

## Feuille d'exercices « Dérivées Partielles »

### Exercice 1 : Fonctions exponentielles

On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $(x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 1$ .

- Pour  $y_0$  fixé, calculer la limite de  $x \mapsto f(x, y_0)$  en 0.
- Pour  $x_0$  fixé, calculer la limite de  $y \mapsto f(x_0, y)$  en 0.
- Calculer les dérivées partielles de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .

### Exercice 2 : Composées

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (c'est à dire dont toutes les dérivées partielles existent et sont continues). On considère la fonction  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

### Exercice 3 : Dérivée d'ordre 2

Calculer les dérivées partielles aux ordres 1 et 2 de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

### Exercice 4 : Dérivée d'ordre 2

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  (c'est à dire dont les dérivées secondes existent et sont continues) telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f(x, y) = -f(y, x)$ .

- Donner un exemple de telle fonction
- Montrer que la fonction  $f$  vérifie  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, a) = 0$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 5 : Contrainte

On considère une casserole de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ . On note  $V$  le volume de la casserole et  $S$  sa surface.

- Exprimer  $V$  et  $S$  en fonction de  $R$  et  $h$ .
- Calculer les différentielles totales  $dV$  et  $dS$ .
- On suppose que le volume est fixe ( $V = V_0$ ). Trouver une relation entre  $dh$  et  $dR$ .
- En déduire une expression simple de  $dS$  en fonction de  $dh$  ou  $dR$  (un seul des deux, celui qui vous semble le plus simple)
- En déduire les couples  $(h, R)$  qui annulent  $dS$ .

Les différentes étapes de l'exercice précédent permettent de minimiser la surface à volume constant sans jamais donner la forme explicite de  $S$  en fonction de  $R$ . C'est une approche différente de celle vue au S1 pour le même exercice, qui consistait à substituer  $h$  à  $R$  dans l'expression de  $R$ . Ici on substitue les différentielles.