

1. توصیف سیگنال

سیگنال $\bar{x}[n]$ یک قطار ایمپولسی دوره‌ای است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \begin{cases} 1, & n = rN \\ 0, & \text{در سایر موارد} \end{cases}$$

2. محاسبه ضرایب DFS

طبق فرمول DFS، ضرایب DFS از سیگنال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}[n] W_N^{kn} = 1 \quad (k \text{ برای همه})$$

که در اینجا $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ است.

3. نمایندگی سیگنال

با توجه به اینکه $\bar{X}[k] = 1$ برای همه k ، می‌توانیم نمایندگی زیر را برای $\bar{x}[n]$ بیان کنیم:

$$\bar{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}$$

4. نتیجه‌گیری

این نشان می‌دهد که سیگنال $\bar{x}[n]$ در واقع به صورت ترکیبی از توابع نمایی پیچیده‌ای است که دارای خاصیت دوره‌ای هستند. این نشان‌دهنده دوگانگی بین $\bar{x}[n]$ و ضرایب DFS $\bar{X}[k]$ است.

نتیجه نهایی

به طور خلاصه، نتیجه این مثال نشان می‌دهد که سیگنال‌های ایمپولسی دوره‌ای می‌توانند با استفاده از جمع‌ی از توابع نمایی پیچیده نمایندگی شوند که در فواصل مشخصی به هم متصل می‌شوند.

مثال 8.2: دوگانگی در DFS

- در این مثال، ضرایب DFS به صورت یک قطار ایمپالس دوره ای داده می شوند:

$$Y[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N \delta[k-rN] \quad \circ$$

- برای پیدا کردن $y[n]$ ، فرمول IDFS (تبدیل معکوس DFS) را اعمال کنید:

$$y[n] = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] W_N^{-(kn)} \quad \circ$$

- با جایگذاری $Y[k]$ در معادله IDFS و ساده سازی، باید $y[n] = 1$ را برای همه n بدست آورید.

- این نشان می دهد که $Y[k] = N x[k]$ و $y[n] = X[n]$ ، که یک ویژگی دوگانگی بین دامنه زمان و فرکانس را نشان می دهد.

مثال 8.3: DFS یک قطار پالس مستطیلی دوره ای

- در این مثال، $x[n]$ یک دنباله با دوره تناوب $N = 10$ است.
- برای محاسبه $X[k]$ ، فرمول DFS را اعمال کنید:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

- این یک جمع هندسی محدود است که می توان آن را به شکل بسته زیر نوشت:

$$X[k] = \frac{(1 - e^{-j2\pi kN/N})}{(1 - e^{-j2\pi k/N})} = e^{-j\pi k(N-1)/N} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/N)}$$

- با استفاده از این معادله، می توانید بزرگی و فاز دنباله دوره ای $X[k]$ را محاسبه کنید.

مثال 8.4: کانولوشن دوره ای

- این مثال یک روش برای تشکیل کانولوشن دوره ای دو دنباله دوره ای $x_1[m]$ و $x_2[m]$ را نشان می دهد.
- برای ارزیابی $y_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$ برای هر مقدار n ، مراحل زیر را دنبال کنید:
 1. دنباله $x_2[-m]$ را تشکیل دهید (معکوس زمانی $x_2[m]$).
 2. دنباله $x_2[n-m]$ را تشکیل دهید (شیفت دایره ای $x_2[-m]$ به میزان n).
 3. حاصلضرب نقطه به نقطه $x_1[m]$ و $x_2[n-m]$ را محاسبه کنید.
 4. حاصلضرب را بر روی یک دوره جمع کنید تا $y_3[n]$ بدست آید.
- دنباله $y_3[n]$ نیز دوره ای با دوره تناوب N خواهد بود.