23 octobre 2019

Exercices corrigés sur les « complexes »

Exercice 1 : Forme algébrique

Mettre sous forme algébrique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1+2i}{3-4i}$ C'est une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur le complexe conjugué du dénominateur pour se ramener à dénominateur positif. $z_1 = \frac{1+2i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1+2i}{5}$
2. $z_2 = \frac{11+5i}{1-i} + \frac{11-5i}{1+i}$ On réduit tout le monde au même dénominateur $(1+i)(1-i)$ qui a le bon goût d'être réel. $z_2 = \frac{(11+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(11-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6+16i}{2} + \frac{6-16i}{2} = \frac{12}{2} = 6$
3. $z_3 = \left(\frac{1+i}{3-i}\right)^2$. On peut adopter deux approches : (i) mettre $\frac{1+i}{3-i}$ sous forme algébrique avant de l'élever au carré ou (ii) l'élever au carré avant de le mettre sous forme algébrique (en se ramenenant à un numérateur réel). On va adopter l'approche (i) : mettre $\frac{1+i}{3-i}$ sous forme algébrique (en se ramenant à un numérateur réel) puis l'élever au carré. $\frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{2+4i}{10} = \frac{1+2i}{5}$ et on a donc $z_3 = \frac{1+2i}{5} \times \frac{1+2i}{5} = \frac{-3+4i}{25}$.
4. $z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Déjà sous forme algébrique
5. $z_5 = -\frac{2}{1-i\sqrt{7}}$ On se ramène à un dénominateur réel en multipliant par le complexe conjugué : $z_5 = -\frac{2}{1-i\sqrt{7}}\frac{1+i\sqrt{7}}{1+i\sqrt{7}} = -\frac{2(1+i\sqrt{7})}{8} = -\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$
6. $z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^5}$. On commence par calculer $(1+i)^9$ et $(1-i)^5$. On remarque que $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i = -2(1-i)$. On a donc $(1+i)^9 = [(1+i)^3]^3 = -8 \times (1-i)^3$. z_6 se simplifie donc en $z_6 = -\frac{8}{(1-i)^2}$. Comme $(1-i)^2 = -2i$, on a $z_6 = \frac{4}{i} = -4i$.

   Remarque On peut résoudre l'exercice plus simplement en notant que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ d'où on tire aisément $z_6 = \frac{(\sqrt{2})^9 e^{9i\pi/4}}{(\sqrt{2})^5 e^{-5i\pi/4}} = (\sqrt{2})^4 e^{14i\pi/4} = 4e^{-i\pi/2} = -4i$
7. $z_7 = \frac{1}{(1+3i)(2-i)} = \frac{(1-3i)(2+i)}{|1+3i|^2|2-i|^2} = \frac{5-5i}{10\times 5} = \frac{1-i}{10}$
8. $z_8 = \frac{(1+11i)^2}{1-i} = \frac{(1+11i)^2(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{2}(-120+22i)(1+i) = (-60+11i)(1+i) = -71+59i$
9. $z_9 = 2e^{2i\pi/3} = 2\cos(2\pi/3) + 2i\sin(2\pi/3) = -1 + i\sqrt{3}$
10. $z_{10} = \frac{2e^{i\pi/4}}{e^{-3i\pi/4}} = 2e^{i\pi} = -2$
11. $z_{11} = 2e^{i\pi/4} \times e^{-3i\pi/4} = 2e^{-i\pi/2} = -2i$
12. $z_{12} = \frac{2e^{i\pi/3}}{3e^{5i\pi/6}} = \frac{2}{3}e^{-3\pi/6} = \frac{2}{3}e^{-\pi/2}$

Exercice 2 : Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$. On commence par mettre $1+i$ sous forme exponentielle en faisant apparaître son module : $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On montre avec un raisonnement similaire que $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ et on déduit $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$
2. $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 2e^{i\pi/3}$

3. $z_3 = \frac{-2}{1+i}$ On repart du résultat intérmédiaire de la question 1 : $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et on note que $-2 = 2e^{i\pi}$ pour déduire le résultat $z_3 = \frac{2e^{i\pi}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$
4. $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ On repart du résultat de la question 2 : $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et on montre de manière analogue que $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$. On en déduit $z_4 = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\pi}{6}$
5. $z_5 = \sin(x) + i\cos(x)$. z_5 ressemble à une forme exponentielle mais n'en est pas une, il faut du $\cos$ pour la partie réelle et du $\sin$ pour la partie imaginaire. Qu'à cela ne tienne, on sait que $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ et $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ (faites un dessin sur le cercle trigo pour vous en convaincre). On a donc $z_5 = \cos(\pi/2 - x) + i\sin(\pi/2 - x) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

On en déduit facilement le reste des valeurs demandées

1. $z_1^2 = (e^{i\pi/2})^2 = e^{i\pi} - 1$
2. $z_2^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 16e^{4i\pi/3} = 16e^{-2i\pi/3} = -8 - i8\sqrt{3}$
3. $z_2^5 + \overline{z_2}^5 = 2\text{Re}(z_2^5) = 2\text{Re}(32e^{5i\pi/3}) = 2 \times 32 \times \cos(5\pi/3) = 64\cos(-\pi/3) = -32$
4. $\frac{z_2^3}{1-i} = \frac{8e^{i3\pi/3}}{1-i} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{|1-i|^2} = -4 - 4i$

Exercice 3 : Opération sur les nombres complexes
On pose $u = 1+i$ et $v = 1+i\sqrt{3}$.
On a vu dans l'exercice précédent que $u = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $v = 2e^{i\pi/3}$. On en déduit les réponses suivantes :

1. $|u| = \sqrt{2}$ et $|v| = 2$
2. $arg(u) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et $arg(u) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$
3. $z = \frac{u}{v} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{|1+i\sqrt{3}|^2} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{10}$
4. $z = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
5. z a pour module $1/\sqrt{2}$ et un de ses arguments est $-\pi/12$.
6. D'après la question 3, $z = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{10}$. D'après la question 4, $z = \frac{\cos(-\pi/12)}{\sqrt{2}} + i\frac{\sin(-\pi/12)}{\sqrt{2}}$. Par identification des termes,

$$\cos(-\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1+\sqrt{3}) \quad \sin(-\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1-\sqrt{3})$$

On conclut à l'aide des relations trigonométriques entre $\cos$ et $\sin$:

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1-\sqrt{3}) \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1+\sqrt{3})$$