14 octobre 2019

Exercices « Limites, Dérivées et DLs »

Exercice 1 : Limite

- En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$
- En déduire que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

Exercice 2 : A propos de x^n

Soit x, a deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

- Montrer que $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$
- En déduire $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ au point a)

Exercice 3 : Limites et Dérivées

En utilisant les dérivées, démontrer les limites suivantes :

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exercice 4 : Théorèmes d'opérations

En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :

- $\lim_{x \to \infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$
- $\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty$
- $\lim_{x \to \infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

Exercice 5 : Théorèmes d'opérations (bis)

Montrer les limites suivantes

$$\lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty \qquad \lim_{+\infty} x\ln(1+1/x) = 1$$

$$\lim_{0+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \qquad \lim_{0+} \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{0+} \frac{x}{e^{x^2}-1} = +\infty$$

$$\lim_{0+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1} = 1 \qquad \lim_{0+} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 0 \qquad \lim_{0+} \frac{x}{2}\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{1} \frac{x^n-1}{x^p-1} = \frac{n}{p} \qquad \lim_{0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{0+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \qquad \lim_{+\infty} x^3 \ln(1+1/x\sqrt{x}) = +\infty \qquad \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{1}{2}$$

Pour les braves

Les exercices qui suivent sont difficiles (calculatoire et/ou abstraits) dans l'état de vos connaissances. Les deux premiers seront bien plus faciles une fois qu'on aura vu les développements limités (en fin de semestre), le dernier fait appel à la définition formelle de la limite (avec des quantificateurs). Ils sont conseillés à ceux qui veulent aller plus loin.

Exercice 6 : Limites en 0

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire).

$\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$
$\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$	$\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$
$(\ln(e+x))^{1/x}$	$\tan(x)\ln(\sin(x))$
$\dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$	$\left(x\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)}$
$\dfrac{e^{1/(x^2+1)}-e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$	

Exercice 7 : Limites en $+\infty$

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$. On pourra se ramener à des limites classiques en faisant des changements de variables.

$\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$	$\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$
$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$
$x\sin(\pi/x)$	$\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$
$\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$	$\ln(3x^2-4)-\ln(x^2-1)$
$\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$	$\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x}$
$\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$	$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

Exercice 8 : Limite et fonction périodique (difficile)
On considère f une fonction périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.
On pourra revenir à la définition avec les quantificateurs pour cet exercice.