

Exercices « Limites, Dérivées et DLs »

Exercice 1 : Limite

- En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

Exercice 2 : A propos de x^n

Soit x, a deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

- Montrer que $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$
- En déduire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ au point a)

Exercice 3 : Limites et Dérivées

En utilisant les dérivées, démontrer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exercice 4 : Théorèmes d'opérations

En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

Exercice 5 : Théorèmes d'opérations (bis)

Montrer les limites suivantes

$$\begin{array}{lll}
\lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0 & \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty & \lim_{+\infty} x \ln(1 + 1/x) = 1 \\
\lim_{0+} \frac{\ln(1 + 4x)}{x} = 4 & \lim_{0+} \frac{\ln(1 + x^2)}{x\sqrt{x}} = 0 & \lim_{0+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty \\
\lim_{0+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} = 1 & \lim_{0+} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 0 & \lim_{0+} \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = \frac{3}{2} \\
\lim_1 \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{n}{p} & \lim_0 \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} & \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\
\lim_{0+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty & \lim_{+\infty} x^3 \ln(1 + 1/x\sqrt{x}) = +\infty & \lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{1}{2}
\end{array}$$

Pour les braves

Les exercices qui suivent sont difficiles (calculatoire et/ou abstraits) dans l'état de vos connaissances. Les deux premiers seront bien plus faciles une fois qu'on aura vu les développements limités (en fin de semestre), le dernier fait appel à la définition formelle de la limite (avec des quantificateurs). Ils sont conseillés à ceux qui veulent aller plus loin.

Exercice 6 : Limites en 0

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire).

$$\left. \begin{array}{l}
\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} \\
\frac{1}{x^2} \\
\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{(\ln(e+x))^{1/x}} \\
\frac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} \\
\frac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1}
\end{array} \right\| \begin{array}{l}
\frac{\sqrt{x^2}}{x} \\
\frac{x}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}} \\
\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan(x) \ln(\sin(x))} \\
\left(x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)} \\
\end{array}$$

Exercice 7 : Limites en $+\infty$

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$. On pourra se ramener à des limites classiques en faisant des changements de variables.

$$\left. \begin{array}{l}
\sqrt{a+x} - \sqrt{x} \\
\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \\
x \sin(\pi/x) \\
\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \\
\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x \\
\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}
\end{array} \right\| \begin{array}{l}
\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}} \\
\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \\
\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-2} \\
\ln(3x^2 - 4) - \ln(x^2 - 1) \\
\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \\
\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}
\end{array}$$

Exercice 8 : Limite et fonction périodique (difficile)

On considère f une fonction périodique, définie sur \mathbb{R} et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

On pourra revenir à la définition avec les quantificateurs pour cet exercice.