**14 octobre 2019**

# Exercices « Limites, Dérivées et DLs »

**Exercice 1 : Limite**

— En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in ]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$

— En déduire que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

**Correction** sur demande si vous me montrez que vous avez cherché

**Exercice 2 : A propos de $x^n$**

Soit $x$, $a$ deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

— Montrer que $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$

— En déduire $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ au point $a$)

**Correction** sur demande si vous me montrez que vous avez cherché

**Exercice 3 : Limites et Dérivées**

En utilisant les dérivées, démontrer les limites suivantes :

— $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

— $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

— $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**Correction** dans le cours sur les dérivées

**Exercice 4 : Théorèmes d'opérations**

En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :

1. $\lim_{x \to \infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$
3. $\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$
4. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty$
5. $\lim_{x \to \infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty$
6. $\lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$
7. $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
8. $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

**Correction**

1. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des racines dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = \sqrt{x}$. Par composition :
$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = \underbrace{\lim_{X\to+\infty} X^8 e^{-X} = 0}_{\text{croissance comparée}}$$

2. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des carrés dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = x^2$. Par composition :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = \underbrace{\lim_{X\to+\infty} X^{-2} e^{2X} = 0}_{\text{croissance comparée}}$$

3. Comme $1/x$ est *petit* quand $x$ est grand, on se ramène à une limite usuelle avec $\ln$ en posant $X = 1/x$. Par composition :
$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}}$$

4. Comme $x^2$ est *petit* quand $x$ est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec $\exp$ en faisant apparaître du $x^2$ dans le numérateur.
$$\frac{x}{e^{x^2}-1} = \frac{1}{x}\frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \frac{1}{x}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{-1}$$
La limite de $1/x$ en $0^+$ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \underbrace{\lim_{X\to 0^+} \frac{e^X - 1}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}}$$
En utilisant les théorèmes d'opérations :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{-1} = +\infty \times 1 = +\infty$$

5. Là encore, comme $1/x\sqrt{x}$ est petit, on force l'apparition d'une limite classique :
$$x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} \times x\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$
La limite de $\sqrt{x}$ en $+\infty$ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x\sqrt{x}$ puis par composition :
$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \underbrace{\lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}}$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty\times 1 = +\infty$$

6. Comme $x^2$ est *petit* quand $x$ est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec $\sin$ en faisant apparaître du $x^2$ dans le numérateur.

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2} = \frac{2}{x\sqrt{x}}\times\frac{x^2}{\sin(x^2)} = \frac{2}{x\sqrt{x}}\times\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)^{-1}$$

. La limite de $2/x\sqrt{x}$ en $0^+$ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin(x^2)} = \left(\lim_{X\to 0^+}\frac{\sin(X)}{X}\right)^{-1} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x\sqrt{x}}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin(x^2)} = +\infty\times 1 = +\infty$$

7. cf question suivante avec $a = b = 1$
8. Il s'agit d'une forme indeterminée du type $1^\infty$. On passe sous forme exponentielle :

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \exp\left(bx\ln(1+a/x)\right)$$

et on étudie la limite en $+\infty$ de $bx\ln(1+a/x)$. Comme pour les exercices précédents, on force l'apparition d'une limite classique en posant $X = a/x$.

$$\lim_{x\to+\infty} bx\ln(1+a/x) = \lim_{X\to 0^+} ba\frac{\ln(1+X)}{X} = ba$$

Par composition, on en déduit

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{X\to ba} e^X = e^{ba}$$

**Exercice 5 : Théorèmes d'opérations (bis)**

Montrer les limites suivantes

$$\lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty \qquad \lim_{+\infty} x\ln(1+1/x) = 1$$

$$\lim_{0+}\frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \qquad \lim_{0+}\frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{0+}\frac{x}{e^{x^2}-1} = +\infty$$

$$\lim_{0+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1} = 1 \qquad \lim_{0+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 0 \qquad \lim_{0+}\frac{x}{2}\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{1}\frac{x^n-1}{x^p-1} = \frac{n}{p} \qquad \lim_{0}\frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{0+}\frac{\ln(x)}{x} = -\infty \qquad \lim_{+\infty} x^3\ln(1+1/x\sqrt{x}) = +\infty \qquad \lim_{+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{1}{2}$$

**Correction** Les limites 1, 2, 3 et 7 ont été vues en classe. Les limites 6, 12 sont corrigées dans l'exercice précédent et la limite 14 se démontre comme la limite 5 de l'exercice précédent. On se contente de corriger les autres, en faisant apparaître à chaque fois une limite usuelle.

**limite 4** On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 en posant $X = 4x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X/4} = 4 \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 4$$

**limite 5** On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 (et des termes supplémentaires qui ne posent pas de problèmes) en posant $X = x^2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X/X^{-1/4}} = \lim_{X\to 0^+} X^{1/4} \times \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0 \times 1 = 0$$

**limite 8** On peut décomposer l'expression en termes qui ne posent pas problèmes :

$$\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 1 - \underbrace{(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 1 - 1 \times 1 = 0$$

**limite 9** On revient à la définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x} < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x}$$

Comme on cherche la limite en $0^+$, on peut se restreindre à $x > 0$ (et donc $x/2 > 0$). On a alors :

$$\frac{x}{2}\frac{3}{x} - 1 < \frac{x}{2}\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{2}\frac{3}{x} \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2} - x}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}} < \frac{x}{2}\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{2}$$

Et on conclut par théorème d'encadrement.

**limite 10** On s'appuit sur l'égalité de l'exercice 2 : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$ qui permet de réécrire l'expression :

$$\frac{x^n-1}{x^p-1} = \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)} = \frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1}$$

et de lever l'indétermination. En effet :

$$\lim_{x\to 1} x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = n$$
$$\lim_{x\to 1} x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ fois}} = p$$

Et on conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^p-1} = \frac{n}{p}$$

**limite 11** Comme pour la limite 7, on commence par se débarasser des racines en passant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} &= \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)}\frac{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\ &= \frac{\cos^2(x)-\cos(2x)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\ &= \frac{\cos^2(x)-(\cos^2(x)-\sin^2(x))}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\ &= \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\ &= \frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\end{aligned}$$

pour aboutir à une forme qui n'est plus indeterminée. On conclut

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}} = \frac{1}{2}$$

**limite 13** Il ne s'agit pas d'une forme indeterminée. Par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\ln(x)\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\infty\times+\infty = -\infty$$

**limite 15** Il s'agit d'une forme indéterminée du style $\infty-\infty$. On se débarasse des racines en multipliant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}-x &= \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\end{aligned}$$

On factorise ensuite par le monôme en $x$ de plus haut degré en haut et en bas :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{\overbrace{1+\frac{1}{x}}^{\xrightarrow{x\to+\infty}1}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}+1}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

# Pour les braves

Les exercices qui suivent sont difficiles (calculatoire et/ou abstraits) dans l'état de vos connaissances. Les deux premiers seront bien plus faciles une fois qu'on aura vu les développements limités (en fin de semestre), le dernier fait appel à la définition formelle de la limite (avec des quantificateurs). Ils sont conseillés à ceux qui veulent aller plus loin.

**Exercice 6 : Limites en** $0$
Calculer les limites des fonctions suivantes en $0$ (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire).

$$\begin{array}{l||l}
\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x} & \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \\
\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1} \\
(\ln(e+x))^{1/x} & \tan(x)\ln(\sin(x)) \\
\dfrac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} & \left(x\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)} \\
\dfrac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x}-1} &
\end{array}$$

**Correction** sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.

**Exercice 7 : Limites en** $+\infty$
Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$. On pourra se ramener à des limites classiques en faisant des changements de variables.

$$\begin{array}{l||l}
\sqrt{a+x} - \sqrt{x} & \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}} \\
\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}} & \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}} \\
x\sin(\pi/x) & \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2} \\
\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} & \ln(3x^2-4) - \ln(x^2-1) \\
\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x} & \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \\
\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x} & \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}
\end{array}$$

**Correction** sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.

**Exercice 8 : Limite et fonction périodique (difficile)**
On considère $f$ une fonction périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et ayant une limite finie $l$ en $+\infty$. Montrer que $f$ est constante.
On pourra revenir à la définition avec les quantificateurs pour cet exercice.
**Correction** sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.