Développements Limités

Mahendra Mariadassou

4 novembre 2019

Introduction

Plan du cours

- Domaine d'étude
- Limites, continuité, dérivabilité et variations
- Comparaison locale de fonction
- Etude locale des fonctions
- Retour sur la limite

Développement Limités

Le but des développements limités est de faire des **approximations** en **négligeant** certaines quantités. On va voir ici qu'on néglige toujours une quantité **par rapport** à une autre.

On va formaliser cette intuition avec la notion de **négligeabilité** et les notations de Landau.

Négligeabilité

Définition

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$ et

$$\forall x \in D_f \cap D_g \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

Dans la plupart des cas, g est non nulle au voisinage de 0 et la condition précédente peut se reformuler: f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si $\dfrac{f}{g} \to 0$ quand $x \to a$.

Notation de Landau

Si f est négligeable devant g en a, on note

- $f = o_a(g)$ en omettant a si le voisinage est clair. On dit qu'au voisinage de a, f est un $o(g)$ (prononcé "petit o de g")
- Par un abus de notation, on utilise la même notation pour des expressions: $x^2 = o(x)$ au voisinage de 0.
- On écrit enfin $f = g + o(h)$ pour dire $f - g = o(h)$.

Les cas particuliers suivants sont à **connaître**

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $n < m$ alors $(x-a)^n = o_{\pm\infty}((x-a)^m)$ et $(x-a)^m = o_0((x-a)^n)$
- Si $\lim_a g = \pm\infty$ et f est bornée au voisinage de a (par exemple $\lim_a f$ finie), alors $f = o(g)$
- Si $f = o_a(1)$, alors $\lim_a f = 0$.

Propriétés des o

- Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$
- Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$
- Si $f = o(g)$, alors $f \times h = o(g \times h)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(\lambda g)$
- Si $f = o_a(1)$, alors $\lim_a f = 0$.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 \times f_2 = o(g_1 \times g_2)$

Exercices

Montrer que

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad x^\alpha = o_{+\infty}(e^x)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad e^x = o_{-\infty}(x^{-\alpha})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad x^{-\alpha} = o_{+\infty}(\ln(x))$

Approximation et somme

Une bonne règle heuristique à retenir pour s’assurer que le résultat approché est peu différent du résultat exact dans une somme est la suivante:

- Pour faire une approximation, on néglige un terme devant les autres **à l’intérieur d’une somme**

Exemple (I)

Considérons la distance $l' = \frac{lf}{l+f}$ qui apparaît régulièrement en optique. On souhaite connaître la distance l' quand la distance l est grande devant la focale f ($l \gg f$).

- Si on néglige f naivement en le posant égal à 0, on obtient $l' = 0$ qui est absurde
- En revanche, si on néglige f devant l dans la somme $f + l$, on commet une faible erreur puisque $l + f \simeq l$
- On peut donc poursuivre le calcul avec l'approximation $l' \simeq \frac{lf}{l+f} \simeq f$.

Exemple (II)

De la même façon, si $f(x)$ fait intervenir des sommes, on peut utiliser les mêmes arguments pour svoir comment x se comporte pour des grandes et des petites valeurs de x. Par exemple pour $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

- si $x \gg 1$, alors $x^2 + 1 \simeq x^2$ et $f(x) \simeq \frac{x}{x^2} = 1/x$
- si $x \ll 1$, alors $x^2 + 1 \simeq 1$ et $f(x) \simeq x$

Faire une approximation est **plus précis** que calculer une limite: En effet dire $f(x) \simeq x$ (quand $x \to 0$) est plus précis que d'écrire f tend vers 0 en 0. La limite se déduit de l'approximation mais pas l'inverse.

Exemple (III)

En notations de Landau, on a

- $f(x) = x(1 + o(1)) = x + o(x)$ au voisinage de 0
- $f(x) = \frac{1}{x}(1 + o(1)) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$

C'est très utile mais on peut avoir d'aller plus loin et de connaître le comportement de $f(x) - x$ au voisinage de 0. On sait juste $f(x) - x = o(x)$ mais on ne connaît pas son ordre de grandeur: x^2? x^3? Autre chose?

De même si on ne manipule pas directement des sommes mais des fonctions différentes (par exemple $\cos(x)$, $\sin(x)$), peut-on faire le même genre d'approximation?

C'est justement l'intérêt des développements limités.

Exercice

Donner des approximations des quantités suivantes:

$$\frac{1}{1+A} \qquad A \ll 1 \qquad A \gg 1$$

$$\frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2} \qquad B \ll 1 \qquad B \gg 1$$

$$\frac{a+b}{ab} \qquad a \ll b \qquad a \gg b$$

$$\frac{x^2+y^2+2xy}{3x-y} \qquad x \ll y \qquad x \gg y$$

$$\sqrt{u^2+v^2} \qquad u \ll v \qquad u \gg v$$

$$e^{\sqrt{w}-1} \qquad w \ll 1 \qquad w \gg 1$$

Développements Limités

Premier Contact

Soit $n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a **sauf éventuellement en a**. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a (noté $DL_n(a)$) s'il existe des réels $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ tels que

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Attention, on ne développe pas les $(x-a)^k$ (puisqu'on regarde des termes correctifs quand on s'éloigne de a).

De façon générale, en posant $h = (x-a)$, on se ramènera **toujours** à des DL en 0.

Le terme $o((x-a)^n)$ est appelé *reste* ou *terme complémentaire*, le terme $b_0 + \cdots + b_n(x-a)^n$ est appelé terme polynômial.

Formule de Taylor

Le théorème suivant permet de construire explicitement $b_0, b_1, \ldots, b_n$

Soit $n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a **sauf éventuellement en a**. Si f est n dérivable en a, alors elle admet le $DL_n(a)$ suivant

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Autrement si f est n fois dérivable, on sait choisir $b_0, \ldots, b_n$ sans (trop d') efforts

Intuition

Dans le développement de Taylor, les termes sont triés du plus important au moins important. En effet, au voisinage de a

$$1 \gg (x-a) \gg (x-a)^2 \gg \cdots \gg (x-a)^n \gg o((x-a)^n)$$

Le DL permet donc d'obtenir des approximations successives, dites d'ordre $0, 1, \ldots, n$ de f (au voisinage de a) en ne gardant que les termes les plus à gauche:

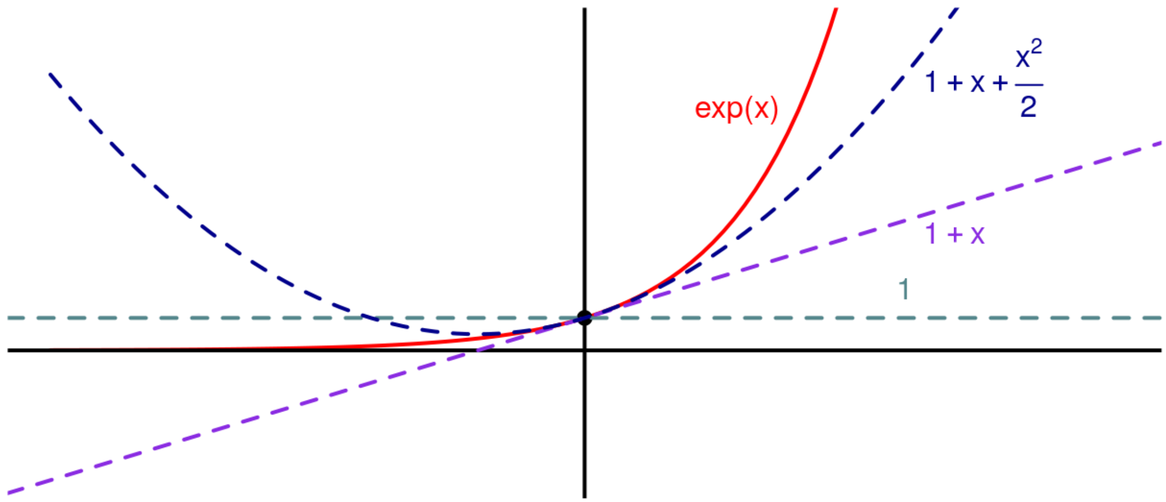
$$\begin{array}{ll}
\text{Ordre } 0 & f(x) \simeq f(a) \\
\text{Ordre } 1 & f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) \\
\text{Ordre } 2 & f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 \\
& \vdots \\
\text{Ordre } n & f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{array}$$

Intuition (II)

Certaines des approximations précédentes sont bien connues:

- l'approximation d'ordre 0 est la limite
- l'approximation d'ordre 1 est la tangente
- Plus généralement, l'approximation d'ordre n est un polynôme de degré n

Intuition (III)



Lien avec l’approximation

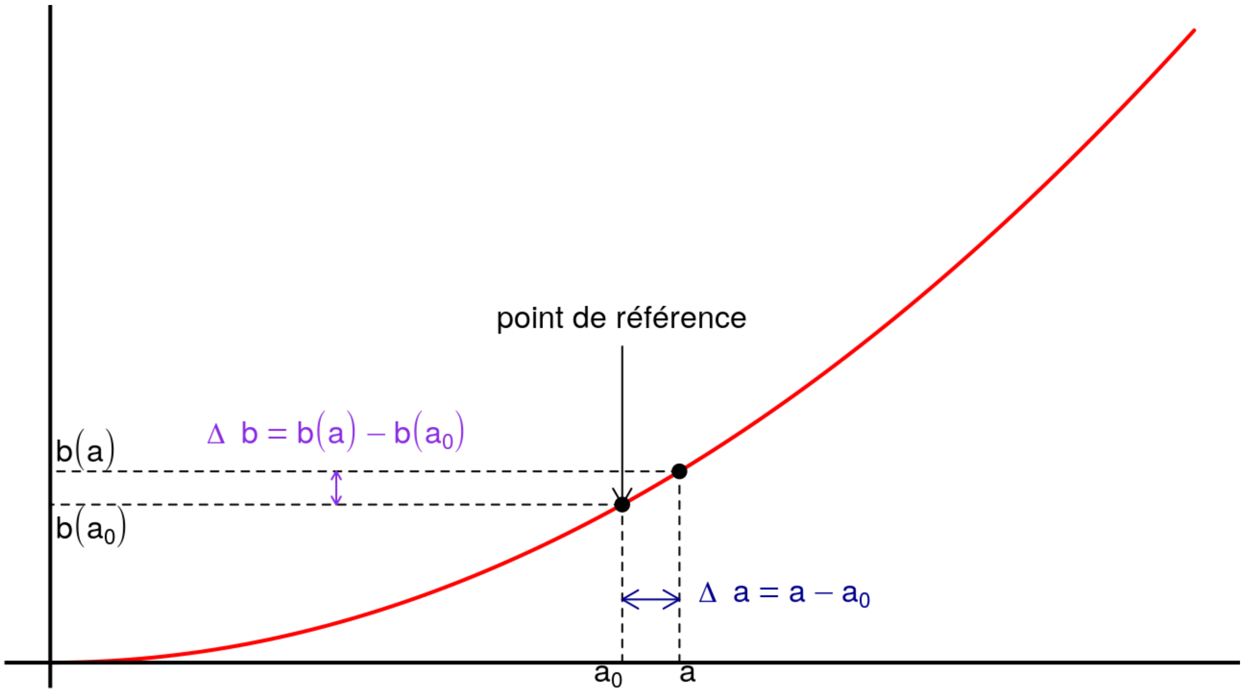
DLs et différentielle

Quand on utilise les DLs dans des contextes concrets, l'absence de notations f et x peut entrainer des erreurs. On va donc revenir aux notions de différentielles pour l'expliciter.

On considère deux quantités a et b reliées entre elles par une certaine relation b et on cherche une approximation de $b(a)$ au voisinage d'une valeur de référence a_0. Si b est continue, on sait que $b(a)$ sera proche de $b(a_0)$ mais on voudrait être plus précis.

On définit les petits écarts $\Delta b = b(a) - b(a_0)$ et $\Delta a = a - a_0$. On sait que $\Delta b \to 0$ quand $\Delta a \to 0$ mais on cherche un lien plus précis entre Δb et Δa.

Illustration graphique



Lien avec la dérivée

On a vu avec les *différentielles* que pour des variations infinitésimales, on a

$$\mathrm{d}b = \alpha \mathrm{d}a \quad \text{avec } \alpha = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}$$

Si on considère des variations **suffisamment petites** Δb et Δa, cette relation doit rester valable:

$$\Delta b \simeq \alpha \Delta a$$

Lien avec les dérivées successives

Si on n'est pas satisfait de l'approximation précédente, on peut rajouter des termes correctifs proportionnels à $\Delta a^2, \Delta a^3, \ldots$:

$$\Delta b \simeq \alpha \Delta a + \beta \Delta a^2 + \gamma \Delta a^3 + \ldots$$

Compte tenus des définitions de $\Delta b = b(a) - b(a_0)$ et $\Delta a = a - a_0$, cela revient à approcher la relation $b(a)$ par un polynôme b^{DL} de a de degré n (le fameux DL)

$$b^{DL}(a) = b(a_0) + \alpha(a - a_0) + \beta(a - a_0)^2 + \gamma(a - a_0)^3 + \ldots$$

Lien avec les dérivées successives (II)

Pour s'assurer que l'approximation $b^{DL}(a) \simeq b(a)$ est valide au voisinage de a_0, on impose à b^{DL} et b d'avoir la même valeur en a_0, mais également la même pente, la même concavité, etc.

En termes formels,

$$\forall k \leq n \quad \frac{\mathrm{d}^k b^{DL}}{\mathrm{d}a^k}(a_0) = \frac{\mathrm{d}^k b}{\mathrm{d}a^k}(a_0)$$

Exercice

Dériver $b^{DL}(a)$ 3 fois en a_0 et montrer qu'au point de référence a_0 on a

- $\frac{\mathrm{d}b^{DL}}{\mathrm{d}a}(a_0) = \alpha$
- $\frac{\mathrm{d}^2 b^{DL}}{\mathrm{d}a^2}(a_0) = 2 \times \beta$
- $\frac{\mathrm{d}^3 b^{DL}}{\mathrm{d}a^3}(a_0) = 3 \times 2 \times \gamma$

En déduire les valeurs de α, β, γ

Lien avec les dérivées successives (III)

On retrouve ainsi en égalisant les dérivées, et avec la notation de Leibniz la formule de Taylor

$$b(a) \simeq b(a_0) + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}(a_0)\Delta a + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}a^2}(a_0)\Delta a^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n b}{\mathrm{d}a^n}(a_0)\Delta a^n$$

La méthode à suivre pour faire un DL est donc **systématique**

- exprimer b en fonction de a (souvent donné dans l'exercice)
- choisir un point de référence a_0 (idem)
- calculer les premières dérivées de b
- en déduire les coefficients du DL et conclure

Exemple (I)

Pour faire un DL de $u = \cos(\theta)$ autour de $\theta_0 = \pi/3$, on calcule les valeurs successives des dérivées de u en θ_0.

- $u(\theta_0) = \cos(\theta_0) = \frac{1}{2}$
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = -\sin(\theta_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_0) = -\cos(\theta_0) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\theta^3}(\theta_0) = \sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple (II)

D'ou on déduit que si θ reste proche de $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, on a

$$\begin{aligned} u(\theta) = \cos(\theta) &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^3 \\ &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Exercice

En appliquant la procédure vue dans l'exemple, calculer un DL_3 des fonctions suivantes

- $v = \tan(u)$ lorsque u est proche de $\frac{\pi}{6}$
- $v = \ln(u)$ lorsque u est proche de 2
- $A = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$ lorsque t est proche de 1. Montrer que dans ce cas-là, le DL est en fait rigoureusement égal à A mais écrit sous une autre forme
- $A = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$ lorsque t est proche de 0. Commenter le résultat

Exercice - Proposition

Dans la pratique, on se ramène toujours à des DLs en 0 et il est bon de connaître les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes (à calculer comme vu dans l'exemple)

$$\begin{array}{rcr}
\sin(x) & \cos(x) & \tan(x) \\
\dfrac{1}{1+u} & & \dfrac{1}{1-u} \\
e^{u} & & e^{-u} \\
\sqrt{1+u} & & \sqrt{1-u} \\
\ln(1+u) & & \ln(1-u) \\
(1+u)^{\alpha} & & (1-u)^{\alpha}
\end{array}$$

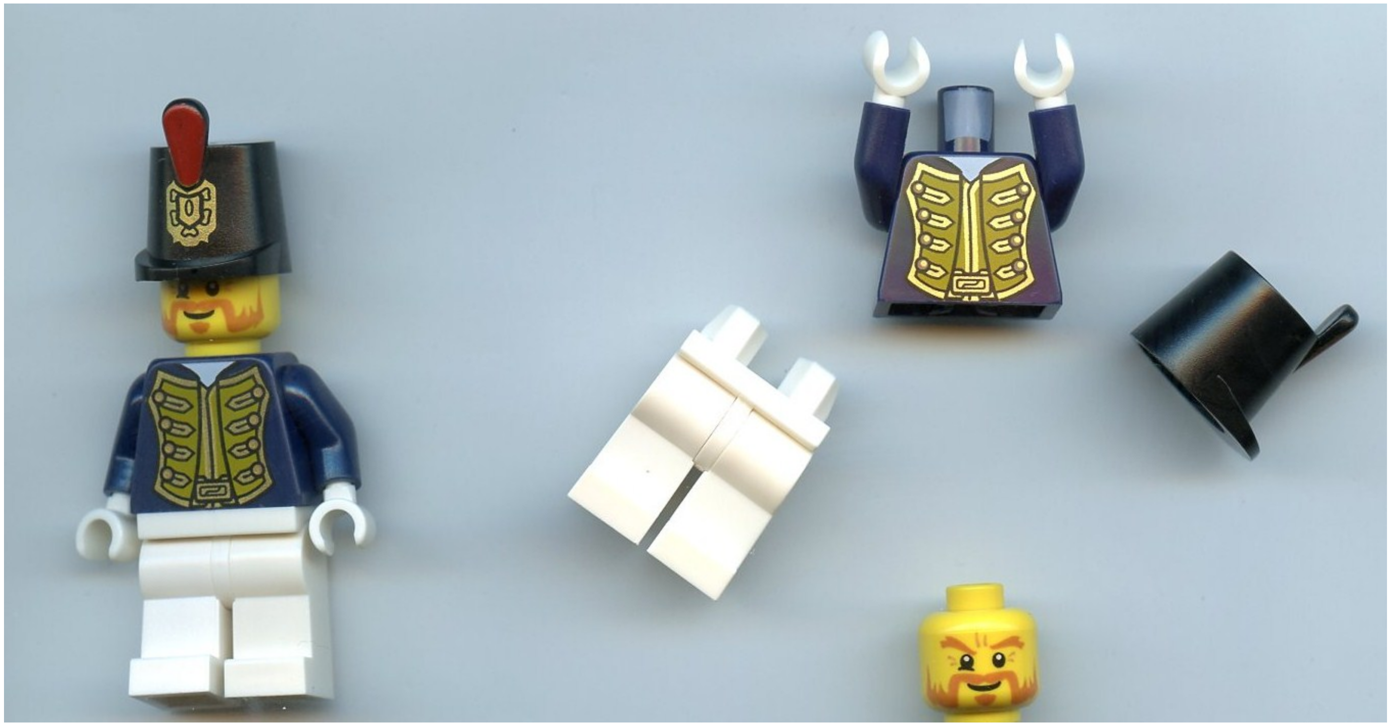
DLs classiques

Les DLs suivants au voisinage de 0 sont à connaître.

$$
\begin{aligned}
e^x =& 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos(x) =& 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}) \\
\sin(x) =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\frac{1}{1+x} =& 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) =& x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots \\
& + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

Opérations sur les DLs

Comme pour les limites et les dérivées, on peut aussi utiliser des règles pour combiner les DLs.



Addition, multiplication de DL

Si f et g admettent toutes deux un DL_n en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $f + g$ admet un DL_n en 0, qui s'obtient en additionnant les parties polynômiales des DL_n de f et g (penser à la linéarité de la dérivée: $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$)
- $f \times g$ admet un DL_n en 0, qui s'obtient en multipliant les parties polynômiales des DL_n de f et g et en ne gardant que les termes de degrés $\leq n$.
- λf admet un DL_n en 0, qui s'obtient en multipliant la partie polynômiale du DL_n de f par λ.

Exemple

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

On a donc (les termes en rouges sont des $o(x^2)$):

- $e^x + \cos(x) = 2 + x + o(x^2)$ (terme d'ordre 2 du DL_2 nul)
- $$\begin{aligned} e^x \cos(x) = & \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ = & 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ & + o(x^2) + o(x^4) + o(x^4) \\ = & 1 + x + o(x^2) \end{aligned}$$

Composition

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions avec

$$0 \in A, 0 \in B \text{ et } f(0) = 0$$

Si f et g admettent toutes deux un DL_n en 0, alors $g \circ f$ s'obtient en composant les parties polynômiales des DL_n de f et g et **en ne gardant que les termes de degrés $\leq n$**.

Exemple (I)

Avec $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ et $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$, on pose implicitement $X = \frac{x^2}{1+x}$ (petit quand x est proche de 0).

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) =& \sin(X) \\ =& X - \frac{X^3}{3!} + o(X^3) \end{aligned}$$

Exemple (II)

Pour finir le calcul, on développe et on ne garde que les termes de degré au plus 3

$$\begin{aligned}
X =& x - x^2 + x^3 + o(x^3) \\
X^2 =& (x - x^2 + x^3 + o(x^3))^2 = x^2 - 2x^3 + o(x^3) \\
X^3 =& (x - x^2 + x^3 + o(x^3))^3 = x^3 + o(x^3) \\
o(X^3) =& o(x^3)
\end{aligned}$$

et donc au final

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) =& x - x^2 + x^3 - x^3/6 + o(x^3) \\
=& x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Quotient

Comme d'habitude, quotienter par f revient à multiplier par $1/f$, on cherche donc un DL_n de $1/f$.

Soit f une fonction admettant le $DL_n(0)$ suivant:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

- Si $b_0 = 0$, alors $1/f$ n'a pas de DL en 0
- Sinon, $1/f$ admet un $DL_n(0)$ obtenu en écrivant:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(h)} &= \frac{1}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)} \\ &= \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0} x + \cdots + \frac{b_n}{b_0} x^n + o(x^n)}\end{aligned}$$

  Et il faut donc composer le $DL_n(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{b_1}{b_0} x + \cdots + \frac{b_n}{b_0} x^n + o(x^n)$.

Les calculs à faire peuvent être un brin compliqués…

Exemple (I)

On va calculer le $DL_2(0)$ de $1/e^x$. On sait que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + u$$

avec $u = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On va donc composer avec le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+u}$, à savoir

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Exemple (II)

On commence par calculer u^2 (et il est clair que $o(u^2) = o(x^2)$)

$$u^2 = (x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^2)$$

D'où on tire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\
&= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2 + o(x^2) \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Exemple (III)

Dans ce cas précis, on aurait aussi pu remarquer que $1/e^x = e^{-x}$ et se rappeler que le $DL_2(0)$ de e^{-x} est

$$\begin{aligned} e^{-x} =& 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) \\ =& 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

On retrouve heureusement le même résultat

Exercices

Calculer les DLs suivants (ceux notés $[*]$ sont difficiles)

$$DL_4(0) \text{ de } \frac{x}{\sin(x)} \qquad DL_2(0) \text{ de } \ln(a^x + b^x) \quad [*]$$

$$DL_4(0) \text{ de } \frac{1}{\cos(x)} \qquad DL_4(\pi/2) \text{ de } \sin(x)^{\sin(x)} \quad [*]$$

$$DL_2(\pi/4) \text{ de } \sqrt{\tan(x)} \qquad DL_1(0) \text{ de } \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$$

$$DL_4(0) \text{ de } e^{\cos(x)} \qquad DL_3(0) \text{ de } x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$DL_3(1) \text{ de } \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Solutions (I)

Calculer les DLs suivants

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin(x)} &= \frac{1}{1-[x^2/3!-x^4/5!+o(x^4)]} \\
&= 1+[x^2/3!-x^4/5!]+[x^2/3!-x^4/5!]^2+o(x^4) \\
&= 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4) \\
\ln(a^x+b^x) &= x\ln(a)+\ln(1+(b/a)^x) \\
&= x\ln(a)+\ln(2)+\frac{1}{2}[(b/a)^x-1]-\frac{1}{8}[(b/a)^x-1]^2 \\
&= \ln(2)+\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}x+x^2\frac{\ln^2(b/a)}{2}-\frac{1}{8}x^2\ln^2(b/a)+o(x^2) \\
&= \ln(2)+\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}x+\frac{3(\ln(a)-\ln(b))^2}{8}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

Solutions (II)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1-[x^2/2!-x^4/4!+o(x^4)]} \\
&= 1+[x^2/2!-x^4/4!]+[x^2/2!-x^4/4!]^2+o(x^4) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4) \\
\sin(x)^{\sin(x)} &= \sin(\pi/2+h)^{\sin(\pi/2+h)} = \cos(h)^{\cos(h)} \\
&= \exp\left[(1-h^2/2+h^4/24)\ln(1-h^2/2+h^4/24)\right]+o(h^4) \\
&= \exp((1-h^2/2+h^4/24)(-h^2/2+h^4/24-h^4/8))+o(h^4) \\
&= \exp((1-h^2/2+h^4/24)(-h^2/2-h^4/12))+o(h^4) \\
&= \exp(-h^2/2-h^4/12+h^4/4)+o(h^4) \\
&= \exp(-h^2/2+h^4/6)+o(h^4) \\
&= 1+(-h^2/2+h^4/6)+(-h^2/2+h^4/6)^2/2+o(h^4) \\
&= 1-h^2/2+h^4/6+h^4/8 = 1-\frac{h^2}{2}+\frac{7h^4}{24}+o(h^4)
\end{aligned}
$$

Solutions (III)

$$\begin{aligned}
\tan(\pi/4+x) &= \tan(\pi/4) + \tan'(\pi/4)x + \frac{\tan''(\pi/4)}{2}x^2 + o(x^2) \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
\sqrt{\tan(\pi/4+x)} &= \sqrt{1 + (2x + 2x^2)} + o(x^2) \\
&= 1 + (x + x^2) - \frac{1}{8}(2x + 2x^2)^2 + o(x^2) \\
&= 1 + x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Solutions (IV)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} + o(x) \\
\sqrt{2+h} &= \sqrt{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}} + o(h) \\
\sqrt{1+\sqrt{1-x}} &= \sqrt{1+(1-x/2)+o(x)} \\
&= \sqrt{2-x/2+o(x)} = \sqrt{2} - \frac{x}{4\sqrt{2}} + o(x)
\end{aligned}
$$

Solutions (V)

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\
e^h &= 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\
e^{cos(x)} &= e^{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}} + o(x^4) = e\left(e^{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}}\right) + o(x^4) \\
&= e\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2/2\right) + o(x^4) \\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4) \\
&= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

Comme le calcul fait intervenir e^h avec h d'ordre x^2, il suffit de faire un DL$_2$ de $\exp$ en h pour avoir un DL$_4$ en x.

Solutions (VI)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + x/2 - x/8 + o(x^2) \\
\sqrt{1/(1-x)} &= (1-x)^{-1/2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{3}{8}(-x)^2 + o(x^2) \\
&= 1 + x/2 + 3x^2/8 + o(x^2) \\
\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= (1 + x/2 - x^2/8)(1 + x/2 + 3x^2/8) + o(x^2) \\
&= 1 + x + o(x^2) \\
x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= x + x^2 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Comme on multiplie par x à la fin, on se contente d'un DL_2 de $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Solutions (VI)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\
\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} &= x\left[(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3})(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2) + o(x^2)\right] \\
&= x\left[1 - x + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2)\right] \\
&= x - x^2 + \frac{23}{24}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Comme $\ln(x) = x + o(x)$ et qu'on multiplie, on se contente d'un DL$_2$ de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. On obtiendra bien un DL$_3$ après multiplication.

Retour sur les DLs d’ordre 1 et 2

DL d'ordre 1 en physique

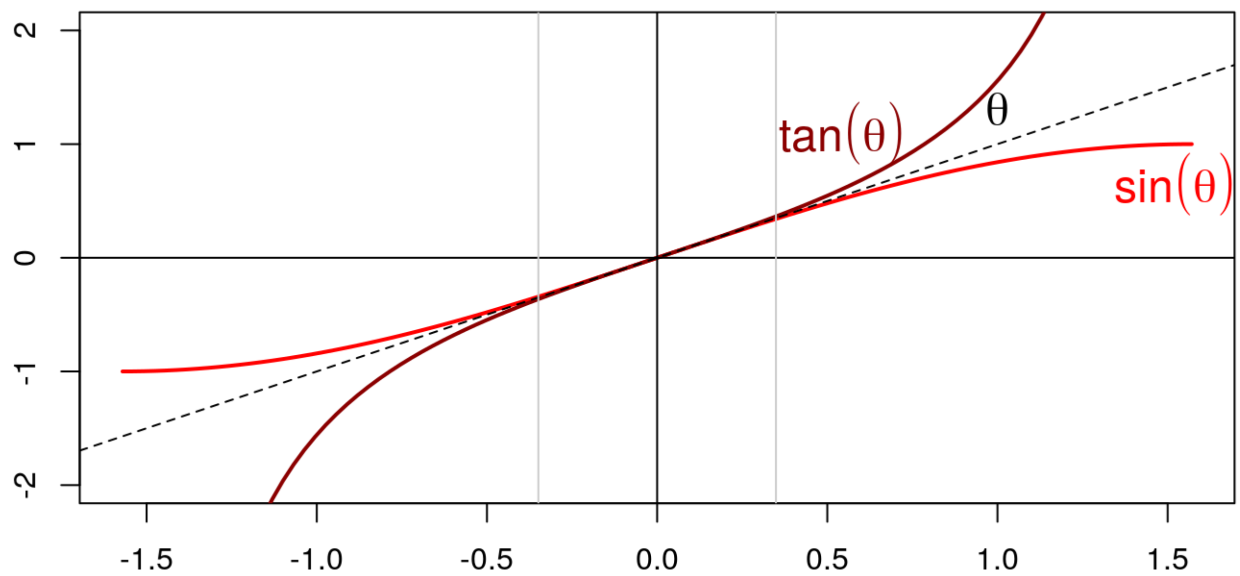
Physiquement, l'approximation d'ordre 1 considère que les variations Δb et Δa sont proportionnelles, et ce dans le même rapport que les différentielles $\mathrm{d}b$ et $\mathrm{d}a$.

Du point de vue graphique, cela revient à confondre la courbe de $b(a)$ avec une droite (en l'occurence sa tangente en a_0). Les $DL_1(0)$ sont très utilisés pour remplacer des petits angles θ, ils permettent d'écrire

- $\sin(\theta) \simeq \theta$
- $\tan(\theta) \simeq \theta$

qui est une très bonne approximation pour des petits angles (de l'ordre de 0.3490659 radians).

Représentation graphique



DL d’ordre 2 en physique

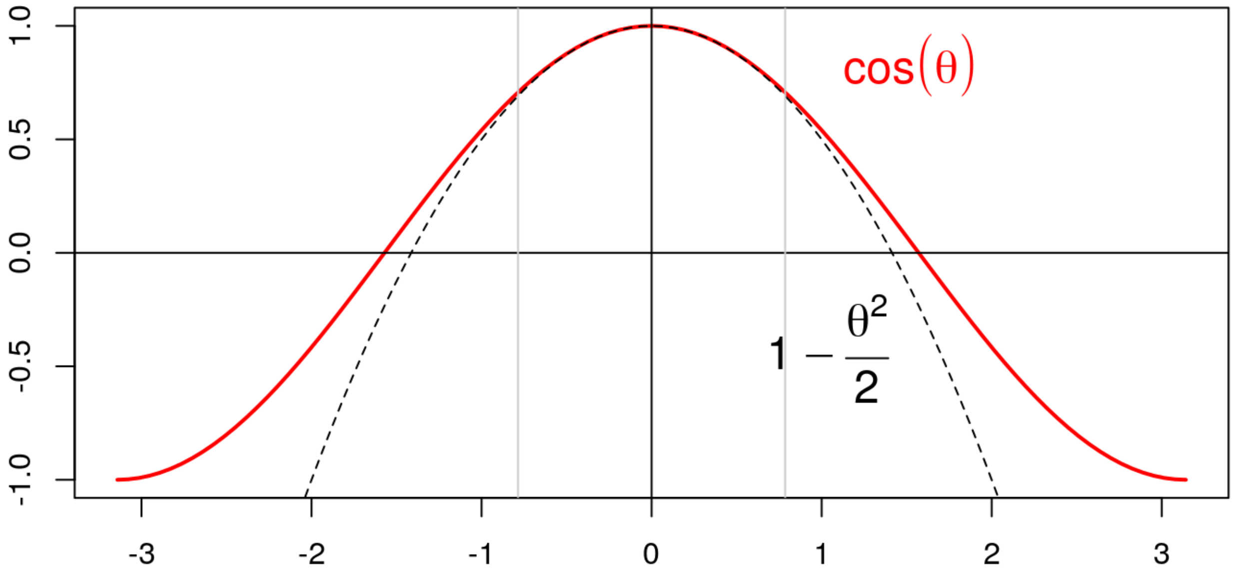
Si on s’éloigne un peu trop du point de référence a_0 (et pour certaines valeurs de a_0), l’approximation par une droite n’est pas très satisfaisante et il faut rajouter un terme correctif en $(a - a_0)^2$ pour obtenir une meilleure approximation. Ceci revient à approcher le graphe de $b(a)$ par une *parabole*.

Le $DL_1(0)$ est très utilisé pour remplacer le $\cos$ de petits angles θ, il permet d’écrire

- $\cos(\theta) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

qui est une très bonne approximation pour des petits angles (jusqu’à 0.7853982 radians).

Représentation graphique



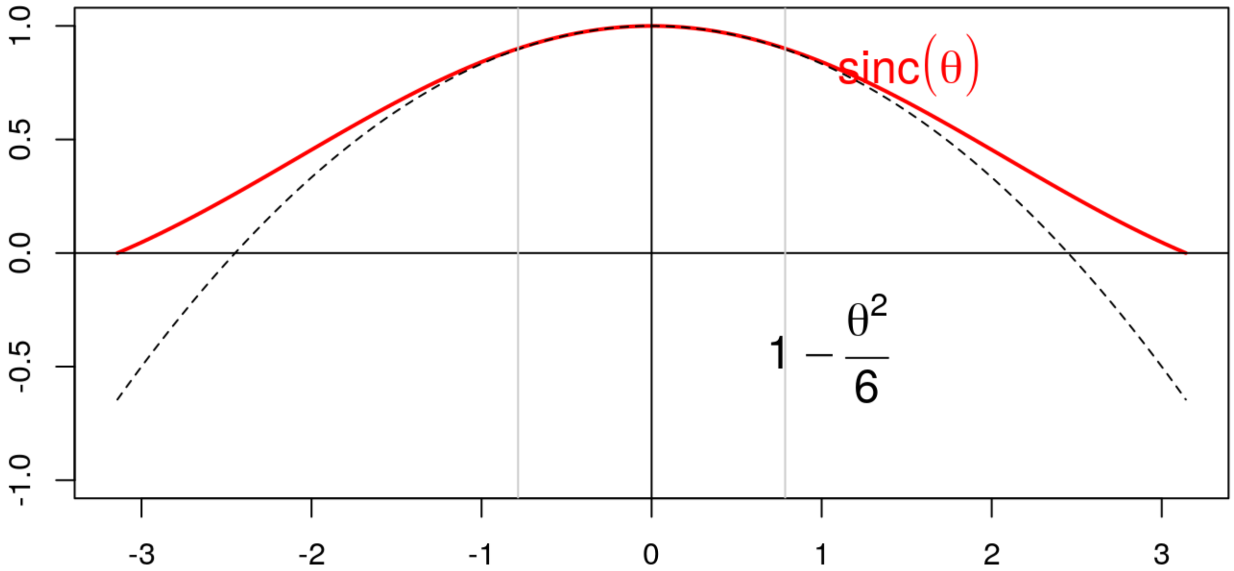
Exercice

En optique ondulatoire, on a souvent affaire à la fonction *sinus cardinal* définie par

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

En partant du DL de $\sin$, trouver directement le $DL_4(0)$ de $\mathrm{sinc}(x)$. Pourquoi peut-on définir $\mathrm{sinc}(0) = 1$? Que peut-on dire de la dérivée première du sinus cardinal lorsque x tend 0 ? Et du signe de sa dérivée seconde ?

Représentation graphique



Intérêt en mathématiques

Les DLs permettent de calculer très facilement des limites. En particulier, la règle de l'Hopital est un cas particulier de DLs.

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} &= \frac{f'(x_0)x+o(x)}{g'(x_0)x+o(x)} \\
&= \frac{f'(x_0)+o(1)}{g'(x_0)+o(1)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}
\end{aligned}
$$

Intérêt en mathématiques (II)

On peut aussi retrouver des limites classiques en 0

$$e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\ln(1 + x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$

et d'autres plus neuves

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Exercices d'applications (I)

- Dans le modèle du gaz parfait avec $PV = nRT$, on considère une enceinte étanche thermostatée (nombre de moles et température constants). On suppose que le volume de l'enceinte passe de V à $V + \Delta V$. La pression évolue en conséquence de P à $P + \Delta P$. Relier ΔP à ΔV en faisant un DL au premier ordre. Comment se compare les variations relatives $\Delta P/P$ et $\Delta V/V$.

- On considère une sphère de rayon R et de surface S. On suppose que le rayon de la sphère passe de R à $R + \Delta R$. La surface évolue en conséquence de S à $S + \Delta S$. Relier ΔS à ΔR en faisant un DL au premier ordre. Comment se compare les variations relatives $\Delta S/S$ et $\Delta R/R$.

Exercices d'applications (II)

- On cherche à évaluer le comportement de la quantité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+\tau^2}}$ lorsque t est petit devant τ. Exprimer $f(t)$ sour la forme $C(1+x)^\alpha$ où $x = t/\tau$ est une quantité sans dimension très petite et C et α sont des constantes à déterminer. En faisant ensuite un DL à l'ordre 2 de $(1+x)^\alpha$, en déduire un DL$_2$ de $f(t)$.

Exercices d'applications (III)

En utilisant les DL (et surtout les théorèmes d'opérations) calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)\sin(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan(x))}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\tan(x)}{\sin(x^2)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)(\tan(\pi x/4)-1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$$

Les courageux peuvent aussi essayer de calculer les DL_1 des 6 premières fonctions.

Exercices d'applications (III): Réponses

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)\sin(x)} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan(x))}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\tan(x)}{\sin(x^2)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)(\tan(\pi x/4)-1)}{(x-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} = e^2 \qquad \lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right) = -\frac{e}{2}$$