8 novembre 2016

Exercices « Formules trigonométriques »

Exercice 1 : Formule de factorisation
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, l'exponentielle complexe est définie de la façon suivante :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On admet (pour l'instant) que l'exponentielle complexe vérifie les propriétés usuelles de l'exponentielle :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, e^{i(a+b)} = e^{ia} + e^{ib}$$

1. En utilisant la formule de l'exponentielle complexe, montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

2. Soit p, q, x, y des réels. Résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} p & = x + y \\ q & = x - y \end{cases}$$

3. À l'aide du système précédent, exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et de $\cos(a-b)$. Faire de même avec $\sin(a)\sin(b)$. On pourra poser $x = \cos(a)\cos(b)$, $y = \sin(a)\sin(b)$ et choisir p et q astucieusement.
4. Exprimer $\sin(a)\cos(b)$ en fonction de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$. Faire de même avec $\cos(a)\sin(b)$.

Exercice 2 : arcsin

On cherche à calculer $X = \arcsin\left(-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

2. Appliquer la formule précédente à $x = \frac{\pi}{8}$.
3. En déduire la valeur de X.
4. (Vérifier que vous n'avez pas fait de fautes, par exemple avec une calculatrice).