

Corrigé partiel pour « Formules trigonométriques »

Exercice 1 : Formules trigonométriques (I)

Calculer les valeurs exactes des quantités suivantes :

1. $\cos(\pi/12)$
2. $\sin(11\pi/12)$
3. $\cos(\pi/8)$
4. $\sin(7\pi/8)$

Correction

$\pi/12$ est le demi-angle de $\pi/6$ (valeur remarquable). De même $\pi/8$ est le demi-angle de $\pi/4$ (valeur remarquable). On va donc utiliser des formules de demi-angle pour répondre aux questions. On rappelle

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

1. $\cos(\pi/12)$ est positif. D'après la formule sur les angles doubles $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$:

$$\cos(\pi/12) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/6)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

2. $\sin(11\pi/12) = \sin(\pi - 11\pi/12) = \sin(\pi/12)$. De plus $\sin^2(\pi/12) + \cos^2(\pi/12) = 1$. On a donc :

$$\sin(11\pi/12) = \sin(\pi/12) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/12)} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

3. Comme pour la question 1, $\cos(\pi/8)$ est positif et on utilise l'égalité $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ qui donne

$$\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

4. Comme pour la question 2, on observe que $\sin(7\pi/8) = \sin(\pi/8) > 0$ et on utilise l'égalité $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

$$\sin(7\pi/8) = \sin(\pi/8) = \sqrt{1 - \cos^2(\pi/8)} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 2 : Formules trigonométriques (II)

Résoudre dans \mathbb{R} les (in)équations suivantes

1. $\cos(x) + \sin(x) \geq 1$
2. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \geq 1$
3. $\cos(2x) + 2\sin(x) = 0$
4. $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$
5. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$
6. $\cos(3x) - \sin(2x) = 0$ [difficile]

Correction

Pour tous ces exercices, il faut utiliser des formules de factorisation..

1. On a une expression de la forme $a \cos(x) + b \sin(x)$ avec $a = b = 1$. On la met sous forme $R \cos(x - \psi)$ en posant $R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ et en cherchant ψ tel que $\cos(\psi) = a/R = 1/\sqrt{2}$ et $\sin(\psi) = b/R = 1/\sqrt{2}$. $\psi = \pi/4$ convient. On a donc

$$\cos(x) + \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos(x - \pi/4) \geq 1 \Leftrightarrow \cos(x - \pi/4) \geq 1/\sqrt{2}$$

Comme \cos est 2π -périodique, il suffit de résoudre l'inéquation sur $[-\pi, \pi]$. Un tableau de variation (ou un dessin) montre que la solution de l'inéquation sur $[-\pi, \pi]$ est $(x - \pi/4) \in [-\pi/4, \pi/4]$, c'est à dire $x \in [0, \pi/2]$. On en conclut $\cos(x) + \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [0, \pi/2] + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2. Comme pour la question 1, on factorise l'expression $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $R \cos(x - \psi)$ en posant $R = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ et en cherchant ψ tel que $\cos(\psi) = a/R = 1/2$ et $\sin(\psi) = b/R = \sqrt{3}/2$. $\psi = \pi/3$ convient. On a donc

$$\cos(x) + \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2 \cos(x - \pi/3) \geq 1 \Leftrightarrow \cos(x - \pi/3) \geq 1/2$$

Comme \cos est 2π -périodique, il suffit de résoudre l'inéquation sur $[-\pi, \pi]$. Un tableau de variation (ou un dessin) montre que la solution de l'inéquation sur $[-\pi, \pi]$ est $(x - \pi/3) \in [-\pi/3, \pi/3]$, c'est à dire $x \in [0, 2\pi/3]$. On en conclut $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi/3] + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Dans cette question, on essaie de tout exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$.

$$\begin{aligned} \cos(2x) + 2\sin(x) = 0 &\Leftrightarrow (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + 2\sin(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2(x)) + 2\sin(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\sin^2(x) + 2\sin(x) + 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose $\sin(x) = X$ et on cherche à résoudre l'équation de degré 2 $-2X^2 + 2X + 1 = 0$. En calculant le discriminant, on trouve que les solutions sont $X_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et on est ramené à résoudre $\sin(x) = X_1$ et $\sin(x) = X_2$. $X_2 > 1$ donc l'équation $\sin(x) = X_2$ n'a pas de solution. $X_1 \in [-1, 1]$ donc l'équation $\sin(x) = X_1$ a une infinité de solutions. Comme X_1 n'est pas un sin remarquable, on passe par la fonction arcsin

$$\begin{aligned} \sin(x) = X_1 &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\arcsin(X_1)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(X_1) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - \arcsin(X_1) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

. En notant $\theta = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, les solutions de l'équation sont donc $\{\theta + 2k\pi, \pi - \theta + 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

4. Même méthode que pour la question 3, on exprime tout en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) - 2\sin(x) &= 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)(\cos(x) - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ x = \pi/2 + k\pi \end{cases}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $x \in \{\pi/2 + k\pi, 2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

5. Idem, on exprime tout en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - \sin(x)(2\sin(x)\cos(x)) \\ &= \cos(x)[\cos^2(x) - \sin^2(x) - 2\sin^2(x)] = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)] \\ &= \cos(x)[4\cos^2(x) - 3]\end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour obtenir ce résultat (cours sur les complexes). On a de même $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et donc

$$\begin{aligned}\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(x) &= \cos(x)[4\cos^2(x) - 3] + [2\cos^2(x) - 1] + \cos(x) \\ &= 4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1\end{aligned}$$

En posant $X = \cos(x)$, on est donc amené à chercher les solutions (dans $[-1, 1]$) de l'équation $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 0$ dont une solution simple est $-1/2$. On cherche à factoriser le polynôme sous la forme

$$\begin{aligned}4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 &= (X + 1/2)(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^3 + (a/2 + b)X^2 + (c + b/2)X + c/2\end{aligned}$$

Par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a = 4 \\ a/2 + b = 2 \\ c + b/2 = -2 \\ c/2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

et on a donc $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = (X + 1/2)(4X^2 + 2) = 4(X + 1/2)(X^2 + 1/2)$. Le trinôme $X^2 + 1/2$ n'a pas de racines réelle et la seule solution de $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 0$ est $X = -1/2$. Il ne reste plus pour conclure qu'à résoudre $\cos(x) = -1/2$ dont les solutions sont $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

6. On cherche à tout exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. D'après la question précédente, $\cos(3x) = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)]$ et les formules du cours donnent $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. On a donc :

$\cos(3x) - \sin(2x) = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)] - 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x)[1 - 2\sin(x) - 4\sin^2(x)]$ qui s'annule si $\cos(x) = 0$ (c'est à dire $x = \pi/2 + k\pi$) ou si $1 - 2\sin(x) - 4\sin^2(x) = 0$. On est donc amené à résoudre l'équation de second degré $1 - 2X - 4X^2 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ puis les équations $\sin(x) = X_1$ et $\sin(x) = X_2$. Comme X_1 et X_2 sont dans $[-1, 1]$, ces deux équations ont des solutions. Au final, en raisonnant comme précédemment et en notant $\theta_1 = \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$ et $\theta_2 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$, on trouve les solutions suivantes :

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \theta_1, -\theta_1, \theta_2, -\theta_2\right\} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

7.

Exercice 3 : Tangente

Donner le nombre de solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation

$$\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0$$

Exercice 4 : Fonctions trigonométriques réciproques

Résoudre dans \mathbb{R} (sauf mention explicite du contraire) les équations trigonométriques suivantes :

1. $10 \cos(8\theta) = -5$
2. $2 \sin(\theta/4) = \sqrt{3}$
3. $2 \sin(\theta/4) = \sqrt{3}$ dans $[0, 16\pi]$
4. $10 + 7 \tan(4\theta) = 3$ dans $[-\pi, 0]$.
5. $3 - 4 \sin(4\theta) = 5$ dans $[-3\pi/2, -\pi/2]$
6. $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 = 0$ dans $[0, 2\pi]$

Correction

Les questions 1 à 5 sont corrigés dans la feuille d'exercice précédente. On reprend celle de la question 4 à titre illustratif et on donne celle de la question 6 ensuite

Correction de $10 + 7 \tan(4\theta) = 3$ dans $[-\pi, 0]$ On raisonne par équivalence

$$\begin{aligned} 10 + 7 \tan(4\theta) = 3 &\Leftrightarrow \tan(4\theta) = -1 \\ &\Leftrightarrow \tan(4\theta) = \tan(-\pi/4) \\ &\Leftrightarrow 4\theta = -\pi/4 + k\pi \\ &\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

On cherche ensuite les solutions qui sont dans $[-\pi, 0]$. Par exemple, $-\frac{\pi}{16}$ est solution. Comme toutes les solutions sont "décalées" de $\pi/4$, il suffit de lui ajouter $\pi/4$ jusqu'à être plus grand que 0 et de lui retrancher $\pi/4$ jusqu'à être plus petit que $-\pi$. Au final, on trouve que les solutions sont

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{16}, -\frac{5\pi}{16}, -\frac{9\pi}{16}, -\frac{13\pi}{16} \right\}$$

Correction de $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 = 0$ dans $[0, 2\pi]$ On pose $X = \cos(x)$ et on se ramène à l'équation de second degré $2X^2 - 3X + 1 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = -1$ et $X_2 = -1/2$. Les deux valeurs sont dans $[-1, 1]$ dont leur arccos sont bien définis.

$$\begin{cases} \cos(x) = -1 \\ \text{OU} \\ \cos(x) = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ \text{OU} \\ x = 2\pi/3 + 2k\pi \\ \text{OU} \\ x = -2\pi/3 + 2k\pi \end{cases}$$

En conservant uniquement les solutions dans $[0, 2\pi]$, on obtient

$$x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

Exercice 5 : Inéquations

Résoudre dans \mathbb{R} (sauf mention explicite du contraire) les équations suivantes :

1. $|\cos(x)| \geq |\sin(x)|$
2. $\ln(\cos^2(x)) = 0$
3. $2\ln(\cos(x)) = 0$
4. $\sqrt{1 - \cos^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $e^{\cos(x)} \leq 1$

Correction

1. Par 2π -périodicité, on peut se limiter à $x \in [0, 2\pi]$. De plus, comme $|\cos(x + \pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)|$ et de même pour $|\sin|$, la fonction $|\cos(x)| - |\sin(x)|$ est en fait π -périodique et on peut donc se limiter à $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. On cherche ensuite à se débarrasser des valeurs absolues en distinguant 2 cas.

Premier cas : $x \in [0, \pi/2]$ Sur cet intervalle, l'inégalité se réduit à (E_1)

$$|\cos(x)| \geq |\sin(x)| \Leftrightarrow \cos(x) \geq \sin(x) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos(x + \pi/4) \geq 0$$

En faisant (par exemple) une étude de signe de $\cos(x + \pi/4)$ sur $[0, \pi/2]$, on trouve que les solutions de (E_1) sont $x \in [0, \pi/4]$.

Second cas : $x \in [-\pi/2, 0]$ Sur cet intervalle, l'inégalité se réduit à (E_2)

$$|\cos(x)| \geq |\sin(x)| \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\sin(x) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos(x - \pi/4) \geq 0$$

En faisant (par exemple) une étude de signe de $\cos(x - \pi/4)$ sur $[-\pi/2, 0]$, on trouve que les solutions de (E_2) sont $x \in [-\pi/4, 0]$.

En recollant les morceaux et en utilisant la π -périodicité, on montre que l'ensemble des solutions est $[-\pi/4, \pi/4] + k\pi$

2. On raisonne par équivalence.

$$\ln(\cos^2(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \cos(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 [2\pi] \\ x = \pi [2\pi] \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

3. On raisonne par équivalence.

$$2\ln(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(\cos(x)) \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 [2\pi]$$

L'ensemble des solutions est donc $\{2k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Remarque Notez que l'ensemble solution n'est pas le même que dans la question précédente alors qu'on pourrait naïvement penser que $\ln(\cos^2(x)) = 2\ln(\cos(x))$. C'est évidemment faux dès que $\cos(x) < 0$: le deuxième membre n'est alors pas défini... Et la bonne égalité est en fait $\ln(\cos^2(x)) = 2\ln(\sqrt{\cos^2(x)}) = 2\ln|\cos(x)|$.

4. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |\sin(x)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/3 [2\pi] \\ x = -\pi/3 [2\pi] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2\pi/3 [2\pi] \\ x = -2\pi/3 [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\pm\pi/3 + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

5. On raisonne par équivalence.

$$e^{\cos(x)} \leq 1 \Leftrightarrow \cos(x) \leq 0$$

Comme \cos est paire et 2π -périodique et paire, on se contente de résoudre l'équation sur $[0, \pi]$. Sur $[0, \pi]$, on montre avec l'aide d'un dessin ou d'un tableau de variation que $\cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi/2, \pi]$. Par parité, la solution sur $[-\pi, \pi]$ est $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ qui s'étend par périodicité à $[-\pi + 2k\pi, -\pi/2 + 2k\pi] \cup [\pi/2 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) qui peut se réécrire plus simplement $\left\{ \left[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi \right] \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 6 : arcsin

On cherche à calculer $X = \arcsin \left(-\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

2. Appliquer la formule précédente à $x = \frac{\pi}{8}$.

3. En déduire la valeur de X .

4. Vérifier que vous n'avez pas fait de fautes, par exemple avec une calculatrice.

Correction sur demande, si vous me montrez que vous avez cherché

Exercice 7 : Produit de cosinus

Soit $a \in (0, \pi)$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{a}{2^k} \right)$$

On pourra utiliser $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\frac{a}{2^k} \right) \right)$$

Correction sur demande, si vous me montrez que vous avez cherché