



به نام خدا

دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها، نیمسال دوم، سال تحصیلی ۹۷-۹۸

تمرین سری اول، مهلت تحویل: ۲۱ مهر ماه - ساعت ۱۱

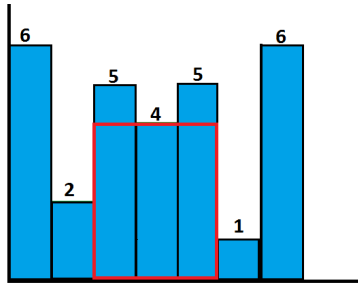
۱. قیمت یک سهام در طول n روز در آرایه A داده شده. روزهای i و j را بدست آورید به گونه‌ای که $i < j$ و با خرید این سهام در روز i ام و فروش آن در روز j ام بیشترین سود ممکن بدست می‌آید. به عبارت دیگر اندیس‌های i و j را بدست آورید به گونه‌ای که $i < j$ و مقدار $A[j] - A[i]$ بیشینه باشد.

a. با استفاده از ایده تقسیم و حل یک راه‌حل از مرتبه $O(n)$ برای این مسئله ارائه دهید.

b. یک راه حل غیر بازگشتی از مرتبه $O(n)$ برای این مسئله ارائه دهید.

۲. n نقطه در صفحه‌ی دو بعدی داده شده است. می‌خواهیم کوچکترین چند ضلعی (چند ضلعی با کمترین مساحت) را پیدا کنیم که راس‌هایش از این n نقطه تشکیل شده باشند و سایر نقاط نیز درون این چند ضلعی قرار بگیرد. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی متوسط $O(n \log n)$ ارائه دهید که نقاطی را که باید به عنوان راس این چند ضلعی قرار بگیرند پیدا کند.

۳. الف) یک نمودار میله‌ای به شما داده شده به طوری که عرض هر یک از میله‌ها ۱ می‌باشد. الگوریتمی با مرتبه‌ی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید به طوری که مساحت بزرگترین مستطیلی را که می‌توان در این نمودار یافت را پیدا کند. به طور مثال مساحت بزرگ‌ترین مستطیل در شکل زیر برابر ۱۲ می‌باشد.



(ب) با بهینه تر کردن آن، هزینه را به $O(n \lg n)$ کاهش دهید

۴. عدد n به ما داده شده است. اعدادی را بیابید که فاکتوریل آنها به n صفر ختم می شود.

۵. یک مسیر همیلتونی در یک گراف یک مسیر است که از هر راس گراف دقیقاً یک بار گذر کند. می توان نشان داد که یک گراف کامل جهت دار (گرافی که برای هر دو راس u و v آن دقیقاً یکی از دو یال $u \rightarrow v$ و $v \rightarrow u$ وجود دارد) حتماً شامل یک مسیر همیلتونی است. گراف کامل جهت دار G به صورت ماتریس مجاورت داده شده.

الف) الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \lg n)$ ارائه دهید که در این گراف یک مسیر همیلتونی بیابد.

(ب) (امتیازی) نشان دهید الگوریتم ارائه شده از نظر مجانبی بهینه است.

۶. آرایه ای به شما داده شده است. یک Top Element در این آرایه با پیچیدگی زمانی $O(\log n)$ پیدا کنید.

Top Element عنصری است که از همسایه های خود کوچک تر نباشد. برای عناصر ابتدایی و انتهایی آرایه کافی است که آن را با تنها همسایه اش مقایسه کنیم.

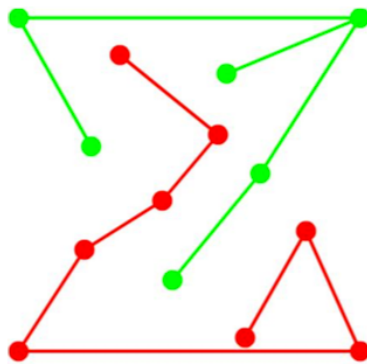
به طور مثال آرایه ی $\{10, 20, 15, 2, 23, 90, 67, 90\}$ دارای ۳ عدد Top Element است ۲۰ و ۹۷ و ۹۰.

۷. (امتیازی) «وصل کردن نقاط» یک بازی تک نفره است. تعداد g نقطه سبز و r نقطه قرمز در صفحه دکارتی داده شده است. می دانیم حداقل سه نقطه سبز و سه نقطه قرمز داریم. همچنین

از این $r + g$ نقطه داده شده چهار نقطه در محل قرار گرفتن رئوس یک مربع هستند که رئوس بالایی سبز و رئوس پایینی قرمز می‌باشند. بقیه نقاط در داخل مربع قرار گرفته‌اند و هیچ سه نقطه سبز یا هیچ سه نقطه قرمز (با در نظر گرفتن چهار نقطه اولی) روی یک خط راست واقع نشده‌اند. حال زمین بازی آماده شده است. شما در صورتی برنده هستید که بتوانید نقاط سبز را با دقیقاً $g - 1$ خط و نقاط قرمز را با دقیقاً $r - 1$ خط طبق قواعد زیر بهم وصل کنید:

- نقاطی که بهم وصل می‌شود باید هم‌رنگ باشند.
- خطوطی که نقاط را به هم وصل می‌کنند نباید همدیگر را قطع کنند.
- تمام نقاط سبز رنگ باید در یک مولفه باشند. همچنین تمام نقاط قرمز نیز باید در یک مولفه باشند. دو راس u و v در یک مولفه هستند اگر بتوانیم از خطوط رسم شده از راس u به راس v برویم.

برای مثال در شکل بالا خطوط طوری رسم شده‌اند که تمام قواعد بازی رعایت شده است. می‌توان ثابت کرد که همیشه می‌توانید طوری خطوط را رسم کنید که برنده مسابقه شوید. با استفاده از ایده‌ی تقسیم و حل، الگوریتمی از مرتبه $O(n \lg n)$ برای کشیدن خطوط ارائه دهید که برنده شوید.



مثالی از یک صفحه‌ی بازی که در آن برد اتفاق افتاده است