

Exercices « Limites, Dérivées et DLs »

Exercice 1 : Limite

- En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché

Exercice 2 : A propos de x^n

Soit x, a deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

- Montrer que $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$
- En déduire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ au point a)

Correction Il s'agit d'une généralisation de l'égalité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. On peut la montrer directement :

$$\begin{aligned} (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) &= x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-1}x \\ &\quad - ax^{n-1} - \dots - a^{n-1}x - a^n \\ &= x^n - a^n \end{aligned}$$

ou s'habituer à manipuler des sommes puisque $x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i}$ et donc

$$\begin{aligned} (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) &= (x - a) \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} \\ &= x \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} - a \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} x^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \underbrace{\sum_{j=1}^n a^j x^{n-j}}_{j=i+1} \\ &= \underbrace{a^0 x^{n-0}}_{i=0} + \sum_{i=1}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{j=1}^{n-1} a^j x^{n-j} - \underbrace{a^n x^{n-n}}_{j=n} \\ &= a^n - x^n \end{aligned}$$

la deuxième méthode est plus longue mais reprend exactement le principe de la première, j'ai juste détaillé les étapes.

Une fois l'égalité obtenue, on peut finir l'exercice par théorème d'opération :

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} a^{n-1}} + \underbrace{ax^{n-2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} a^{n-1}} + \cdots + \underbrace{a^{n-2}x}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} a^{n-1}} + a^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow a} na^{n-1} \quad (1)$$

Exercice 3 : Limites et Dérivées

En utilisant les dérivées, démontrer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Correction dans le cours sur les dérivées

Exercice 4 : Théorèmes d'opérations

En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = +\infty$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

Correction

1. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des racines dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = \sqrt{x}$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \underbrace{X^8 e^{-X}}_{\text{croissance comparée}} = 0$$

2. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des carrés dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = x^2$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \underbrace{X^{-2} e^{2X}}_{\text{croissance comparée}} = 0$$

3. Comme $1/x$ est *petit* quand x est grand, on se ramène à une limite usuelle avec \ln en posant $X = 1/x$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \underbrace{\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X}}_{\text{limite usuelle}} = 1$$

4. Comme x^2 est *petit* quand x est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec \exp en faisant apparaître du x^2 dans le numérateur.

$$\frac{x}{e^{x^2} - 1} = \frac{1}{x} \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} = \frac{1}{x} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{-1}$$

La limite de $1/x$ en 0^+ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \underbrace{\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1}{X}}_{\text{limite usuelle}} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{-1} = +\infty \times 1 = +\infty$$

5. Là encore, comme $1/x\sqrt{x}$ est petit, on force l'apparition d'une limite classique :

$$x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \times x\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

La limite de \sqrt{x} en $+\infty$ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x\sqrt{x}$ puis par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \underbrace{\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X}}_{\text{limite usuelle}} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

6. Comme x^2 est *petit* quand x est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec \sin en faisant apparaître du x^2 dans le numérateur.

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \frac{x^2}{\sin(x^2)} = \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)^{-1}$$

. La limite de $2/x\sqrt{x}$ en 0^+ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = \left(\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin(X)}{X} \right)^{-1} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = +\infty \times 1 = +\infty$$

7. cf question suivante avec $a = b = 1$

8. Il s'agit d'une forme indéterminée du type 1^∞ . On passe sous forme exponentielle :

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = \exp(bx \ln(1 + a/x))$$

et on étudie la limite en $+\infty$ de $bx \ln(1 + a/x)$. Comme pour les exercices précédents, on force l'apparition d'une limite classique en posant $X = a/x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} bx \ln(1 + a/x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} ba \frac{\ln(1 + X)}{X} = ba$$

Par composition, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{X \rightarrow 0^+} e^X = e^{ba}$$

Exercice 5 : Théorèmes d'opérations (bis)

Montrer les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} \lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0 & \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty & \lim_{+\infty} x \ln(1 + 1/x) = 1 \\ \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + 4x)}{x} = 4 & \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + x^2)}{x\sqrt{x}} = 0 & \lim_{0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty \\ \lim_{0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} = 1 & \lim_{0^+} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 0 & \lim_{0^+} \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = \frac{3}{2} \\ \lim_1 \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{n}{p} & \lim_0 \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} & \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty & \lim_{+\infty} x^3 \ln(1 + 1/x\sqrt{x}) = +\infty & \lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Correction Les limites 1, 2, 3 et 7 ont été vues en classe. Les limites 6, 12 sont corrigées dans l'exercice précédent et la limite 14 se démontre comme la limite 5 de l'exercice précédent. On se contente de corriger les autres, en faisant apparaître à chaque fois une limite usuelle.

limite 4 On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 en posant $X = 4x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 4x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X/4} = 4 \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 4$$

limite 5 On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 (et des termes supplémentaires qui ne posent pas de problèmes) en posant $X = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + x^2)}{x\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X/X^{1/4}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^{1/4} \times \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 0 \times 1 = 0$$

limite 8 On peut décomposer l'expression en termes qui ne posent pas problèmes :

$$\frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 1 - \underbrace{(1+x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 1 - 1 \times 1 = 0$$

limite 9 On revient à la définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x} < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x}$$

Comme on cherche la limite en 0^+ , on peut se restreindre à $x > 0$ (et donc $x/2 > 0$). On a alors :

$$\frac{x}{2} \left(\frac{3}{x} - 1 \right) < \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{2} \frac{3}{x} \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{x}{2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}} < \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{2}$$

Et on conclut par théorème d'encadrement.

limite 10 On s'appuie sur l'égalité de l'exercice 2 : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$ qui permet de réécrire l'expression :

$$\frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1)} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1}{x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1}$$

et de lever l'indétermination. En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ fois}} = p \end{aligned}$$

Et on conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{n}{p}$$

limite 11 Comme pour la limite 7, on commence par se débarrasser des racines en passant par les

radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} &= \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} \frac{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{\cos^2(x) - \cos(2x)}{\sin^2(x)} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{\cos^2(x) - (\cos^2(x) - \sin^2(x))}{\sin^2(x)} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}
 \end{aligned}$$

pour aboutir à une forme qui n'est plus indéterminée. On conclut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} = \frac{1}{2}$$

limite 13 Il ne s'agit pas d'une forme indéterminée. Par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \times +\infty = -\infty$$

limite 15 Il s'agit d'une forme indéterminée du style $\infty - \infty$. On se débarrasse des racines en multipliant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
 &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}
 \end{aligned}$$

On factorise ensuite par le monôme en x de plus haut degré en haut et en bas :

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \frac{\overbrace{1 + \frac{1}{x}}^{x \rightarrow +\infty \rightarrow 1}}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 1}}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Pour les braves

Les exercices qui suivent sont difficiles (calculatoire et/ou abstraits) dans l'état de vos connaissances. Les deux premiers seront bien plus faciles une fois qu'on aura vu les développements limités (en fin de semestre), le dernier fait appel à la définition formelle de la limite (avec des quantificateurs). Ils sont conseillés à ceux qui veulent aller plus loin et peuvent être résolus dès maintenant mais la correction proposée utilise les développements limités.

Exercice 6 : Limites en 0

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire).

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{(\ln(e+x))^{1/x}} \\ \frac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} \\ \frac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\ \frac{x}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}} \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x) \ln(\sin(x))} \\ \left(x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)} \\ \end{array}$$

Correction Les limites sont numérotées de haut en bas, puis de gauche à droite.

Limite 1 On n'a pas réellement besoin de DL pour déterminer cette limite, il suffit de réduire les termes au même dénominateur avant de simplifier l'expression

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} = \frac{2-x}{x-1} \times \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2$$

On peut conclure par théorème d'opération

$$\lim_{0^-} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = -2 \times \lim_{0^-} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = -2 \times \lim_{0^+} \frac{1}{x} = -\infty$$

Limite 2 Le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ nous donne $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$ d'où on déduit par théorème de composition que $\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 + o(x^2)$. En substituant dans la limite de départ, on obtient

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Limite 3 On raisonne par étapes en se ramenant à des DLs connus. On commence par se ramener au DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$ en factorisant par e dans le logarithme.

$$\ln(e+x) = \ln(e(1+x/e)) = \ln(e) + \ln(1+x/e) = 1 + \frac{x}{e} + o(x)$$

On passe ensuite en forme exponentielle et on réutilise le DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$ avant de

conclure.

$$\begin{aligned} (\ln(e+x))^{1/x} &= \left(1 + \frac{x}{e} + o(x)\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1 + \frac{x}{e} + o(x))}{x}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\frac{x}{e} + o(x)}{x}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{\frac{1}{e} + o(1)}{1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{e}}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

Limite 4 On commence par faire un DL en 0 de $x \mapsto \sin(x)^x$ et de $x \mapsto x^x$. Dans les deux cas, on commence par passer sous forme exponentielle pour simplifier les calculs

$$\begin{aligned} \sin(x)^x &= \exp(x \ln(\sin(x))) = \exp(x \ln(x + o(x))) = \exp(x[\ln(x) + \ln(1 + o(1))]) \\ &= \exp(x[\ln(x) + o(1)]) = \exp(x \ln(x) + o(x)) \end{aligned}$$

On a bien $o(x) = o(x \ln(x))$ (car $x \ll x \ln(x)$ en 0) et $x \ln(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ donc on peut utiliser le DL en 0 de $x \mapsto e^x$ pour simplifier l'expression précédente et obtenir

$$\sin(x)^x = 1 + x \ln(x) + o(x \ln(x))$$

Un raisonnement similaire donne

$$x^x = 1 + x \ln(x) + o(x \ln(x))$$

En injectant ces DL dans la limite de départ, on obtient

$$\frac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} = \frac{1 + x \ln(x) + o(x \ln(x)) - 1}{1 + x \ln(x) + o(x \ln(x)) - 1} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Limite 5 Comme pour la question précédente, on cherche un DL en 0 du numérateur et un autre du dénominateur. On commence par le DL du dénominateur. Il s'agit d'un DL en 0 classique : $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ d'où on déduit $\sqrt[3]{1+x} - 1 = \frac{x}{3} + o(x)$. Le DL du numérateur est plus compliqué. On s'attaque à chaque terme séparément et on procède par étapes en essayant de se ramener à des DL connus à chaque fois. Pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + o(x^2) \\ \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= \exp(1 - x^2 + o(x^2)) = e \times \exp(-x^2 + o(x^2)) = e(-x^2 + o(x^2)) \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + o(x) \\ \exp(e^x) &= \exp(1 + x + o(x)) = e \times \exp(x + o(x)) = e(x + o(x)) \end{aligned}$$

En combinant les deux termes et en simplifiant **correctement** les termes négligeables, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1+x^2}} - e^{e^x} &= e(-x^2 + o(x^2)) - e(x + o(x)) \\ &= e(-x - x^2 + o(x) + o(x^2)) = e(x + o(x)) \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'injecter dans la limite de départ pour conclure :

$$\frac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \frac{e(x + o(x))}{\frac{x}{3} + o(x)} = \frac{e + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3e$$

Limite 6 On n'a pas besoin de DL pour cette limite, il faut juste être rigoureux dans les calculs

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'où on déduit $\lim_{0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$ et $\lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = +1$

Limite 7 Comme pour les limites précédente, le but est de se ramener à des DL en 0 connus. Le dénominateur ne pose pas de problème : $\sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{2} + o(x)$. Pour chacun des termes du numérateur, le terme dominant dans la racine est 4. On se ramène donc à une expression de la forme $u \mapsto \sqrt{1+u}$ en factorisant par 4 comme suit :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} &= \sqrt{4\left(1 + \frac{x}{4}\right)} = 2\sqrt{1 + \frac{x}{4}} = 2\left(1 + \frac{x}{8} + o(x)\right) = 2 + \frac{x}{4} + o(x) \\ \sqrt{3x+4} &= 2\sqrt{1 + \frac{3x}{4}} = 2\left(1 + \frac{3x}{8} + o(x)\right) = 2 + \frac{3x}{4} + o(x) \end{aligned}$$

En substituant tous ces DLs dans la limite de départ, on obtient :

$$\frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1} = \frac{\frac{x}{4} - \frac{3x}{4} + o(x)}{\frac{x}{2} + o(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$$

Limite 8 Les DLs ne sont pas nécessaires ici. Il suffit de réécrire l'expression pour faire apparaître les termes problématiques :

$$\tan(x) \ln(\sin(x)) = \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \times \sin(x) \ln(\sin(x))$$

On considère alors le changement de variables $X = \sin(x)$ pour se ramener à une limite du cours. Comme $X \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, par théorème de composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\sin(x)) = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$$

D'où on conclut $\lim_0 \tan(x) \ln(\sin(x)) = 0$ par théorème d'opérations.

Limite 9 Il s'agit encore d'une fonction complexe au premier abord qu'on va simplifier par étapes à l'aide de développements limités. On commence par la partie en cos en

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} &= x(1+x^2)^{-1} = x(1-x^2+o(x^2)) = x + o(x) \\ \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) &= \cos(x + o(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) &= x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + o(x) \end{aligned}$$

Puis on passe en forme exponentielle pour gérer la puissance et conclure à l'aide des théorèmes d'opérations.

$$\left(x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)} = \exp\left(\frac{\overbrace{\ln(x + o(x))}^{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}}{x^2+2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$$

Exercice 7 : Limites en $+\infty$

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$. On pourra se ramener à des limites classiques en faisant des changements de variables.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a+x} - \sqrt{x} \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \\ x \sin(\pi/x) \\ \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \\ \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x \\ \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^2 + 1}} \\ \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \\ \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-2} \\ \ln(3x^2 - 4) - \ln(x^2 - 1) \\ \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \\ \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \end{array}$$

Correction Les limites sont numérotées de haut en bas, de gauche à droite. Dans la majorité, le principe est le même, on identifie le terme dominant puis on factorise par le terme dominant pour se ramener à un DL connu (souvent en 0). On détaille les premières limites avant de devenir un peu plus synthétique.

Limite 1 Le terme dominant dans les deux racines est x . On factorise donc par \sqrt{x} pour se ramener à :

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1 \right)$$

On peut ensuite poser $X = \frac{a}{x}$. Comme $X \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$, on peut faire un DL en 0 de $X \mapsto \sqrt{1+X}$ pour écrire $\sqrt{1 + \frac{a}{x}} - 1 = \frac{a}{2x} + o(1/x)$. En injectant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\frac{a}{2x} + o(1/x) \right) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Limite 2 On pourrait utiliser les radicaux conjugués pour calculer cette limite mais on va passer par les DLs. Le terme dominant de chacune des racines est x . On factorise donc par x dans chacune pour se ramener au DL de $u \mapsto \sqrt{1+u}$ en 0.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1/2} - \sqrt{x} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} \\ &= \sqrt{x} \left[1 - \frac{1}{2x} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Limite 3 On se ramène à un DL en 0 en posant $X = \frac{\pi}{x}$.

$$x \sin(\pi/x) = x \sin(X) = x[X + o(X)] = x \left[\frac{\pi}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \pi + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi$$

Limite 4 On se ramène à un DL en 0 en posant $X = \frac{a}{x}$ en on passe sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} &= \exp(bx \ln(1 + X)) = \exp(bx(X + o(X))) \\ &= \exp\left(bx \left(\frac{a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \\ &= \exp(ab + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{ab}\end{aligned}$$

Limite 5 On factorise par le terme dominant x^2 dans la fraction rationnelle pour écrire :

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} = (1 - 2/x + 1/x^2)[1 - 4/x + 2/x^2]^{-1} = 1 - 2/x + 4/x + o(1/x) = 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On injecte ensuite ce DL dans la limite de départ, on passe sous forme exponentielle et on utilise le DL en 0 de $u \mapsto \ln(1 + u)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x &= \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[x \left(\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ &= \exp(2 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^2\end{aligned}$$

Limite 6 On passe sous forme exponentielle et on utilise le DL en 0 de $u \mapsto \ln(1 + u)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} &= \exp\left[2x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right] = \exp\left[2x \left(\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ &= \exp(4 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^4\end{aligned}$$

Limite 7 Il n'y pas vraiment d'indétermination, le terme dominant du dénominateur est x^2 alors que celui du numérateur est au plus x . On peut donc tout de suite conclure que la fonction tend vers 0. On peut néanmoins se demander comment elle tend vers 0. Un DL du numérateur donne :

$$x - \sqrt{x^2 + 1} = x \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{2x}(1 + o(1))$$

Combiné au DL du dénominateur, on obtient :

$$\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2x^3}(1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Limite 8 Comme pour la question précédente, on factorise par x dans chaque racine et on utilise le DL en 0 des fonctions $u \mapsto (1 + u)^\alpha$.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} &= \sqrt[4]{x} \left[1 + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = \frac{1}{4x^{3/4}}(1 + o(1)) \\ \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} &= \sqrt[3]{x} \left[1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = \frac{1}{3x^{2/3}}(1 + o(1))\end{aligned}$$

En injectant ces DL dans la fonction de départ, on obtient :

$$\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} = \frac{\frac{1}{4x^{3/4}}(1+o(1))}{\frac{1}{3x^{2/3}}(1+o(1))} = \frac{3}{4}x^{-1/12}(1+o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Limite 9 Même mode de résolution que les limites 5 et 6.

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-2} = \exp \left(\underbrace{(3x-2)}_{=3x(1+o(1))} \underbrace{\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}_{=\frac{2}{x}(1+o(1))} \right) = \exp(6 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^6$$

Limite 10 On se ramène au DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$.

$$\ln(3x^2 - 4) - \ln(x^2 - 1) = \ln \left(\underbrace{\frac{3x^2 - 4}{x^2 - 1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(3)$$

Limite 11 Cette limite est un peu plus compliquée mais on commence comme d'habitude par passer sous forme exponentielle.

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) \right) = \exp \left(\underbrace{\frac{\ln(\ln(x))}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

Limite 12 Le terme dominant dans la première racine est x , on factorise donc par x pour se ramener au DL en 0 en de $u \mapsto \sqrt{1+u}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} &= \sqrt{x} \sqrt{1 + \underbrace{\sqrt{\frac{x}{x^2} + \sqrt{\frac{x}{x^4}}}}_{=u}} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{u}{2} + o(u)\right) \\ &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \end{aligned}$$

En injectant dans la fonction initiale, on obtient :

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right) = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Exercice 8 : Limite et fonction périodique (difficile)

On considère f une fonction périodique, définie sur \mathbb{R} et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

On pourra revenir à la définition avec les quantificateurs pour cet exercice.

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.