جواب سوال ۹

صورت پرسش:
یک شبکه‌عصبی دو لایه را در نظر بگیرید که ورودی‌های آن از فضای دوبعدی $\mathbb{R}^2$ هستند. هدف این است که این فضا به m ناحیهٔ مجزا تقسیم شود. حداقل چند نورون در لایهٔ پنهان لازم است تا این تقسیم‌بندی ممکن شود؟

پاسخ:
برای تقسیم $\mathbb{R}^2$ به m ناحیهٔ مجزا با یک شبکهٔ دو لایه، باید k نورون در لایهٔ پنهان داشته باشیم به طوري که حداکثر تعداد ناحیه‌هاي ایجادشده توسط k خط برابر باشد با:

$$N(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

پس باید عدد k کمترین عدد صحیح باشد که

$$N(k) \geq m \quad \Longrightarrow \quad \frac{k(k+1)}{2} + 1 \geq m.$$

با حل این نامعادله، خواهیم داشت:

$$k^2 + k - 2(m-1) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad k \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(m-1)}}{2}.$$

بنابراین حداقل تعداد نورون‌هاي لایهٔ پنهان:

$$k = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{8m-7}}{2} \right\rceil.$$

اثبات فرمول حداکثر تعداد ناحیه‌ها با استفاده از استقرا:

قضیه: با k خط در صفحه حداکثر $N(k) = k(k+1)/2 + 1$ ناحیه متناظر ایجاد مي‌شود.

پایهٔ استقرا ($k = 0$): با صفر خط در صفحه، تمام صفحه یک ناحیهٔ یکپارچه است. بنابراین

$$N(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} + 1 = 1,$$

که صحیح است.

فرض استقرا: فرض کنیم براي k خط، فرمول

$$N(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

برقرار باشد.

گام استقرا ($k \to k+1$): اگر یک خط تازه به مجموعهٔ k خط اضافه کنیم، این خط جدید با هر یک از k خط قبلي در یک نقطه تلاقی مي‌کند، بنابراین در مجموع k نقطهٔ تلاقی ایجاد مي‌شود. این k نقطه، خط جدید را به $k+1$ قطعه تقسیم مي‌کند. هر قطعه یک ناحیهٔ جدید ایجاد مي‌کند. بنابراین:

$$N(k+1) = N(k) + (k+1).$$

با جاگذاري فرض استقرایي داریم:

$$N(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

بنابراین فرمول براي $k+1$ نیز برقرار است.

این اثبات کامل است و نتیجه مي‌دهد که براي تقسیم $\mathbb{R}^2$ به m ناحیه، حداقل

$$\left\lceil \frac{-1+\sqrt{8m-7}}{2} \right\rceil$$

نورون در لایهٔ پنهان نیاز داریم.