12 décembre 2016

Exercices « Limite et Continuité »

Exercice 1 : Limite

— En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$

— En déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

Exercice 2 : A propos de x^n

Soit x, a deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

— Montrer que $x^n - x^a = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$

— En déduire $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de $x \mapsto x^n$ en a)

On rappelle quelques limites classiques (les deux dernières sont dites de **croissance comparée**) :

— $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

— $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

— $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

— $\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice 3 : Théorèmes d'opérations

En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :

— $\lim_{x\to\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$

— $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$

— $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$

— $\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

— $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty$

— $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 1$

— $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$

— $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

— $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

Exercice 4 : Théorèmes d'opérations (bis)

Montrer les limites suivantes

$\lim\limits_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty$	$\lim\limits_{+\infty} x\ln(1+1/x) = 1$
$\lim\limits_{0+} \dfrac{\ln(1+4x)}{x} = 4$	$\lim\limits_{0+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{0+} \dfrac{x}{e^{x^2}-1} = +\infty$
$\lim\limits_{0+} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1} = 1$	$\lim\limits_{0+} \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 0$	$\lim\limits_{0+} \dfrac{x}{2}\lfloor\dfrac{3}{x}\rfloor\dfrac{3}{2}$
$\lim\limits_{1} \dfrac{x^n-1}{x^p-1} = \dfrac{n}{p}$	$\lim\limits_{0} \dfrac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = 1$	$\lim\limits_{+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim\limits_{0+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{+\infty} x^3\ln(1+1/x\sqrt{x}) = +\infty$	$\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \dfrac{1}{2}$

Exercice 5 : Limite et fonction périodique

On considère f une fonction périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 6 : Limites en 0

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire) :

$\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$
$\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$	$\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$
$(\ln(e+x))^{1/x}$	$\tan(x)\ln(\sin(x))$
$\dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$	$\left(x\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)}$
$\dfrac{e^{1/(x^2+1)}-e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$	

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

$\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$	$\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$
$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$
$x\sin(\pi/x)$	$\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$
$\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$	$\ln(3x^2-4)-\ln(x^2-1)$
$\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$	$\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x}$
$\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$	$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$