27 janvier 2020

Feuille d'exercices « Dérivées Partielles »

Exercice 1 : Fonctions exponentielles
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^x$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

— Pour y_0 fixé, calculer la limite de $x \mapsto f(x, y_0)$ en 0.
— Pour x_0 fixé, calculer la limite de $y \mapsto f(x_0, y)$ en 0.
— Calculer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

— Pour y_0 fixé, $x \mapsto f(x, y_0) = x^2 + y_0^2$ tend vers y_0^2 quand $x \to 0$.
— Pour x_0 fixé, $y \mapsto f(x_0, y) = x_0^2 + y^2$ tend vers x_0^2 quand $y \to 0$.
— Les dérivées partielles sont données en dérivants les fonctions partielles, comme vu en cours. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}{dx} = 2x - \frac{y^2}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}{dy} = \frac{2y}{x}$$

Exercice 2 : Composées
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire dont toutes les dérivées partielles existent et sont continues). On considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 3 : Dérivée d'ordre 2
Calculer les dérivées partielles aux ordres 1 et 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

Exercice 4 : Dérivée d'ordre 2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est à dire dont les dérivées secondes existent et sont continues) telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = -f(y, x)$.

— Donner un exemple de telle fonction
— Montrer que la fonction f vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Contrainte
On considère une casserole de rayon R et de hauteur h. On note V le volume de la casserole et S sa surface.

— Exprimer V et S en fonction de R et h.
— Calculer les différentielles totales dV et dS.
— On suppose que le volume est fixe ($V = V_0$). Trouver une relation entre dh et dR.
— En déduire une expression simple de dS en fonction de dh ou dR (un seul des deux, celui qui vous semble le plus simple)

— En déduire les couples (h, R) qui annulent dS.

Les différentes étapes de l'exercice précédent permettent de minimiser la surface à volume constant sans jamais donner la forme explicite de S en fonction de R. C'est une approche différente de celle vue au S1 pour le même exercice, qui consistait à substituer h à R dans l'expression de R. Ici on subsitue les différentielles.