7 Octobre 2019

Feuille d'Exercices « Révisions générales »

Exercice 1 : Résolution d'équations
Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 3x + 40 = 0$. Il s'agit d'une équation de dégré 2 standard qu'on peut résoudre avec la méthode du discriminant : $\Delta = -151 < 0$. L'équation n'a donc pas de solutions réelles.
2. $6x^4 - 5x^3 - 4x^2 = 0$ On constate facilement que $x = 0$ est solution et qu'on peut factoriser le polynôme par x^2 pour obtenir la forme équivalente $x^2(6x^2 - 5x - 4) = 0$. En utilisant la méthode du dsicriminant, les racines de $6x^2 - 5x - 4$ sont $-1/2$ et $4/3$. Les solutions de l'équation de départ sont donc $-1/2, 0, 4/3$.
3. $4x^6 + 10x^5 + x^4 = 0$ Comme dans la question précédente, $x = 0$ est solution et on peut cette fois factoriser par x^4 pour obtenir la forme équivalente $x^4(4x^2 + 10x + 1) = 0$. En utilisant la méthode du dsicriminant, les racines de $4x^2 - 10x + 1$ sont $(-5 + \sqrt{21})/4$ et $(-5 - \sqrt{21})/4$. Les solutions de l'équation de départ sont donc $-(5 + \sqrt{21})/4, (-5 + \sqrt{21})/4, 0$.
4. $x^7 + 6x^4 - 16x = 0$ Ici encore, $x = 0$ est solution évidente et on peut se ramener à la forme équivalente $x(x^6 + 6x^3 - 16) = 0$. On est donc amené à résoudre l'équation $x^6 + 6x^3 - 16 = 0$. En faisant le changement de variable $X = x^3$, on obtient $X^2 + 6X - 16$ dont les solutions sont $X_1 = 2$ et $X_2 = -8$. Il nous reste juste à résoudre $x^3 = 2$ et $x^3 = -8$ dont les solutions respectives sont $x = \sqrt[3]{2}$ et $x = -2$. Au final, les solutions de l'équation de départ sont donc $-2, 0, \sqrt[3]{2}$
5. $x^{1/2} - 8x^{1/4} - 15 = 0$ On pose cette fois-ci $X = \sqrt[4]{x}(= x^{1/4})$ pour se ramener à l'équation de degré 2 suivante : $X^2 - 8X - 15 = 0$. Ses solutions sont $X_1 = 4 + \sqrt{31}$ et $X_2 = 4 - \sqrt{31}$. Il nous reste juste à résoudre $\sqrt[4]{x} = X_1$ et $\sqrt[4]{x} = X_2$. Comme $X_2 < 0$, l'équation $\sqrt[4]{x} = X_2$ n'a pas de solutions. L'équation $\sqrt[4]{x} = X_1$ a quand à elle pour solution $x = (X_1)^4 = 4193 + 752\sqrt{31}$ qui est donc la seule solution de l'équation de départ.
6. $\frac{x}{4x+5} + \frac{3x}{x-8} = 0$ On commence par réduire tout le monde au même dénominateur pour aboutir à $(13x^2 + 7x)/(4x + 5)(x - 8) = 0$. On vérifie que $x = 8$ et $x = -5/4$ ne sont pas solutions. L'équation est donc équivalente à $13x^2 + 7x = 0$ dont les solutions sont $x = 0$ et $x = -7/13$.

Exercice 2 : Équations exponentielles et logarithmiques
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $12 + 5\exp(10x - 7) = 15 \Leftrightarrow \exp(10x - 7) = 3/5 \Leftrightarrow 10x - 7 = \ln(3/5) \Leftrightarrow x = \frac{7+\ln(3/5)}{10}$
2. $4\exp(2x + x^2) - 7 = 2 \Leftrightarrow \exp(2x + x^2) = 9/4 \Leftrightarrow 2x + x^2 - \ln(9/4) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1 + \ln(9/4)}$
3. $4x^2 - 3x^2\exp(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x^2(4 - 3\exp(2 - x)) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 4 - \exp(2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = \ln(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 - \ln(4) \end{cases}$$

4. $16 + 4\ln(x + 2) = 7 \Leftrightarrow \ln(x + 2) = -9/4 \Leftrightarrow x + 2 = \exp(-9/4) \Leftrightarrow x = \exp(-9/4) - 2$. On vérifie aussi que la solution ainsi trouvée vérifie $x > 2$ et donc que $\ln(x + 2)$ est bien défini.

5. $\ln(3x+1) - \ln x = -2$ Le membre de gauche n'est défini que si $3x+1>0$ et $x>0$, c'est à dire $x>0$. Pour $x>0$,

$$\ln(3x+1) - \ln x = -2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right) = -2 \Leftrightarrow 3x+1 = xe^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3-e^{-2}}.$$

La solution ainsi trouvée est négative ce qui contredit $x>0$. L'équation de départ n'a donc pas de solution.

6. $2\ln(x) - \ln(x^2+4x+1) = 0$ Le membre de gauche n'est défini que si $x>0$ et $x^2+4x+1>0$, c'est à dire $x>0$ (on peut vérifier que la deuxième inégalité est vraie dès que la première l'est. Pour $x>0$,

$$2\ln(x) - \ln(x^2+4x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(x^2+4x+1) \Leftrightarrow 4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/4.$$

La solution ainsi trouvée est négative ce qui contredit $x>0$. L'équation de départ n'a donc pas de solution.

7. $11 - 5^{9x-1} = 3 \Leftrightarrow e^{(9x-1)\ln 5} = 8 \Leftrightarrow (9x-1)\ln 5 = \ln 8 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}\left(1+\frac{\ln 8}{\ln 5}\right)$
8. $1 + 3^{x^2-2} = 5 \Leftrightarrow e^{(x^2-2)\ln 3} = 4 \Leftrightarrow (x^2-2)\ln 3 = \ln 4 \Leftrightarrow x = \pm\left(2+\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)$

Exercice 3 : Résolution d'équations
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x + e^{-x} = 2$
2. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $x^2 - 3x + 4 + \frac{8-6x}{x^2-2} = 0$

Vu en cours

Exercice 4 : Résolution d'inéquations
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(3x) < \ln(2x)$ L'équation n'est définie que pour $x>0$. Pour $x>0$, on a $\ln(3x) < \ln(2x) \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 2$ qui n'a évidemment pas de solutions.
2. $3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8$ Les deux membres de l'inéquation sont positifs (pour toute valeur de x). On peut composer par le logarithme pour obtenir $3 \times 2^{3x-4} \geq 7^8 \Leftrightarrow e^{(3x-4)\ln 2} = 7^8 \Leftrightarrow (3x-4)\ln 2 = 8\ln 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\left(4+\frac{8\ln 7}{\ln 2}\right)$
3. $5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$ Les deux membres de l'inéquation sont positifs (pour toute valeur de x). On peut composer par le logarithme pour obtenir $5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10} \Leftrightarrow -x\ln 3 + \ln 5 \leq -10\ln 10 \Leftrightarrow x \geq \frac{10\ln 10 - \ln 5}{\ln 3}$
4. $\sqrt{x} \geq x+1$ Le terme de gauche de l'inéquation n'est définie que pour $x \geq 0$. Pour $x \geq 0$, les deux membres de l'inéquation sont dans $\mathbb{R}_+$ et on peut composer par $x \mapsto x^2$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\sqrt{x} \geq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq (x+1)^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

. L'équation $x^2+x+1=0$ n'a pas de solutions ($\Delta = -3 < 0$) et un tableau de variations montre que $x^2+x+1>0$ pour tout $x \geq 0$. L'inéquation n'a donc pas de solution.

Exercice 5 : Injections, surjections, bijections
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des injections/surjections/bijections ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ f est une injection ($e^x = e^y \Rightarrow x = y$) mais pas une surjections ($f(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$).
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par $f(x) = e^x$ f est une bijection. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = y$ a une et une seule solution ($x = \ln y$)
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ f est surjective (pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $f(x) = y$ a au moins pour solution $x = \sqrt{y}$) mais pas surjective (l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions $x = -1$ et $x = 1$).
4. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$ f est bijective : pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $f(x) = y$ a une et seule solution dans $\mathbb{R}_+$, donnée par $x = \sqrt{y}$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ f est une injection (pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) mais pas une surjection (0 n'a pas d'antécédent par f).
6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$ f est une injection (pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(p) \Rightarrow n = p$) mais pas une surjection (aucun nombre impair n'a d'antécédent par f).
7. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor \text{ si } n \text{ pair} \\ -\lfloor n/2 \rfloor \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ f est une bijection. Pour tout nombre k dans $\mathbb{Z}$, l'équation $f(n) = k$ a une unique solution dans $\mathbb{N}$ donnée par $n = 2k$ si $k \geq 0$ et $n = 2k + 1$ si $k < 0$.

Exercice 6 : Récurrence
Montrer les formules closes suivantes par récurrence :

1. $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Vu avec Marc
2. $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Vu en TD
3. $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ Vu en TD

Exercice 7 : Équations trigonométriques
Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les équations trigonométriques suivantes :

1. $10\cos(8\theta) = -5$
2. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$
3. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$ dans $[0, 16\pi]$
4. $10 + 7\tan(4\theta) = 3$ dans $[-\pi, 0]$.
5. $3 - 4\sin(4\theta) = 5$ dans $[-3\pi/2, -\pi/2]$

Exercice 8 : Partie Entière et Valeur Absolue
Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les (in)équations suivantes :

1. $|x^2 - 2x - 2| \leq 1$ On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x - 2| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x - 2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x - 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow |x - 1| \leq \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ On raisonne par équivalence.

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow 1 < x (\leq +\infty)$$

3. $|x^2 + 2x| = 1$ On raisonne par équivalence.

$$|x^2+2x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=1 \\ x^2+2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-1=0 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2} \\ x=-1 \end{cases}$$

Les solutions sont donc $-(1+\sqrt{2})/2, -1, (-1+\sqrt{2})/2$

4. $\lfloor x^2 + x + 1 \rfloor = 1$ On raisonne par équivalence.

$$\left\lfloor x^2+x+1 \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2+x+1 < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x(x+1) < 1$$

L'équation $x^2 + x = 0$ a pour solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$. L'équation $x^2 + x = 1$ a pour solutions $x_1' = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. En combinant ces informations à un tableau de variations de $x \mapsto x^2 + x$ (décroissante sur $(-\infty, -1/2)$ et croissante sur $(1/2, +\infty)$), on peut montrer que $0 \leq x^2 + x < 1 \Leftrightarrow x \in (x_1', x_1] \cup [x_2, x_2')$. Les solutions de l'équations sont donc tous les $x \in (-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1] \cup [0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.