29 novembre 2016

Devoir Maison « Binôme de Newton »

Le but de ce devoir maison est de vous familiariser avec la formule du binôme de Newton et les notions qui tournent autour : Triangle de Pascal et coefficients binomiaux. On reverra les coefficients binomiaux en combinatoire (une branche des mathématiques qui sert à "compter"). **À l'issue du DM, la formule du triangle de Pascal et celle du binôme de Newton sont à connaître**.

Définition 1 *Soit n et k deux entiers. On appelle coefficients binômial (n,k) le nombre :*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & si \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & si \ k < 0 \ ou \ k > n \end{cases}$$

Proposition 2 *On verra plus tard que $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n. Autrement dit, si E est un ensemble à n éléments, il existe $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments.*

On rappelle la convietion $0! = 1$.

Théorème 3 ***Binôme de Newton*** *Soit n un entier et a et b deux nombres complexes. On a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 1 : Triangle de Pascal
Montrer l'égalité suivante dite du triangle de Pascal (directement, une récurrence n'est pas nécessaire) :

1. $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Exercice 2 : Quelques propriétés des coefficients binômiaux
Montrer les égalités suivantes (directement, une récurrence n'est pas nécessaire).

1. $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
2. $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 3 : Valeurs particulières
Montrer les égalités suivantes

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 4 : Démonstration de de la formule du binôme de Newton
On va démontrer la formule du binôme de Newton par récurrence. On note $P(n)$ la proposition $\forall (a,b) \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

1. **Initialisation** Montrer que $P(0)$ est vraie. On rappelle la convention $a^0 = 1$.

2. **Hérédité** On suppose $P(n)$ et on veut montrer $P(n+1)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k}$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{j} b^{n+1-j}$$

4. En déduire le coefficient de $a^k b^{n+1-k}$ dans $(a+b)^{n+1}$. On pourra traiter séparément les cas a^{n+1} et b^{n+1} d'un côté et le cas général $a^k b^{n+1-k}$ $(1 \leq k \leq n)$ de l'autre. Le triangle de Pascal et les valeurs particulières des coefficients binômiaux peuvent s'avérer utiles.
5. Conclure

Exercice 5 : Applications

Soit n, p deux entiers naturels tels que $p \leq n$

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ On pourra essayer de reconnaître un binôme de Newton.
2. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ (difficile)