



## تمرین شماره دو

### نکات مهم

- موعد تحویل این تمرین، ساعت ۱۸:۰۰ روز جمعه ۱۰ فروردین‌ماه ۱۴۰۳ است.
- در صورت انجام تمرین‌ها و مینی‌پروژه‌ها به‌صورت گروهی، گزارش مربوطه فقط توسط یکی از اعضا روی سامانه VC بارگذاری شود؛ اما لازم است همه اعضا روی حساب‌های گیت‌هاب مجزای خود قرار دهند.
- استفاده از ابزارهای هوشمند (مانند ChatGPT) مجاز است؛ اما لازم است تمام جزئیات مواردی که در خروجی‌های مختلف گزارش خود عنوان می‌کنید را به خوبی خوانده، درک و تحلیل کرده باشید.

### ۱ سوال یک: مربوط به سیستم انتخابی در تمرین شماره یک

مدل کامل سیستم انتخابی خود را به دست آورید، فرم فضای حالت را تشکیل داده و ورودی(ها) و خروجی(ها)ی مناسب برای آن را تعیین کنید. هم‌چنین اگر می‌توانید، سیستم انتخابی خود را در قالب یک بلوک‌دیاگرام نمایش دهید.

در ادامه، سیستم انتخابی خود را حول یک نقطه کار مناسب خطی‌سازی کنید و معادلات را به فرم متعارف فضای حالت تبدیل کنید. هم‌چنین اگر می‌توانید، محدوده معتبر سیستم خطی را هم به‌صورت نظری مشخص کنید.

### ۲ سوال دو: سوال جبرخطی

رتبه، بعد فضای پوچی و فضای پوچی ماتریس‌های زیر را بدست آورید (بعد فضای پوچی برای ماتریس  $A_{m \times n}$  در حالت  $Ax=0$  برابر با  $N_R(A) = n - \text{rank}(A)$  است).

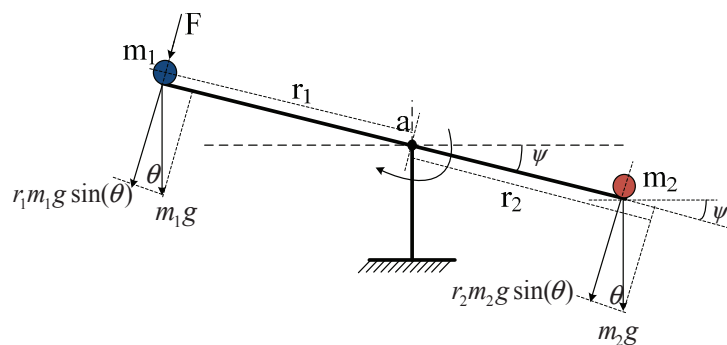
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad (1)$$

### ۳ سوال سه: سیستم‌های مکانیکی

برای کنترل یک سیستم چند روتوری مانند کوادروتور، مطالعه رفتار دینامیکی یک سیستم ناپایدار ساده ضروری است. الکلنگ نامتعادل را می‌توان یکی از نمونه‌های متعدد این سیستم‌ها در نظر گرفت. **شکل ۱** نمای شماتیک و دینامیک سیستم الکلنگ را نشان می‌دهد که در آن  $a$  نقطه اهرمی (محوری) است، و نیروهای گرانشی ناشی از دو جرم در دو سر الکلنگ، باعث ایجاد گشتاور برای چرخش می‌شوند. گشتاور از مجموع اجزای مماسی این نیروها نسبت به دوران، ضربدر فاصله‌های مربوطه از نقطه محوری ایجاد می‌شود. نیروی خارجی  $F$  که توسط تماس تصادفی ایجاد می‌شود، در فاصله  $r_1$  از نقطه محوری عمل می‌کند.

با فرض اینکه اهرم الکلنگ ایده‌آل جرمی ندارد، معادله آورده‌شده در **معادله ۲** از حرکت استخراج می‌شود.

$$r_2 m_2 g \sin(\theta) - r_1 m_1 g \sin(\theta) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \ddot{\theta} + F r_2 \quad (2)$$

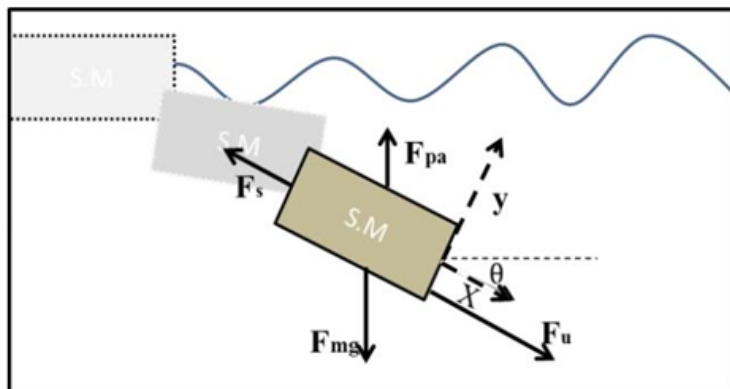


شکل ۱: سیستم مکانیکی.

زاویه بین محور افقی و اهرم به صورت  $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$  است. همچنین، از آنجا که اهرم یک جسم صلب است، مشتقات اول و دوم این زاویه به ترتیب برابر با  $\dot{\psi} = -\dot{\theta}$  و  $\ddot{\psi} = -\ddot{\theta}$  است. با توجه به موارد داده شده، معادلات فضای حالت و ماتریس‌های آن را بنویسید.

#### ۴ سوال چهار: سیستم زیردریایی

معادلات دیفرانسیل غیرخطی یک زیردریایی که تغییرات شیب حرکت آن برابر با  $x^2 - x$  باشد به صورتی است که در **معادله ۳** آورده شده.



شکل ۲: سیستم زیردریایی.

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x} + F_s + \sin(\theta)(F_{pa} - F_{mg}) &= F_u \\
 F_s &= K \dot{x} |\dot{x}| \quad (\text{square law}) \\
 F_{pa} = \rho g V &= m_2 g, \quad F_{mg} = m_1 g, \quad F_u = u \\
 \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan(\dot{\theta}) &= \dot{\theta}(1 + \tan^2(\theta)) = x^2 - x
 \end{aligned} \tag{۳}$$

فرض کنید:

- نیروی بازدارنده حرکت در آب از قانون مربعی یا Square Law Drag تبعیت می‌کند.
- جرم زیردریایی  $m_1$  و جرم حجم آب معادل  $m_2$  است.

• سیگنال ورودی نیرویی در راستای  $x$  و خروجی سیستم  $x$  است.

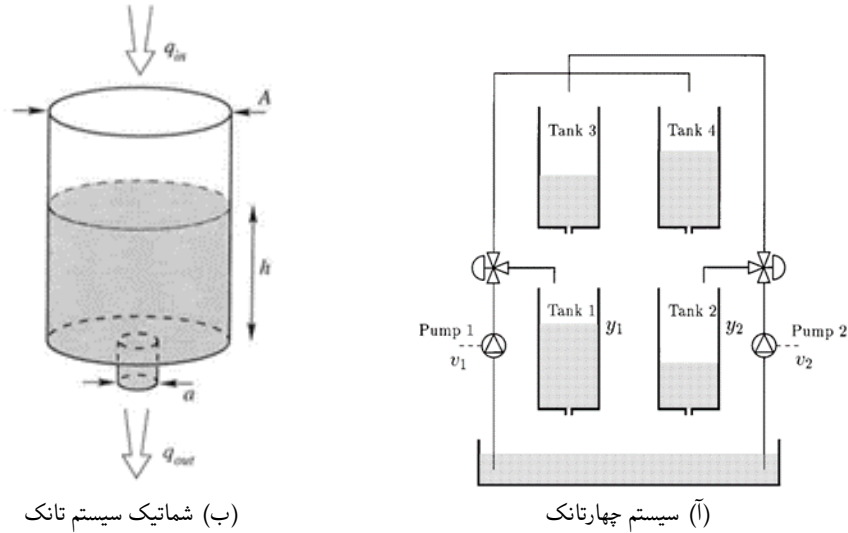
معادلات حالت غیرخطی سیستم را بدست آورده، سپس معادلات بدست آمده را حول نقطه تعادل زیر خطی سازی کنید (از تقریب های  $\theta \approx 0$ ,  $\tan(\theta) \approx \sin(\theta)$  استفاده کنید).

$$x^* = [x \quad \dot{x} \quad \theta] = [0.5 \quad 0 \quad 2k\pi], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## ۵ سوال پنج: سیستم های هیدرولیکی

فرآیند چهارتانک که در **شکل ۳ (آ)** نشان داده شده است، یک فرآیند آزمایشگاهی با چهار تانک آب (دو تانک در بالا و دو تانک در پایین)، و دو شیر کنترل و دو پمپ است؛ که در آن هدف کنترل ارتفاع تانک ها از طریق پمپ ها است. ورودی های این فرآیند ولتاژ پمپ ها و خروجی های آن ارتفاع آب دو تانک پایینی هستند. در این فرآیند ضریب شیرهای کنترلی قابل تنظیم است.

در فرآیند چهارتانک کنترل ارتفاع با استفاده از شیرکنترل در مسیر ورودی آب انجام می شود، و این روشی است که در صنایع اغلب از آن استفاده می شود. هدف کنترلی در این فرآیند «کنترل ارتفاع» است. هر چهار تانک از طریق لوله هایی با هم ارتباط دارند. همچنین نحوه پمپاژ آب به داخل تانک ها از تانک اصلی به این صورت است که هر پمپ به صورت ضربدری یک تانک از بالا و یک تانک از پایین را تغذیه می کند. آب تانک بالایی در تانک دیگر که مستقیماً در زیر آن قرار دارد می ریزد. خروجی مخازن پایینی به تانک اصلی ریخته می شود، و در مسیر یکی از مخازن پایینی یک شیر کنترل و یک دبی سنج قرار دارد که امکان کنترل فلوی خروجی آن را به کاربر می دهد. تانک های هم ارتفاع از طریق لوله هایی به هم متصل شده اند که باعث انتقال آب بین آن ها می شود. طبق قانون تعادل مایعات، حجم مایع در یک تانک مانند آن چه که در **شکل ۳ (ب)** نشان داده شده به صورتی که در ادامه آورده شده محاسبه می شود.



شکل ۳: شکل های مربوط به سیستم های هیدرولیکی.

قانون برنولی برای فلوی خروجی به صورتی است که در **معادله ۴** آورده شده.

$$q_{out} = a\sqrt{2gh} \quad (۴)$$

همچنین، فرض می کنیم جریان (فلوی) هر پمپ ضریبی از ولتاژ به صورتی که در **معادله ۵** آورده شده باشد.

$$q_L = \gamma ku, \quad q_U = (1 - \gamma)ku, \quad \gamma \in [0, 1] \quad (۵)$$

که در آن، جریان تانک‌های پایینی و  $q_u$  جریان تانک‌های بالایی است. همچنین، متغیرهای حالت، ارتفاع هر تانک است. با توجه به این توضیحات:

آ) معادلات حالت این سیستم را بیابید.

ب) معادلات حالت را خطی‌سازی کنید.

ج) ماتریس‌های فضای حالت را بدست بیاورید.

د) مقادیر آورده‌شده در **جدول ۱** را در نظر گرفته و سیستم را شبیه‌سازی کنید. شرایط اولیه تانک‌ها با نماد  $h_i^0$  نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که ثابت زمانی از فرمول  $T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i}{g}}$ ،  $i = 1, \dots, 4$  بدست می‌آید. جهت کسب اطلاعات بیشتر می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید.

جدول ۱: مقادیر سیستم **سوال پنج: سیستم‌های هیدرولیکی.**

Parameter	Value
$A_1, A_3$ [cm <sup>2</sup> ]	28
$A_2, A_4$ [cm <sup>2</sup> ]	32
$a_1, a_3$ [cm <sup>2</sup> ]	0.071
$a_2, a_4$ [cm <sup>2</sup> ]	0.057
$k_c$ [V/cm]	0.50
$(h_1, h_2)$ [cm]	(12.4, 12.7)
$(h_3, h_4)$ [cm]	(1.8, 1.4)
$(\dot{v}_1, \dot{v}_2)$ [V]	(3.0, 3.0)
$(k_1, k_2)$ [cm <sup>3</sup> /V.s]	(3.33, 3.35)
$(\gamma_1, \gamma_2)$	(0, 0)
$g$ [cm/s <sup>2</sup> ]	981

مراجع

- [1] A. Numsomran, T. Suksri, V. Kongratana, T. Trisuwannawat, and T. Tirasesth, "I-P controller design for quadruple-tank system," 2004 IEEE Region 10 Conference TEN-CON 2004. IEEE, 2004. doi: 10.1109/tencon.2004.1414972.