ج س ۲)
بخش ۱)

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&-3\\0&\lambda+1&-1&-1\\0&0&\lambda&-1\\0&0&1&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)^3=0\Rightarrow\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1\end{array}$$

$$\lambda_1=0\Rightarrow(\lambda_1 I-A)v_1=0\rightarrow Av_1=0\Rightarrow\begin{cases}x_2+3x_4=0 & \underline{x_1\ \text{free}}\\ -x_2+x_3+x_4=0\\ \underline{x_4=0} & \Rightarrow \underline{x_2=0}\\ -x_3-2x_4=0 & \Rightarrow \underline{x_3=0}\end{cases}\Rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda=-1\Rightarrow(\lambda I-A)v_2=0=(A-\lambda I)v_2=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_4=0\\x_3+x_4=0\\-x_3-x_4=0\end{cases}\Rightarrow v^{0}_{21}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow(A-\lambda_2 I)v'_{21}=v^{0}_{21}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_4=2\\x_3+x_4=1\\-x_3-x_4=-1\end{cases}\Rightarrow v'_{21}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-\lambda_2 I)\, v_{21}^{2} = v_{21}^{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = -4 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\%}$$ تناقض

معادل v ویژه؟

$$(\lambda I - A)v = 0 \Longrightarrow v_{22}^{0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \left(v_1 \,\middle|\, v_{21}^{0} \,\middle|\, v_{21}^{1} \,\middle|\, v_{22}^{0} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ج س ۱۲
بخش ۲

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \ , \ rank(B-2I) = 4$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -2 \ , \ rank(B+2I) = 3$

$\Leftarrow$ ۵ مقدار ویژه (λ) داریم لذا $\Leftarrow B_{5\times5}$

$\Rightarrow rank(B-2I) + null(B-2I) = 5$

$\Rightarrow null(B-2I) = 5-4 = 1$

یک بردار ویژه مستقل $\leftarrow$ بردار ویژه دوم متناظر با λ_2 تعمیم یافته و وابسته به v_1 است

$\Rightarrow rank(B+2I) + null(B+2I) = 5$

$\Rightarrow null(B+2I) = 5-3 = 2$

دو بردار ویژه مستقل و لذا یک بردار ویژه تعمیم یافته داریم.

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ ۳ بلوک داریم و با توجه به جنس بردارهای ویژه در ماتریس T جای این بلوک‌ها هم می‌توانند تغییر کنند و لذا $3! = 6$ حالت فرم کانونیکال جردن می‌توانیم داشته باشیم

$\varphi(t) \xrightarrow{L} \varphi(s) \Rightarrow \varphi(s) = (sI - A)^{-1}$ روندحل: (ج س ۳

$\overset{inv}{\Rightarrow} \varphi(s)^{-1} = sI - A \Rightarrow A = -\varphi^{-1}(s) + sI$

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-۳} - \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-۳} & 0 \\ \frac{۳}{s-۲} - \frac{۳}{s-1} & \frac{۴}{s-۳} - \frac{۷}{s-۲} + \frac{۴}{s-1} & \frac{1}{s-۲} \end{pmatrix}$$

$$\det(\varphi(s)) = \frac{1}{(s-1)(s-۲)(s-۳}$$

ماتریس کهادی $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(s-۳)(s-۲)} & 0 & \frac{1}{s-۳}\left(\frac{۳}{s-۲} - \frac{۳}{s-1}\right) \\ \frac{1}{s-۲}\left(\frac{1}{s-۳} - \frac{1}{s-1}\right) & \frac{1}{(s-1)(s-۲)} & \varphi_{11} \times \varphi_{۳۲} - \varphi_{۳۱} \times \varphi_{1۲} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-1)(s-۳)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1}(s) = \overbrace{(s-1)(s-۲)(s-۳)}^{D} \begin{pmatrix} \frac{1}{(s-۳)(s-۲)} & \frac{-۳}{D} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-1)(s-۲)} & 0 \\ \frac{-۳}{D} & \frac{-1}{D} & \frac{1}{(s-1)(s-۳)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1}(s) = \begin{pmatrix} s-۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & s-۳ & ۰ \\ -۳ & -۱ & s-۲ \end{pmatrix}$$

$$A = -\varphi^{-1} - sI = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

ج س ۴)
بخش ۱)

$$A=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad P(\lambda)=\det(\lambda I_n - A)$$

$$\lambda I - A=\begin{pmatrix}\lambda & 3 & 0\\ -3 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{pmatrix} \xrightarrow{\det} P(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1) - 3(-3\lambda-3)$$

$$P(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+9\lambda+9$$

$$P(A)=A^3+A^2+9A+9I=0$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-9 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 27 & 0\\ 27 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A(A^2+A+9I)=-9I \xrightarrow{\times A^{-1}}$$

$$(A^2+A+9I)=-9A^{-1} \qquad A^{-1}=\left(\frac{A^2}{-9}+\frac{A}{-9}-I\right)$$

$$=\begin{pmatrix}0 & +\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & +\frac{1}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}+1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & +\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

ج س ۴) با استفاده از قضیه کیلی همیلتون ⇐

بخش ۲) $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 9\lambda + 9 = (\lambda+1)(\lambda^2+9) = 0$

$\lambda = [-1, 3i, -3i]$

$$A^K = R(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2$$

$$\lambda^K = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$$

$\lambda=-1 \Rightarrow -1^K = a_0 - a_1 + a_2$

$\lambda=3i \Rightarrow (3i)^K = a_0 + a_1(3i) - 9a_2$

$\lambda=-3i \Rightarrow (-3i)^K = a_0 - a_1(3i) - 9a_2$

۳ معادله
۳ مجهول
می به a_0 و a_1 و a_2
برحسب K

$\lambda=-1 \Rightarrow \lambda^K = -1^K = a_0 - a_1 + a_2$

$\frac{d}{dK}$: $K\lambda^{K-1} = K(-1)^{K-1} = a_1 - 2a_2$

$\frac{d}{dK}$: $K(K-1)\lambda^{K-2} = K(K-1)(-1)^{K-2} = 2a_2$

$a_0 = f_0(K)$

$a_1 = f_1(K)$

$a_2 = f_2(K)$

$$\Rightarrow A^K = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3a_1 & 0 \\ 3a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -9a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -9a_2 \end{pmatrix}$$

$$A^K = \begin{pmatrix} f_0(K) - 9f_2(K) & -3f_1(K) & 0 \\ 3f_1(K) & f_0(K) - 9f_2(K) & 0 \\ 0 & 0 & f_0(K) - f_1(K) - 9f_2(K) \end{pmatrix}$$

سوال ۵) ۱)

$$\dddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -3x_3(t) - 3x_2(t) - x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u(t)$$

PARAMOUNT

سوال ۵-۲) روش تبدیل لاپلاس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$= sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 3 & s+3 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s(s^2 + 3s + 3) + 1 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s+1)^3$$

ماتریس کهاد $\rightarrow \begin{pmatrix} s^2+3s+3 & -1 & s \\ -s-3 & s^2+3s & 3s+1 \\ 1 & -s & s^2 \end{pmatrix}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \begin{pmatrix} s^2+3s+3 & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -3s-1 & s^2 \end{pmatrix} = \varphi(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \varphi(t) = L^{-1}(\varphi(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t}(t^2+2t+2) & te^{-t}+t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & -e^{-t}(t^2-t-1) & -\frac{1}{2}e^{-t}(t^2-2t) \\ \frac{1}{2}e^{-t}(t^2-2t) & e^{-t}(t^2-3t) & \frac{1}{2}e^{-t}(t^2-4t+2) \end{pmatrix}$$

ح س ۵) ۲) کسری مهران

$$Q(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda+1)^3=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1 \qquad e^{At}=a_0 I+a_1 A+a_2 A^2$$

$$R(\lambda)=e^{\lambda t}=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\begin{aligned} &\Rightarrow e^{-t}=a_0-a_1+a_2\\ &t e^{-t}=a_1-2a_2\\ &t^2 e^{-t}=2a_2 \Rightarrow \underbrace{a_2=\tfrac{1}{2}t^2 e^{-t}} \end{aligned}\right.$$

$$\underbrace{a_1=e^{-t}(t+t^2)} \Rightarrow a_0=e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{At}=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0\\ 0 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & a_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0\\ 0 & 0 & a_1\\ -a_1 & -3a_1 & -3a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2\\ -a_2 & -3a_2 & -3a_2\\ 3a_2 & 8a_2 & 6a_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ -a_2 & -3a_2+a_0 & -3a_2+a_1\\ 3a_2-a_1 & 8a_2-3a_1 & a_0-3a_1+6a_2\end{pmatrix}$$

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}+t+1\right) & e^{-t}(t^2+t) & \frac{1}{2}t^2e^{-t}\\ -\frac{1}{2}e^{-t}t^2 & e^{-t}(-t^2+t+1) & e^{-t}\left(-\frac{t^2}{2}+t\right)\\ e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}-t\right) & e^{-t}(t^2-3t) & e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}-3t+1\right)\end{pmatrix}$$

ح س ۵) ۲)

مقادیر ویژه

قطری جردن

یافتن مقادیر ویژه و بردار ویژه

$$\det(SI-A)=0 \qquad (S+1)^3=0$$

$$S_1=S_2=S_3=-1$$

$$(S_iI-A)v_i^0=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= -v_2 \\ v_2 &= -v_3 \\ v_1+3v_2+2v_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1^0$$

بردار ویژه اصلی

$$(A-S_1I)v_1^1=v_1^0 \Rightarrow \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} +v_1+v_2 &= 1 \\ +v_2+v_3 &= -1 \\ v_1+3v_2+2v_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1^1$$

$$(A-S_1I)v_1^2=v_1^1 \qquad \begin{pmatrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} +v_1+v_2 &= 3 \\ +v_2+v_3 &= -2 \\ v_1+3v_2+2v_3 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = v_1^2 .$$

$$\Rightarrow T^{-1}AT=\begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Subject. ۱۲-۵ روش قطری سازی Date. / /

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda$$

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{t^2}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 13 & 8 \\ -2 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t}(\frac{t^2}{2}+t+1) & e^{-t}(t^2+t) & \frac{1}{2}e^{-t}t^2 \\ -\frac{1}{2}e^{-t}t^2 & e^{-t}(-t^2+t+1) & e^{-t}(-\frac{t^2}{2}+t) \\ e^{-t}(\frac{t^2}{2}-t) & e^{-t}(t^2-4t) & e^{-t}(\frac{t^2}{2}-2t+1) \end{pmatrix}$$

ح س ۵) ۳)

$$X = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

e^{At}: از صفحه قبل

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

با محاسبه انتگرال $x(t)$ بدست خواهد آمد

وسپس از آنجا که

$$Y(t) = CX(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t)$$

$Y(t)$ نیز محاسبه خواهد شد

ج س ۵) ۳)

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y(t) \\ z_2 &= \dot{y}(t) + y(t) \\ z_3 &= \ddot{y}(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 + z_2 - z_1 \\ \dot{z}_3 = -3z_3 - 3z_2 + 2z_1 + u \end{cases}$$

$$T^{-1}AT = G$$

$$\dot{z}(t) = G\,z(t) + H\,u(t)$$

$x:$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$x = Tz = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$