7 novembre 2016

Feuille d'Exercices « Rappels de cours »

Exercice 1 : Résolution d'équations
Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 40 = 0$
2. $6x^4 - 5x^3 - 4x^2 = 0$
3. $4x^6 + 10x^5 + x^4 = 0$
4. $x^7 + 6x^4 - 16x = 0$ (Astuce : racine évidente + changement de variables)
5. $x^{1/2} - 8x^{1/4} - 15 = 0$
6. $\frac{x}{4x+5} + \frac{3x}{x-8} = 0$

Exercice 2 : Équations exponentielles et logarithmiques
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $12 + 5\exp(10x - 7) = 15$
2. $4\exp(2x + x^2) - 7 = 2$
3. $4x^2 - 3x^2\exp(2 - x) = 0$ (Astuce : factoriser)
4. $16 + 4\ln(x + 2) = 7$
5. $\ln 3x + 1 - \ln x = -2$
6. $2\ln(x) - \ln(x^2 + 4x + 1) = 0$
7. $11 - 5^{9x-1} = 3$
8. $1 + 3^{x^2-2} = 5$

Exercice 3 : Résolution d'équations
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x + e^{-x} = 2$
2. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $x^2 - 3x + 4 + \frac{8-6x}{x^2-2} = 0$

Exercice 4 : Résolution d'inéquations
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(3x) < \ln(2x)$
2. $3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8$
3. $5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$
4. $\sqrt{x} \geq x + 1$

Exercice 5 : Injections, surjections, bijections
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des injections/surjections/bijections ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par $f(x) = e^x$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$
4. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor \text{ si } n \text{ pair} \\ -\lfloor n/2 \rfloor \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

Exercice 6 : Récurrence
Montrer les formules closes suivantes par récurrence :

1. $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $q \in \mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 7 : Équations trigonométriques
Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les équations trigonométriques suivantes :

1. $10\cos(8\theta) = -5$
2. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$
3. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$ dans $[0, 16\pi]$
4. $10 + 7\tan(4\theta) = 3$ dans $[-\pi, 0]$.
5. $3 - 4\sin(4\theta) = 5$ dans $[-3\pi/2, -\pi/2]$

Exercice 8 : Quantificateurs
Considérons les propositions suivantes :

$$(P) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
$$(Q) \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in (a-\delta, a+\delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

1. De « qui » parlent ces propositions ? En particulier, quels paramètres nécessitent un contexte ?
2. L'une des propositions implique-t-elle l'autre ? Sont-elles équivalentes ?
3. Donner la négation des deux propositions.
4. Que signifient ces propositions (en langage naturel) ?