بود.

نمودار ورودی کنترلی نیز به شکل زیر است:



در اینجا نیز مشاهده می‌شود که مقدار پیک‌های این سیگنال پس از طی کردن ثانیه‌های اولیه، تقریبا یک سوم حالت غیرنرمالیزه شده‌است.

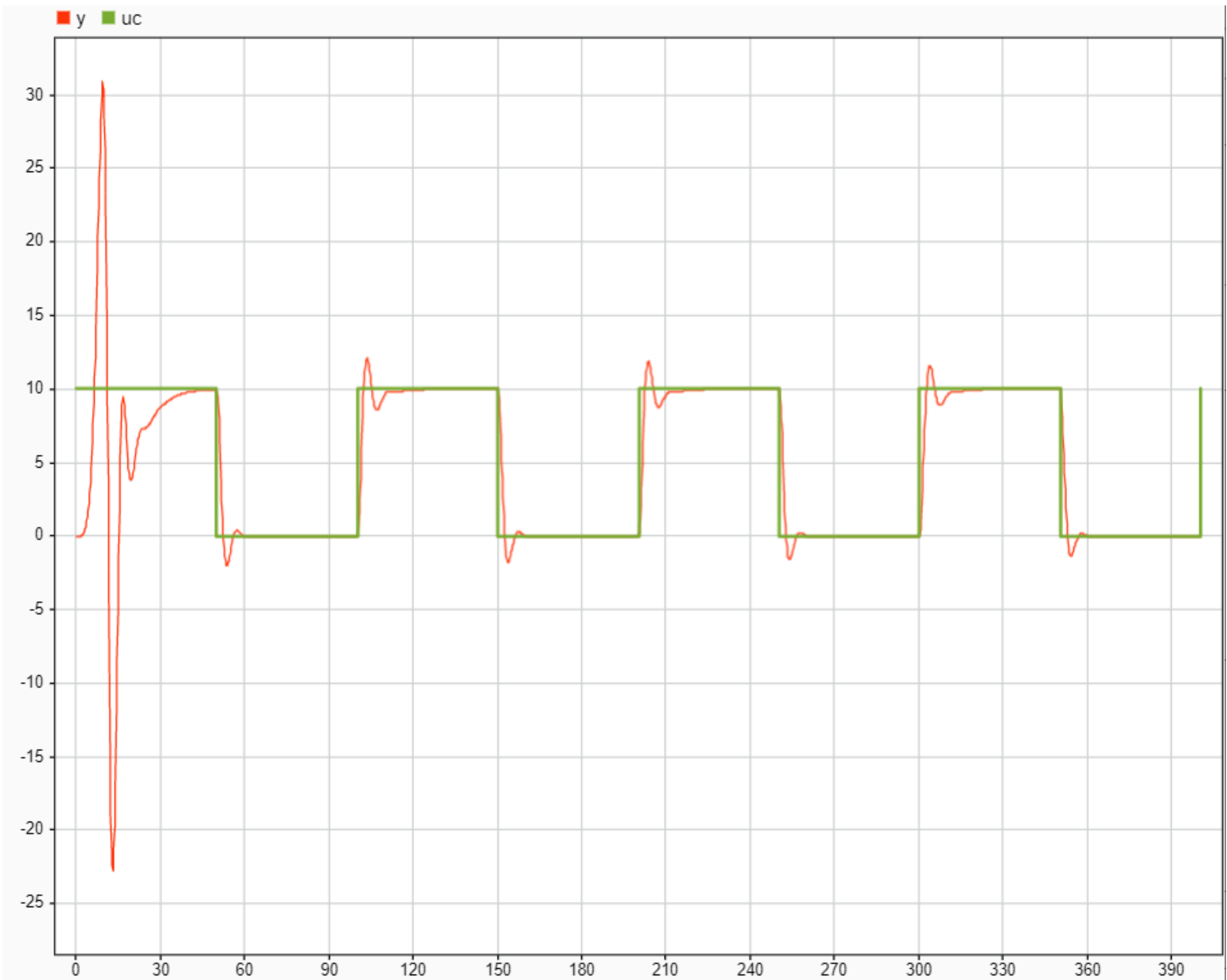
در نهایت، مقادیر پارامترهای نیز به شکل زیر هستند:



در اینجا نیز تتا۱ و ۲ در زمانی کمتر و تتا۳ در زمانی بیشتر، تقریبا به مقادیر نهایی خود همگرا شده‌اند. هر چند در مجموع، زمان همگرایی بسیار زیاد است. اما با توجه به کند بودن سیستم مکانیکی و تغییرات مداوم در سیستم، نتیجه کار بدین شکل درآمده است.

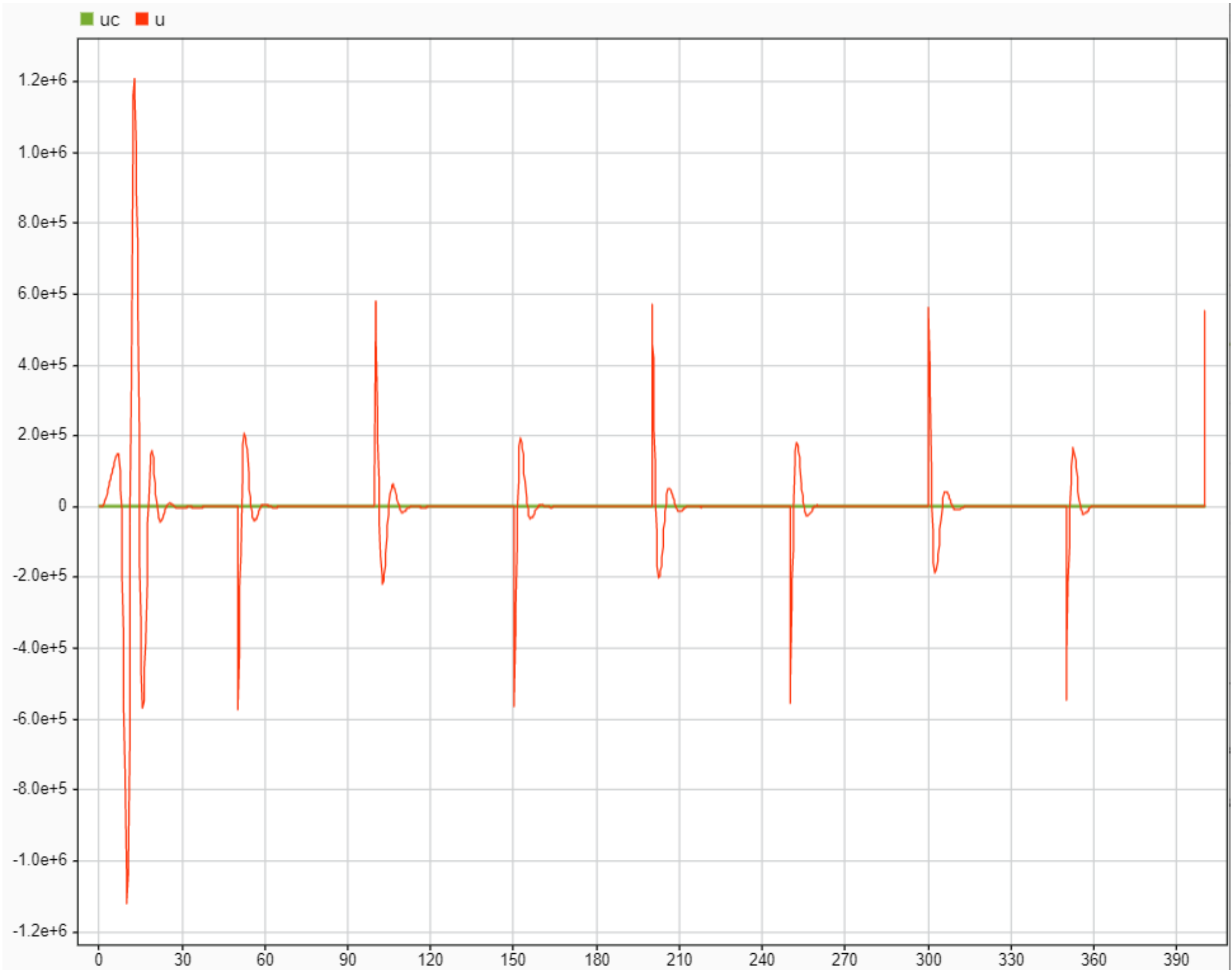
بررسی تاثیر تغییر نرخ یادگیری:

در این بخش، این بار پارامتر گاما را افزایش داده و ۵۰۰۰ قرار می‌دهیم. ورودی و خروجی سیستم به شکل زیر است:



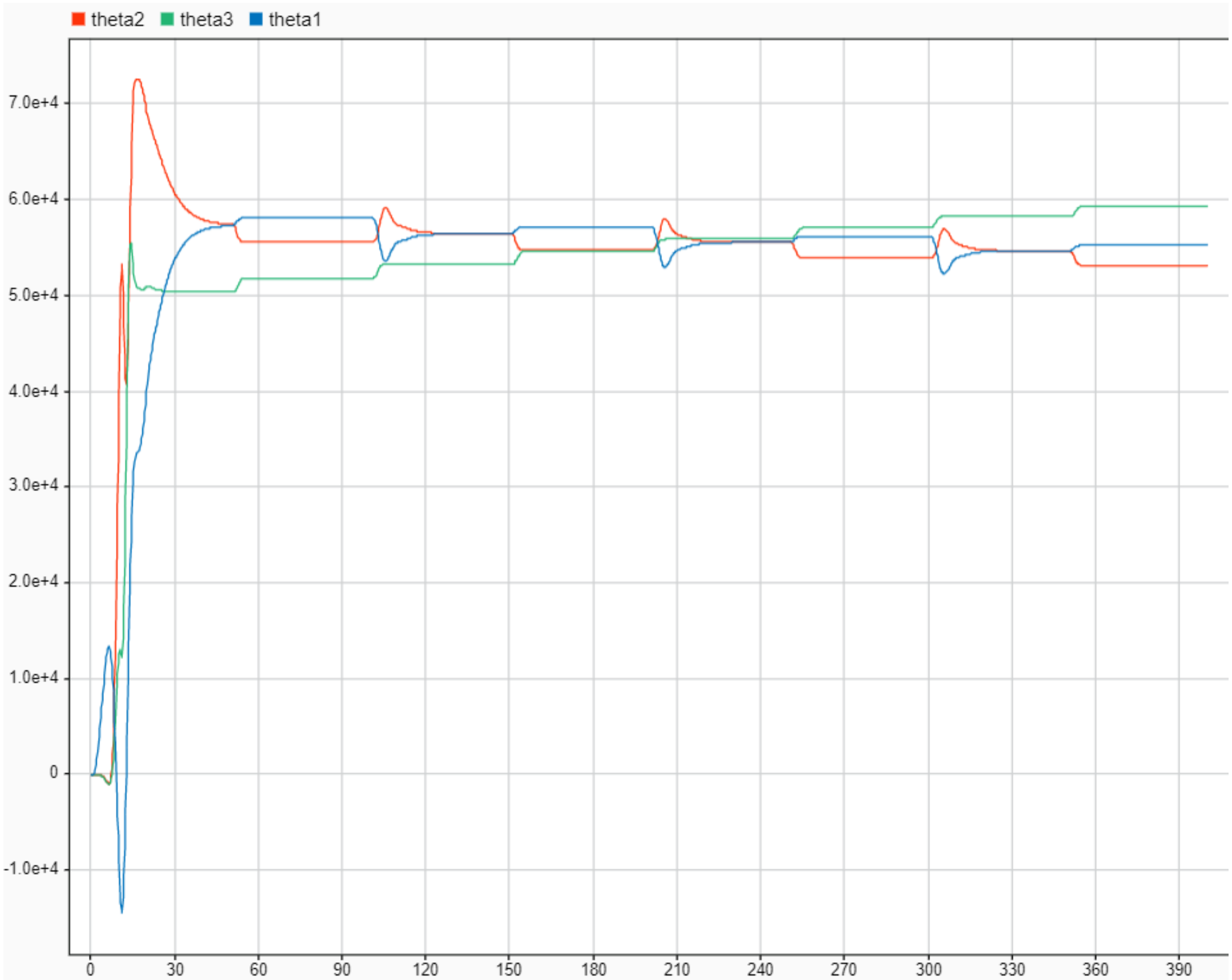
نسبت به حالت قبل، نوسانات بسیار کمتر شده‌اند و سرعت همگرایی بالاتر رفته است. به صورتی که حتی در انتهای پالس اول هم سیستم به مقدار مطلوب رسیده است. این امر در بخش قبلی میسر نبود.

نمودار ورودی کنترلی به شکل زیر است:



مطابق انتظار، همگرایی بیشتر با افزایش سیگنال خروجی کنترلر ممکن شده‌است. پیک‌های میانی نسبت به حالت قبل تا دو برابر بزرگتر شده‌اند.

نمودار همگرایی پارامترها هم به شکل زیر است:

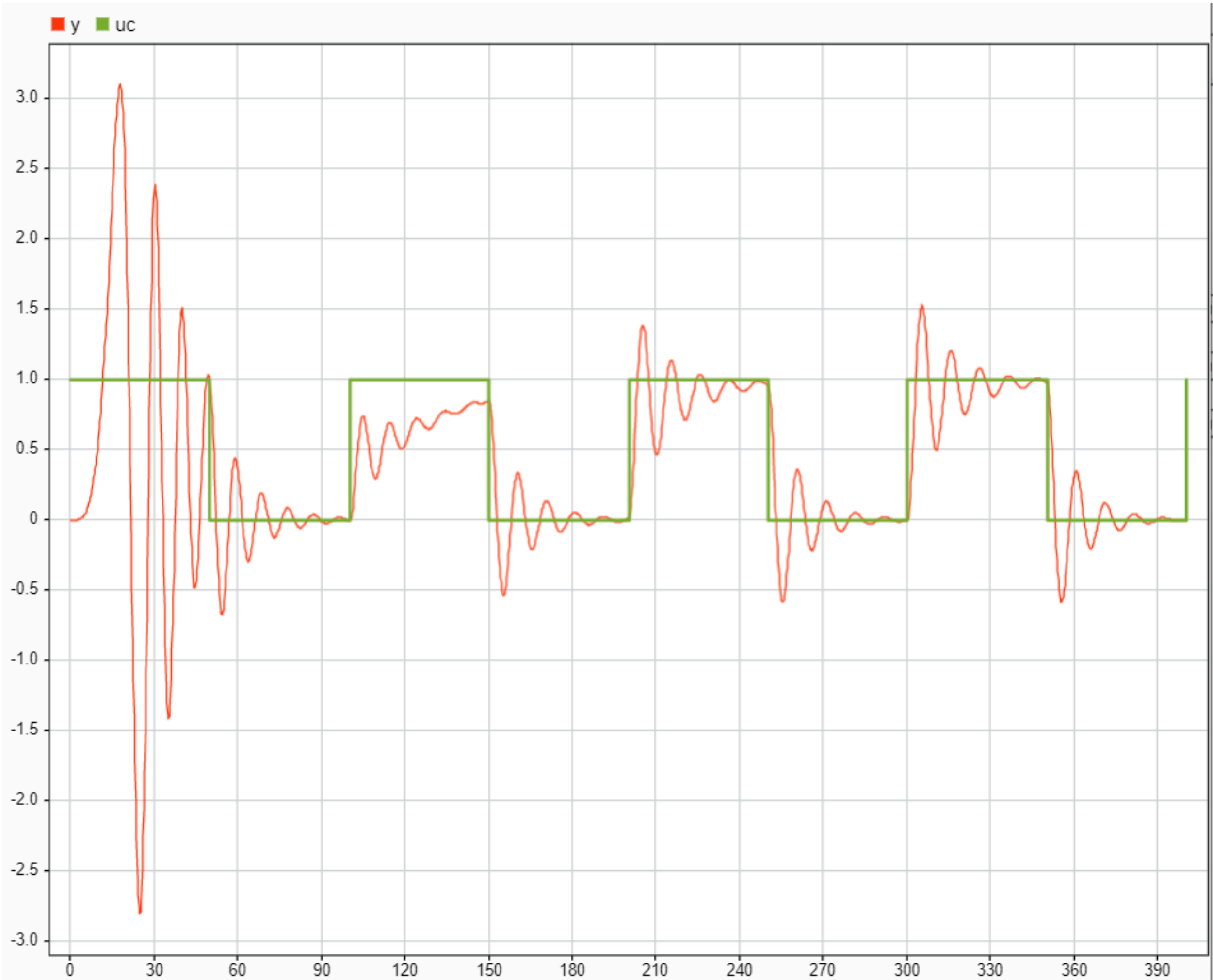


مشاهده می‌شود که سرعت همگرایی پارامترها نیز بالاتر رفته‌است.

بررسی اثر تغییر دامنه سیگنال ورودی

در حالت غیرنرمال، مشاهده کردیم سیستم به اندازه ورودی حساس است. بنابراین با تغییر ورودی سیستم، ممکن است همگرایی اتفاق نیفتد و یا سیستم به صورت کلی ناپایدار شود. در آنجا، پارامترها برای ورودی پله ۱۰ طراحی شده بود و وقتی ورودی با اندازه ۱ اعمال شد، نرخ یادگیری برای آن ورودی بزرگ بود و باعث ناپایداری می‌شود. حال قصد داریم تا سیستم نرمال را در حالت تغییر ورودی بسنجیم. ورودی را برابر ۱ قرار داده و مقدار آلفا و گاما را تغییر نمی‌دهیم.

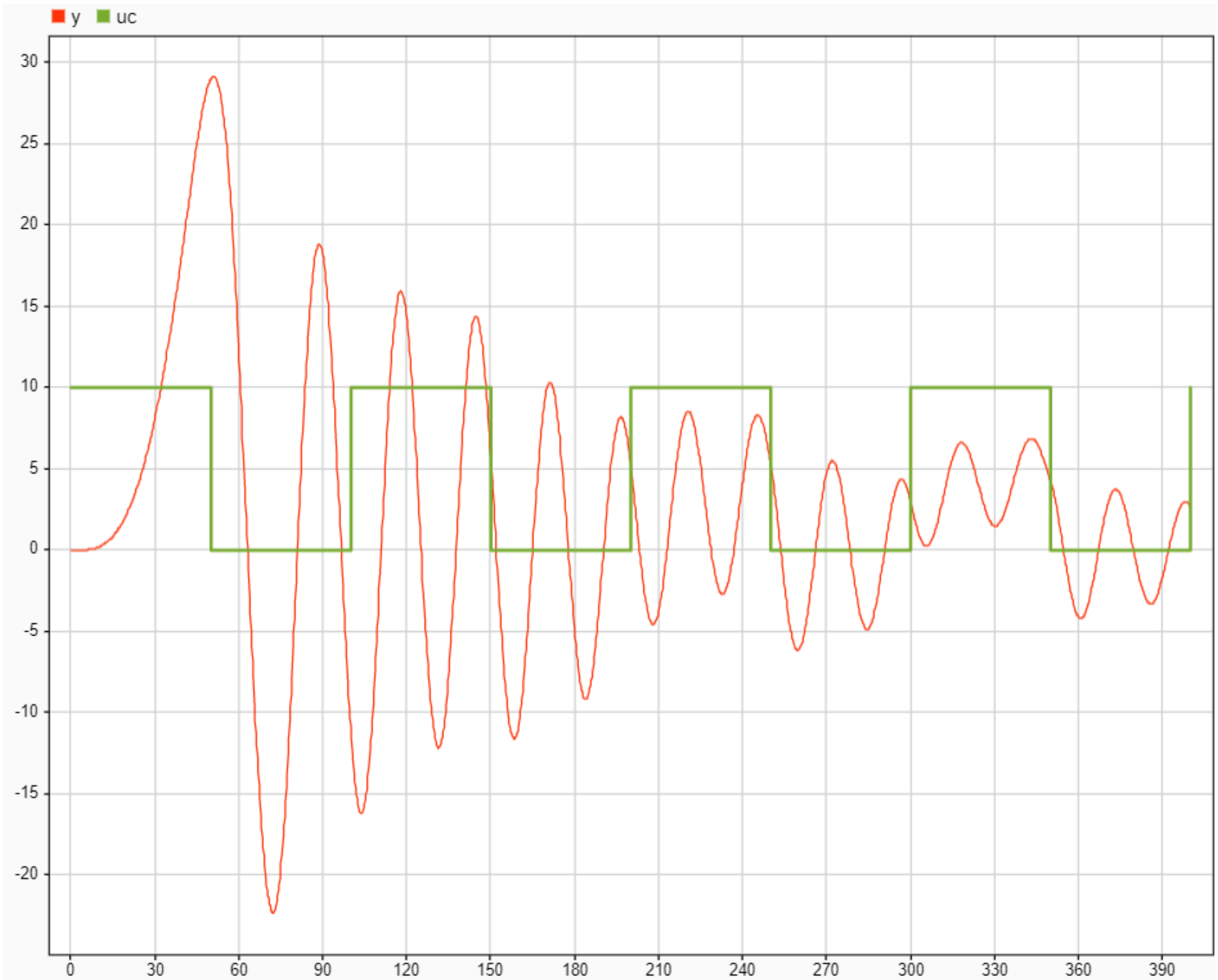
نمودار ورودی و خروجی سیستم به شکل زیر است:



مشاهده می‌شود هر چند همگرایی تا حدی کندتر شده‌است، اما سیستم ناپایدار نشده و همچنان در صورت وجود زمان کافی، می‌تواند به مقدار نهایی مد نظر همگرا شود.

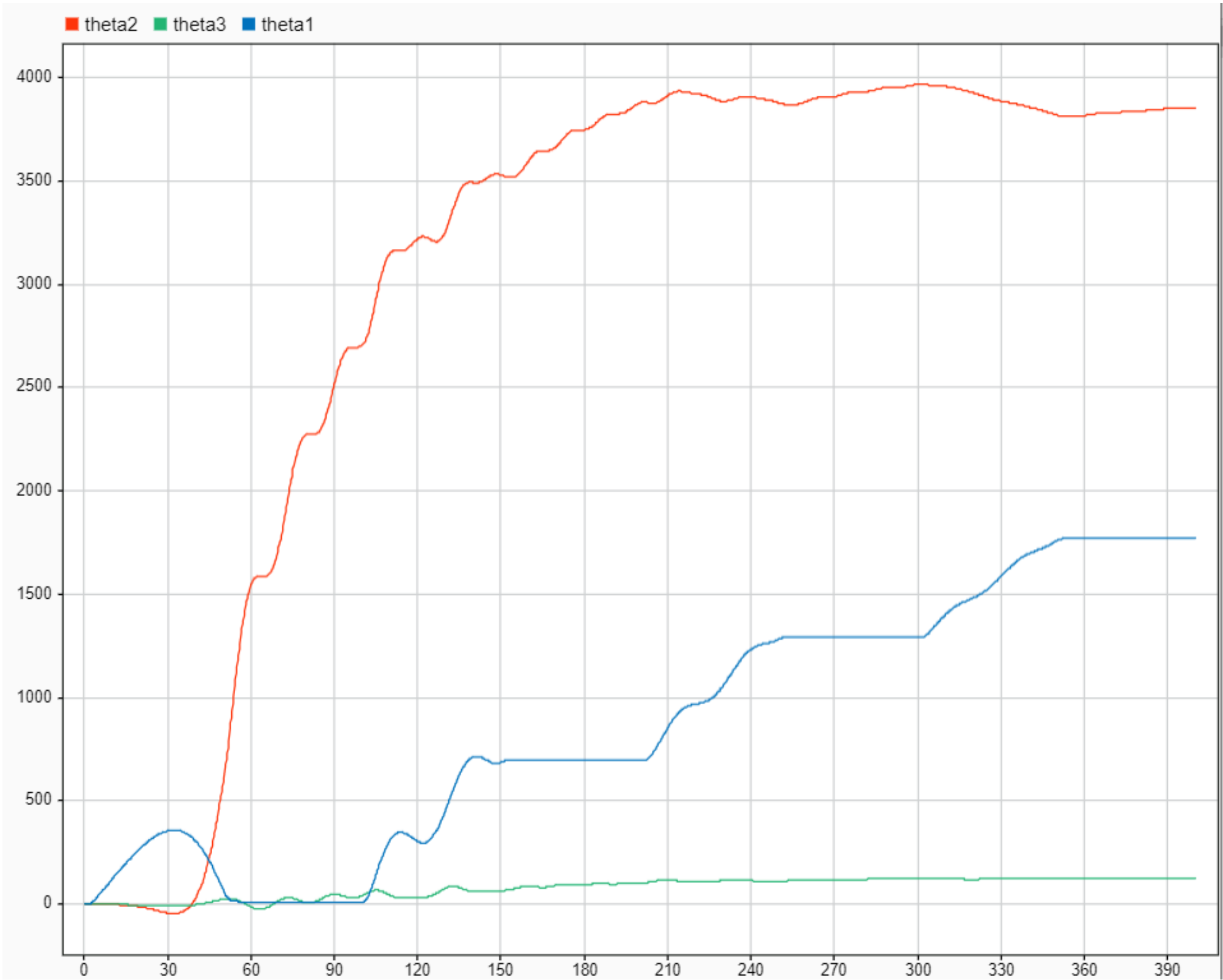
بررسی تاثیر α در همگرایی پارامترها و پایداری

در این بخش، پارامتر آلفا را به جای ۰.۰۰۱، برابر با ۰.۱ قرار می‌دهیم. نمودار ورودی و خروجی به شکل زیر است:



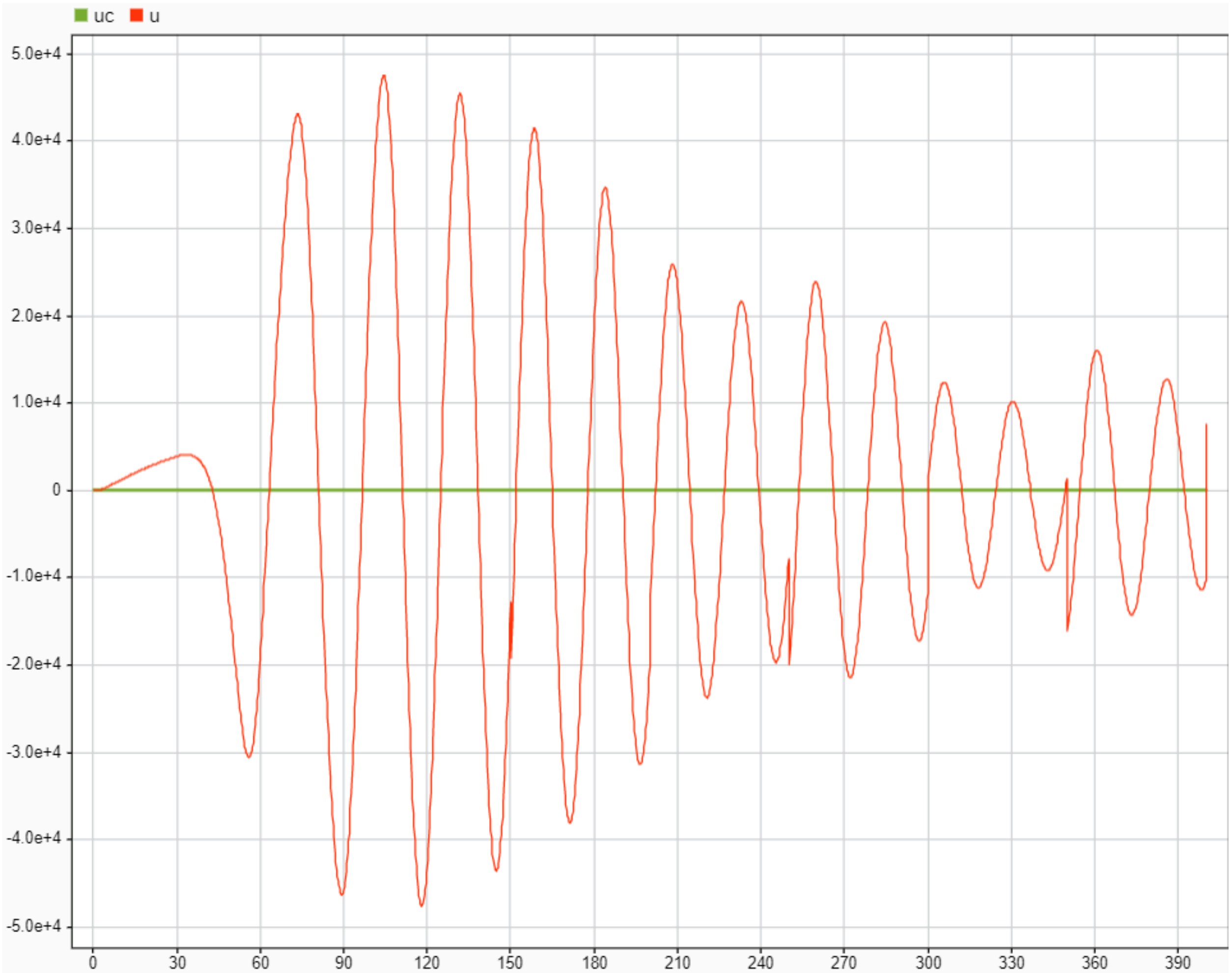
ملاحظه می‌کنیم که سیستم به پایداری نرسیده و دائما در حال نوسان است.

نمودار همگرایی پارامترها نیز در زیر آمده است:



همگرایی پارامترها در حالی که آلفا مقدار بزرگی دارد، با کندی بسیار صورت گرفته و به همین دلیل است که خروجی نیز مقدار مطلوبی نداشت.

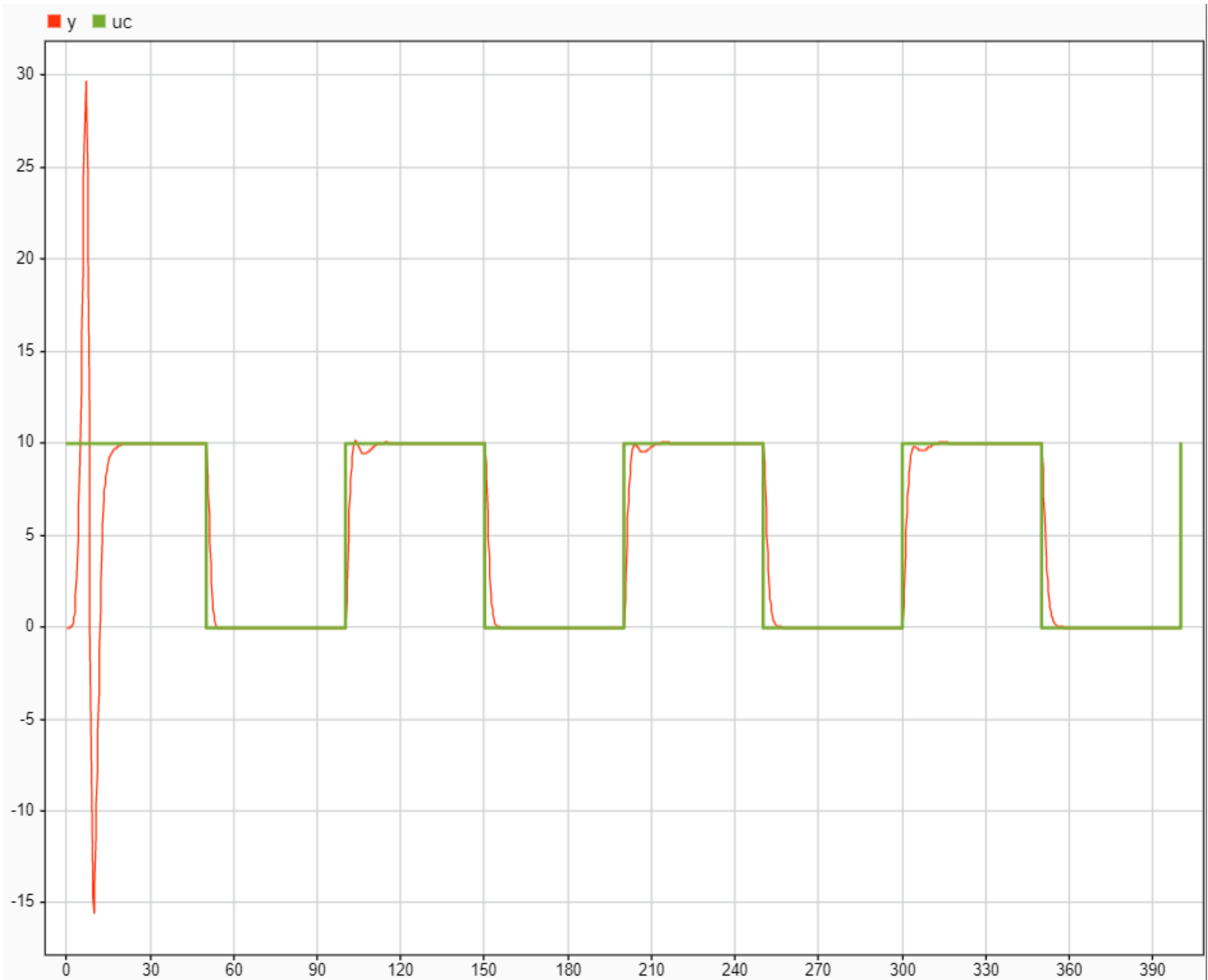
خروجی کنترلر هم به شکل زیر است:



مشاهده می‌شود تلاش کنترلی نیز مدام در حال نوسان بوده و به مقدار مطلوبی همگرا نمی‌شود.

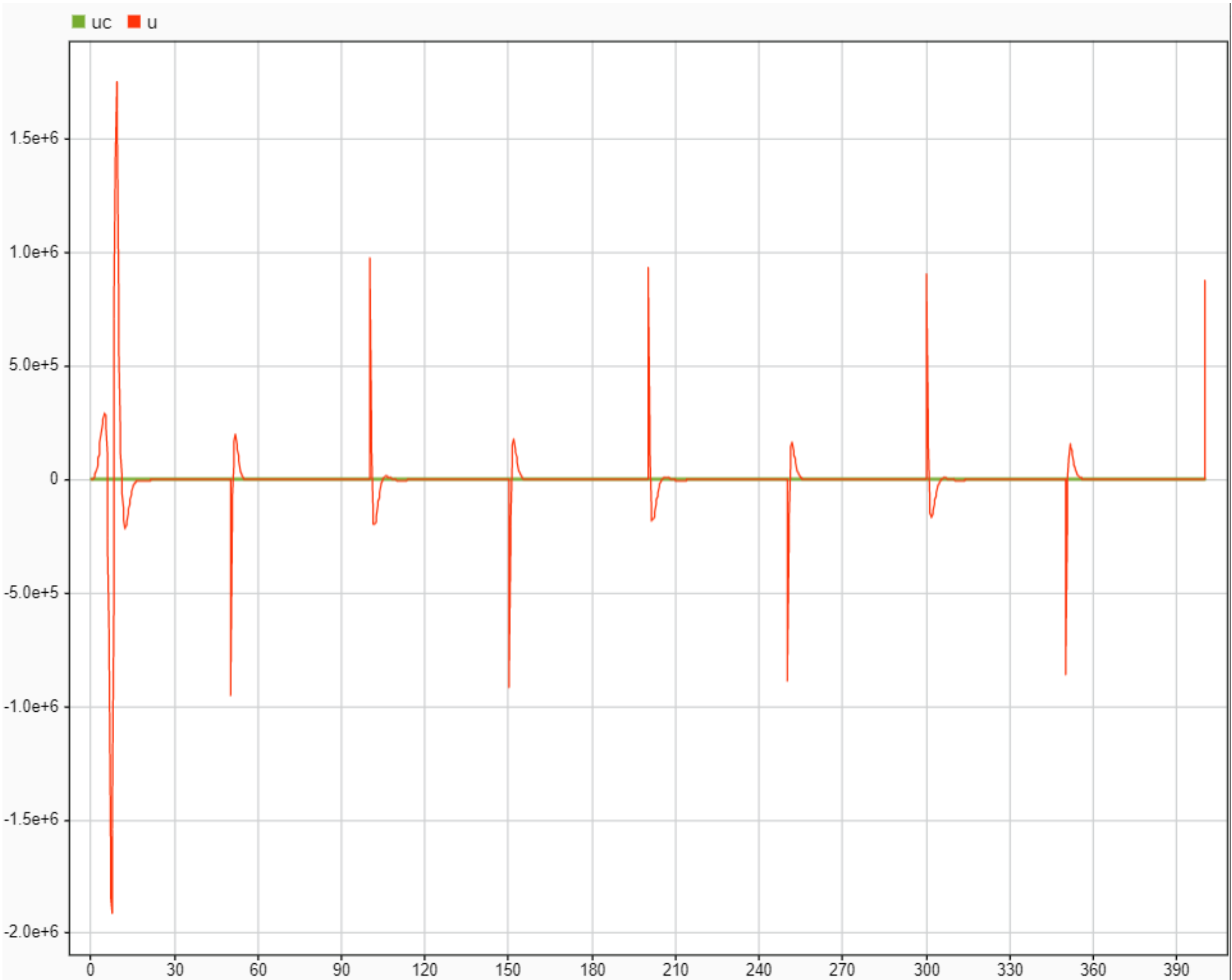
بنابراین مقدار آلفا باید کوچک باشد و هدف تنها جلوگیری از صفر شدن است.

در بخش بعدی، مقدار آلفا را کاهش می‌دهیم و برابر ۰.۰۰۰۱ می‌گذاریم. ورودی و خروجی سیستم به شکل زیر است:



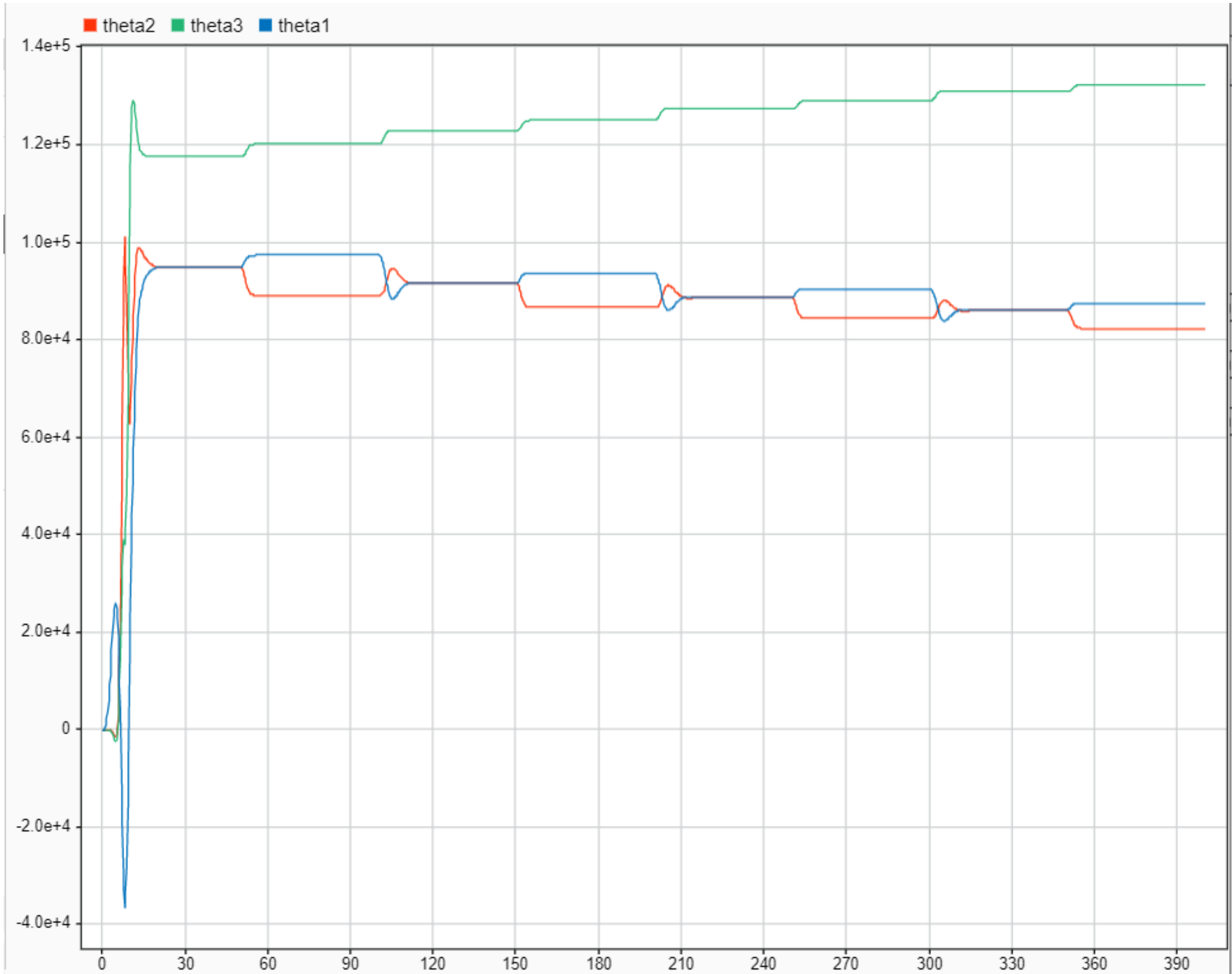
سیستم با سرعت بسیار بالاتری همگرا شده و اورشوت‌ها نیز مقادیر بسیار پایین خواهند داشت. اما این نتیجه بدین صورت بدست آمده است که مخرج کوچکتر شده و تلاش کنترلی بالاتر رفته است.

نمودار ورودی کنترلی زیر، گویای این مورد است:



مشاهده می‌شود که پیک‌های این نمودار، ۵ برابر حالت اولی بوده‌است.

نمودار همگرایی پارامتر هم به شکل زیر است:

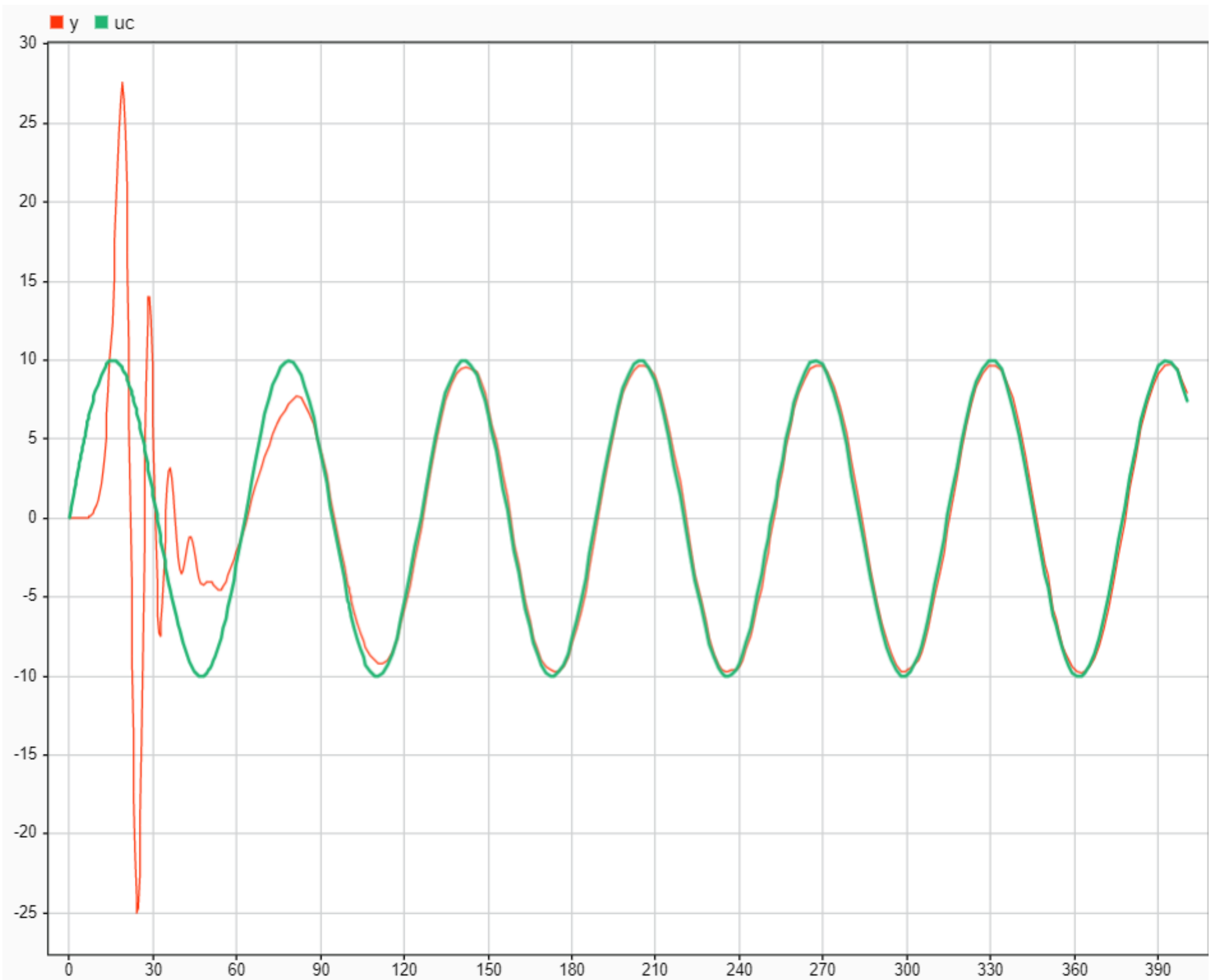


دیده می‌شود هر سه پارامتر با سرعت بالایی به مقادیر مناسبی رسیده‌اند و همین امر بوده که باعث شده‌است نمودار خروجی با سرعت بالا همگرا شود.

بررسی اثر ورودی سینوسی

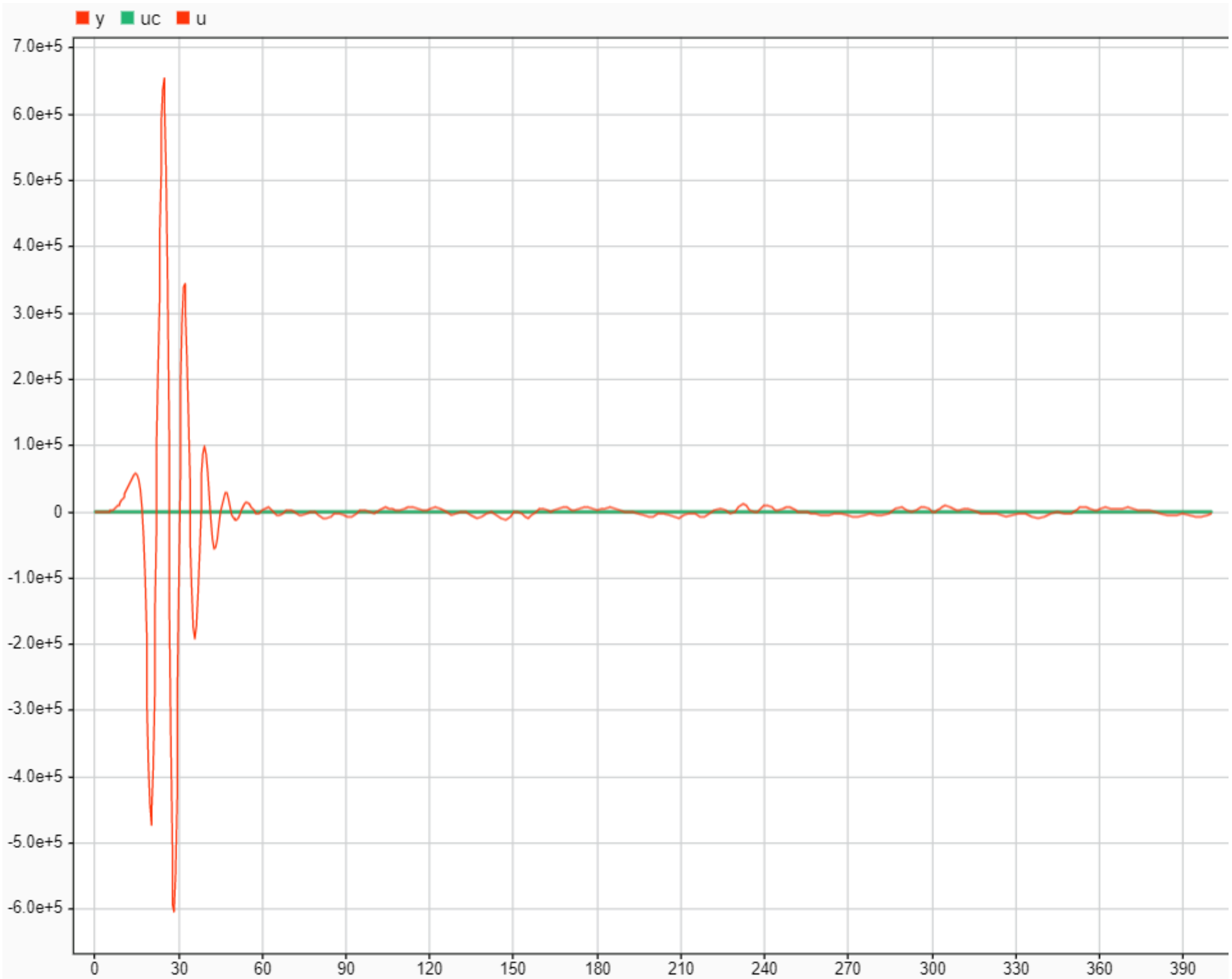
در این بخش، یک ورودی سینوسی با فرکانس ۰.۱ رادیان بر ثانیه و دامنه ۱۰ به سیستم وارد می‌شود. هدف آن است که ببینیم سیستم حلقه بسته این ورودی را هم می‌تواند ردیابی کند یا خیر. بقیه اثرات مانند تغییر پارامترهای آلفا و گاما در بخش قبلی بررسی شد و کلیات نتایج به همان صورت است.

نمودار ورودی و خروجی سیستم به شکل زیر است:



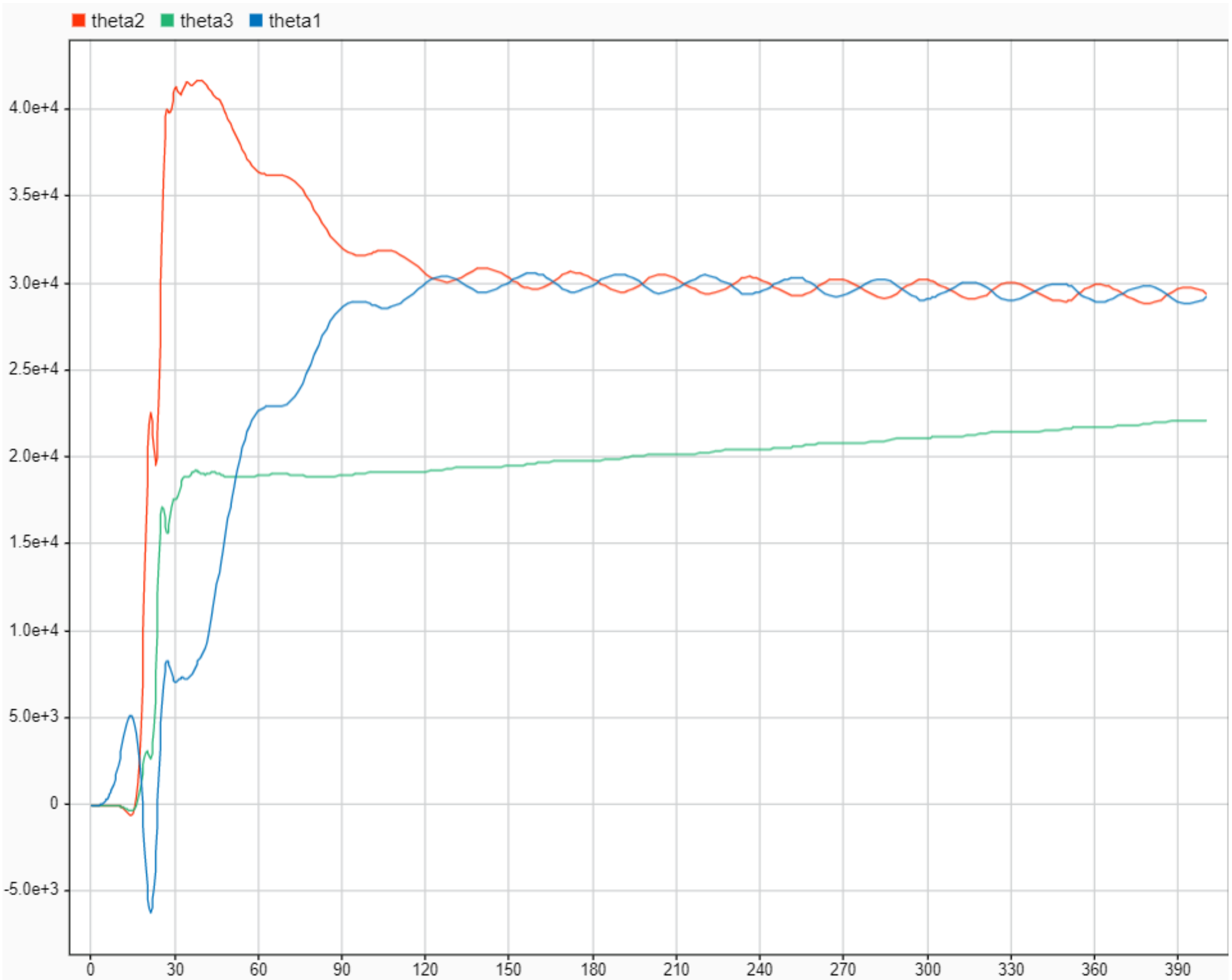
دیده می‌شود سیستم در حالت ورودی متغیر نیز به خوبی عمل کرده و قادر به ردیابی سیگنال ورودی است.

نمودار ورودی کنترلی به شکل زیر است:



به جز مراحل اولیه که هنوز پارامترها همگرا نشده‌اند، در بقیه بخش‌ها ورودی کنترلی بسیار کمر از حالت قبل است. در بخش اولیه هم می‌توان یک بلوک اشباع قرار داد تا با هزینه‌ی کاهش سرعت همگرایی، مانع از اشباع شدن عملگرها شود.

سرعت همگرایی پارامترها در شکل زیر مشخص است:



پارامترهای تتا۱ و تتا۲ به حالت نهایی خود رسیده و مدام در حال نوسان‌اند. اما تتا۳ نیز با تاخیر نسبت به بقیه، در حال افزایش است.

۳- طراحی MRAS پایدار بر اساس پایداری لیاپانوف

در این بخش، یک کنترلر مرجع برا سیستم طراحی می‌کنیم. از معادلات سیستم داریم:

$$\ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_0 y + bu$$
$$\ddot{y}_m = -a_{1m}\dot{y}_m - a_{0m}y_m + b_m u_c$$

همچنین قانون کنترلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = \theta_1 u_c - \theta_2 y - \theta_3\dot{y}$$

این ورودی را در معادله حلقه باز قرار داده تا به معادله حلقه بسته برسیم:

$$\ddot{y} = b\theta_1 u_c - (b\theta_3 + a_1)\dot{y} - (b\theta_2 + a_0)y$$

برای خطای سیستم داریم:

$$e = y - y_m$$

سیستم مرتبه دو است، پس دو بار از این خطا مشتق می‌گیریم:

$$\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m$$

$$\ddot{e} = \ddot{y} - \ddot{y}_m$$

با توجه به مقدار $\ddot{y}$، آنرا جایگذاری می‌کنیم تا مشتقات خطا برا حسب تتاها بدست بیایند:

$$\ddot{e} = -(b\theta_3 + a_1)\dot{y} - (b\theta_2 + a_2)y + (b\theta_1)u_c - a_{m1}\dot{y}_m - a_{m2}y_m + b_m u_c$$

حال مقدار $\dot{y}_m$ و y_m را بر حسب خطا و مشتق اول آن جایگزین و سپس مرتب می‌کنیم:

$$\ddot{e} = a_{1m}\dot{e} - a_{0m}e + (b\theta_1 - b_m)u_c + (-a_0 - b\theta_2 + a_{0m})y + (-a_1 - b\theta_3 + a_{1m})\dot{y}$$

تابع لیاپانوف به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V(e,\dot{e},\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \frac{1}{2}\left(e^2 + \dot{e}^2 + \frac{(b\theta_1 - b_m)^2}{b\gamma} + \frac{(a_{0m} - a_0 - b\theta_2)^2}{b\gamma} + \frac{(a_{1m} - 1_1 - b\theta_3)^2}{b\gamma}\right)$$

با یک بار مشتق‌گیری از آن داریم:

$$\frac{dV}{dt} = e\dot{e} + \dot{e}\ddot{e} + \left(\frac{b\theta_1 - b_m}{\gamma}\right)\frac{d\theta}{dt} - \left(\frac{a_{0m} - a_0 - b\theta_2}{\gamma}\right)\frac{d\theta_2}{dt} - \left(\frac{a_{1m} - a_1 - b\theta_3}{\gamma}\right)\frac{d\theta_3}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -a_{1m}\dot{e}^2 + (1 - a_{m0})e\dot{e} + \frac{(b\theta_1 - b_m)\left(\gamma\dot{e}u_c + \frac{d\theta_1}{dt}\right)}{\gamma} + (a_{0m} - a_0 - b\theta_2)\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\theta_2}{dt} + \dot{e}y\right)$$
$$+(a_{1m} - a_1 - b\theta_3)\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{d\theta_3}{dt} + \dot{e}\dot{y}\right)$$

برای آنکه Negative Definite باشد، باید مقادیر درون پرانترها صفر شوند. پس:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma\dot{e}u_c \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y\dot{e} \\ \frac{d\theta_3}{dt} = \gamma\dot{e}\dot{y} \\ a_{m0} = 1 \end{cases}$$

بدین ترتیب، برای مشتق دوم V داریم:

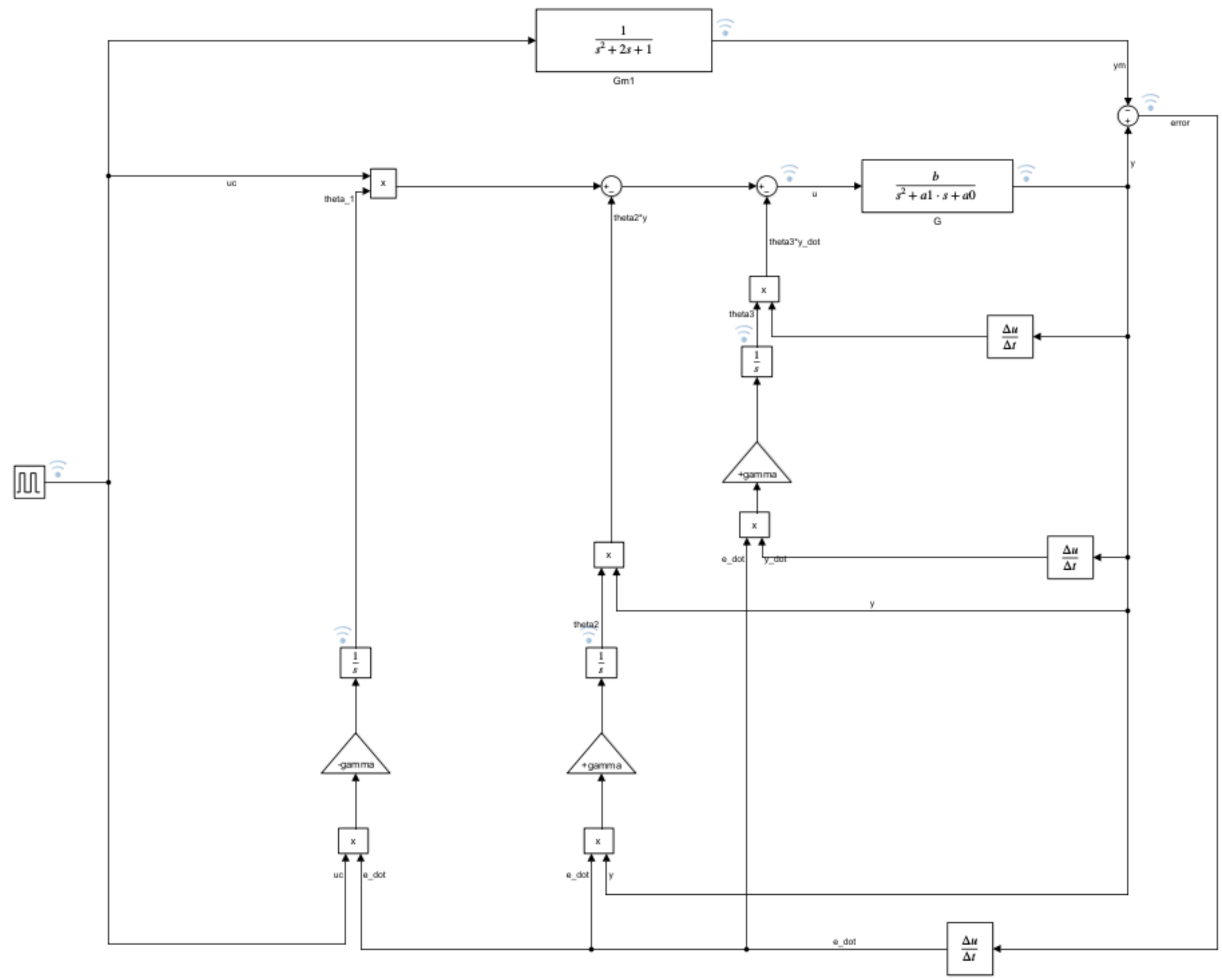
$$\frac{d^2V}{dt^2} = (1 - a_{m0})(\dot{e}^2 + e\ddot{e}) - 2a_{m1}\ddot{e}$$

که اگر مقادیر uc و y و e محدود باشند، مقدار مشتق دوم محدود بوده و مقدار مشتق اول V برابر است با:

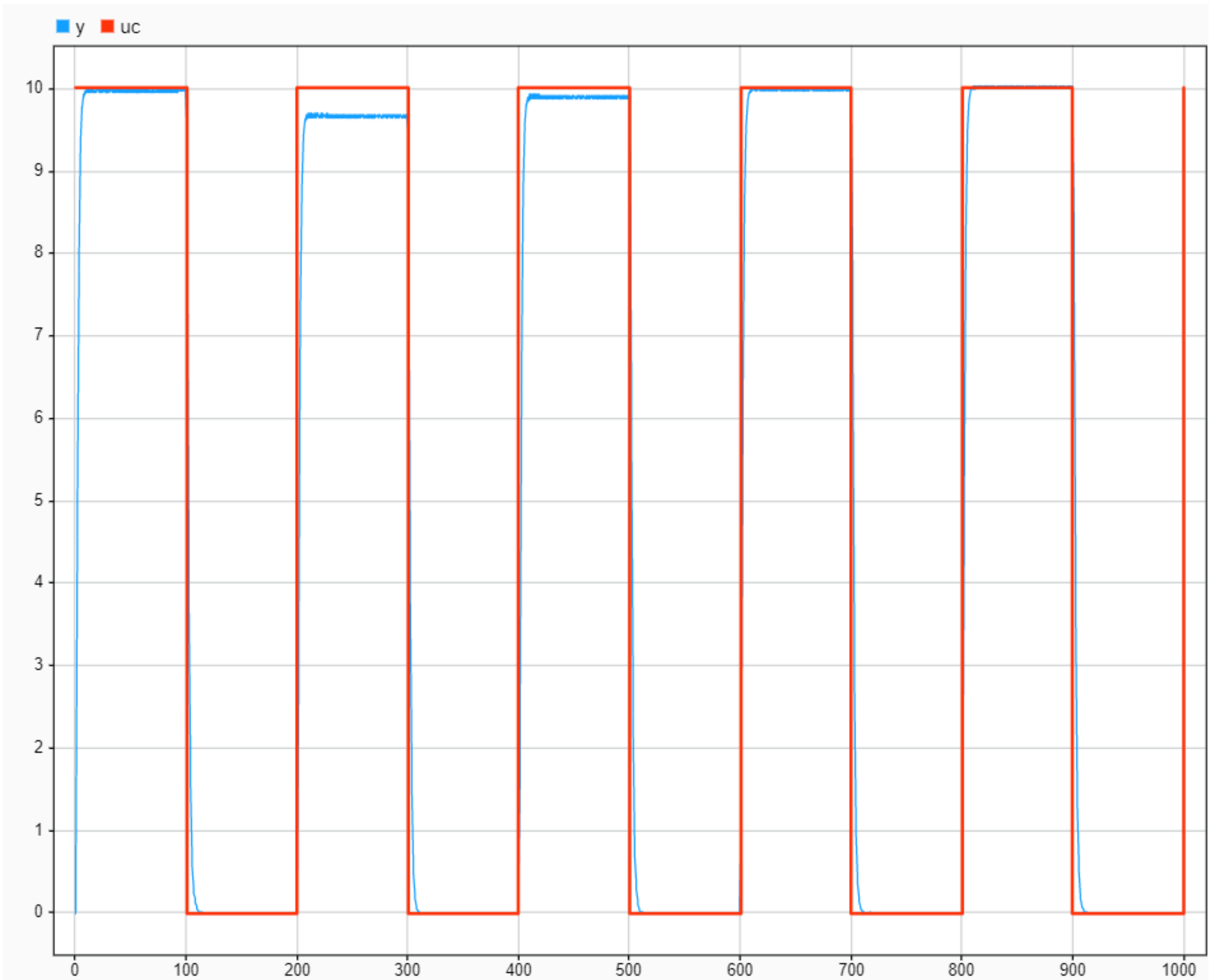
$$\frac{dV}{dt} = -a_{1m}\dot{e}^2$$

که همیشه مقداری منفی دارد.

بلوک دیاگرام این معادلات را در سیمولینک شبیه‌سازی کرده و نتایج را بررسی می‌کنیم:

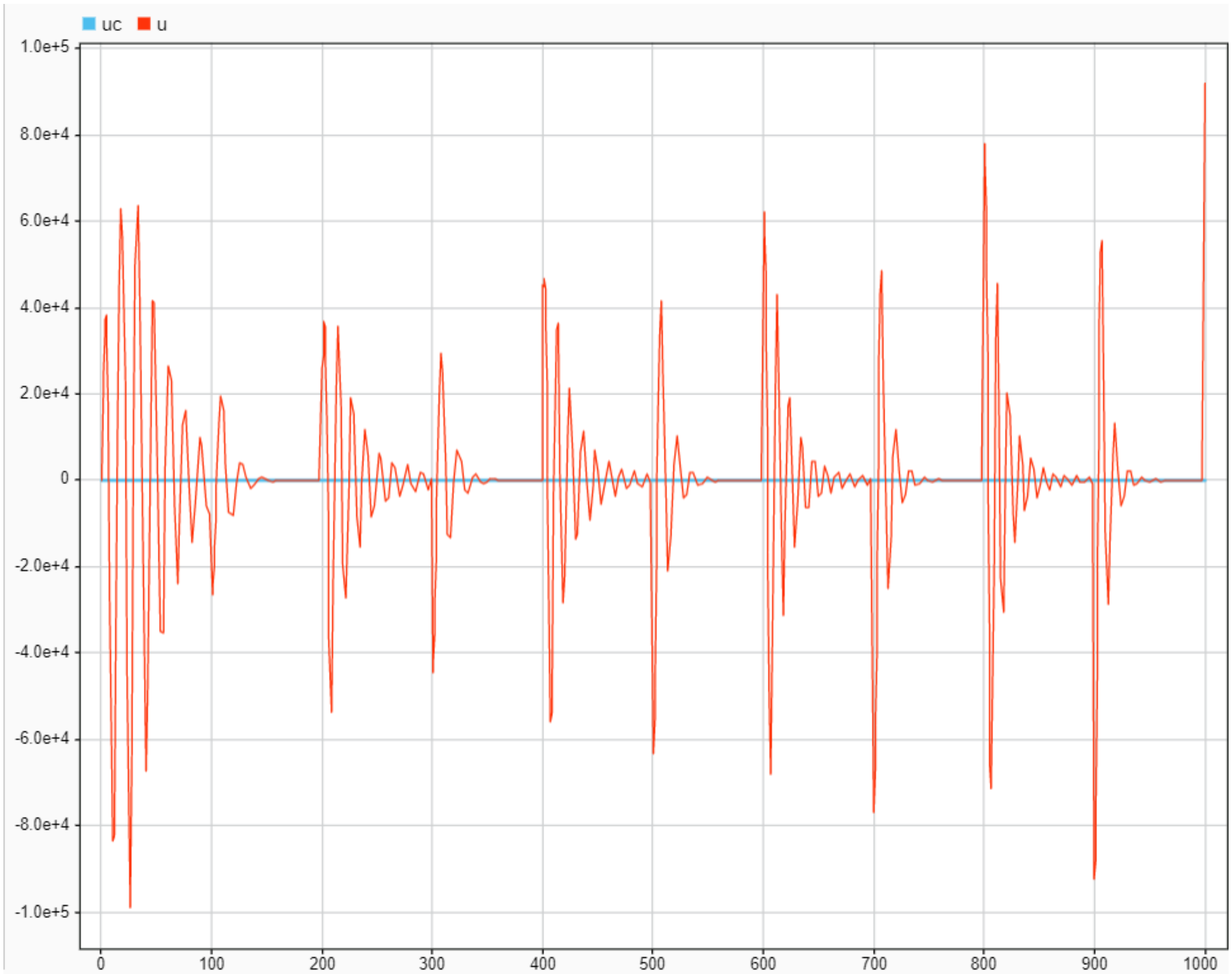


با در نظر گرفتن ورودی پله ۱۰ و مقدار نرخ یادگیری برابر با ۱۰۰۰، شکل ورودی و خروجی سیستم به صورت زیر است:



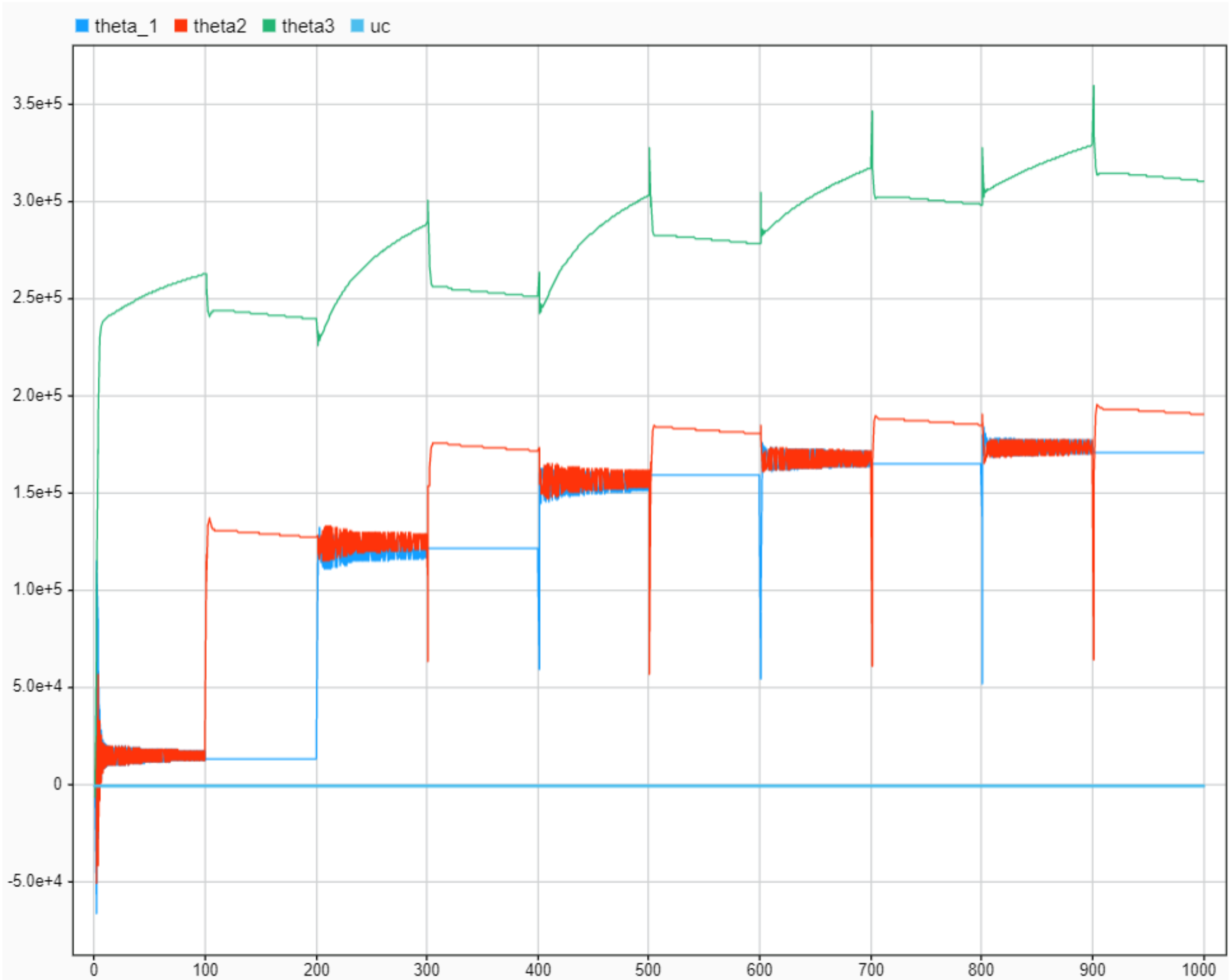
پس از طی کردن چند استپ اول، سیستم به خوبی ورودی را دنبال کرده و خطا حدودا نزدیک به صفر است. مقدار اورشوت بسیار کمتر شده و تقریبا از بین رفته است. اما نوسانات ریزی در خروجی باقی می‌ماند.

مقدار خروجی کنترلر به شکل زیر است:



ملاحظه می‌شود نسبت به حالت‌های طراحی شده با روش گرادیان، ورودی در حدود یک دهم شده‌است که قابل توجه است.

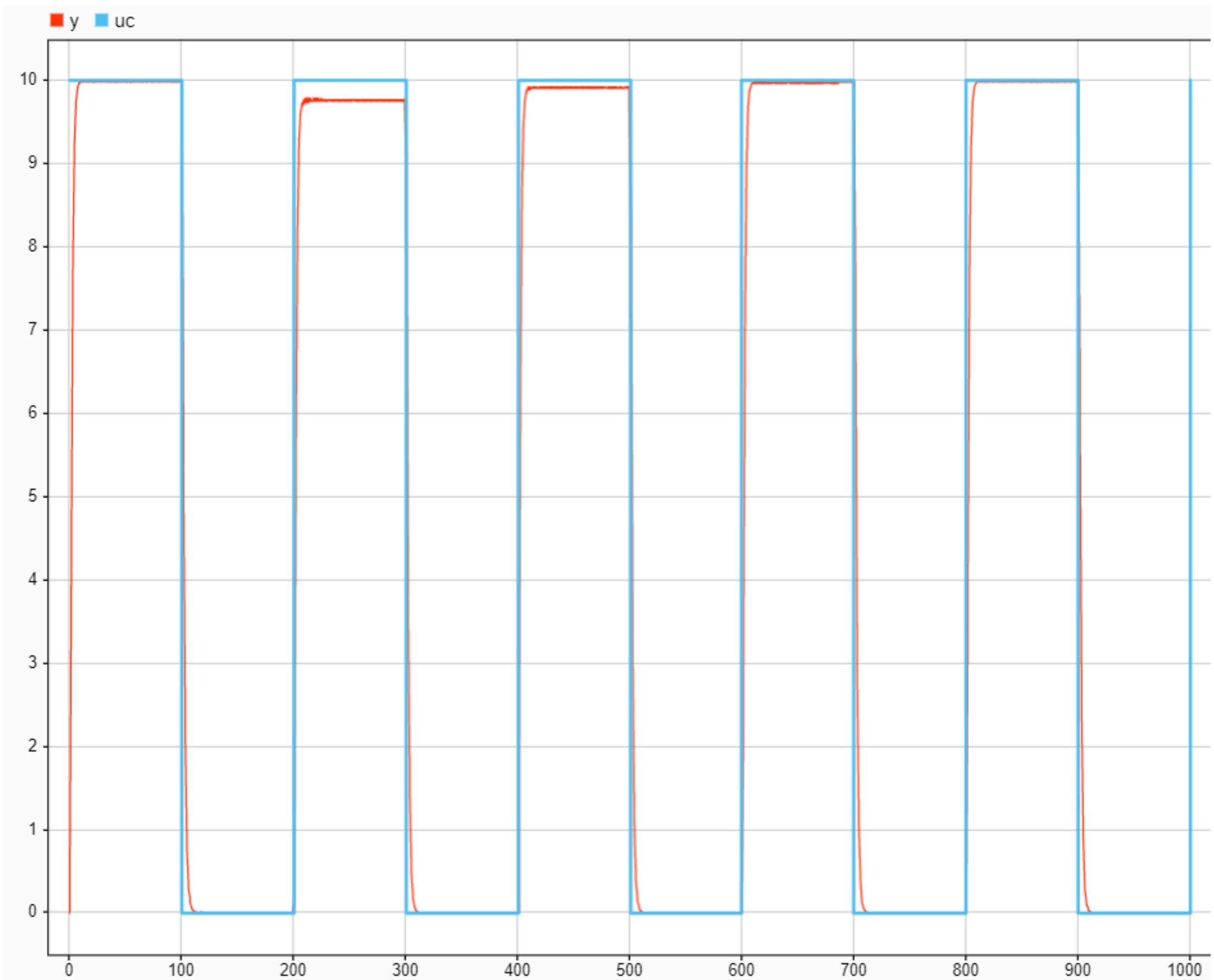
همچنین همگرایی پارامترها به صورت زیر است:



مجددا شاهد آن هستیم که پارامترهای تتا ۱ و ۲ با سرعت مناسبی به مقادیر نهایی خود می‌رسند، اما در هر مرحله نوسانات شدیدی دارند و حول مقدار نهایی نوسان می‌کنند.

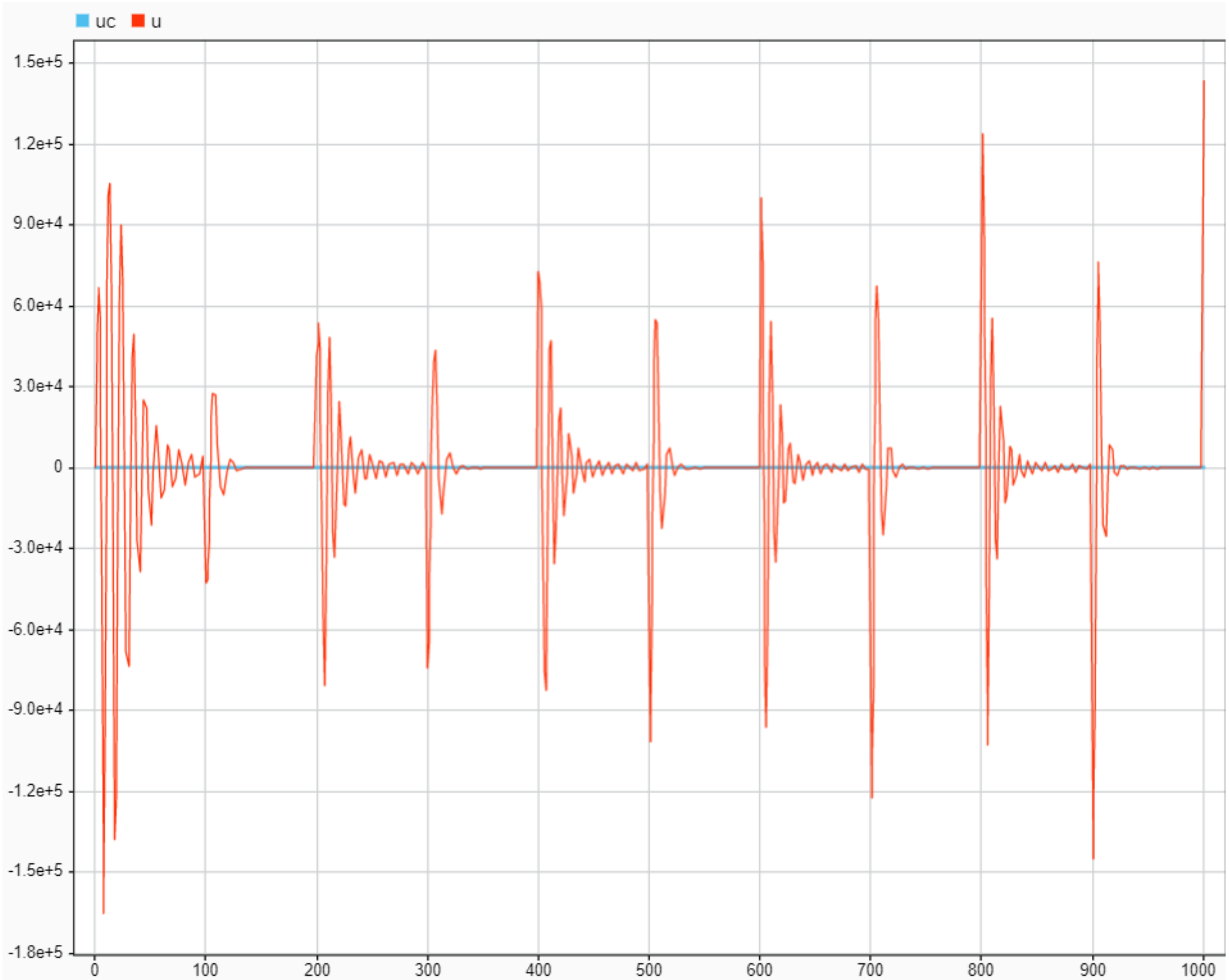
بررسی اثر نرخ یادگیری

نرخ یادگیری را بر روی ۱۵۰۰ تنظیم کرده و شبیه‌سازی را اجرا می‌کنیم. شکل خروجی سیستم به شکل زیر است:



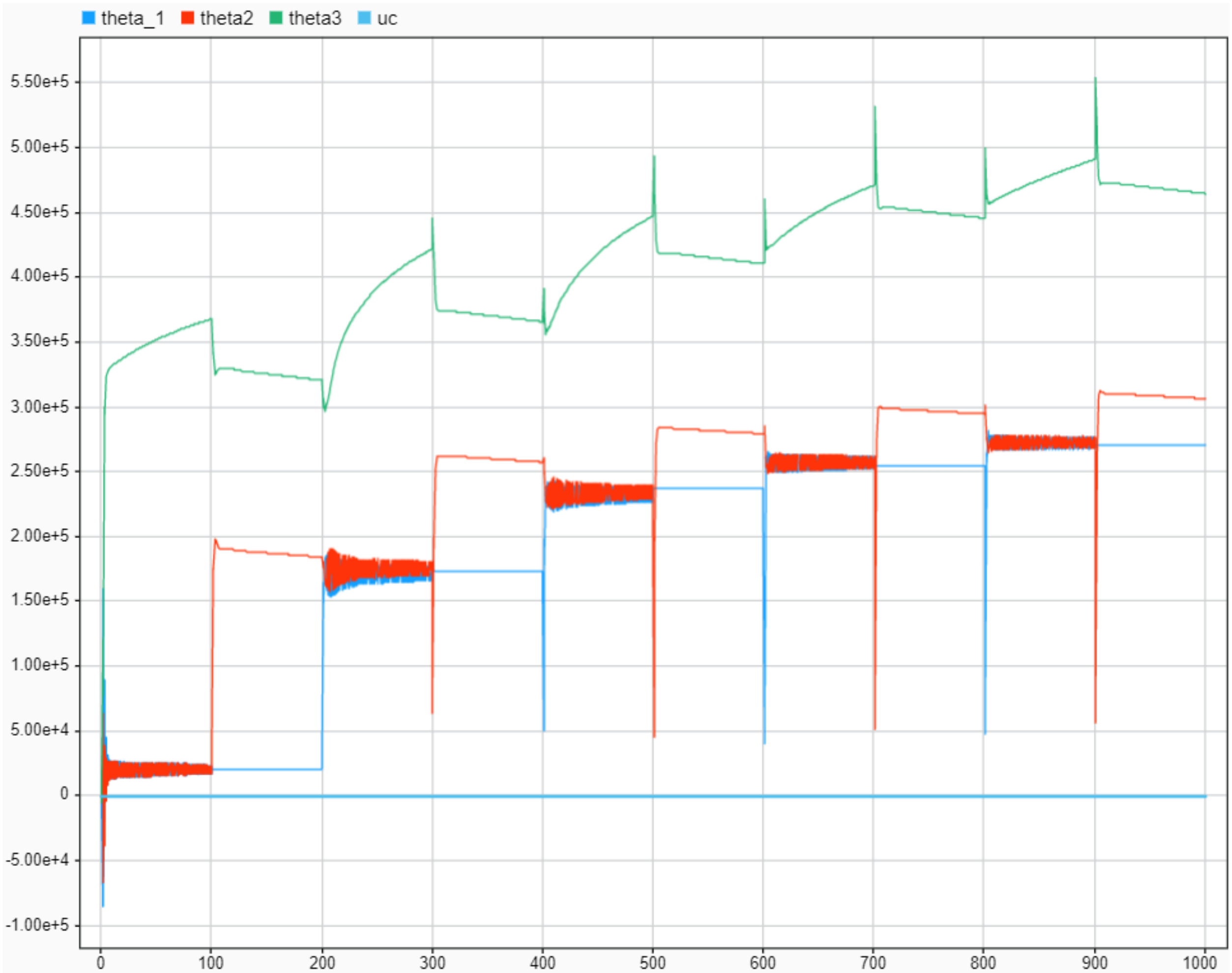
مشاهده می‌شود خطای ردیابی در استپ‌های دوم و سوم بسیار کمتر شده است. اما همچنان نوسانات وجود دارند.

شکل ورودی کنترلی نیز به حالت زیر در می‌آید:



پارامترهای ورودی کنترلی نسبت به حالت قبل، اندکی بزرگتر شده‌اند. برای آنکه بتوان سیستم را سریع‌تر کنترل کرد، کنترلر ناچار است سیگنالهای بزرگتری را به سیستم وارد کند.

در نمودار زیر می‌توان همگرایی پارامترها را مشاهده کرد:

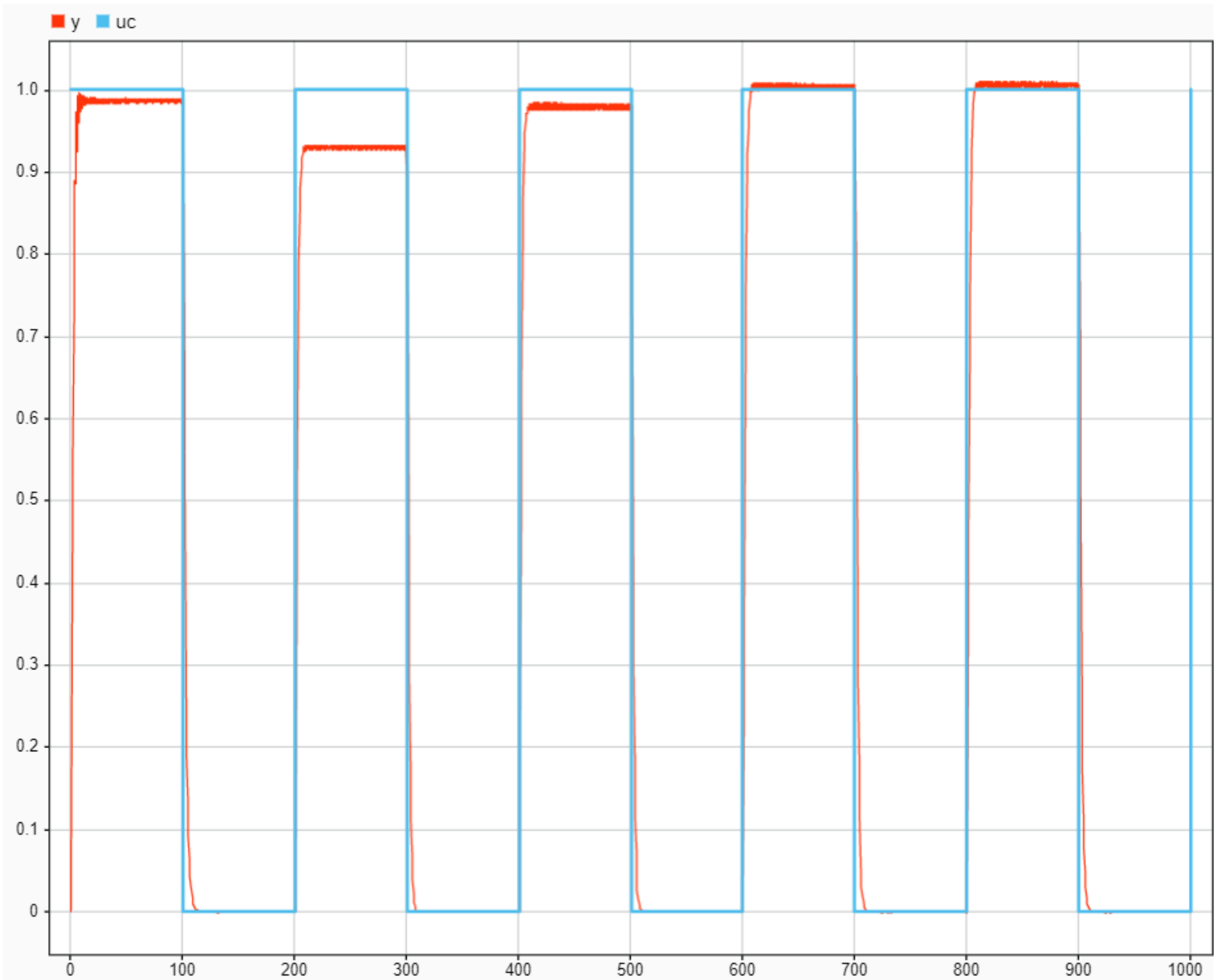


این پارامترها نیز زودتر از حالت قبل به مقدار نهایی نزدیک شده‌اند. اما نوسانات مجددا وجود دارند.

بررسی اثر دامنه سیگنال ورودی

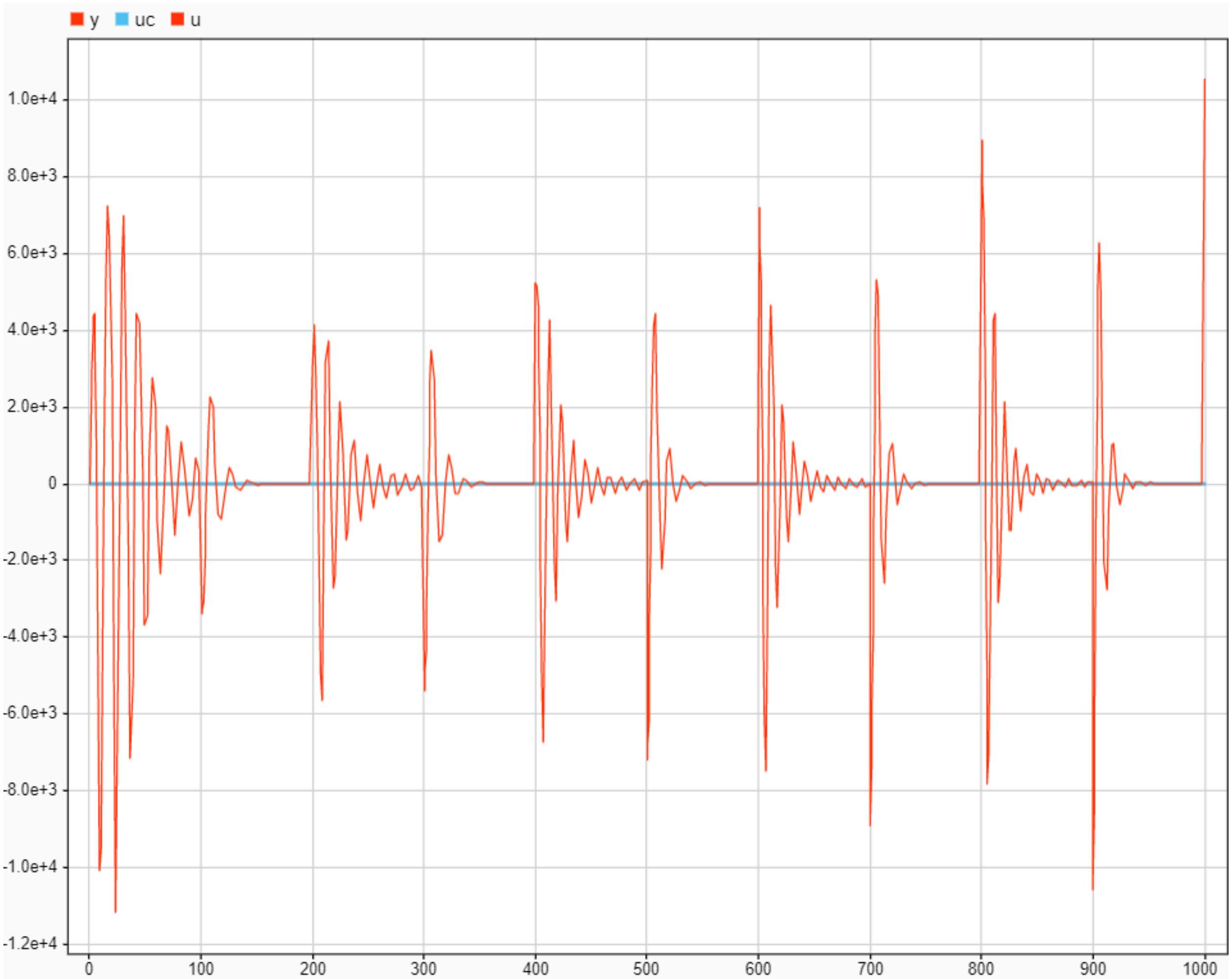
در این بخش، دامنه را تغییر می‌دهیم تا عملکرد سیستم را بسنجیم. در این حالت، دامنه را بر روی ۱ قرار داده و با پارامترهایی که برای دامنه ۱۰ طراحی کرده‌بودیم، سیستم را تست می‌کنیم. در حالت گرادیان غیرنرمال، دیدیم که این امر باعث ناپایداری می‌شد.

ورودی و خروجی سیستم به شکل زیر است:



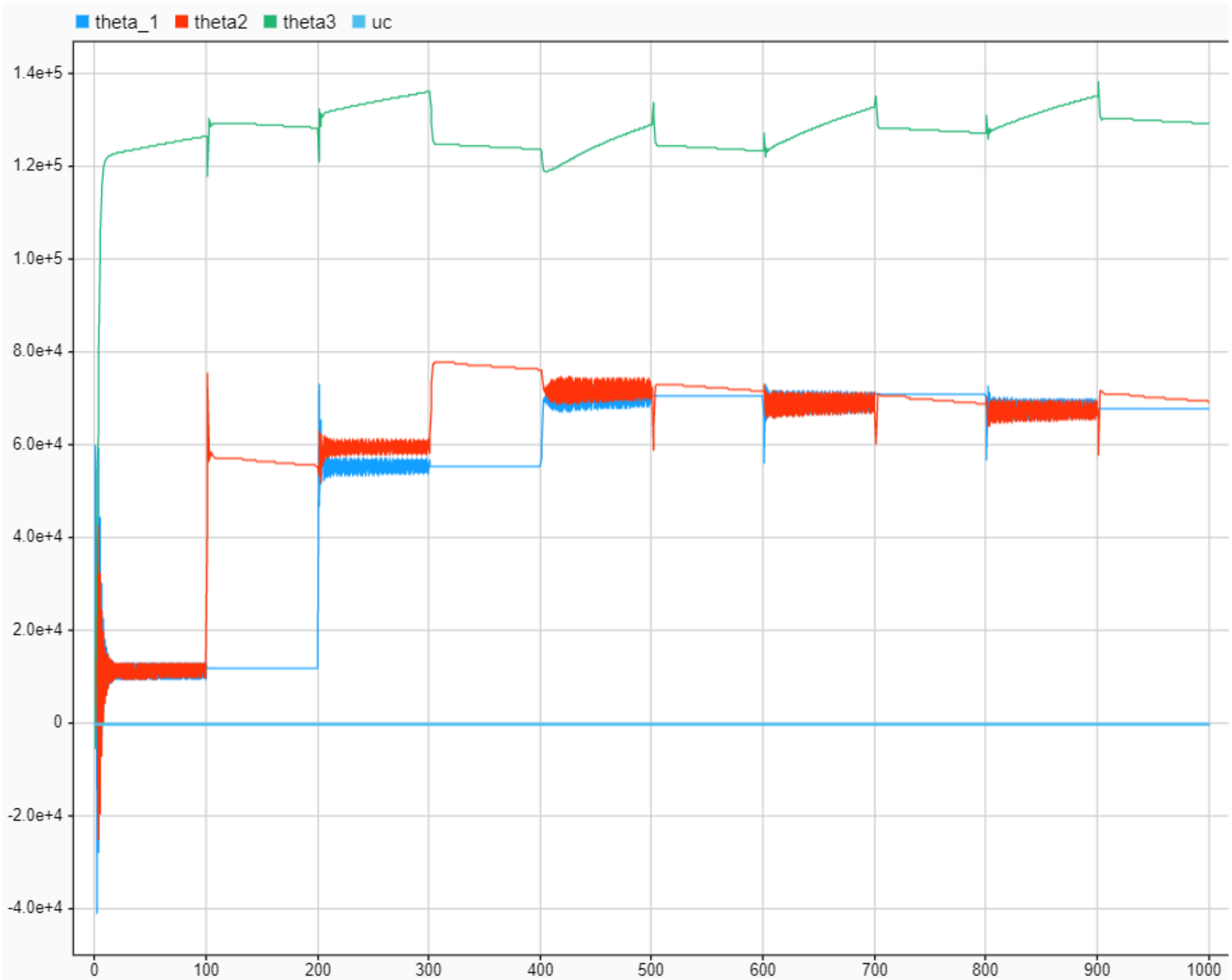
مشاهده می‌شود که سیستم بدون مشکل خاصی، ورودی جدید را نیز ردیابی می‌کند. با توجه به اینکه لیاپانوف اثبات پایداری دارید، چنین نتیجه‌ای را نیز انتظار داشتیم.

نمودار ورودی کنترلی سیستم به شکل زیر است:



ورودی کنترلی به دلیل آنکه ورودی کوچکتر شده‌است، مقدارش کاهش یافته است. اما نوسانات ورودی و خروجی قابل مشاهده است. در مجموع نیز نسبت به حالت گرادیانی، ورودی کنترلی نزدیک به صد برابر کاهش یافته‌است که قابل توجه است.

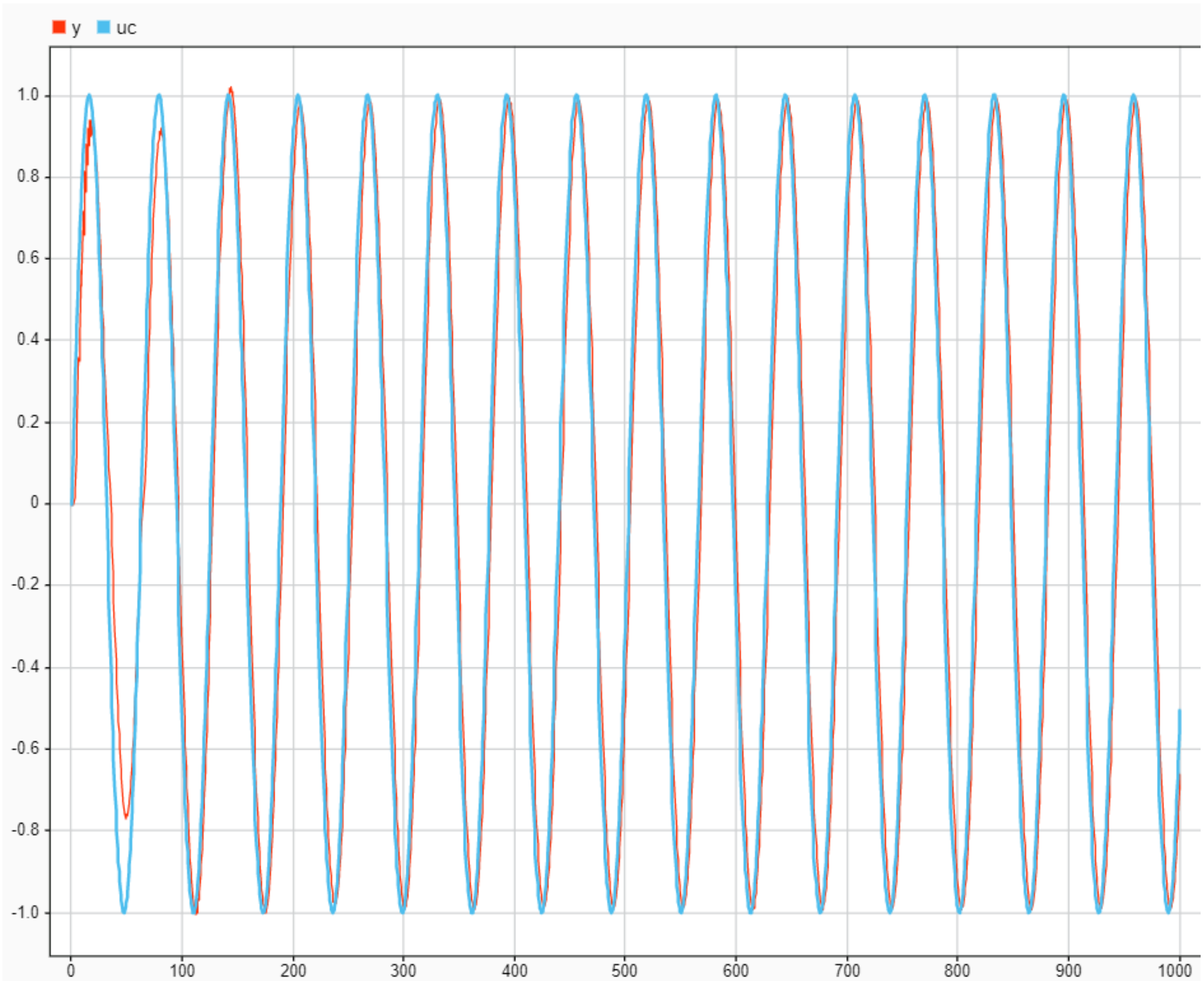
نمودار همگرایی پارامترها نیز به صورت زیر است:



مشاهده می‌شود تقریبا هر سه پارامتر به مقادیر نهایی خود رسیده‌اند و همین عامل باعث ردیابی خوب سیستم حلقه بسته‌است.

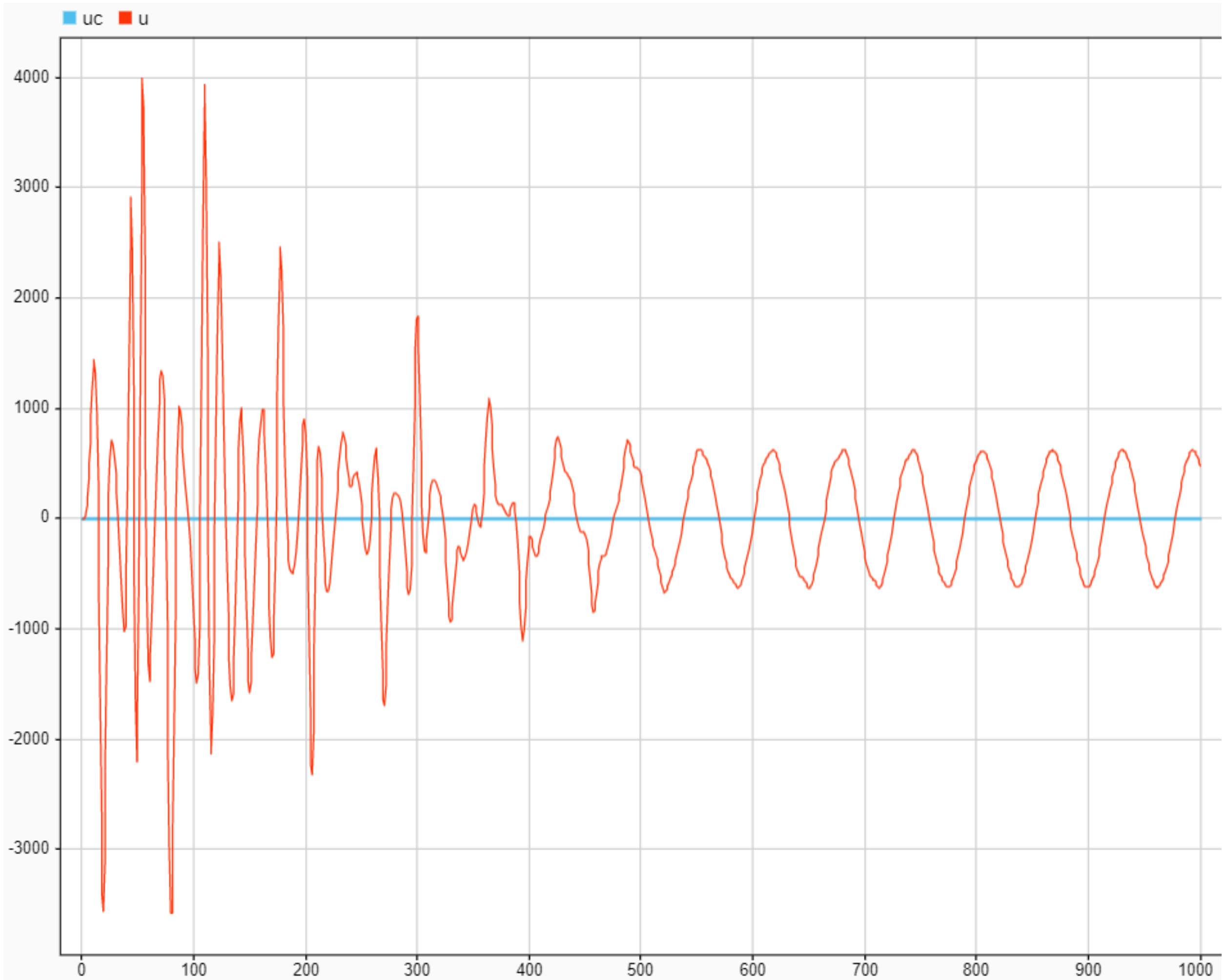
بررسی اثر ورودی سینوسی

در این بخش، سیگنال سینوسی با فرکانس ۰.۱ رادیان بر ثانیه و دامنه ۱ به سیستم وارد می‌کنیم تا عملکرد آن را بسنجیم. شکل ورودی و خروجی سیستم به صورت زیر است:



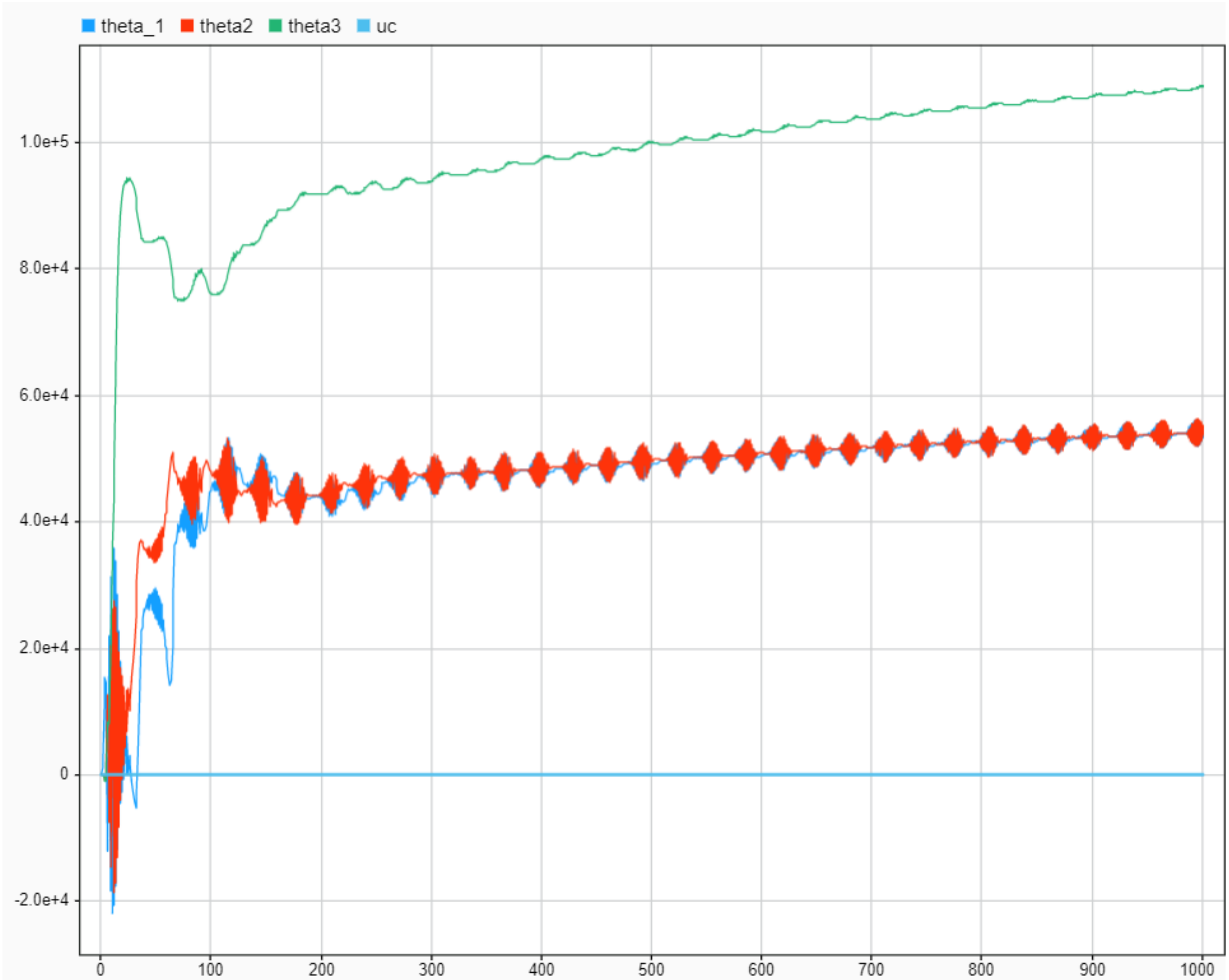
دیده می‌شود که خروجی به خوبی و در مدت زمانی مناسب، ردیابی شده‌است.

نمودار تغییرات ورودی کنترلی به شکل زیر است.



مشاهده می‌شود پس از طی کردن زمانی اولیه لازم برای همگرایی، ورودی کنترلی نیز به شکل سینوسی درآمده است. همچنین این مقدار در حالت پایدار نهایتا به عدد ۸۰۰ می‌رسد که بسیار کوچکتر از نمودار مشابه در حالت گرادیانی است.

همچنین نمودار همگرایی پارامترها به صورت زیر است:



این نمودارها هر چند به مقدار نهایی نمی‌رسند، اما به وضعیتی پایدار رسیده‌است که باعث شده‌است خروجی سیستم به شکل مناسبی دربیاید.

۴- مقایسه‌ی نهایی

در خلال بخش‌های قبلی، در مورد هر یک از روش‌ها نکاتی مطرح شد، روابط ریاضی مورد استفاده مورد بحث قرار گرفت و نیز به بررسی اثرات پارامترها و ورودی‌های مختلف پرداختیم. دیدیم که نرخ یادگیری بالاتر (تا حدی معقول) موجب بهبود همگرایی شده ولی در عوض، سیگنال کنترلی بزرگتری را می‌طلبد. در این بخش، به صورت خلاصه در مورد نکات مربوطه توضیحاتی آورده شده‌است.

روش MIT: در این روش، تضمین پایداری وجود نداشت. مشاهده شد که تغییر اندازه ورودی می‌تواند سیستم را ناپایدار کند. همچنین سیگنال ورودی کنترلی اندازه بسیار بزرگی داشت و سیستم به تغییر اندازه نرخ یادگیری نیز حساس بود.

روش MIT نرمالیزه شده: در این روش، با استفاده از روابطی تغییر یافته، سعی کردیم تا حساسیت سیستم به اندازه‌ی سیگنال ورودی را از بین ببریم. دیدیم که با تغییر سیگنال ورودی، سیستم همچنان می‌توانست هرچند در مدت زمانی طولانی‌تر، به همگرایی برسد. سپس حساسیت نسبت به آلفا سنجیده شد و دیدیم که با کوچکتر گرفتن آن، سرعت همگرایی بیشتر شده و اگر مقدار بزرگی انتخاب شود، ممکن است سیستم ناپایدار شود. اما همچنان مشکلاتی نظیر ورودی کنترلی بزرگ، حساسیت نسبت به مقدار آلفا و گاما وجود دارد و اثبات ریاضی برای همگرایی و عدم پایداری نیز نداریم.

روش لیاپانوف: در این روش، ابتدا باید یک تابع لیاپانوف مناسب پیدا می‌کردیم که بتوانیم با اعمال شروطی بر روی آن، به قوانین کنترلی برسیم. ارضای این شروط، باعث می‌شود همگرایی سیستم اثبات شده باشد و با اعمال سطوح مختلفی از اندازه سیگنال، هر چند در زمان‌های گاه طولانی، به همگرایی برسیم. در این روش، ورودی کنترلی اندازه بسیار کوچکتری داشت. همچنین همگرایی با سرعت نسبتا مناسبی انجام میگرفت و حساسیت نسبت به نرخ یادگیری پایین‌تر بود. عیب این روش نیز در نوسانات ورودی کنترلی و خروجی سیستم است که به مقدار ثابتی نمی‌رسند. در صورت وجود امکان نویز از آنجا که از این ارورها مشتق گرفته می‌شود، ممکن است وضعیت بدتر هم بشود.