

Développements Limités

Mahendra Mariadassou

4 novembre 2019

Introduction

Plan du cours

- Domaine d'étude
- Limites, continuité, dérivabilité et variations
- Comparaison locale de fonction
- Etude locale des fonctions
- Retour sur la limite

Développement Limités

Le but des développements limités est de faire des **approximations** en **négligeant** certaines quantités. On va voir ici qu'on néglige toujours une quantité **par rapport** à une autre.

On va formaliser cette intuition avec la notion de **négligeabilité** et les notations de Landau.

Négligeabilité

Définition

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de $a \in \bar{\mathbb{R}}$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$ et

$$\forall x \in D_f \cap D_g \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

Dans la plupart des cas, g est non nulle au voisinage de 0 et la condition précédente peut se reformuler: f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$.

Notation de Landau

Si f est négligeable devant g en a , on note

- $f = o_a(g)$ en omettant a si le voisinage est clair. On dit qu'au voisinage de a , f est un $o(g)$ (prononcé "petit o de g")
- Par un abus de notation, on utilise la même notation pour des expressions: $x^2 = o(x)$ au voisinage de 0.
- On écrit enfin $f = g + o(h)$ pour dire $f - g = o(h)$.

Les cas particuliers suivants sont à **connaître**

- Si $a \in \mathbb{R}$ et $n < m$ alors $(x - a)^n = o_{\pm\infty}((x - a)^m)$ et $(x - a)^m = o_a((x - a)^n)$
- Si $\lim_a g = \pm\infty$ et f est bornée au voisinage de a (par exemple $\lim_a f$ finie), alors $f = o(g)$
- Si $f = o_a(1)$, alors $\lim_a f = 0$.

Propriétés des o

- Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$
- Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$
- Si $f = o(g)$, alors $f \times h = o(g \times h)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(\lambda g)$
- Si $f = o_a(1)$, alors $\lim_a f = 0$.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 \times f_2 = o(g_1 \times g_2)$

Exercices

Montrer que

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad x^\alpha = o_{+\infty}(e^x)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad e^x = o_{-\infty}(|x|^{-\alpha})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad x^{-\alpha} = o_{+\infty}(\ln(x))$

Approximation et somme

Une bonne règle heuristique à retenir pour s'assurer que le résultat approché est peu différent du résultat exact dans une somme est la suivante:

- Pour faire une approximation, on néglige un terme devant les autres **à l'intérieur d'une somme**

Exemple (I)

Considérons la distance $l' = \frac{lf}{l+f}$ qui apparaît régulièrement en optique. On souhaite connaître la distance l' quand la distance l est grande devant la focale f ($l \gg f$).

- Si on néglige f naivement en le posant égal à 0, on obtient $l' = 0$ qui est absurde
- En revanche, si on néglige f devant l dans la somme $f + l$, on commet une faible erreur puisque $l + f \simeq l$
- On peut donc poursuivre le calcul avec l'approximation $l' \simeq \frac{lf}{l+f} \simeq f$.

Exemple (II)

De la même façon, si $f(x)$ fait intervenir des sommes, on peut utiliser les mêmes arguments pour savoir comment x se comporte pour des grandes et des petites valeurs de x . Par exemple pour $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

- si $x \gg 1$, alors $x^2 + 1 \simeq x^2$ et $f(x) \simeq \frac{x}{x^2} = 1/x$
- si $x \ll 1$, alors $x^2 + 1 \simeq 1$ et $f(x) \simeq x$

Faire une approximation est **plus précis** que calculer une limite: En effet dire $f(x) \simeq x$ (quand $x \rightarrow 0$) est plus précis que d'écrire f tend vers 0 en 0. La limite se déduit de l'approximation mais pas l'inverse.

Exemple (III)

En notations de Landau, on a

- $f(x) = x(1 + o(1)) = x + o(x)$ au voisinage de 0
- $f(x) = \frac{1}{x}(1 + o(1)) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$

C'est très utile mais on peut avoir d'aller plus loin et de connaître le comportement de $f(x) - x$ au voisinage de 0. On sait juste $f(x) - x = o(x)$ mais on ne connaît pas son ordre de grandeur: x^2 ? x^3 ? Autre chose?

De même si on ne manipule pas directement des sommes mais des fonctions différentes (par exemple $\cos(x)$, $\sin(x)$), peut-on faire le même genre d'approximation?

C'est justement l'intérêt des développements limités.

Exercice

Donner des approximations des quantités suivantes:

$\frac{1}{1+A}$	$A \ll 1$	$A \gg 1$
$\frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2}$	$B \ll 1$	$B \gg 1$
$\frac{a+b}{ab}$	$a \ll b$	$a \gg b$
$\frac{x^2+y^2+2xy}{3x-y}$	$x \ll y$	$x \gg y$
$\sqrt{u^2+v^2}$	$u \ll v$	$u \gg v$
$e^{\sqrt{w}-1}$	$w \ll 1$	$w \gg 1$

Correction

$$\text{Quand } A \ll 1, \frac{1}{1+A} \simeq 1$$

$$\text{Quand } B \ll 1, \frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2} \simeq \frac{3}{2}$$

$$\text{Quand } a \ll b, \frac{a+b}{ab} \simeq \frac{1}{a}$$

$$\text{Quand } x \ll y, \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{3x - y} \simeq -y$$

$$\text{Quand } u \ll v, \sqrt{u^2 + v^2} \simeq |v|$$

$$\text{Quand } w \ll 1, e^{\sqrt{w}-1} \simeq \frac{1}{e}$$

$$\text{quand } A \gg 1, \frac{1}{1+A} \simeq \frac{1}{A}$$

$$\text{quand } B \gg 1, \frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2} \simeq 2$$

$$\text{quand } a \gg b, \frac{a+b}{ab} \simeq \frac{1}{b}$$

$$\text{quand } x \gg y, \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{3x - y} \simeq \frac{x}{3}$$

$$\text{quand } u \gg v, \sqrt{u^2 + v^2} \simeq |u|$$

$$\text{quand } w \gg 1, e^{\sqrt{w}-1} \simeq e^{\sqrt{w}-1}$$

Correction (II)

La quantité $e^{\sqrt{w}-1}$ est un cas particulier au sens où la somme est dans l'argument de l'exponentielle. On a donc

$$e^{\sqrt{w}-1} = \frac{1}{e} e^{\sqrt{w}}$$

Et il n'y a pas de somme et donc on ne peut en général négliger aucun terme. La formule se simplifie néanmoins quand $w \ll 1$ parce qu'on a alors $e^{\sqrt{w}} \simeq 1$. Mais on n'a négligé aucun terme pour arriver à cette approximation.

Développements Limités

Premier Contact

Soit $n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a **sauf éventuellement en a** . On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n en a (noté $DL_n(a)$) s'il existe des réels (b_0, b_1, \dots, b_n) tels que

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Attention, on ne développe pas les $(x - a)^k$ (puisque l'on regarde des termes correctifs quand on s'éloigne de a).

De façon générale, en posant $h = (x - a)$, on se ramènera **toujours** à des DL en 0.

Le terme $o((x - a)^n)$ est appelé *reste* ou *terme complémentaire*, le terme $b_0 + \dots + b_n(x - a)^n$ est appelé terme polynômial.

Formule de Taylor

Le théorème suivant permet de construire explicitement b_0, b_1, \dots, b_n

Soit $n \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a **sauf éventuellement en a** . Si f est n dérivable en a , alors elle admet le $DL_n(a)$ suivant

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Autrement si f est n fois dérivable, on sait choisir b_0, \dots, b_n sans (trop d') efforts

Intuition

Dans le développement de Taylor, les termes sont triés du plus important au moins important. En effet, au voisinage de a

$$1 \gg (x - a) \gg (x - a)^2 \gg \dots \gg (x - a)^n \gg o((x - a)^n)$$

Le DL permet donc d'obtenir des approximations successives, dites d'ordre $0, 1, \dots, n$ de f (au voisinage de a) en ne gardant que les termes les plus à gauche:

Ordre 0 $f(x) \simeq f(a)$

Ordre 1 $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$

Ordre 2 $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2$

\vdots

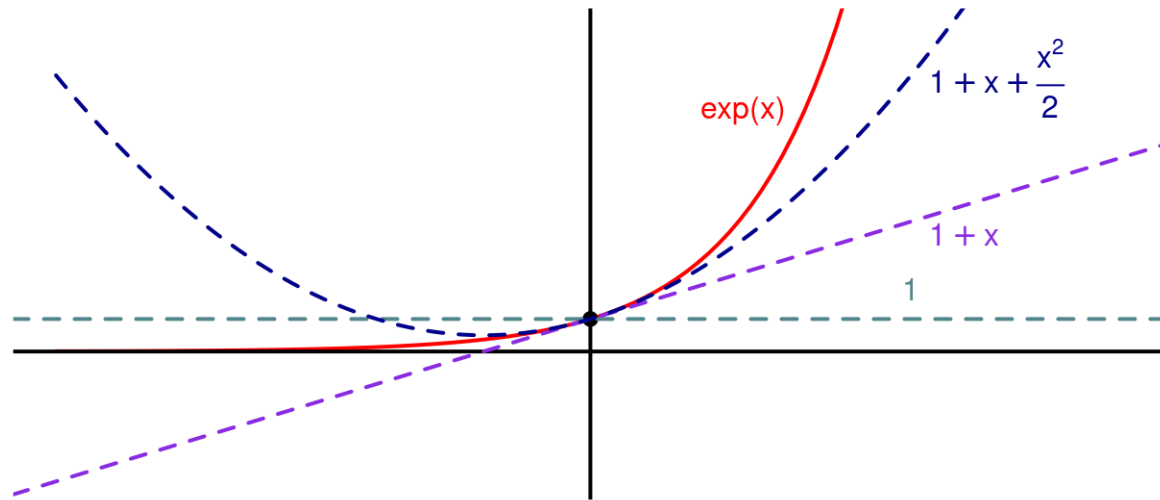
Ordre n $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$

Intuition (II)

Certaines des approximations précédentes sont bien connues:

- l'approximation d'ordre 0 est la limite
- l'approximation d'ordre 1 est la tangente
- Plus généralement, l'approximation d'ordre n est un polynôme de degré n

Intuition (III)



Lien avec l'approximation

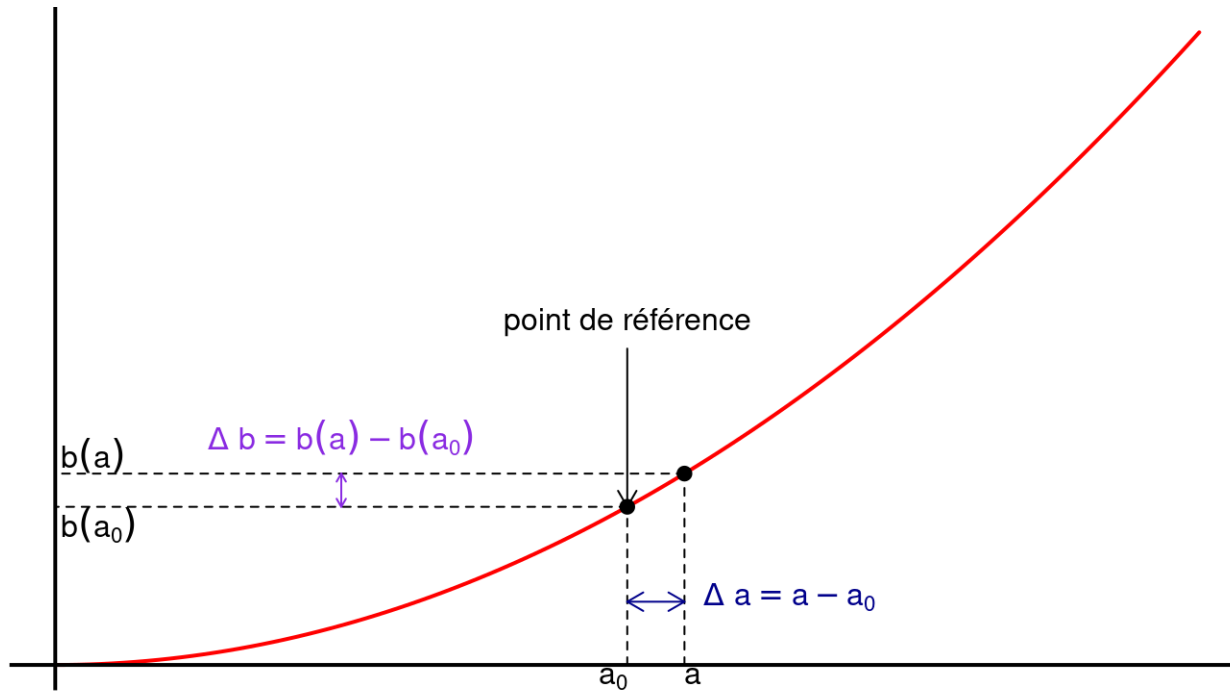
DLs et différentielle

Quand on utilise les DLs dans des contextes concrets, l'absence de notations f et x peut entraîner des erreurs. On va donc revenir aux notions de différentielles pour l'explicitier.

On considère deux quantités a et b reliées entre elles par une certaine relation b et on cherche une approximation de $b(a)$ au voisinage d'une valeur de référence a_0 . Si b est continue, on sait que $b(a)$ sera proche de $b(a_0)$ mais on voudrait être plus précis.

On définit les petits écarts $\Delta b = b(a) - b(a_0)$ et $\Delta a = a - a_0$. On sait que $\Delta b \rightarrow 0$ quand $\Delta a \rightarrow 0$ mais on cherche un lien plus précis entre Δb et Δa .

Illustration graphique



Lien avec la dérivée

On a vu avec les *différentielles* que pour des variations infinitésimales, on a

$$db = \alpha da \quad \text{avec } \alpha = \frac{db}{da}$$

Si on considère des variations **suffisamment petites** Δb et Δa , cette relation doit rester valable:

$$\Delta b \simeq \alpha \Delta a$$

Lien avec les dérivées successives

Si on n'est pas satisfait de l'approximation précédente, on peut rajouter des termes correctifs proportionnels à $\Delta a^2, \Delta a^3, \dots$:

$$\Delta b \simeq \alpha \Delta a + \beta \Delta a^2 + \gamma \Delta a^3 + \dots$$

Compte tenu des définitions de $\Delta b = b(a) - b(a_0)$ et $\Delta a = a - a_0$, cela revient à approcher la relation $b(a)$ par un polynôme b^{DL} de a de degré n (le fameux DL)

$$b^{DL}(a) = b(a_0) + \alpha(a - a_0) + \beta(a - a_0)^2 + \gamma(a - a_0)^3 + \dots$$

Lien avec les dérivées successives (II)

Pour s'assurer que l'approximation $b^{DL}(a) \simeq b(a)$ est valide au voisinage de a_0 , on impose à b^{DL} et b d'avoir la même valeur en a_0 , mais également la même pente, la même concavité, etc.

En termes formels,

$$\forall k \leq n \quad \frac{d^k b^{DL}}{da^k}(a_0) = \frac{d^k b}{da^k}(a_0)$$

Exercice

Dériver $b^{DL}(a)$ 3 fois en a_0 et montrer qu'au point de référence a_0 on a

- $\frac{db^{DL}}{da}(a_0) = \alpha$
- $\frac{d^2b^{DL}}{da^2}(a_0) = 2 \times \beta$
- $\frac{d^3b^{DL}}{da^3}(a_0) = 3 \times 2 \times \gamma$

En déduire les valeurs de α, β, γ

Lien avec les dérivées successives (III)

On retrouve ainsi en égalisant les dérivées, et avec la notation de Leibniz la formule de Taylor

$$b(a) \simeq b(a_0) + \frac{db}{da}(a_0)\Delta a + \frac{1}{2!} \frac{d^2b}{da^2}(a_0)\Delta a^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{d^nb}{da^n}(a_0)\Delta a^n$$

La méthode à suivre pour faire un DL est donc **systematique**

- exprimer b en fonction de a (souvent donné dans l'exercice)
- choisir un point de référence a_0 (idem)
- calculer les premières dérivées de b
- en déduire les coefficients du DL et conclure

Exemple (I)

Pour faire un DL de $u = \cos(\theta)$ autour de $\theta_0 = \pi/3$, on calcule les valeurs successives des dérivées de u en θ_0 .

- $u(\theta_0) = \cos(\theta_0) = \frac{1}{2}$
- $\frac{du}{d\theta}(\theta_0) = -\sin(\theta_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{d^2u}{d\theta^2}(\theta_0) = -\cos(\theta_0) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{d^3u}{d\theta^3}(\theta_0) = \sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple (II)

D'où on déduit que si θ reste proche de $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, on a

$$\begin{aligned} u(\theta) = \cos(\theta) &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)^3 \\ &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)^3 \end{aligned}$$

Exercice

En appliquant la procédure vue dans l'exemple, calculer un DL_3 des fonctions suivantes

- $v = \tan(u)$ lorsque u est proche de $\frac{\pi}{6}$
- $v = \ln(u)$ lorsque u est proche de 2
- $A = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$ lorsque t est proche de 1. Montrer que dans ce cas-là, le DL est en fait rigoureusement égal à A mais écrit sous une autre forme
- $A = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$ lorsque t est proche de 0. Commenter le résultat

Exercice - Proposition

Dans la pratique, on se ramène toujours à des DLs en 0 et il est bon de connaître les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes (à calculer comme vu dans l'exemple)

$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+u}$		$\frac{1}{1-u}$
e^u		e^{-u}
$\sqrt{1+u}$		$\sqrt{1-u}$
$\ln(1+u)$		$\ln(1-u)$
$(1+u)^\alpha$		$(1-u)^\alpha$

DLs classiques

Les DLs suivants au voisinage de 0 sont à connaître.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$$

Opérations sur les DLs

Comme pour les limites et les dérivées, on peut aussi utiliser des règles pour combiner les DLs.



Addition, multiplication de DL

Si f et g admettent toutes deux un DL_n en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $f + g$ admet un DL_n en 0, qui s'obtient en additionnant les parties polynômiales des DL_n de f et g (penser à la linéarité de la dérivée: $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$)
- $f \times g$ admet un DL_n en 0, qui s'obtient en multipliant les parties polynômiales des DL_n de f et g et **en ne gardant que les termes de degrés $\leq n$** .
- λf admet un DL_n en 0, qui s'obtient en multipliant la partie polynômiale du DL_n de f par λ .

Exemple

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

On a donc (les termes en rouges sont des $o(x^2)$):

- $e^x + \cos(x) = 2 + x + o(x^2)$ (terme d'ordre 2 du DL_2 nul)
- $$\begin{aligned} e^x \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &\quad + o(x^2) + o(x^4) + o(x^4) \\ &= 1 + x + o(x^2) \end{aligned}$$

Composition

Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux fonctions avec

$$0 \in A, 0 \in B \text{ et } f(0) = 0$$

Si f et g admettent toutes deux un DL_n en 0, alors $g \circ f$ s'obtient en composant les parties polynômiales des DL_n de f et g et **en ne gardant que les termes de degrés $\leq n$.**

Exemple (I)

Avec $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ et $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$, on pose implicitement $X = \frac{x^2}{1+x}$ (petit quand x est proche de 0).

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= \sin(X) \\ &= X - \frac{X^3}{3!} + o(X^3)\end{aligned}$$

Exemple (II)

Pour finir le calcul, on développe et on ne garde que les termes de degré au plus 3

$$X = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$X^2 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))^2 = x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

$$X^3 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$o(X^3) = o(x^3)$$

et donc au final

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= x - x^2 + x^3 - x^3/6 + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

Quotient

Comme d'habitude, quotienter par f revient à multiplier par $1/f$, on cherche donc un DL_n de $1/f$.

Soit f une fonction admettant le $DL_n(0)$ suivant:

$$f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$$

- Si $b_0 = 0$, alors $1/f$ n'a pas de DL en 0
- Sinon, $1/f$ admet un $DL_n(0)$ obtenu en écrivant:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(h)} &= \frac{1}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)} \\ &= \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)}\end{aligned}$$

Et il faut donc composer le $DL_n(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ avec $u = \frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)$.

Les calculs à faire peuvent être un brin compliqués...

Exemple (I)

On va calculer le $DL_2(0)$ de $1/e^x$. On sait que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + u$$

avec $u = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On va donc composer avec le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+u}$, à savoir

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Exemple (II)

On commence par calculer u^2 (et il est clair que $o(u^2) = o(x^2)$)

$$u^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 + o(x^2)$$

D'où on tire

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

Exemple (III)

Dans ce cas précis, on aurait aussi pu remarquer que $1/e^x = e^{-x}$ et se rappeler que le $DL_2(0)$ de e^{-x} est

$$\begin{aligned}e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

On retrouve heureusement le même résultat

Exercices

Calculer les DL s suivants (ceux notés $[*]$ sont difficiles)

$$DL_4(0) \text{ de } \frac{x}{\sin(x)}$$

$$DL_2(0) \text{ de } \ln(a^x + b^x) \quad [*]$$

$$DL_4(0) \text{ de } \frac{1}{\cos(x)}$$

$$DL_4(\pi/2) \text{ de } \sin(x)^{\sin(x)} \quad [*]$$

$$DL_2(\pi/4) \text{ de } \sqrt{\tan(x)}$$

$$DL_1(0) \text{ de } \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$$

$$DL_4(0) \text{ de } e^{\cos(x)}$$

$$DL_3(0) \text{ de } x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$DL_3(1) \text{ de } \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Solutions (I)

Calculer les DL s suivants

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin(x)} &= \frac{1}{1 - [x^2/3! - x^4/5! + o(x^4)]} \\ &= 1 + [x^2/3! - x^4/5!] + [x^2/3! - x^4/5!]^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(a^x + b^x) &= x \ln(a) + \ln(1 + (b/a)^x) \\ &= x \ln(a) + \ln(2) + \frac{1}{2}[(b/a)^x - 1] - \frac{1}{8}[(b/a)^x - 1]^2 \\ &= \ln(2) + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}x + x^2 \frac{\ln^2(b/a)}{2} - \frac{1}{8}x^2 \ln^2(b/a) + o(x^2) \\ &= \ln(2) + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}x + \frac{3(\ln(a) - \ln(b))^2}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Solutions (II)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - [x^2/2! - x^4/4! + o(x^4)]} \\&= 1 + [x^2/2! - x^4/4!] + [x^2/2! - x^4/4!]^2 + o(x^4) \\&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \\ \sin(x)^{\sin(x)} &= \sin(\pi/2 + h)^{\sin(\pi/2+h)} = \cos(h)^{\cos(h)} \\&= \exp\left[(1 - h^2/2 + h^4/24) \ln(1 - h^2/2 + h^4/24)\right] + o(h^4) \\&= \exp((1 - h^2/2 + h^4/24)(-h^2/2 + h^4/24 - h^4/8)) + o(h^4) \\&= \exp((1 - h^2/2 + h^4/24)(-h^2/2 - h^4/12)) + o(h^4) \\&= \exp(-h^2/2 - h^4/12 + h^4/4) + o(h^4) \\&= \exp(-h^2/2 + h^4/6) + o(h^4) \\&= 1 + (-h^2/2 + h^4/6) + (-h^2/2 + h^4/6)^2/2 + o(h^4) \\&= 1 - h^2/2 + h^4/6 + h^4/8 = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{7h^4}{24} + o(h^4)\end{aligned}$$

Solutions (III)

$$\tan(\pi/4 + x) = \tan(\pi/4) + \tan'(\pi/4)x + \frac{\tan''(\pi/4)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{\tan(\pi/4 + x)} = \sqrt{1 + (2x + 2x^2) + o(x^2)}$$

$$= 1 + (x + x^2) - \frac{1}{8}(2x + 2x^2)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Solutions (IV)

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}} + o(h)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sqrt{1-x}} &= \sqrt{1 + (1 - x/2)} + o(x) \\ &= \sqrt{2 - x/2} + o(x) = \sqrt{2} - \frac{x}{4\sqrt{2}} + o(x)\end{aligned}$$

Solutions (V)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} + o(x^4) = e \left(e^{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} \right) + o(x^4) \\ &= e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right)^2 / 2 \right) + o(x^4) \\ &= e \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{8} \right) + o(x^4) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Comme le calcul fait intervenir e^h avec h d'ordre x^2 , il suffit de faire un DL_2 de \exp en h pour avoir un DL_4 en x .

Solutions (VI)

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x/8 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1/(1-x)} = (1-x)^{-1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{3}{8}(-x)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x/2 + 3x^2/8 + o(x^2)$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1 + x/2 - x^2/8)(1 + x/2 + 3x^2/8) + o(x^2)$$

$$= 1 + x + o(x^2)$$

$$x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + x^2 + o(x^3)$$

Comme on multiplie par x à la fin, on se contente d'un DL₂ de $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Solutions (VI)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} = x \left[\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \right) + o(x^2) \right]$$

$$= x \left[1 - x + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2) \right]$$

$$= x - x^2 + \frac{23}{24}x^3 + o(x^3)$$

Comme $\ln(x) = x + o(x)$ et qu'on multiplie, on se contente d'un DL₂ de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

On obtiendra bien un DL₃ après multiplication.

Retour sur les DLs d'ordre 1 et 2

DL d'ordre 1 en physique

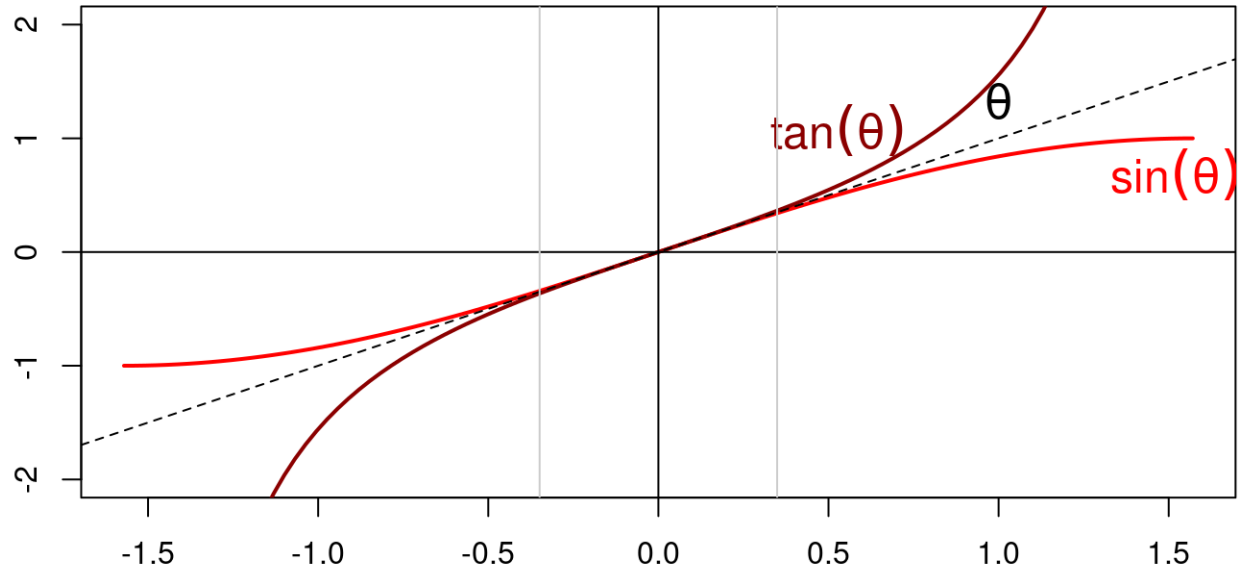
Physiquement, l'approximation d'ordre 1 considère que les variations Δb et Δa sont proportionnelles, et ce dans le même rapport que les différentielles db et da .

Du point de vue graphique, cela revient à confondre la courbe de $b(a)$ avec une droite (en l'occurrence sa tangente en a_0). Les $DL_1(0)$ sont très utilisés pour remplacer des petits angles θ , ils permettent d'écrire

- $\sin(\theta) \simeq \theta$
- $\tan(\theta) \simeq \theta$

qui est une très bonne approximation pour des petits angles (de l'ordre de 0.3490659 radians).

Représentation graphique



DL d'ordre 2 en physique

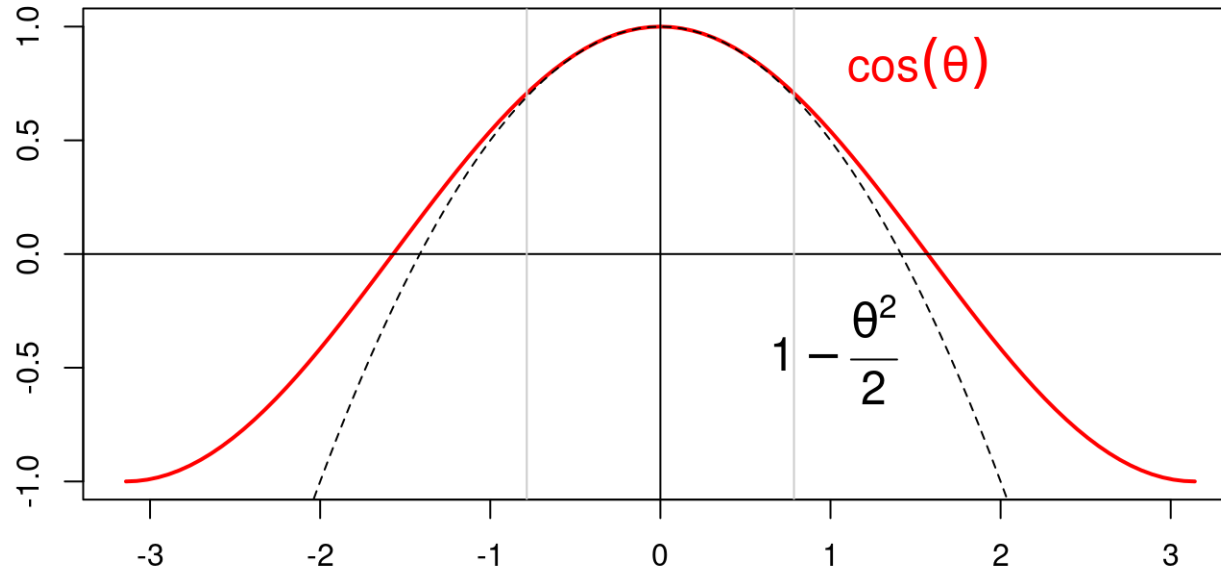
Si on s'éloigne un peu trop du point de référence a_0 (et pour certaines valeurs de a_0), l'approximation par une droite n'est pas très satisfaisante et il faut rajouter un terme correctif en $(a - a_0)^2$ pour obtenir une meilleure approximation. Ceci revient à approcher le graphe de $b(a)$ par une *parabole*.

Le $DL_2(0)$ est très utilisé pour remplacer le cos de petits angles θ , il permet d'écrire

$$\cdot \cos(\theta) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

qui est une très bonne approximation pour des petits angles (jusqu'à 0.7853982 radians).

Représentation graphique



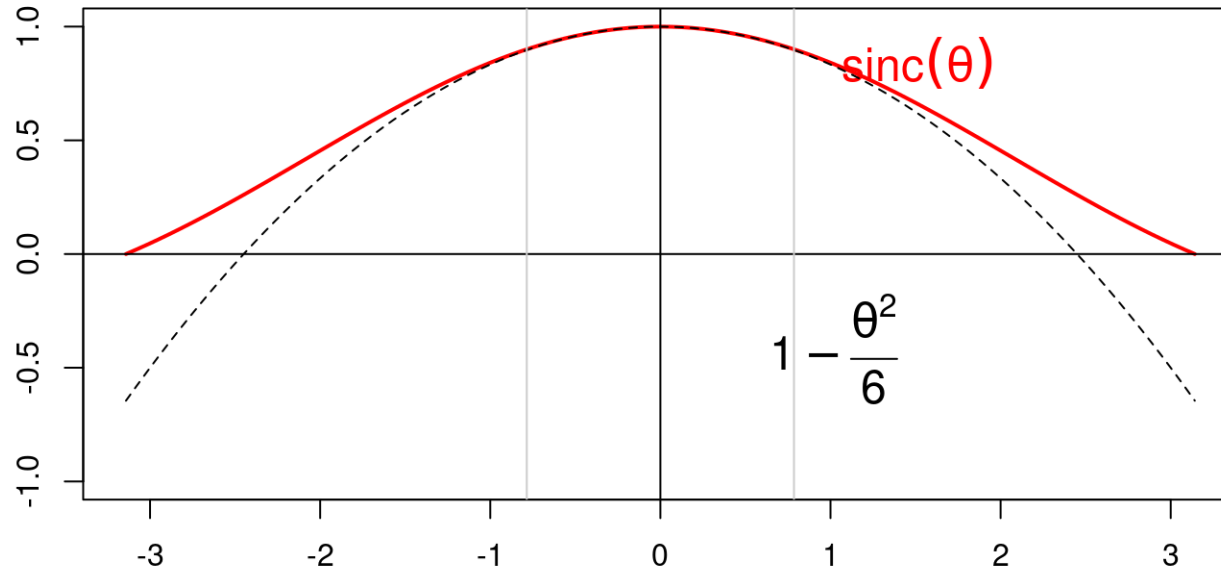
Exercice

En optique ondulatoire, on a souvent affaire à la fonction *sinus cardinal* définie par

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

En partant du DL de \sin , trouver directement le $DL_4(0)$ de $\text{sinc}(x)$. Pourquoi peut-on définir $\text{sinc}(0) = 1$? Que peut-on dire de la dérivée première du sinus cardinal lorsque x tend 0 ? Et du signe de sa dérivée seconde ?

Représentation graphique



Intérêt en mathématiques

Les DLs permettent de calculer très facilement des limites. En particulier, la règle de l'Hopital est un cas particulier de DLs.

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} &= \frac{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0) + o(1)}{g'(x_0) + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\end{aligned}$$

Intérêt en mathématiques (II)

On peut aussi retrouver des limites classiques en 0

$$e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\ln(1 + x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

et d'autres plus neuves

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

Exercices d'applications (I)

- Dans le modèle du gaz parfait avec $PV = nRT$, on considère une enceinte étanche thermostatée (nombre de moles et température constants). On suppose que le volume de l'enceinte passe de V à $V + \Delta V$. La pression évolue en conséquence de P à $P + \Delta P$. Relier ΔP à ΔV en faisant un DL au premier ordre. Comment se compare les variations relatives $\Delta P/P$ et $\Delta V/V$.
- On considère une sphère de rayon R et de surface S . On suppose que le rayon de la sphère passe de R à $R + \Delta R$. La surface évolue en conséquence de S à $S + \Delta S$. Relier ΔS à ΔR en faisant un DL au premier ordre. Comment se compare les variations relatives $\Delta S/S$ et $\Delta R/R$.

Exercices d'applications (II)

- On cherche à évaluer le comportement de la quantité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}$ lorsque t est petit devant τ . Exprimer $f(t)$ sous la forme $C(1 + x)^\alpha$ où $x = t/\tau$ est une quantité sans dimension très petite et C et α sont des constantes à déterminer. En faisant ensuite un DL à l'ordre 2 de $(1 + x)^\alpha$, en déduire un DL₂ de $f(t)$.

Exercices d'applications (III)

En utilisant les DL (et surtout les théorèmes d'opérations) calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x) \sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(x)}{\sin(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)(\tan(\pi x/4) - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right)$$

Les courageux peuvent aussi essayer de calculer les DL_1 des 6 premières fonctions.

Exercices d'applications (III): Réponses

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x) \sin(x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(x)}{\sin(x^2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)(\tan(\pi x/4) - 1)}{(x-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right) = -\frac{e}{2}$$