

## جواب سوال ۹

صورت پرسش:

یک شبکه عصبی دو لایه را در نظر بگیرید که ورودی‌های آن از فضای دوبعدی  $\mathbb{R}^2$  هستند. هدف این است که این فضا به  $m$  ناحیه مجزا تقسیم شود. حداقل چند نورون در لایه پنهان لازم است تا این تقسیم‌بندی ممکن شود؟

پاسخ:

برای تقسیم  $\mathbb{R}^2$  به  $m$  ناحیه مجزا با یک شبکه دو لایه، باید  $k$  نورون در لایه پنهان داشته باشیم به طوری که حداکثر تعداد ناحیه‌های ایجاد شده توسط  $k$  خط برابر باشد با:

$$N(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

پس باید عدد  $k$  کمترین عدد صحیح باشد که

$$N(k) \geq m \implies \frac{k(k+1)}{2} + 1 \geq m.$$

با حل این نامعادله، خواهیم داشت:

$$k^2 + k - 2(m-1) \geq 0 \implies k \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(m-1)}}{2}.$$

بنابراین حداقل تعداد نورون‌های لایه پنهان:

$$k = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{8m-7}}{2} \right\rceil.$$

اثبات فرمول حداکثر تعداد ناحیه‌ها با استفاده از استقرا:

قضیه: با  $k$  خط در صفحه حداکثر  $N(k) = k(k+1)/2 + 1$  ناحیه متناظر ایجاد می‌شود.

پایه استقرا ( $k=0$ ): با صفر خط در صفحه، تمام صفحه یک ناحیه یکپارچه است. بنابراین

$$N(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} + 1 = 1,$$

که صحیح است.

فرض استقرا: فرض کنیم برای  $k$  خط، فرمول

$$N(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

برقرار باشد.

**گام استقرا**  $(k \rightarrow k+1)$ : اگر یک خط تازه به مجموعه  $k$  خط اضافه کنیم، این خط جدید با هر یک از  $k$  خط قبلی در یک نقطه تلاقی می‌کند، بنابراین در مجموع  $k$  نقطه تلاقی ایجاد می‌شود. این  $k$  نقطه، خط جدید را به  $k+1$  قطعه تقسیم می‌کند. هر قطعه یک ناحیه جدید ایجاد می‌کند. بنابراین:

$$N(k+1) = N(k) + (k+1).$$

با جاگذاری فرض استقرایی داریم:

$$N(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

بنابراین فرمول برای  $k+1$  نیز برقرار است.

این اثبات کامل است و نتیجه می‌دهد که برای تقسیم  $\mathbb{R}^2$  به  $m$  ناحیه، حداقل

$$\left\lceil \frac{-1 + \sqrt{8m-7}}{2} \right\rceil$$

نورون در لایه پنهان نیاز داریم.