27 janvier 2020

Feuille d'exercices « Dérivées Partielles »

Exercice 1 : Fonctions exponentielles
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^x$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

- Pour y_0 fixé, calculer la limite de $x \mapsto f(x, y_0)$ en 0.
- Pour x_0 fixé, calculer la limite de $y \mapsto f(x_0, y)$ en 0.
- Calculer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

- Pour y_0 fixé,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + y_0^2}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } y_0 = 0 \\ +\infty & \text{si } y_0 \neq 0 \end{cases}$$
.
- Pour x_0 fixé et différent de 0
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{x_0^2 + y^2}{x_0} = x_0$$
.
- Les dérivées partielles sont données en dérivants les fonctions partielles, comme vu en cours. On a donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}{dx} = 2x - \frac{y^2}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}{dy} = \frac{2y}{x}$$

Exercice 2 : Composées
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire dont toutes les dérivées partielles existent et sont continues). On considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$
Montrer que
$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$
On va calculer les dérivées partielles de g à partiel des différentielles totales en identifiant les termes. On pose $u = (x - y)$, $v = y - z$ et $w = z - x$. On alors
$$\begin{aligned} dg =& df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw \\ =& \frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right] \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right] \\ &+ \frac{\partial f}{\partial w}\left[\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial w}dz\right] \\ =& \frac{\partial f}{\partial u}[dx - dy] + \frac{\partial f}{\partial v}[dy - dz] + \frac{\partial f}{\partial w}[dz - dx] \\ =& \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}\right]dx + \left[\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right]dy + \left[\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v}\right]dz \end{aligned}$$

Par identification

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial w} \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u}$$

d'où on déduit le résultat.

Exercice 3 : Dérivée d'ordre 2
Calculer les dérivées partielles aux ordres 1 et 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$$

Exercice 4 : Dérivée d'ordre 2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est à dire dont les dérivées secondes existent et sont continues) telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = -f(y,x)$.

— Donner un exemple de telle fonction
— Montrer que la fonction f vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Les fonctions suivantes $f(x,y) = x - y$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, $f(x,y) = \ln(|x/y|)$ pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$ vérifient toute l'égalité.
La difficulté principale de l'exercice consiste à ne pas confondre le x de ∂x (dérivée partielle par rapport à la première coordonnée) et le x comme variable muette qui désigne un nombre réel. Pour éviter de se tromper, on va considérer que f est une fonction de u et v (avec $u = x$ et $v = y$) et réserver les notations ∂x et ∂y pour les dérivées partielles par rapport aux première et deuxième coordonnée.
On sait que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(u,v) = -f(v,u)$. En dérivant cette relation par rapport à v et en se ramenant à la définition des dérivées partielles on obtient :

$$f(u,v) = -f(v,u) \Rightarrow \frac{d[f(u,v)]}{dv} = -\frac{d[f(v,u)]}{dv} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(v,u)$$

En dérivant la relation ainsi obtenu par rapport à u on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(v,u) \Rightarrow \frac{d\left[\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\right]}{du} = -\frac{d\left[\frac{\partial f}{\partial x}(v,u)\right]}{du} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(v,u)$$

D'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(v,u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(v,u)$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(v,u)$$

En particulier, pour $u = v = a$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a)$ qui ne peut être vrai que si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a) = 0$$

Exercice 5 : Contrainte
On considère une casserole de rayon R et de hauteur h. On note V le volume de la casserole et S sa surface.

— Exprimer V et S en fonction de R et h.
— Calculer les différentielles totales dV et dS.

— On suppose que le volume est fixe ($V = V_0$). Trouver une relation entre dh et dR.
— En déduire une expression simple de dS en fonction de dh ou dR (un seul des deux, celui qui vous semble le plus simple)
— En déduire les couples (h, R) qui annulent dS.

Les différentes étapes de l'exercice précédent permettent de minimiser la surface à volume constant sans jamais donner la forme explicite de S en fonction de R. C'est une approche différente de celle vue au S1 pour le même exercice, qui consistait à substituer h à R dans l'expression de R. Ici on subsitue les différentielles.