دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی تهران

تمرین سری چهارم

مهدی فیاض ۴۰۰۰۷۹۱۳ و سیدحبیب حسینی ۴۰۰۰۴۴۶۳

بهار۱۴۰۳

سوال اول

```
>> A

A =

         0    1.0000         0         0         0         0         0         0         0         0
   -4.3750         0         0         0   62.5000         0         0         0         0         0
         0         0         0    1.0000         0         0         0         0         0         0
         0         0   -4.3750         0         0   62.5000         0         0         0         0
         0   -1.0000         0         0  -24.0000         0         0         0         0         0
         0         0         0   -1.0000         0  -24.0000         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0    1.0000         0         0
   -1.9600         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0    1.0000
         0         0   -1.9600         0         0         0         0         0         0         0

>> C

C =

     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
```

```
>> B

B =

     0     0
     0     0
     0     0
     0     0
    -1     0
     0    -1
     0     0
     0     0
     0     0
     0     0
```

برسی کنترل پذیری:

```
>> ctrb(A,B)

ans =

  1.0e+12 *

  Columns 1 through 15

         0         0         0         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0003
         0         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0003         0   -0.0063
         0         0         0         0         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0
         0         0         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0003         0
   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0001         0    0.0021
         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0001         0
         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000
         0         0         0         0         0         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000
         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0000         0

  Columns 16 through 20

         0   -0.0063         0    0.1310         0
         0    0.1318         0   -2.7760         0
    0.0003         0   -0.0063         0    0.1318
   -0.0063         0    0.1318         0   -2.7760
         0   -0.0449         0    0.9447         0
    0.0021         0   -0.0449         0    0.9447
         0    0.0000         0   -0.0006         0
         0   -0.0006         0    0.0123         0
   -0.0000         0    0.0000         0   -0.0006
    0.0000         0   -0.0006         0    0.0123
```

```
>> rank(ans)

ans =

    10
```

ماتریس فول رنک است لذا کنترل پذیر است.

برسی رویت پذیری:

```
>> o = obsv(A,C)

o =

   1.0e+08 *

         0         0         0         0         0         0    0.0000         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.0000         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000
   -0.0000         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0   -0.0000         0         0         0         0         0         0         0
         0   -0.0000         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0   -0.0000         0         0         0         0         0         0
    0.0000         0         0         0   -0.0000         0         0         0         0         0
         0         0    0.0000         0         0   -0.0000         0         0         0         0
         0    0.0000         0         0    0.0000         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.0000         0    0.0000         0         0         0         0
   -0.0000   -0.0000         0         0   -0.0006         0         0         0         0         0
         0         0   -0.0000   -0.0000         0   -0.0006         0         0         0         0
    0.0001    0.0006         0         0    0.0131         0         0         0         0         0
         0         0    0.0001    0.0006         0    0.0131         0         0         0         0
   -0.0027   -0.0130         0         0   -0.2765         0         0         0         0         0
         0         0   -0.0027   -0.0130         0   -0.2765         0         0         0         0
    0.0569    0.2738         0         0    5.8238         0         0         0         0         0
         0         0    0.0569    0.2738         0    5.8238         0         0         0         0
```

```
>> rank(o)

ans =

    10
```

ماتریس فول رنک است لذا رویت پذیر است.

حال فرم قطری سیستم را مینویسیم:

$$\dot{z}(t) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$y_{(t)} = CTz(t)$$

```
>> [T,jo] = jordan(A)

T =

  Columns 1 through 8

   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0016 + 0.0000i   0.4992 + 0.4461i   0.4992 - 0.4461i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0332 + 0.0000i   0.0166 - 1.4948i   0.0166 + 1.4948i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.1616 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -3.4042 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0113 + 0.0000i  -0.0057 + 0.0659i  -0.0057 - 0.0659i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.1585 + 0.0000i
  -1.1667 - 0.0000i   0.2951 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.1475 + 0.2180i  -0.1475 - 0.2180i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 - 0.0000i  -1.1667 - 0.0000i   0.0001 + 0.0000i   0.5833 - 0.0723i   0.5833 + 0.0723i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -1.1667 + 0.0000i   0.7431 + 0.0000i  -0.0007 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -1.1667 + 0.0000i   0.0150 + 0.0000i

  Columns 9 through 10

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0808 + 0.9418i  -0.0808 - 0.9418i
   1.7021 - 1.2478i   1.7021 + 1.2478i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
>>        Ti = inv(T)

Ti =

   1.0e+02 *

  Columns 1 through 8

   0.0000 + 0.0000i  -0.0013 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0038 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0086 + 0.0000i  -0.0022 + 0.0000i
   0.0100 + 0.0000i   0.0038 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0100 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0086 - 0.0000i
   0.0100 + 0.0000i   0.0481 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0239 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
   0.0100 + 0.0000i   0.0034 + 0.0038i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0085 + 0.0113i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
   0.0100 + 0.0000i   0.0034 - 0.0038i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0085 - 0.0113i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0038 + 0.0000i   0.0002 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0100 - 0.0000i   0.0038 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0100 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0001 + 0.0000i   0.0005 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0100 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0043 - 0.0057i   0.0036 - 0.0003i   0.0000 + 0.0000i   0.0100 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0043 + 0.0057i   0.0036 + 0.0003i   0.0000 + 0.0000i   0.0100 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i

  Columns 9 through 10

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0086 + 0.0000i  -0.0055 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0086 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
```

```
>> Ti * A * T

ans =

  Columns 1 through 8

   0.0000 - 0.0000i   1.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i -21.0615 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -1.4693 - 1.6813i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -1.4693 + 1.6813i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i -21.0615 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i

  Columns 9 through 10

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
```

```
>> Ti * B

ans =

   1.0e+02 *

   0.0038 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0100 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -1.0239 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0085 - 0.0113i   0.0000 + 0.0000i
  -0.0085 + 0.0113i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0100 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0100 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0100 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -0.0100 + 0.0000i
```

```
>> C * T

ans =

  Columns 1 through 8

  -1.1667 - 0.0000i   0.2951 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.1475 + 0.2180i  -0.1475 - 0.2180i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -1.1667 + 0.0000i   0.7431 + 0.0000i  -0.0007 + 0.0000i

  Columns 9 through 10

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
  -0.3712 + 0.0181i  -0.3712 - 0.0181i
```

شرایط اولیه را به صورتی تعیین کنید که پاسخ ورودی صفر، فرکانس مشخصی از سیستم شما را تحریک نکند.

پاسخ: با توجه به محاسبات متلب رویت پذیری سیستم مشخص شد. طبق قضیه ها میدانیم که اگر سیستمی رویت پذیر باشد همواره داریم $Cv_i \neq 0$ که v_i بردارهای ویژه سیستم هستند. میدانیم پاسخ ورودی صفر سیستم به ازای فرکانس s_i(مقادیر ویژه) از رابطه زیر به دست می آید:

$$x(t) = e^{s_i t} v_i \quad \rightarrow \quad y_{zi} = Cx(t) = e^{s_i t} C v_i$$

از آنجایی که همواره $Cv_i \neq 0$ است، لذا $y_{zi} \neq 0$ است. یعنی وقتی سیستم رویت پذیر است، شرایط اولیه ایی که در اینجا متناظر با v_i است وجود نخواهد داشت.

۴

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = [-1 \quad 1 \quad 1]\, x$$

بررسی کنترل پذیری:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-2 & 2-3a \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس را بدست می آوریم

$$\det(C) = -2a - 2 \rightarrow \begin{cases} \text{if } a = -1 \rightarrow \text{Rank} \neq 3 \longrightarrow \text{uncontrolable} \\ \text{if } a \neq -1 \rightarrow \text{Rank} = 3 \rightarrow \text{Controlable} \end{cases}$$

مقادیر ویژه سیستم عبارت اند از

$$\lambda_1 = -2 \, , \quad \lambda_{2,3} = -1$$

مقادیر ویژه متناظر $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} V_1 = 0 \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه متناظر $\lambda = -1$

$$(A - \lambda I)V_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} V_2 = 0 \rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژه تعمیم یافته را نیز بدست می آوریم

$$(A + I)\, V_2^{12} = V_2 \rightarrow V_2^{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 + \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 + \frac{a}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} -a-2 & 1 & -1 \\ a+2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \dot{z} = T^{-1}AT\, z(t) + T^{-1}B u$$

$$y = CTz$$

$$\rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -a-1 \\ a+2 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \, , 2 \, , \frac{a}{2} + \frac{3}{2}]\, z(t)$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Z(t) + \begin{bmatrix} -a-1 \\ a+2 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{a}{2}+\frac{3}{2} \end{bmatrix} Z$$

اگر دوم $a=-1$ ← $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ← اگر $a=-1$ باشد مود دینامیکی متناظر $\lambda=-2$ کنترل ناپذیر خواهد شد

اگر دوم $a=-2$ ← شاید در نگاه اول نظر بیاید به ازای این مقدار مود دینامیکی -1 نیز کنترل ناپذیر است ولی از آنجا که وابستگی جمع بین دو مود تکراری -1 وجود دارد، لذا همواره کنترل پذیر است

اگر سوم ← $a \neq -1$ ← همواره کنترل پذیر است

← تجزیه کنترل ناپذیر:

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] Z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} Z(t)$$

بررسی رویت پذیری

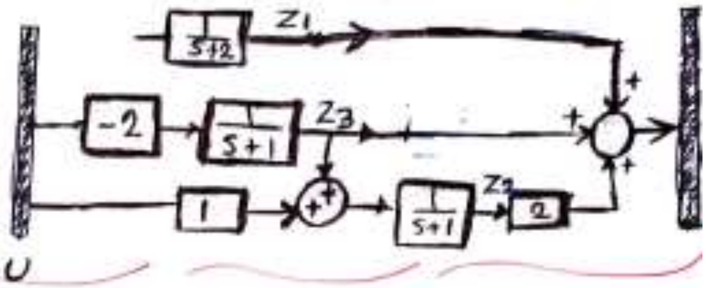
$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a-1 & -2 & 0 \\ 1-3a & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(O) = -8 \neq 0$$

همواره رویت پذیر است

نمایش تجزیه شده دقیقاً مشابه حالت کنترل پذیر است در ادامه نمایش تجزیه کالمن را به ازای مقادیر مختلف a از جمله $a=-1, -2, -3$ نشان می‌دهیم-

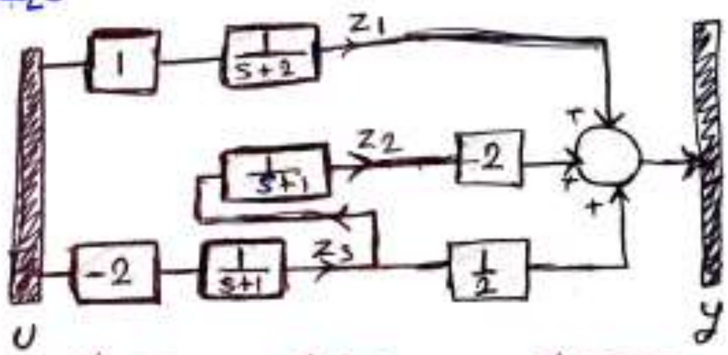
$a=-1 \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 \\ \dot{z}_3 = -z_3 - 2u \\ \dot{z}_2 = -z_2 + z_3 + u \end{cases}$

$y = z_1 + 2z_2 + z_3$



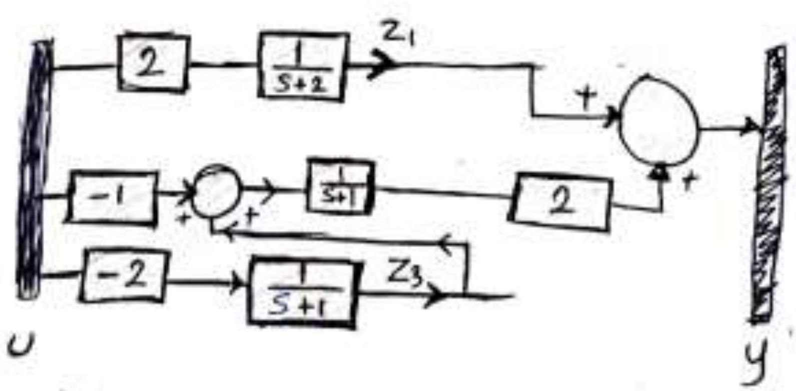
$a=-2 \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + u \\ \dot{z}_2 = -z_2 + z_3 \\ \dot{z}_3 = -z_3 - 2u \end{cases}$

$y = z_1 + 2z_2 + \frac{1}{2}z_3$



$a=-3 \longrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 + 2u \\ \dot{z}_2 = -z_2 + z_3 - u \\ \dot{z}_3 = -z_3 - 2u \end{cases}$

$y = z_1 + 2z_2$



سوال ۳

```
>> A

A =

     1     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     1     0     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     1     1
     0     0     0     0     0     1
```

```
>> B

B =

     0     2     2
     1     0     0
     0    -1    -1
     0     1     1
     1     3     1
     0     0     1
```

```
>> C

C =

     2     1     1     0     0     1
     0     5    -1     0     2     0
     4    -1     0     6     4     0
```

ماتریس ها را در متلب تعریف کردیم. حال داریم:

```
>> c = ctrb(A,B)

c =

  Columns 1 through 11

     0     2     2     1     2     2     2     2     2     3     2
     1     0     0     1     0     0     1     0     0     1     0
     0    -1    -1     0     0     0     0     1     1     0     2
     0     1     1     0     1     1     0     1     1     0     1
     1     3     1     1     3     2     1     3     3     1     3
     0     0     1     0     0     1     0     0     1     0     0

  Columns 12 through 18

     2     4     2     2     5     2     2
     0     1     0     0     1     0     0
     2     0     3     3     0     4     4
     1     0     1     1     0     1     1
     4     1     3     5     1     3     6
     1     0     0     1     0     0     1

>> rank(c)

ans =

     6
```

از آنجایی که ماتریس فول رنک است، لذا سیستم کنترل پذیر است.

```
>> o = obsv(A,C)

o =

     2     1     1     0     0     1
     0     5    -1     0     2     0
     4    -1     0     6     4     0
     2     3     1     1     0     1
     0     5    -1    -1     2     2
     4     3     0     6     4     4
     2     5     1     2     0     1
     0     5    -1    -2     2     4
     4     7     0     6     4     8
     2     7     1     3     0     1
     0     5    -1    -3     2     6
     4    11     0     6     4    12
     2     9     1     4     0     1
     0     5    -1    -4     2     8
     4    15     0     6     4    16
     2    11     1     5     0     1
     0     5    -1    -5     2    10
     4    19     0     6     4    20

>> rank(o)

ans =

     5
```

از آنجایی که ماتریس فول رنک نیست، لذا سیستم رویت ناپذیر است.

سوال ۴

سوال ④

با استفاده از ماتریس کنترل پذیری:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1.5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \rightsquigarrow C=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & -0.5\end{bmatrix}$$

Rank (c) = 2 → Full Rank → controllable

با استفاده از گرامیان رابطه:

$$A\,w_c + W_c A^T + BB^T = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1 & w_2\\ w_3 & w_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_1 & w_3\\ w_2 & w_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{bmatrix}=0$$

معادلات را حل می‌کنیم

$$\begin{aligned}&-3w_1+w_3-3w_1+w_3+4=0\\&-3w_2+w_4+2w_1-1.5w_3+6=0\\&2w_1-1.5w_3-3w_1+w_4+6=0\\&2w_2-1.5w_4\ 2w_2-1.5w_4+9=0\end{aligned} \rightarrow \begin{cases}-6w_1+2w_3=-4\\ 2w_1-3w_2-1.5w_3+w_4=-6\\ -w_1-1.5w_3+w_4=-6\\ 4w_2-3w_4=-9\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{solve}} \begin{cases}w_1=2.0444\\ w_2=4.1333\\ w_3=4.1333\\ w_4=8.5111\end{cases} \longrightarrow w_c=\begin{bmatrix}2.044 & 4.1333\\ 4.1333 & 8.5111\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - w_c| = 0 \rightarrow \lambda_1=0.03,\ \lambda_2=10.5255 \rightarrow \lambda_1,\lambda_2>0$$

کنترل پذیر است.

سوال ۵)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

کنترل ناپذیر است.

```
>> ctrb(A,B)

ans =

     0     0     0     0
     1    -1     1    -1
     0     0     0     0
     0     0     0     0

>> rank(ans)

ans =

     1
```

رویت ناپذیر است.

```
>> obsv(A,C)

ans =

     0     0     2     1
     0     0    -2     0
     0     0     2     1
     0     0    -2     0

>> rank(ans)

ans =

     2
```

فرم قطری را بدست می آوریم.

$$\lambda_{1,2,3} = -1 \, , \, \lambda_4 \; = \; +1$$

بردار های ویژه را محاسبه میکنیم:

$$\lambda_1 = -1$$

$$(A+I)v_1 = 0 \; \rightarrow \; v_1^0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, v_1^1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

دو بردار ویژه مستقل به دست آمده است. حال بردار ویژه تعمیم یافته را محاسبه میکنیم:

$$(A+I)v_1^3 += \; v_1^0 + \; v_1^1 \;\; \rightarrow \;\; v_1^3 = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

بردار ویژه نظیر 2- :

$$(A+2I)v_2 = 0$$

```
>> [T,j] = jordan(A)

T =

   -0.7500    1.5000    0.7500    1.0000
    0.7500   -1.5000   -0.7500         0
   -0.2500         0   -0.7500         0
    1.0000         0         0         0


j =

     1     0     0     0
     0    -1     1     0
     0     0    -1     0
     0     0     0    -1
```

سوال ۶

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 2.8 \\ 0 & -3.13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

$$y = [1\ 0\ 0\ 0]\ x$$

طبق سوال $\delta_r = 0$

به عبارتی میتوان گفت که سیستم به صورت زیر است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_a$$

$$y = [1\ 0\ 0\ 0]\ x$$

با استفاده از متلب داریم:

```
>> [T,b] = jordan(A)

T =

   -1.0000         0         0   -2.0000
   -0.5000         0         0         0
         0         0    1.0000         0
    1.0000    1.0000         0    1.0000


b =

     2     0     0     0
     0     3     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
>> Ti = inv(T)

Ti =

         0   -2.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0    1.0000
         0         0    1.0000         0
   -0.5000    1.0000         0         0
```

فرم جردن به دست آمد حال نمایش جدید سیستم را به دست می‌آوریم:

```
>> Ti * A * T

ans =

     2     0     0     0
     0     3     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
>> Ti * B

ans =

     0
    10
     0
   -10
```

```
>> C * T

ans =

    -1     0     0    -2
```

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2\,0\,0\,0} \\ \mathbf{0\,3\,0\,0} \\ \mathbf{0\,0\,1\,0} \\ \mathbf{0\,0\,0\,1} \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-10} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta_a}$$

$$\boldsymbol{y} = [\mathbf{-1\;\;0\;\;0\;\;-2}]\,\boldsymbol{z}$$

$\dot{z}_1 = 2z_1$

$\dot{z_2} = 3z_2 + 10\delta_a$

$\dot{z_3} = z_3$

$\dot{z_4} = z_4 - 10\delta_a$

$y = -z_1 - 2z_4$