7 novembre 2016

Test “Remise en forme”: corrigé

Exercice 1 : Équation
Résoudre les équations (en $x \in \mathbb{R}$) suivantes :

$$\frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{|x+1|} = 3$$

On raisonne par équivalence.

$$\frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lfloor x+1 \rfloor = 2 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$

et

$$\sqrt{|x+1|} = 3 \Leftrightarrow |x+1| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 & = 9 \\ x+1 & = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 8 \\ x & = -10 \end{cases}$$

Exercice 2 : Inéquations
Résoudre les inéquations (en $x \in \mathbb{R}$) suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 10^{-x} & \leq & 1/2^{10} \\ \exp(3x+4) & \geq & 10 \end{array}$$

On raisonne par équivalence en appliquant les fonctions $\log$ ou $\ln$ qui sont croissantes sur $\mathbb{R}_+^\star$.

$$10^{-x} \leq 1/2^{10} \Leftrightarrow -x \leq \log(1/2^{10}) \Leftrightarrow x \geq -10\log(1/2) \Leftrightarrow x \geq 10\log(2)$$

et

$$\exp(3x+4) \geq 10 \Leftrightarrow 3x+4 \geq \ln(10) \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln(10)-4}{3}$$

Exercice 3 : Majorant, Minorant, etc
On considère l’ensemble $S = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

1. S est-il majoré ? Si oui, donner $\sup(S)$. $\sup(S)$ est-il un élément de S ?
2. S est-il minoré ? Si oui, donner $\inf(S)$. $\inf(S)$ est-il un élément de S ?

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$1 \leq n < +\infty \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

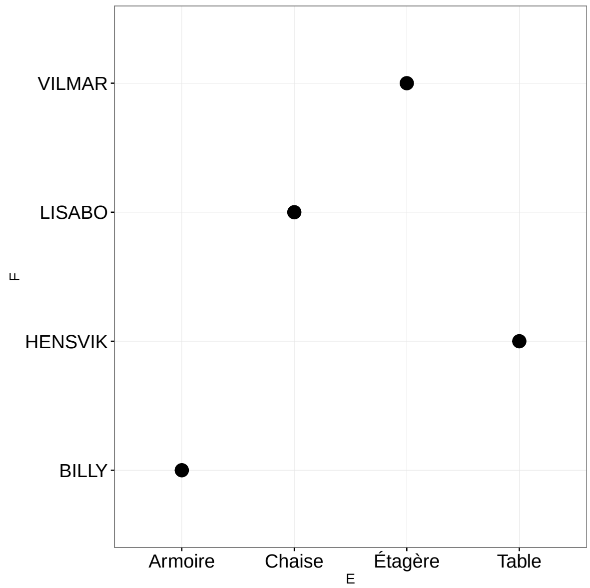
Donc S est minoré par 0 et majoré par 1. $1 = \frac{1}{1}$ est un élément de S, c'est donc son maximum et aussitôt sa borne supérieure. Montrons que $\inf(S) = 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que ce n'est pas le cas. Il existe alors un minorant m de S tel que $m > 0$. Soit $n = \lfloor \frac{1}{m} \rfloor + 2$. Par définition, $n \geq \frac{1}{m} - 1 + 2 > \frac{1}{m}$ et on a donc $\frac{1}{n} < m$, ce qui est absurde puisque $1/n \in S$ et m est censé être un minorant de S. On déduit que $\inf(S) = 0$. Et 0 n'est pas un élément de S puisqu'il n'existe aucun entier n tel que $\frac{1}{n} = 0$.

Exercice 4 : Injection, Surjection, Bijection
On considère les ensembles

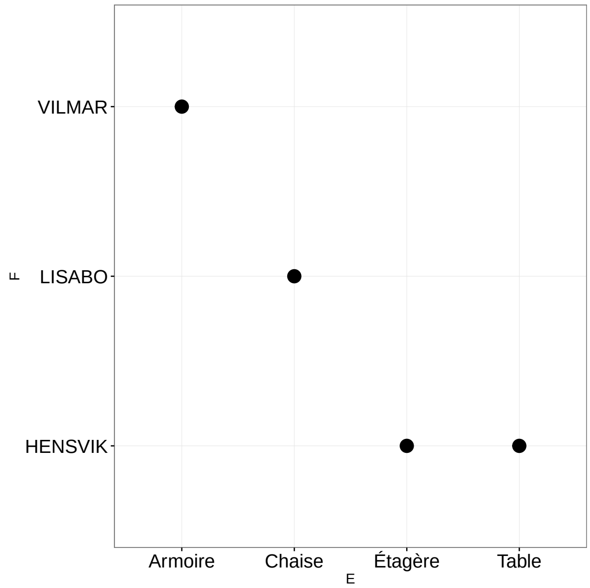
— $E = \{\text{Table}, \text{Chaise}, \text{Armoire}, \text{Étagère}\}$
— $F = \{\text{HENSVIK}, \text{LISABO}, \text{BILLY}, \text{VILMAR}\}$.

1. Donner un exemple de bijection de E dans F.
2. On enlève BILLY de F. Peut-on encore construire une injection, une surjection, une bijection de E dans F ?
3. On enlève Armoire de E. Peut-on encore construire une injection, une surjection, une bijection de E dans F ?

1. On peut construire de nombreuses bijections de E dans F. En voici une (on représente le graphe de la fonction).



2. Si on enlève BILLY de F, on peut encore construire des surjections (voir exemple suivant) mais plus d'injections : il y a au plus 3 images dans F pour 4 antécédents dans E donc 2 éléments de E auront forcément la même image.



3. Si on enlève Armoire de E, on peut encore construire des injections (voir exemple suivant) mais plus de surjections : les 3 éléments de E ont au plus 3 images alors qu'il y a 4 éléménts dans F, certains ne peuvent donc pas avoir pas d'antécédents.