

# Dérivée partielle

Mahendra Mariadassou

18 novembre 2019

# Plan du cours

- Notions de différentielles
- Opérations sur les différentielles

# Objectifs

- Différencier une expression (par exemple  $PV = nRT$ )
- Manipuler des différentielles
- Manipuler des relations entre différentielles

# Définition et propriété fondamentale

La différentielle de  $x$  notée  $dx$  (parfois  $\Delta x$  en physique) correspond à une variation **infinitésimale** ( $\simeq$  toute petite) de  $x$

Si  $f$  est une fonction numérique (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) et que  $y = f(x)$ , alors il existe une relation entre  $dy$  et  $dx$  donnée par

$$dy = f'(x)dx$$

où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .

**Interprétation:** Une petite variation (de taille  $dx$ ) de la quantité  $x$  se traduit par une petite variation (de taille  $dy = f'(x)dx$ ) de la quantité  $y$

# Remarque(s)

Il existe un lien **essentiel** entre différentielles et dérivées (qu'on verra en détails plus tard) mais on peut retenir pour l'instant

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Rightarrow dy = d(f(x)) \\&\Leftrightarrow dy = f'(x)dx \\&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)\end{aligned}$$

# Exercice

Exprimer  $dy$  en fonction de  $dx$  quand  $y$  et  $x$  sont liés par les relations suivantes:

- $y = ax + b$  (avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ )
- $y = x^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ )
- $y = \ln(x)$
- $y = e^{\alpha x}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
- $y = x^\alpha$  (avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ ), on pourra écrire  $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

# Intégration d'une différentielle

Si  $f$  est une fonction numérique (de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) et que  $y = f(x)$  de dérivée  $f'$  alors

$$\int f'(x)dx = y + K (= f(x) + K)$$

où  $K$  est une constante arbitraire

**Intuition:** On peut retenir que  $d$  et  $\int$  sont des opérations (presque) inverses et écrire

$$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = \int dy = y (+K)$$

la constante émerge du fait que  $\int$  et  $d$  ne sont pas exactement inverses.

# Exercices

À partir des relations suivantes, trouver un lien entre  $y$  et  $x$

- $dy = 5dx$
- $dy = nx^{n-1}dx$
- $dy = \frac{dx}{x}$
- $dy = \alpha e^{\alpha x} dx$
- $dy = \cos(x)dx$
- $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$



# Fonction de plusieurs variables

Une **fonction  $f$  de plusieurs variables** associe à  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  un nombre réel  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ . On la note

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Dans le cas le plus simple ( $n = 2$ ), on remplace généralement  $(x_1, x_2)$  par  $(x, y)$  et on définit  $f$  par son expression:

$$f(x, y) = 4x + 3y$$

ou encore

$$f : (x, y) \mapsto z = 4x + 3y$$

# Dérivées partielles (I)

En un point donné, on peut définir plusieurs fonctions partielles d'une seule variable en

- laissant une variable libre
- fixant les autres

Par exemple en  $(x_0, y_0)$ , on peut définir

- $g : x \mapsto f(x, y_0)$
- $h : y \mapsto f(x_0, y)$

et on définit les **dérivées partielles** de  $f$  à partir de ces fonctions.

# Dérivées partielles (II)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et  $y$  en  $(x_0, y_0)$  sont  $h'(x_0)$  et  $g'(y_0)$  où  $g$  et  $h$  sont définies par  $g(x) = f(x, y_0)$  et  $h(y) = f(x_0, y)$ . Elles sont notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0)$$

Les fonctions correspondantes sont notées  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Remarque** Si  $z = f(x, y)$ , on peut aussi écrire  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

# Exercice

On suppose que  $x, y, z$  sont liés par les relations suivantes. Calculer les dérivées partielles de  $z$  par rapport à  $x$  et  $y$ .

- $z = x + y$
- $z = xy$
- $z = x/y$
- $z = x \ln(y)$
- $z = e^{x+y}$
- $z = x^\alpha y^\beta$
- $z = x^3 y^2 + \sin^2(y) + 3x$

# Dérivées partielles: généralisations

- On peut assez facilement généraliser les définitions précédentes à des fonctions  $n$  variables.
- On peut également calculer des dérivées **secondes**.

Sous des conditions vérifiées pour toutes les fonctions du cours, le théorème de Schwartz garantit que l'ordre de dérivation est indifférent:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

# Théorème de Scharwz

On va vérifier le théorème de Schwarz sur  $z = e^{xy}$ .

Si on dérive par rapport à  $y$  puis par rapport à  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} = x e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial x e^{xy}}{\partial x} = e^{xy} + x y e^{xy}\end{aligned}$$

Si on dérive par rapport à  $x$  puis par rapport à  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} = y e^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial y e^{xy}}{\partial y} = e^{xy} + x y e^{xy}\end{aligned}$$

Et le théorème est donc vérifié sur cet exemple.

# Différentielle Totale

- On sait relier  $dy$  et  $dx$  quand il existe une relation entre  $y = f(x)$ .
- Peut-on faire la même chose avec  $dz$ ,  $dx$  et  $dy$  si on a une relation  $z = f(x, y)$ ?

Si  $z = f(x, y)$  où  $f$  est une fonction numérique (de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ), alors la **différentielle totale** de  $z$  est

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

# Différentielle Totale

On peut retrouver ce résultat par analogie avec les différentielles de fonctions univariées:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

Les deux différences majeures concernent le: - nombre de différentielles (une par variables dépendante):  $dx \rightarrow dx, dy, \dots$  - les coefficients multiplicatifs (dérivées partielles au lieu de dérivées droites):  $\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \dots$



# Exercice

Calculer la différentielle totale des fonctions suivantes:

- $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- $z = x^3 y^2 + \sin^2(y) + 3x$
- $PV = nRT$  (en prenant successivement  $P$ ,  $V$  et  $T$  comme variables réponses)

# Fonctions composées

Quand on écrit  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , on désigne par convention la dérivée partielle par rapport à la variable  $x$  avec l'idée implicite que  $f$  s'écrit sous la forme  $f(x, y) = \dots$

Mais comment faire face à des expressions de la forme  $f(x - y, x + y)$ ?

On va *composer* les différentielles totales et identifier les coefficients pour trouver les dérivées partielles. C'est le même raisonnement que pour la dérivée de fonctions composées:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ .

On commence par poser une fonction intermédiaire

$$g(x, y) = f(\underbrace{u}_{=x-y}, \underbrace{v}_{=x+y})$$

# Fonctions composées (II)

Avant d'écrire des égalités entre les différentielles totales:

$$\begin{aligned} dg(x, y) &= df(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \end{aligned}$$

Puis on développe les différentielles totales de  $u$  et  $v$

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial u} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] + \frac{\partial f}{\partial v} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right]$$

Avant de remplacer les différentielles partielles de  $u$  et  $v$  par rapport à  $x$  et  $y$  par leurs valeurs.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

# Fonctions composées (III)

En substituant les dérivées partielles par leurs valeurs en triant les termes  $dx$  et  $dy$  ensemble, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy &= \frac{\partial f}{\partial u} [dx - dy] + \frac{\partial f}{\partial v} [dx + dy] \\ \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right] dx + \left[ -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right] dy\end{aligned}$$

Par identification des coefficients

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

Attention, on a utilisé la notation  $\frac{\partial f}{\partial u}$  pour bien distinguer  $u$  et  $x$  mais il s'agit bien de la dérivée partielle par rapport à la **première coordonnée**, traditionnellement notée  $\frac{\partial f}{\partial x}$

# Fonctions composées (IV)

En remplaçant les dérivées partielles par les écritures habituelles et en substituant  $u$  et  $v$  par leurs expressions, on aboutit à

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x - y, x + y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x - y, x + y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(x - y, x + y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x - y, x + y)\end{aligned}$$

Où  $\frac{\partial f}{\partial x}$  représente bien la dérivée partielle de  $f$  par rapport à sa première coordonnée (indépendamment de l'expression de cette première coordonnée).

# Fonctions composées (V)

De façon générale, si  $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  avec  $f, g, u$  et  $v$  dérivable, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\end{aligned}$$

Ou de façon compacte

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

# Différentielle logarithmique

Dans certains cas (produits, puissances), il est parfois plus facile de calculer une différentielles totale en échelle logarithmique (pratique pour des incertitudes relatives)

$$\begin{aligned}PV = nRT &\Leftrightarrow \ln(P) + \ln(V) = \ln(nR) + \ln(T) \\ \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} &= \frac{dT}{T}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P = V^\gamma &\Leftrightarrow \ln(P) = \gamma \ln(V) \\ \Rightarrow \frac{dP}{P} &= \gamma \frac{dV}{V} \\ \Rightarrow dP &= \gamma \frac{P}{V} dV \\ \Rightarrow dP &= \gamma V^{\gamma-1} dV\end{aligned}$$

# Application (I)

On considère un cylindre droit de hauteur  $h = 50$  cm et de rayon  $r = 10$  cm et de volume  $V$ . On s'intéresse à la variation de volume quand on augmente  $h$  de 2 cm et diminue  $r$  de 1 cm.

- Calculer exactement la variation de volume  $\Delta V$
- Calculer la variation de volume  $\Delta V$  de façon approchée (en l'approchant par la différentielle  $dV$ )
- Calculer la variation de volume relative  $\frac{\Delta V}{V}$  (de façon approchée)



# Application (II)

On effectue une transformation adiabatique et réversible sur un gaz parfait pour le faire passer de l'état  $(P_0, V_0)$  à l'état  $(P_1, V_1)$ .

On sait que  $\delta Q = dU - dW$ , que pour ce gaz l'énergie interne dépend uniquement de la température ( $dU = nC_v dT$ ) et que le travail des forces de pression s'écrit  $dW = -PdV$ . On a donc

$$0 = \frac{\delta Q}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + P \frac{dV}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

De plus  $\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$  et  $R/C_v = \gamma - 1$  donc

$$0 = nC_v \left[ \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \right] = nC_v \left[ \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right]$$

# Application (III)

Au final, on arrive à

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

qui peut se réécrire

$$PV^\gamma = \textit{Constante}$$

Et on retrouve la loi de Laplace pour les détente adiabatiques.

# Mesure d'incertitude

À l'aide des différentielles logarithmiques, relier les incertitudes relatives, *i.e.* de la forme  $\frac{\Delta V}{V}$ ,

- du volume d'une sphère et de son rayon
- de la surface d'un disque et de son rayon
- du volume d'un cube et de son côté
- de la surface d'un carré et de son côté
- du volume d'un cône et de son rayon
- du volume d'un cône et de sa hauteur

# Plus de calculs (I)

Calculer les dérivées partielles des fonctions  $f(x, y)$  suivantes

- $f(x, y) = (x^2 - 3xy + y^4)/(2x + 3y)$
- $f(x, y) = e^{5 \cos(xy)}$
- $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2) \cos(xy)$
- $f(x, y) = 2xy/e^{x+y}$

# Plus de calculs (II)

- Calculer toutes les dérivées d'ordre  $\leq 2$  de la fonction  $f(x, y) = x^2 + 3xy^5 + \cos(xy)$
- Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  pour  $f(x, y) = \cos(ax^p y^q) + \sin(bx^r y^s)$  avec  $(a, b)$  des réels et  $p, q, r, s$  des entiers positifs.
- Trouver les points qui vérifient simultanément  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  pour  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  et  $f(x, y) = x^3 y + xy^2$
- Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$  et  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$  pour  $f(x, y, z) = (x^2 + xy + yz)e^{x+2y}$