**4 novembre 2019**

# Correction des exercices « Développements Limités »

**Exercice 1 : Formule de Taylor**
Soit $f$ une fonction dérivable $n$ fois sur un intervalle $I$ autour de $0$. Soit $x \in I$ un point proche de $0$. En utilisant la formule de Taylor, exprimer $f(x+a)$ en fonction de $f$ et des ses dérivées successives en $a$ ($f(a)$, $f'(a)$, etc). On utilisera un terme d'erreur de la forme $o(x^n)$, *i.e.* $f(x) = \cdots + o(x^n)$.
La formule de Taylor dans le cas général est la suivante (généralement appliquée en $x$ mais $x$ est une variable muette que je note ici $y$ pour minimiser les confusions avec la suite) :

$$f(y) = f(a) + f'(a)(y-a) + f''(a)\frac{(y-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(y-a)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(y-a)^n}{n!} + o((y-a)^n)$$

En l'appliquant en $y = a + x$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a) + f'(a)(x+a-a) + f''(a)\frac{(x+a-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x+a-a)^n}{n!} + o((x+a-a)^n) \\ &= f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

C'est cette forme simple qui était demandée.

**Exercice 2 : DL usuels (calculs)**
Calculer un DL à l'ordre 3 des fonctions suivantes (en $0$). On pourra essayer de se ramener à un DL connu.

1. Pour plus de détails sur ce DL, se reporter au corrigé précédent.

$$\sqrt{9+x} = \sqrt{9}\sqrt{1+x/9} = 3\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{9}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{9}\right)^3\right)\right) =$$
$$3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{216} + \frac{x^3}{3888} + o(x^3)$$

2. $\frac{1-\cos(x)^2}{\sin(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)} = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

3. Le DL de $\exp(\sin(x))$ est proche de celui fait ensemble en classe pour illustrer la composition de DLs. On rappelle que le DL de $\exp(x)$ est

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Celui de $\sin(x)$ est rappelé à la ligne précédente. $\sin(x)$ tend vers $0$ en $0$, on peut donc composer le DL de $\sin(x)$ avec celui de $\exp(x)$. En faisant la composition, on trouve :

$$\begin{aligned} \exp(\sin(x)) &= 1 + \sin(x) + \frac{\sin(x)^2}{2} + \frac{\sin(x)^3}{6} + o(\sin(x)^3) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 \\ &+ o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

La deuxième ligne est présente uniquement pour expliciter les calculs, il vaut mieux éviter de l'écrire en pratique et passer directement à la troisième (dans laquelle on a regroupé les termes d'erreur ensemble). Les développements intérmédiaires donnent
— $(x - \frac{x^3}{6})^2 = x^2 + o(x^3)$
— $(x - \frac{x^3}{6})^3 = x^3 + o(x^3)$
Il suffit alors de recoller les morceaux, de trier les puissances de $x$ et de regrouper les $o(x^3)$ pour trouver :

$$\exp(\sin(x)) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

**Exercice 3 : Limites**
A l'aide de développements limités, calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0}[\cos(x)]^{1/\tan x}$. Il s'agit d'une forme indéterminée $1^\infty$, on passe donc au logarithme (ou on l'écrit sous forme exponentielle) :

$$[\cos(x)]^{1/\tan x} = \exp\frac{\ln\cos(x)}{\tan(x)} = \exp\frac{\ln(1 - x^2/2 + o(x^2))}{x + o(x)}$$

$\ln(1+x)$ admet le DL suivant en 0 : $\ln(1+x) = x + o(x)$, on a donc $\ln(1 - x^2/2 + o(x^2)) = -x^2/2 + o(x^2)$. En réinjectant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}[\cos(x)]^{1/\tan x} &= \exp\frac{\ln(1 - x^2/2 + o(x^2))}{x + o(x)} = \exp\frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x + o(x)} \\ &= \exp\frac{-x/2 + o(x)}{1 + o(1)} \underset{x\to 0}{\to} \exp(0) = 1\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-(1-x^2)}{x^4}$. Il s'agit d'une forme indéterminée (les deux termes tendent vers 0). Le dénominateur est équivalent à $x^4$, il faut donc faire un DL à l'ordre 4 du numérateur pour lever l'indétermination. Si on substitue $y = -2x^2$ dans le DL d'ordre 2 (en $y$) suivant $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + o(y^2)$, on obtient un DL d'ordre 4 en $x$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x^2} = \sqrt{1+y} &= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2) \\ &= 1 + \frac{-2x^2}{2} - \frac{(-2x^2)^2}{8} + o((-2x^2)) \\ &= 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\end{aligned}$$

En injectant dans le quotient de départ, on obtient donc :

$$\frac{\sqrt{1-2x^2} - (1-x^2)}{x^4} = \frac{1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - (1-x^2)}{x^4}$$

$$= \frac{-x^4/2 + o(x^4)}{x^4} = -1/2 + o(1) \underset{x\to 0}{\to} -1/2$$

3. $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - 1)$. Cet exercice n'est pas corrigé ici. Il est à faire à la maison et sera ramassé jeudi prochain. Voici quelques indications pour résoudre l'exercice.

(a) Poser $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$ et réécrire $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - 1$ en fonction de $y$.

(b) En déduire un DL de $f(x)$ en fonction de $y$ (indice : quelle est la limite de $y$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ?)

(c) En déduire un DL de $f(x)$ en fonction de $x$ (faire attention à bien trier les termes, du plus grand au plus petit).

(d) En déduire la limite demandée.

**Exercice 4 : Quotients de DLs**

*Rappeler les DL en* $0$ *à l'ordre 5 de* $\sin(x)$ *et à l'ordre* $4$ *de* $\cos(x)$.

Les DLs en question (dans le cours) sont (attention à ne pas omettre le $o(x^n)$) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \text{ en fait, on pourrait même mettre } o(x^6) \text{ dans cette expression.}$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

*En déduire des DL en* $0$ *à l'ordre* $4$ *de* $\dfrac{x}{\sin(x)}$ *et* $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

On commence par réécrire les expressions sous la forme $(1+X)^{-1}$ avec $X$ petit puis on appliquera le DL de $(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 + \dots$.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\\ &= 1 + X\end{aligned}$$

où $X = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$ est petit quand $x$ est petit. On substitue et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin(x)} &= (1+X)^{-1}\\ &= 1 - X + X^2 + o(X^2)\end{aligned}$$

Le terme dominant de $X$ est $\frac{x^2}{6}$, autrement dit $X = \frac{x^2}{6}(1 + o(1))$. Les puissances suivantes sont donc de la forme $X^2 = \frac{x^4}{36}(1 + o(1))$ et $X^3 = \frac{x^6}{216}(1 + o(1)) = o(x^4)$. En particulier, pour avoir un DL de $\frac{x}{\sin(x)}$ en $x$ d'ordre 4, il suffit de faire un DL de $(1+X)^{-1}$ en $X$ d'ordre 2 et de substituer. On commence par faire un DL en $x$ à l'ordre 4 de $X^2$. Dans le DL, on se contente de garder les termes de degré inférieur à 4, les autres rentrent dans le $o(x^4)$.

$$\begin{aligned}X^2 &= \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)\\ 1 - X + X^2 &= 1 - \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)\end{aligned}$$

Et donc au final

$$\frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)$$

On applique le même raisonnement pour $\frac{1}{\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &= 1 + X\end{aligned}$$

avec $X = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$ qui est petit quand $x$ est petit. En appliquant le même raisonnement, on se rend compte qu'un DL de $(1+X)^{-1}$ en $X$ à l'ordre 2 donne un DL de $\frac{1}{\cos(x)}$ en $x$ à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= (1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 + o(X^2) \\ X^2 &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ 1 - X + X^2 + o(X^2) &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\end{aligned}$$

Et donc au final

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

**Exercice 5 : DL et limites**

*Calculer les limites suivantes à l'aide de DLs en $0$ en évitant les calculs superflus (c'est à dire, en faisant les DLs à l'ordre qui permet de lever la forme indéterminée) :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$$

Le dénominateur est de degré $2$ (c'est un infiniment petit d'ordre $2$ en $0$), il suffit donc de faire un DL d'ordre $2$ du numérateur pour lever l'indétermination.
Au voisinage de $0$,

$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + x + o(x) \\ \exp(x^2) &= 1 + x^2 + o(x^2) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \exp(x^2) - \cos(x) &= (1 + x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= \frac{3x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

D'où on déduit

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$$

Le dénominateur est de degré $1$ (c'est un infiniment petit d'ordre $1$ en $0$), il suffit donc de faire un DL d'ordre $1$ du numérateur pour lever l'indétermination.

Au voisinage de $0$,

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x + o(x)\\
\sin(x) &= x + o(x)\\
\ln(1+x) - \sin(x) &= o(x)
\end{aligned}$$

D'où on déduit

$$\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x} = \frac{o(x)}{x} = o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Le dénominateur est de degré $4$ (c'est un infiniment petit d'ordre $4$ en $0$), il suffit donc de faire un DL d'ordre $4$ du numérateur pour lever l'indétermination.
Au voisinage de $0$,

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\\
\sqrt{1-x^2} &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\\
\cos(x) - \sqrt{1-x^2} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4)\\
&= \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

D'où on déduit

$$\frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

**Exercice 6 : Développement asymptotique**

*On cherche à montrer que* $\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}x^{3/2}} + o(x^{-3/2})$ *quand* $x$ *tend vers l'infini. On pose* $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ *et* $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$.
On commence par faire un développement de $f(x)$. On va chercher les termes successifs du développement.

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{2}$$

Donc $f(x) = \sqrt{2x}(1+o(1))$ au voisinage de $+\infty$. Pour aller plus loin, on va raffiner la limite vers $\sqrt{2}$. On commence par faire un développement de $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. On pose $X = \frac{1}{x^2}$ qui tend vers $0$ quand $x \to +\infty$ et on fait un DL en 0 de $\sqrt{1+X}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} &= \sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} + o(X) = 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} &= \sqrt{2 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}
\end{aligned}$$

En posant $X = \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on peut faire un développement asymptotique de $\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} + o(X) = 1 + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$f(x) = \sqrt{x}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{2x}\left(1 + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

On montre exactement de la même façon :

$$g(x) = \sqrt{x}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

D'où on déduit

$$\begin{aligned}
\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} &= f(x) - g(x) \\
&= \sqrt{2x}\left(1 + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \sqrt{2x}\left(1 - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2x}\left[\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

**Exercice 7 : DL et limtes (II)**

*On cherche à calculer la limite suivante :* $l = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\sin(x)]^{\tan(x)}$.

On essaie de se ramener à une limite en $0$ (plus pratique pour faire des DLs) en posant $h = \frac{\pi}{2} - x$ (qui tend vers $0$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$). On commence par réécrire l'expression $[\sin(x)]^{\tan(x)}$ en fonction de $h$. Par définition de $h$, on a $x = \frac{\pi}{2} - h$, on a donc :

$$f(h)(= [\sin(x)]^{\tan(x)}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)^{\tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}$$

En utilisant la propriété trigonométrique classique $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(h)$ (qui implique aussi $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(h)$), on obtient

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \cos(h) \\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \frac{\cos(h)}{\sin(h)} = \frac{1}{\tan(h)} \\
f(h) &= [\cos(h)]^{1/\tan h}
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée, on passe sous forme exponentielle pour essayer de lever l'indétermination.

$$f(h) = \exp\left(\frac{\ln(\cos(h))}{\tan(h)}\right)$$

Au voisinage de $0$, $\tan(h) = h + o(h)$, il suffit donc de faire un DL de $\ln(\cos(h))$ à l'ordre 1 pour lever l'indétermination. On va utiliser la composition des DLs.

$$\begin{aligned}
\cos(h) &= 1 + o(h) \\
\ln(1+x) &= x + o(x) \\
\ln(1+o(h)) &= o(h) \\
\ln(\cos(h)) &= o(h)
\end{aligned}$$

On déduit qu'au voisinage de $0$,

$$\exp\left(\frac{\ln(\cos(h))}{\tan(h)}\right) = \exp\left(\frac{o(h)}{h+o(h)}\right) = \exp\left(\frac{o(1)}{1+o(1)}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \exp(0) = 1$$

Au final,

$$l = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\sin(x)]^{\tan(x)} = \lim_{h\to 0} [\cos(h)]^{1/\tan h} = 1$$

**Exercice 8 : Pour aller plus loin, approximation de** $\cos(x)$
*Touver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de $0$,*

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = o(x^n)$$

*avec $n$ maximal*
On commence par faire un DL en 0 à l'ordre $6$ de $f(x)$. On remarque aussi qu'en substituant $y = bx^2$ dans un DL en 0 à l'ordre 3 en $y$ de $(1+y)^{-1}$, on obtient un DL à l'ordre $6$ de $(1+bx^2)^{-1}$, on se contente donc de cet ordre (pour éviter les cacluls inutiles).

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \\
(1+y)^{-1} &= 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3) \\
(1+bx^2)^{-1} &= 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6) \\
\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2)(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)) \\
&= 1 + (a-b)x^2 + (-ab+b^2)x^4 + (ab^2-b^3)x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

D'où on déduit

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \left(1 + (a-b)x^2 + (-ab+b^2)x^4 + (ab^2-b^3)x^6\right) + o(x^6) \\
&= \left(-\frac{1}{2} - a + b\right)x^2 + \left(\frac{1}{24} + ab - b^2\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} - ab^2 + b^3\right)x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

Résoudre l'exercice revient à annuler (*dans l'ordre*) le plus de coefficients dans le DL de $f(x)$. On cherche donc à résoudre le plus grand des systèmes parmi

$$\begin{cases} a - b &= -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b &= -\frac{1}{2} \\ ab - b^2 &= -\frac{1}{24} \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b &= -\frac{1}{2} \\ ab - b^2 &= -\frac{1}{24} \\ ab^2 - b^3 &= -\frac{1}{720} \end{cases}$$

Le premier des systèmes est un système à 1 équations et deux inconnues, on se convaint facilement qu'il admet une infinité de solutions, on essaie donc directement de résoudre le deuxième.

$$\begin{cases} a-b & = -\frac{1}{2} \\ b(a-b) & = -\frac{1}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b & = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}b & = -\frac{1}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b & = -\frac{1}{2} \\ b & = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b & = -\frac{1}{2} \\ b & = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -\frac{5}{12} \\ b & = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Pour passer du premier système au deuxième, on a substitué $a-b$ par $-\frac{1}{2}$.
En injectant les valeurs obtenues dans le troisième système, on se rend compte qu'on ne peut satisfaire la dernière équation : $ab^2 - b^3 = -1/288 \neq -1/720$. On peut donc uniquement annuler les coefficients de $x^2$ et $x^4$. Au final, on obtient

$$\cos(x) - \frac{1 - \frac{5x^2}{12}}{1 + \frac{x^2}{12}} = o(x^4)$$

On a obtenu de la sorte une approximation simple à calculer de $\cos(x)$ pour les petites valeurs de $x$ :

$$\cos(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} + o(x^4)$$

**Exercice 9 : Pour les braves**
*Calculer la limite $l$ définie par :*

$$l = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x$$

Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme $1^\infty$. On passe en forme exponentielle pour essayer de lever l'indétermination.

$$\left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x = \exp \left( x \ln \left[ \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right] \right)$$

On cherche donc à calculer la limite en $+\infty$ de $x \ln \left[ \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right]$. On va passer par les DL.
Au voisinage de $+\infty$, $1/x$ est proche de $0$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(x) + \ln\left(1 + x^{-1}\right) \\ \ln(1+y) &= y + o(y) \quad \text{pour y proche de } 0 \\ \ln\left(1 + x^{-1}\right) &= x^{-1} + o(x^{-1}) \\ \frac{\ln(1+x)}{\ln x} &= \frac{\ln(x) + x^{-1} + o(x^{-1})}{\ln(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{x\ln(x)} + o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right) \\ \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x\ln(x)} + o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x\ln(x)} + o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right) \end{aligned}$$

D'où on tire

$$x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln(x)} + o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

et finalement

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right] \xrightarrow[x\to\infty]{} \exp(0) = 1$$

On peut raffiner un peu pour trouver le terme suivant du développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left[x \ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\right] \\
&= \exp\left(\frac{1}{\ln(x)} + o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{\ln(x)} + o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) \qquad \text{car } e^y = 1 + y + o(y) \qquad \text{pour } y \text{ petit}
\end{aligned}$$