تکلیف اول

مهدی حق‌وردی

۱۵ اسفند ۱۴۰۲

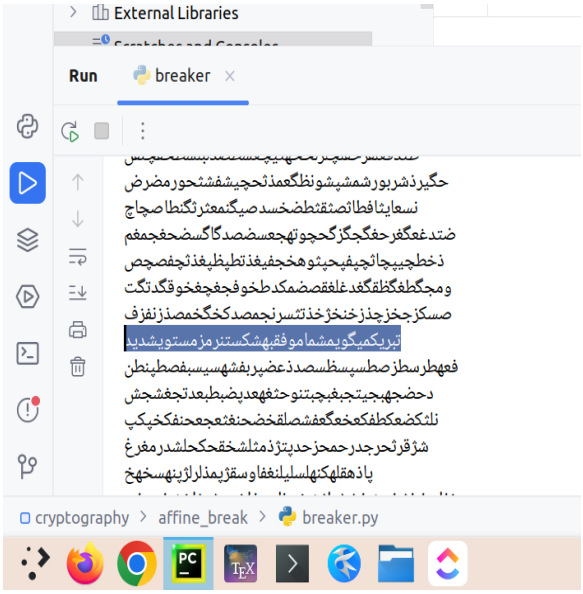
فهرست مطالب

چکیده

پاسخ‌های تمرین اول به ترتیب سوالات در قالب قسمت‌های نام برده در فهرست نوشته شده‌اند. تمامی کدها و فایل‌های پاسخ‌دهی **بعد از تمام شدن مهلت تمرین** روی گیت‌هاب push شده‌اند تا کسی از روی آنها ننویسد. اگر در پاسخی از منبعی استفاده شده است، لینکی از آن منبع در پانویس گذاشته شده است.

۱ سوال اول - شکستن متن شنود شده

متن شنود شده را توسط کدی که در اینجا[1] وجود دارد را با تمامی کلیدهای ممکن امتحان کردم و هر کدام از خروجی‌ها را بررسی کردم که به این رسیدم:



۱.۱ توضیحات کد

- `pre_needed.py`

مقادیری که این ماژول وجود دارند مقادیری مانند الفبای فارسی، تمام کلیدها و یک سری ثابت هستند که در برنامه برای رمزنگاری و رمزگشایی به آنها نیاز است.

- `functions.py`

توابعی که در این ماژول نوشته شده‌اند دو تابع `encode` و `decode` هستند که طبق فرمول‌های رمز مستوی نوشته شده‌اند.

- `breaker.py`

در این ماژول در حلقه‌ی `for` اول، متن رمزشده را با تمامی کلیدهای ممکن رمزگشایی کرده و نتیجه را پرینت می‌کنیم و سپس در خروجی به دنبال یک متن معنی دار می‌گردیم.

حالا برای پیدا کردن کلید هم می‌توانیم بین کلیدها بگردیم و آن کلیدی که متن با آن رمز شده را پیدا کنیم که آن کلید: `Key(a=5, b=3)` است.

[1] https://github.com/mahdihaghverdi/cryptography/tree/main/affine_break

۲ شکستن رمز ویجینر با دانستن طول کلید

۱. با انجام ندادن عملیات آنالیزی

اگر نخواهیم عملیات آنالیزی روی متن رمز شده انجام دهیم، order شکستن متن رمز شده باید $O(26^k)$ که در آن k طول کلید است را انجام داد. که در سوال $26^5 \Rightarrow k = 5$ می‌شود. [2]

۲. با انجام دادن عملیات آنالیزی

اما اگر بخواهیم باهوش باشیم و با انجام دادن عملیات آنالیزی روی متن رمز شده، آن را بشکنیم می‌توانیم با همین روش brute-force ولی با تعداد تلاش بسیار کمتری رمز را بشکنیم.

حالا که رمز ما ۵ حرف دارد، باید برای هر $\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ چنین کنیم:

$$p_i, p_{i+k}, p_{i+2k}, p_{i+3k}, \cdots \quad (۱)$$

انجام دهیم و متونی را از cipher text استخراج کنیم، سپس برای هر i روی حروفی که این i شامل می‌شود، آنالیز آماری انجام دهیم و حروفی که *ممکن* است برای کلید استفاده شده باشند را شناسایی کنیم و سپس با استفاده از تمامی جایگشت‌هایی که از حروف پیدا شده بدست می‌آیند، کلیدها را تک تک امتحان کنیم.

برای مثال چنین متن رمز شده‌ای داریم:

```
PPQCAXQVEKGYBNKMAZUYBNGBALJONITSZMJYIMVRAGVOHTVRAUCTKSGDDWUOXITLAZUVAVVRAZCVKBQPIWPOU
```

و $k = 4$ داده شده است (یا از طریق روش کاسیسکی پیدا شده است.)

حالا طبق رابطه‌ی ۱ برای هر یک از حروف کلید به ترتیب، متنش را استخراج می‌کنیم:

- $i = 0$

```
PPQCAXQVEKGYBNKMAZUYBNGBALJONITSZMJYIMVRAGVOHTVRAUCTKSGDDWUOXITLAZUVAVVRAZCVKBQPIWPOU
```

که می‌شود: PAEBABANZIAHAKDXAAAKIU

و به همین ترتیب برای

- $i = 1$: PXKNZNLIMMGTUSWIZVZBW
- $i = 2$: QQGKUGJTJVVVCGUTUVCQP
- $i = 3$: CVYMYBOSYRORTDOLVRVPO

حالا برای هر یک از متون بدست آمده یک تحلیل آنالیزی انجام می‌دهیم و حروفی که **ممکن** است بجای آن حرف باشند را پیدا میکنیم. برای مثال در مورد بالا چنین حروفی پیدا می‌شوند:

- $i = 0$: A, I, N, W, and X
- $i = 1$: I and Z

[2] from https://stackoverflow.com/a/29553484/19510840

- $i = 2$: C
- $i = 3$: K, N, R, V, and Y

که حالا فضای کلیدهای ما می‌شود: $5 \times 2 \times 1 \times 5 = 50$ که بسیار بسیار کمتر از 26^4 است و میتوانیم روی جایگشت‌های کلید با این حروف brute-force را اجرا کنیم.[3]

۳ سوال سوم

۱.۳ کلید از شماره دانشجویی

شماره دانشجویی: ۴۰۰۳۶۱۳۰۲۳ مقدار a در کلید رمز مستوی باید معکوس ضربی داشته باشد، که هم در فارسی و هم در انگلیسی عدد ۲ معکوس ضربی ندارد (چون زوج است و نسبت به ۲۶ و یا ۳۲ اول نیست.) پس دو رقم آخر شماره دانشجویی من نمی‌توانند یک کلید برای رمز مستوی باشند.

۲.۳ رمزگشایی یک متن رمز شده با دو حرف آشکار

طبق صورت سوال: $M \to P$ و $A \to J$ و

$$C_i = E_k(P_i) = aP_i + b \bmod 26 \tag{۲}$$

پس:

$$12a + b \overset{26}{\equiv} 15$$
$$b \overset{26}{\equiv} 9 \Rightarrow b = 9, a = 7$$

برای محاسبه‌ی معکوس ضربی عدد ۷ چنین می‌کنیم:

$$a^{\Phi(26)-1} \bmod 26 \Rightarrow 7^{11} \overset{26}{\equiv} 15$$

و حالا طبق فرمول

$$P_i = D_k(C_i) = (C_i - b) \times a^{-1} \bmod 26 \tag{۳}$$

متن رمز شده را رمزگشایی می‌کنیم:

- $Y = 24 \to (24 - 9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 17 \to R$
- $Z = 25 \to (25 - 9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 6 \to G$
- $Q = 16 \to (16 - 9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 1 \to B$
- $L = 11 \to (11 - 9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 4 \to E$

[3] from https://inventwithpython.com/hacking/chapter21.html

- $S = 18 \rightarrow (18-9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 5 \rightarrow F$
- $A = 0 \rightarrow (0-9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 21 \rightarrow V$
- $P = 15 \rightarrow (15-9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 12 \rightarrow M$
- $J = 9 \rightarrow (9-9) \times 15 \overset{26}{\equiv} 0 \rightarrow A$

پس متن اصلی: RGBEFVMA بوده است.

۴ معکوس ماتریس در $\mathbb{Z}_{26}$

۱.۴ 2x2

ماتریس معکوس $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ را در پیمانه‌ی ۲۶ بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (2 \times 5) - (9 \times 5) = -31 \overset{26}{\equiv} 17 \rightarrow 17^{-1} = 23$$

$$\det(A)^{-1} \cdot \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 23 \times 5 & 23 \times (-5) \\ 23 \times (-9) & 23 \times 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$$

۲.۴ 3x3

ماتریس معکوس $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 \\ 4 & 23 & 2 \\ 17 & 15 & 9 \end{pmatrix}$ را در پیمانه‌ی ۲۶ بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 12 \\ 4 & 23 & 2 \\ 17 & 15 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 17 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 23 \\ 17 & 15 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 17 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 17 & 15 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 23 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 4 & 23 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 7 \\ 3 & 13 & 16 \\ 6 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 21 & 3 & 6 \\ 24 & 13 & 20 \\ 7 & 16 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= (1 \times \begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 15 & 9 \end{vmatrix}) + (-11 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 17 & 9 \end{vmatrix}) + (12 \times \begin{vmatrix} 4 & 23 \\ 17 & 15 \end{vmatrix}) \\ &= (1 \times 21) + (-11 \times 2) + (12 \times 7) = 83 \overset{26}{\equiv} 5 \rightarrow 5^{-1} = 21\end{aligned}$$

$$\det(A)^{-1} \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 21 \times 21 & 21 \times 3 & 21 \times 6 \\ 21 \times 24 & 21 \times 13 & 21 \times 20 \\ 21 \times 7 & 21 \times 16 & 21 \times 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 11 & 22 \\ 10 & 13 & 4 \\ 17 & 24 & 1 \end{pmatrix}$$