

Exercices « Limites, Dérivées et DLs »

Exercice 1 : Limite

- En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$
- En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché

Exercice 2 : A propos de x^n

Soit x, a deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

- Montrer que $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$
- En déduire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ au point a)

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché

Exercice 3 : Limites et Dérivées

En utilisant les dérivées, démontrer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Correction dans le cours sur les dérivées

Exercice 4 : Théorèmes d'opérations

En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = +\infty$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

Correction

1. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des racines dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = \sqrt{x}$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \underbrace{X^8 e^{-X}}_{\text{croissance comparée}} = 0$$

2. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des carrés dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = x^2$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \underbrace{X^{-2} e^{2X}}_{\text{croissance comparée}} = 0$$

3. Comme $1/x$ est *petit* quand x est grand, on se ramène à une limite usuelle avec \ln en posant $X = 1/x$. Par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1+X)}{X}}_{\text{limite usuelle}} = 1$$

4. Comme x^2 est *petit* quand x est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec \exp en faisant apparaître du x^2 dans le numérateur.

$$\frac{x}{e^{x^2} - 1} = \frac{1}{x} \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} = \frac{1}{x} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{-1}$$

La limite de $1/x$ en 0^+ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^X - 1}{X}}_{\text{limite usuelle}} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)^{-1} = +\infty \times 1 = +\infty$$

5. Là encore, comme $1/x\sqrt{x}$ est petit, on force l'apparition d'une limite classique :

$$x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \times x\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

La limite de \sqrt{x} en $+\infty$ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x\sqrt{x}$ puis par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\ln(1+X)}{X}}_{\text{limite usuelle}} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

6. Comme x^2 est *petit* quand x est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec \sin en faisant apparaître du x^2 dans le numérateur.

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \frac{x^2}{\sin(x^2)} = \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)^{-1}$$

. La limite de $2/x\sqrt{x}$ en 0^+ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = \left(\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\sin(X)}{X} \right)^{-1} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = +\infty \times 1 = +\infty$$

7. cf question suivante avec $a = b = 1$
8. Il s'agit d'une forme indéterminée du type 1^∞ . On passe sous forme exponentielle :

$$\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = \exp(bx \ln(1 + a/x))$$

et on étudie la limite en $+\infty$ de $bx \ln(1 + a/x)$. Comme pour les exercices précédents, on force l'apparition d'une limite classique en posant $X = a/x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} bx \ln(1 + a/x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} ba \frac{\ln(1 + X)}{X} = ba$$

Par composition, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = \lim_{X \rightarrow ba} e^X = e^{ba}$$

Exercice 5 : Théorèmes d'opérations (bis)

Montrer les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} \lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0 & \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty & \lim_{+\infty} x \ln(1 + 1/x) = 1 \\ \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + 4x)}{x} = 4 & \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + x^2)}{x\sqrt{x}} = 0 & \lim_{0^+} \frac{x}{e^{x^2} - 1} = +\infty \\ \lim_{0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} = 1 & \lim_{0^+} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 0 & \lim_{0^+} \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = \frac{3}{2} \\ \lim_1 \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{n}{p} & \lim_0 \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} & \lim_{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \\ \lim_{0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty & \lim_{+\infty} x^3 \ln(1 + 1/x\sqrt{x}) = +\infty & \lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Correction Les limites 1, 2, 3 et 7 ont été vues en classe. Les limites 6, 12 sont corrigées dans l'exercice précédent et la limite 14 se démontre comme la limite 5 de l'exercice précédent. On se contente de corriger les autres, en faisant apparaître à chaque fois une limite usuelle.

limite 4 On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 en posant $X = 4x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X/4} = 4 \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 4$$

limite 5 On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 (et des termes supplémentaires qui ne posent pas de problèmes) en posant $X = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X/X^{-1/4}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^{1/4} \times \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0 \times 1 = 0$$

limite 8 On peut décomposer l'expression en termes qui ne posent pas problèmes :

$$\frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 1 - \underbrace{(1+x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x} = 1 - 1 \times 1 = 0$$

limite 9 On revient à la définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x} < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x}$$

Comme on cherche la limite en 0^+ , on peut se restreindre à $x > 0$ (et donc $x/2 > 0$). On a alors :

$$\frac{x}{2} \left(\frac{3}{x} - 1 \right) < \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{2} \frac{3}{x} \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{x}{2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}} < \frac{x}{2} \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{2}$$

Et on conclut par théorème d'encadrement.

limite 10 On s'appuie sur l'égalité de l'exercice 2 : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$ qui permet de réécrire l'expression :

$$\frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1)} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1}{x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1}$$

et de lever l'indétermination. En effet :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ fois}} = p \end{aligned}$$

Et on conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{n}{p}$$

limite 11 Comme pour la limite 7, on commence par se débarrasser des racines en passant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} &= \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} \frac{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{\cos^2(x) - \cos(2x)}{\sin^2(x)} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{\cos^2(x) - (\cos^2(x) - \sin^2(x))}{\sin^2(x)} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} \\
 &= \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}
 \end{aligned}$$

pour aboutir à une forme qui n'est plus indéterminée. On conclut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}} = \frac{1}{2}$$

limite 13 Il ne s'agit pas d'une forme indéterminée. Par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \times +\infty = -\infty$$

limite 15 Il s'agit d'une forme indéterminée du style $\infty - \infty$. On se débarrasse des racines en multipliant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + x + 1} - x &= \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \\
 &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}
 \end{aligned}$$

On factorise ensuite par le monôme en x de plus haut degré en haut et en bas :

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \frac{\overbrace{1 + \frac{1}{x}}^{x \rightarrow +\infty \rightarrow 1}}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 1}}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Pour les braves

Les exercices qui suivent sont difficiles (calculatoire et/ou abstraits) dans l'état de vos connaissances. Les deux premiers seront bien plus faciles une fois qu'on aura vu les développements limités (en fin de semestre), le dernier fait appel à la définition formelle de la limite (avec des quantificateurs). Ils sont conseillés à ceux qui veulent aller plus loin.

Exercice 6 : Limites en 0

Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire).

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{(\ln(e+x))^{1/x}} \\ \frac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} \\ \frac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\ \frac{x}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}} \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x) \ln(\sin(x))} \\ \left(x \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \right)^{x/(x^2+2)} \end{array} \right|$$

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.

Exercice 7 : Limites en $+\infty$

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$. On pourra se ramener à des limites classiques en faisant des changements de variables.

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{a+x} - \sqrt{x} \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}} \\ x \sin(\pi/x) \\ \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} \\ \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x \\ \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}} \\ \frac{x^2 - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}} \\ \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-2}} \\ \ln(3x^2 - 4) - \ln(x^2 - 1) \\ \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \\ \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \end{array} \right|$$

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.

Exercice 8 : Limite et fonction périodique (difficile)

On considère f une fonction périodique, définie sur \mathbb{R} et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

On pourra revenir à la définition avec les quantificateurs pour cet exercice.

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.