بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده مکانیک، برق و کامپیوتر

فعالیت گروهی درس DSP

استاد:جناب آقای دکتر مهدی اسلامی

نگارش: مریم میرزایی فرد-محمد حسین رادپور-بهنام خندان

زمستان 1403

مقدمه:

همانطور که گفتیم هدف ما در این کتاب تجزیه و تحلیل سیستم های LTI است.روش حوزه زمان در تجزیه و تحلیل این سیستم ها با همه وضوح و روشنی در بعضی موارد به محاسبات پیچیده و خسته کننده منتهی می شود. این امرباعث شده است تا روش تجزیه و تحلیل فوریه در این موارد به کار گرفته شود.البته تنها بدلیل سادگی این روش مورد توجه قرار نگرفته است،بلکه دلیل عمده توجه متخصصان به تحلیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم های LTI ، این است که در واقع یک نوع برداشت جدید از سیستم ها به خواننده می دهد و خواننده را به دنیای جدیدی بنام حوزه فرکانس برده و او را در این دنیای جدید با خواص سیستم ها آشنا می کند .البته لازم است توجه شود که تحلیل فوریه فقط و فقط در مورد سیستم های خطی کاربرد دارد.تبدیل فوریه در واقع ابتدا به عنوان یک ابزار ریاضی کارآمد جهت تفسیر برخی از پدیده های فیزیکی و همچنین حل برخی مسایل پیچیده ریاضی ارائه گردید.تبدیل فوریه عملگری است که برخی معادلات پیچیده را به معادلات ساده جبری تبدیل می نماید.اساس کار این عملگر بسط یک تابع بر اساس مولفه های فرکانسی بصورت $e^{j\omega t}$ است.اهمیت تحلیل فوریه در تجزیه و تحلیل سیستم ها و سیگنال ها نیز از همینجا ناشی شده است.توابعی به بصورت $e^{j\omega t}$ نوع خاص و بسیار مهمی از توابع هستند که اگر پاسخ سیستم های خطی به این توابع را داشته باشیم اطلاعات مهمی در مورد سیستم و خواص آن می توان بدست آورد.این خواص به خواص سیستم در حوزه فرکانس موسوم هستند و از روی آنها می توان سایر خواص سیستم را نیز بدست آورد.جالب است توجه کنیم که پاسخ سیستم خطی به این گونه توابع دقیقا مشابه ورودی به استثناء یک ضریب ثابت مختلط است.بعبارت دیگر توابعی بصورت $e^{j\omega t}$ توابع ویژه سیستم های LTI هستند.بنابراین مشاهده می شود که تحلیل فوریه یک ابزار کارآمد و سریع در بدست آوردن خواص سیستم های خطی و تجزیه و تحلیل عملکرد آنهاست.در این فصل توجه خود را به تجزیه و تحلیل سیسگنال ها و سیستم های پیوسته زمان معطوف می داریم و در فصل چهارم به بررسی سیستم ها و دنباله های گسسته زمان می پردازیم.در اینجا جهت یاد آوری لازم است تعریف انرژی و توان را برای سیگنال های انرژی و توان که در فصل اول ارائه شد را مجدد تکرار کنیم.

انرژی سیگنال V(t) طبق تعریف برابر است با

$$Ev = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |V\,(t)|^2 dt \qquad (3\text{-}1)$$

که در تعریف انرژی برای یک مقاومت واحد بدست آمده است.رابطه (3-1) را بصورت (3-2) نیز می توان نوشت.

$$Ev = \int_{-\infty}^{\infty} |V\ (t)|^2 \mathrm{dt}$$
(3-2)

علامت قدر مطلق برای داشتن انرژی مثبت و حقیقی برای سیگنالهای مختلط گذاشته شده است.همچنین طبق تعریف توان(قدرت) سیگنال V(t) بصورت زیر است.

$$\mathrm{Pv} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 \mathrm{dt}$$
(3-3)

1-3 تقسیم بندی سیگنال ها از نظر توان و انرژی

البته تقسیم بندی سیگنال ها نمی تواند یک تقسیم بندی منحصر بفرد باشد و با توجه به هر خاصیت از سیگنال می توان یک نوع تقسیم بندی ارائه کرد.در اینجا منظور از تقسیم بندی از لحاظ میزان انرژی موجود در سیگنال است.در این صورت سیگنال ها به دو دسته تقسیم می شوند.

الف-سیگنال انرژی

سیگنال انرژی سیگنالی است که انرژی آن محدود باشد.

ب- سیگنال توان

سیگنال توان سیگنالی است که توان آن محدود باشد.

دیده می شود که در سیگنال انرژی Ev محدود و مثبت و توان صفراست،چون توان از تقسیم انژی به تمام طول زمان بدست می آید،و اگر Ev محدود باشد Pv صفر می شود. همچنین چون توان ئذ سیگنال های توان محدود است Ev بی نهالت می شود، چون انرژی از حاصلضرب توان در تمام طول زمان بدست می آید.البته بعضی از سیگنالها نه سیگنال توان هستند و نه سیگنال انرژی.در جدول (1-3) خواص سیگنال های انرژی و توان خلاصه شده اند.

سیگنال انرژی	Ev<∞	Pv=0
سیگنال توان	Ev=∞	Pv<∞

جدول (3-1) خواص سیگنال های انرژی و توان

چند نمونه از سیگنال های انرژی و توان در جدول (3-2) آورده شده اند.

رابطه سیگنال	نوع سیگنال	توان	انرژی
$Ae^{\frac{-t}{\tau}}u(t)$	انرژی	0	$A^2\frac{\tau}{2}$
A[u(t)-u(t-τ)]	انرژی	0	$A^2\tau$
$\mathrm{A}\cos(\omega t+\theta)$	توان	$\frac{A^2}{2}$	_
A	توان	A^2	_
Atu(t)	تعریف نشده (نه توان و نه انرژی)	∞	_

جدول(3-2) چند نمونه از سیگنال های انرژی و توان

مثال (3-1): انرژی و توان را برای سیگنال های جدول(3-2) بدست آورید.

حل:

الف) $Ev=\int_{-\infty}^{\infty}A^2\,e^{-2\frac{t}{\tau}}\mathrm{u(t)dt}$ = $-\frac{\tau}{2}\,A^2e^{-2\frac{t}{\tau}}|\quad e^{-2\frac{t}{\tau}}$