7 octobre 2019

Exercices « Formules trigonométriques »

Exercice 1 : Formules trigonométriques (I)
Calculer les valeurs exactes des quantités suivantes :

1. $\cos(\pi/12)$
2. $\sin(11\pi/12)$
3. $\cos(\pi/8)$
4. $\sin(7\pi/8)$

Exercice 2 : Formules trigonométriques (II)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes

1. $\cos(x) + \sin(x) \geq 1$
2. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \geq 1$
3. $\cos(2x) + 2\sin(x) = 0$
4. $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$
5. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$
6. $\cos(3x) - \sin(2x) = 0$ [difficile]

Exercice 3 : Tangente
Donner le nombre de solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation

$$\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0$$

Exercice 4 : Fonctions trigonométriques réciproques
Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les équations trigonométriques suivantes :

1. $10\cos(8\theta) = -5$
2. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$
3. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$ dans $[0, 16\pi]$
4. $10 + 7\tan(4\theta) = 3$ dans $[-\pi, 0]$.
5. $3 - 4\sin(4\theta) = 5$ dans $[-3\pi/2, -\pi/2]$
6. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$ dans $[0, 2\pi]$

Exercice 5 : Inéquations
Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les équations suivantes :

1. $|\cos(x)| \geq |\sin(x)|$
2. $\ln(\cos^2(x)) = 0$
3. $2\ln(\cos(x)) = 0$
4. $\sqrt{1 - \cos^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $e^{\cos(x)} \leq 1$

Exercice 6 : $\mathbf{arcsin}$

On cherche à calculer $X = \arcsin\left(-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
2. Appliquer la formule précédente à $x = \frac{\pi}{8}$.
3. En déduire la valeur de X.
4. Vérifier que vous n'avez pas fait de fautes, par exemple avec une calculatrice.

Exercice 7 : Produit de cosinus

Soit $a \in (0, \pi)$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

On pourra utiliser $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$$

Corrections

Correction de $\cos(2x) + 2\sin(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + 2\sin(x) = 0 &\Leftrightarrow (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + 2\sin(x) = 0\\
&\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2(x)) + 2\sin(x) = 0\\
&\Leftrightarrow -2\sin^2(x)) + 2\sin(x) + 1 = 0
\end{aligned}$$

On pose $\sin(x) = X$ et on cherche à résoudre l'équation de degré 2 $-2X^2+2X+1 = 0$. En calculant le discriminant, on trouve que les solutions sont $X_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et on est ramené à résoudre $\sin(x) = X_1$ et $\sin(x) = X_2$. $X_2 > 1$ donc l'équation $\sin(x) = X_2$ n'a pas de solution. $X_1 \in [-1, 1]$ donc l'équation $\sin(x) = X_1$ a une infinité de solutions. Comme X_1 n'est pas un $\sin$ remarquable, on passe par la fonction $\arcsin$

$$\begin{aligned}
\sin(x) = X_1 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\arcsin(X_1)) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(X_1) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - \arcsin(X_1) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Correction de $\cos(3x) - \sin(2x) = 0$
On cherche à tout exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On utilise le fait que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \cos(2x + x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(x)\sin(2x)\\
&= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - \sin(x)(2\sin(x)\cos(x))\\
&= \cos(x)[\cos^2(x) - \sin^2(x) - 2\sin^2(x)] = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)]
\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(3x) - \sin(2x) = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)] - 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x)[1 - 2\sin(x) - 4\sin^2(x)]$$

qui s'annule si $\cos(x) = 0$ (c'est à dire $x = \pi/2 + k\pi$) ou si $1 - 2\sin(x) - 4\sin^2(x) = 0$. On est donc amené à résoudre l'équation de degré 2 $1 - 2X - 4X^2 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ puis les équations $\sin(x) = X_1$ et $\sin(x) = X_2$. Comme X_1 et X_2 sont dans $[-1, 1]$, ces deux équations ont des solutions. Au final, en raisonnant comme précédemment on trouve les solutions suivantes :

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right), \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right), -\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right), \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\right\} + 2k\pi$$

Correction de $10 + 7\tan(4\theta) = 3$ **dans** $[-\pi, 0]$
On raisonne par équivalence

$$\begin{aligned}
10 + 7\tan(4\theta) = 3 &\Leftrightarrow \tan(4\theta) = -1\\
&\Leftrightarrow \tan(4\theta) = \tan(-\pi/4)\\
&\Leftrightarrow 4\theta = -\pi/4 + k\pi\\
&\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

On cherche ensuite les solutions qui sont dans $[-\pi, 0]$. Par exemple, $-\frac{\pi}{16}$ est solution. Comme toutes les solutions sont "décalées" de $\pi/4$, il suffit de lui ajouter $\pi/4$ jusqu'à être plus grand que 0 et de lui retrancher $\pi/4$ jusqu'à être plus petit que $-\pi$. Au final, on trouve que les solutions sont

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{16}, -\frac{5\pi}{16}, -\frac{9\pi}{16}, -\frac{13\pi}{16}\right\}$$

Correction de $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$ **dans** $[0, 2\pi]$
On pose $X = \cos(x)$ et on se ramène à l'équation de degré 2 $2X^2 - 3X + 1 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = -1$ et $X_2 = -1/2$. Les deux valeurs sont dans $[-1, 1]$ dont leur $\arccos$ sont bien définis.

$$\begin{cases} \cos(x) & = -1 \\ \text{OU} & \\ \cos(x) & = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \pi + 2k\pi \\ \text{OU} & \\ x & = 2\pi/3 + 2k\pi \\ \text{OU} & \\ x & = -2\pi/3 + 2k\pi \end{cases}$$

En conservant uniquement les solutions dans $[0, 2\pi]$, on obtient

$$x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

Correction de $|\cos(x)| \geq |\sin(x)|$
Par 2π-périodicité, on peut se limiter à $x \in [0, 2\pi]$. De plus, comme $|\cos(x + \pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)|$ et de même pour $|\sin|$, la fonction $|\cos(x)| - |\sin(x)|$ est en fait π-périodique et on peut donc se limiter à $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
On cherche ensuite à se débarrasser des valeurs absolues en distinguant 2 cas.
Premier cas : $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \pi/\mathbf{2}]$
Sur cet intervalle, l'inégalité se réduit à (E_1)

$$|\cos(x)| \geq |\sin(x)| \Leftrightarrow \cos(x) \geq \sin(x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x + \pi/4) \geq 0$$

En faisant (par exemple) une étude de signe de $\cos(x + \pi/4)$ sur $[0, \pi/2]$, on trouve que les solutions de (E_1) sont $x \in [0, \pi/4]$.
Second cas : $\mathbf{x} \in [-\pi/\mathbf{2}, \mathbf{0}]$
Sur cet intervalle, l'inégalité se réduit à (E_2)

$$|\cos(x)| \geq |\sin(x)| \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\sin(x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x - \pi/4) \geq 0$$

En faisant (par exemple) une étude de signe de $\cos(x - \pi/4)$ sur $[-\pi/2, 0]$, on trouve que les solutions de (E_2) sont $x \in [-\pi/4, 0]$.
Synthèse : En recollant les morceaux et en utilisant la π-périodicité, on obtient que l'ensemble des solutions est $[-\pi/4, \pi/4] + k\pi$