Dérivée partielle

Mahendra Mariadassou

18 novembre 2019

Plan du cours

- Notions de différentielles
- Opérations sur les différentielles

Objectifs

- Différencier une expression (par exemple $PV = nRT$)
- Manipuler des différentielles
- Manipuler des relations entre différentielles

Définition et propriété fondamentale

La différentielle de x notée dx (parfois Δx en physique) correspond à une variation **infinitésimale** ($\simeq$ toute petite) de x

Si f est une fonction numérique (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et que $y = f(x)$, alors il existe une relation entre dy et dx donnée par

$$dy = f'(x)dx$$

où f' est la fonction dérivée de f.

Interprétation: Une petite variation (de taille dx) de la quantité x se traduit par une petite variation (de taille $dy = f'(x)dx$) de la quantité y

Remarque(s)

Il existe un lien **essentiel** entre différentielles et dérivées (qu'on verra en détails plus tard) mais on peut retenir pour l'instant

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow dy = d(f(x)) \\ &\Leftrightarrow dy = f'(x)dx \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \end{aligned}$$

Exercice

Exprimer dy en fonction de dx quand y et x sont liés par les relations suivantes:

- $y = ax + b$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)
- $y = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$)
- $y = \ln(x)$
- $y = e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- $y = x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$), on pourra écrire $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

Intégration d'une différentielle

Si f est une fonction numérique (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et que $y = f(x)$ de dérivée f' alors

$$\int f'(x)dx = y + K \ (= f(x) + K)$$

où K est une constante arbitraire

Intuition: On peut retenir que d et $\int$ sont des opérations (presque) inverses et écrire

$$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = \int dy = y \ (+K)$$

la constante émerge du fait que $\int$ et d ne sont pas exactement inverses.

Exercices

À partir des relations suivantes, trouver un lien entre y et x

- $dy = 5dx$
- $dy = nx^{n-1}dx$
- $dy = \frac{dx}{x}$
- $dy = \alpha e^{\alpha x}dx$
- $dy = \cos(x)dx$
- $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Fonction de plusieurs variables

Une **fonction f de plusieurs variables** associe à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un nombre réel $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. On la note

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto \quad f(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Dans le cas le plus simple ($n = 2$), on remplace généralement (x_1, x_2) par (x, y) et on définit f par son expression:

$$f(x, y) = 4x + 3y$$

ou encore

$$f : (x, y) \mapsto z = 4x + 3y$$

Dérivées partielles (I)

En un point donné, on peut définir plusieurs fonctions partielles d'une seule variable en

- laissant une variable libre
- fixant les autres

Par exemple en (x_0, y_0), on peut définir

- $g : x \mapsto f(x, y_0)$
- $h : y \mapsto f(x_0, y)$

et on définit les **dérivées partielles** de f à partir de ces fonctions.

Dérivées partielles (II)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les dérivées partielles de f par rapport à x et y en (x_0, y_0) sont $h'(x_0)$ et $g'(y_0)$ où g et h sont définies par $g(x) = f(x, y_0)$ et $h(y) = g(x_0, y)$. Elles sont notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(x_0)$$

Les fonctions correspondantes sont notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque Si $z = f(x, y)$, on peut aussi écrire $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Exercice

On suppose que x, y, z sont liés par les relations suivantes. Calculer les dérivées partielles de z par rapport à x et y.

- $z = x + y$
- $z = xy$
- $z = x/y$
- $z = x \ln(y)$
- $z = e^{x+y}$
- $z = x^\alpha y^\beta$
- $z = x^3 y^2 + \sin^2(y) + 3x$

Dérivées partielles: généralisations

- On peut assez facilement généraliser les définitions précédentes à des fonctions n variables.
- On peut également calculer des dérivées **secondes**.

Sous des conditions vérifiées pour toutes les fonctions du cours, le théorème de Schwartz garantit que l'ordre de dérivation est indifférent:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Théorème de Scharwz

On va vérifier le théorème de Schwarz sur $z = e^{xy}$.

Si on dérive par rapport à y puis par rapport à x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} = & xe^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial x e^{xy}}{\partial x} = & e^{xy} + xye^{xy} \end{aligned}$$

Si on dérive par rapport à x puis par rapport à y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} = & ye^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial y e^{xy}}{\partial y} = & e^{xy} + xye^{xy} \end{aligned}$$

Et le théorème est donc vérifié sur cet exemple.

Différentielle Totale

- On sait relier dy et dx quand il existe une relation entre $y = f(x)$.
- Peut-on faire la même chose avec dz, dx et dy si on a une relation $z = f(x, y)$?

Si $z = f(x, y)$ où f est une fonction numérique (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$), alors la **différentielle totale** de z est

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Différentielle Totale

On peut retrouver ce résultat par analogie avec les différentielles de fonctions univariées:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

Les deux différences majeures concernent le: - nombre de différentielles (une par variables dépendante): $dx \to dx, dy, \ldots$ - les coefficients multiplicatifs (dérivées partielles au lieu de dérivées droites): $\frac{dy}{dx} \to \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \ldots$

Exercice

Calculer la différentielle totale des fonctions suivantes:

- $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- $z = x^3 y^2 + \sin^2(y) + 3x$
- $PV = nRT$ (en prenant successivement P, V et T commes variables réponses)

Différentielle logarithmique

Dans certains cas (produits, puissances), il est parfois plus facile de calculer une différentielles totale en échelle logarithmique (pratique pour des incertitudes relatives)

$$\begin{aligned} PV = nRT &\Leftrightarrow \ln(P) + \ln(V) = \ln(nR) + \ln(T) \\ &\Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = V^{\gamma} &\Leftrightarrow \ln(P) = \gamma \ln(V) \\ &\Rightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{dV}{V} \\ &\Rightarrow dP = \gamma \frac{P}{V} dV \\ &\Rightarrow dP = \gamma V^{\gamma - 1} dV \end{aligned}$$

Application (I)

On considère un cylindre droit de hauteur $h = 50$ cm et de rayon $r = 10$ cm et de volume V. On s'intéresse à la variation de volume quand on augmente h de 2 cm et diminue r de 1 cm.

- Calculer exactement la variation de volume ΔV
- Calculer la variation de volume ΔV de façon approchée (en l'approchant par la différentielle dV)
- Calculer la variation de volume relative $\frac{\Delta V}{V}$ (de façon approchée)

Application (II)

On effectue une transformation adiabatique et réversible sur un gaz parfait pour le faire passer de l'état (P_0, V_0) à l'état (P_1, V_1).

On sait que $\delta Q = dU - dW$, que pour ce gaz l'énergie interne dépend uniquement de la témperature ($dU = nC_v dT$) et que le travail des forces de pression s'écrit $dW = -PdV$. On a donc

$$0 = \frac{\delta Q}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + P\frac{dV}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

De plus $\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$ et $R/C_v = \gamma - 1$ donc

$$0 = nC_v \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V}\right] = nC_v \left[\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V}\right]$$

Application (III)

Au final, on arrive à

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

qui peut se réécrire

$$PV^{\gamma} = Constante$$

Et on retrouve la loi de Laplace pour les détentes adiabatiques.

Mesure d’incertitude

À l’aide des différentielles logarithmiques, relier les incertitudes relatives, *i.e.* de la forme $\frac{\Delta V}{V}$,

- du volume d’une sphère et de son rayon
- de la surface d’un disque et de son rayon
- du volume d’un cube et de son côté
- de la surface d’un carré et de son côté
- du volume d’un cône et de son rayon
- du volume d’un cône et de sa hauteur

Plus de calculs (I)

Calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x, y)$ suivantes

- $f(x, y) = (x^2 - 3xy + y^4)/(2x + 3y)$
- $f(x, y) = e^{5\cos(xy)}$
- $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)\cos(xy)$
- $f(x, y) = 2xy/e^{x+y}$

Plus de calculs (II)

- Calculer toutes les dérivées d'ordre ≤ 2 de la fonction $f(x, y) = x^2 + 3xy^5 + \cos(xy)$
- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pour $f(x, y) = \cos(ax^p y^q) + \sin(bx^r y^s)$ avec (a, b) des réels et p, q, r, s des entiers positifs.
- Trouver les points qui vérifient simultanément $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ pour $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ et $f(x, y) = x^3 y + xy^2$
- Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ pour $f(x, y, z) = (x^2 + xy + yz)e^{x+2y}$