Feuille d'Exercices « Rappels de cours »

Exercice 1: Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes :

1.
$$x^2 + 3x + 40 = 0$$

2.
$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 = 0$$

3.
$$4x^6 + 10x^5 + x^4 = 0$$

4.
$$x^7 + 6x^4 - 16x = 0$$
 (Astuce : racine évidente + changement de variables)

5.
$$x^{1/2} - 8x^{1/4} - 15 = 0$$

6.
$$\frac{x}{4x+5} + \frac{3x}{x-8} = 0$$

Exercice 2: Équations exponentielles et logarithmiques

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1.
$$12 + 5 \exp(10x - 7) = 15$$

2.
$$4\exp(2x+x^2)-7=2$$

3.
$$4x^2 - 3x^2 \exp(2 - x) = 0$$
 (Astuce : factoriser)

4.
$$16 + 4\ln(x+2) = 7$$

5.
$$\ln 3x + 1 - \ln x = -2$$

6.
$$2\ln(x) - \ln(x^2 + 4x + 1) = 0$$

7.
$$11 - 5^{9x-1} = 3$$

8.
$$1 + 3^{x^2-2} = 5$$

Exercice 3: Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb R$ les équations suivantes :

1.
$$e^x + e^{-x} = 2$$

2.
$$(\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$$

3.
$$x = \sqrt{x} + 2$$

4.
$$x^2 - 3x + 4 + \frac{8 - 6x}{x^2 - 2} = 0$$

Exercice 4: Résolution d'inéquations

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1.
$$\ln(3x) < \ln(2x)$$

2.
$$3 \times 2^{3x-4} \ge 7^8$$

3.
$$5\left(\frac{1}{3}\right)^x \le 10^{-10}$$

4.
$$\sqrt{x} \ge x + 1$$

Exercice 5: Injections, surjections, bijections

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des injections/surjections/bijections?

1.
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 définie par $f(x) = e^x$

2.
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
 définie par $f(x) = e^x$

3.
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
 définie par $f(x) = x^2$

4.
$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
 définie par $f(x) = x^2$

5.
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
 définie par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

6.
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
 définie par $f(n) = 2n$

7.
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
 définie par $f(n) = \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor \text{ si } n \text{ pair } -\lfloor n/2 \rfloor \text{ si } n \text{ impair } \end{cases}$

Exercice 6: Récurrence

Montrer les formules closes suivantes par récurrence :

1.
$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.
$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.
$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
 pour tout $q \in \mathbb{R} - \{1\}$

Exercice 7: Équations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb R$ (sauf mention explicite du contraire) les équations trigonométriques suivantes :

1.
$$10\cos(8\theta) = -5$$

2.
$$2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$$

3.
$$2\sin(\theta/4) = \sqrt{3} \text{ dans } [0, 16\pi]$$

4.
$$10 + 7\tan(4\theta) = 3 \text{ dans } [-\pi, 0].$$

5.
$$3 - 4\sin(4\theta) = 5 \text{ dans } [-3\pi/2, -\pi/2]$$

Exercice 8: Quantificateurs

Considérons les propositions suivantes :

$$(P)\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$(Q)\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall \varepsilon > 0, \forall x \in (a - \delta, a + \delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- 1. De « qui » parlent ces propositions ? En particulier, quels paramètres nécessitent un contexte ?
- 2. L'une des propositions implique-t-elle l'autre ? Sont-elles équivalentes ?
- 3. Donner la négation des deux propositions.
- 4. Que signifient ces propositions (en langage naturel)?