

# Exercices corrigés sur les « complexes »

## Exercice 1 : Forme algébrique

Mettre sous forme algébrique  $z = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  les complexes suivants :

1.  $z_1 = \frac{1+2i}{3-4i}$  C'est une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur le complexe conjugué du dénominateur pour se ramener à dénominateur positif.  $z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1+2i}{5}$
2.  $z_2 = \frac{11+5i}{1-i} + \frac{11-5i}{1+i}$  On réduit tout le monde au même dénominateur  $(1+i)(1-i)$  qui a le bon goût d'être réel.  $z_2 = \frac{(11+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(11-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6+16i}{2} + \frac{6-16i}{2} = \frac{12}{2} = 6$
3.  $z_3 = \left(\frac{1+i}{3-i}\right)^2$ . On peut adopter deux approches : (i) mettre  $\frac{1+i}{3-i}$  sous forme algébrique avant de l'élever au carré ou (ii) l'élever au carré avant de le mettre sous forme algébrique (en se ramenant à un numérateur réel). On va adopter l'approche (i) : mettre  $\frac{1+i}{3-i}$  sous forme algébrique (en se ramenant à un numérateur réel) puis l'élever au carré.  $\frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{2+4i}{10} = \frac{1+2i}{5}$  et on a donc  $z_3 = \frac{1+2i}{5} \times \frac{1+2i}{5} = \frac{-3+4i}{25}$ .
4.  $z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  Déjà sous forme algébrique
5.  $z_5 = -\frac{2}{1-i\sqrt{7}}$  On se ramène à un dénominateur réel en multipliant par le complexe conjugué :  $z_5 = -\frac{2}{1-i\sqrt{7}} \frac{1+i\sqrt{7}}{1+i\sqrt{7}} = -\frac{2(1+i\sqrt{7})}{8} = -\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$
6.  $z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^5}$ . On commence par calculer  $(1+i)^9$  et  $(1-i)^5$ . On remarque que  $(1+i)^2 = 2i$ ,  $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i = -2(1-i)$ . On a donc  $(1+i)^9 = [(1+i)^3]^3 = -8 \times (1-i)^3$ .  $z_6$  se simplifie donc en  $z_6 = -\frac{8}{(1-i)^2}$ . Comme  $(1-i)^2 = -2i$ , on a  $z_6 = \frac{4}{i} = -4i$ .  
**Remarque** On peut résoudre l'exercice plus simplement en notant que  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$  et  $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$  d'où on tire aisément  $z_6 = \frac{(\sqrt{2})^9 e^{9i\pi/4}}{(\sqrt{2})^5 e^{-5i\pi/4}} = (\sqrt{2})^4 e^{14i\pi/4} = 4e^{-i\pi/2} = -4i$
7.  $z_7 = \frac{1}{(1+3i)(2-i)} = \frac{(1-3i)(2+i)}{|1+3i|^2 |2-i|^2} = \frac{5-5i}{10 \times 5} = \frac{1-i}{10}$
8.  $z_8 = \frac{(1+11i)^2}{1-i} = \frac{(1+11i)^2(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{2}(-120+22i)(1+i) = (-60+11i)(1+i) = -71+59i$
9.  $z_9 = 2e^{2i\pi/3} = 2\cos(2\pi/3) + 2i\sin(2\pi/3) = -1 + i\sqrt{3}$
10.  $z_{10} = \frac{2e^{i\pi/4}}{e^{-3i\pi/4}} = 2e^{i\pi} = -2$
11.  $z_{11} = 2e^{i\pi/4} \times e^{-3i\pi/4} = 2e^{-i\pi/2} = -2i$
12.  $z_{12} = \frac{2e^{i\pi/3}}{3e^{5i\pi/6}} = \frac{2}{3}e^{-3\pi/6} = \frac{2}{3}e^{-\pi/2}$

## Exercice 2 : Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1.  $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ . On commence par mettre  $1+i$  sous forme exponentielle en faisant apparaître son module :  $1+i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ . On montre avec un raisonnement similaire que  $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$  et on déduit  $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$
2.  $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 2e^{i\pi/3}$

3.  $z_3 = \frac{-2}{1+i}$  On repart du résultat intermédiaire de la question 1 :  $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$  et on note que  $-2 = 2e^{i\pi}$  pour déduire le résultat  $z_3 = \frac{2e^{i\pi}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$
4.  $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$  On repart du résultat de la question 2 :  $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$  et on montre de manière analogue que  $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$ . On en déduit  $z_4 = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = \frac{\pi}{6}$
5.  $z_5 = \sin(x) + i\cos(x)$ .  $z_5$  ressemble à une forme exponentielle mais n'en est pas une, il faut du cos pour la partie réelle et du sin pour la partie imaginaire. Qu'à cela ne tienne, on sait que  $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$  et  $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$  (faites un dessin sur le cercle trigo pour vous en convaincre). On a donc  $z_5 = \cos(\pi/2 - x) + i\sin(\pi/2 - x) = e^{i(\frac{\pi}{2}-x)}$

On en déduit facilement le reste des valeurs demandées

1.  $z_1^2 = (e^{i\pi/2})^2 = e^{i\pi} - 1$
2.  $z_2^4 = (2e^{i\pi/3})^4 = 16e^{4i\pi/3} = 16e^{-2i\pi/3} = -8 - i8\sqrt{3}$
3.  $z_2^5 + \overline{z_2^5} = 2\operatorname{Re}(z_2^5) = 2\operatorname{Re}(32e^{5i\pi/3}) = 2 \times 32 \times \cos(5\pi/3) = 64 \cos(-\pi/3) = -32$
4.  $\frac{z_2^3}{1-i} = \frac{8e^{i3\pi/3}}{1-i} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{|1-i|^2} = -4 - 4i$

### Exercice 3 : Opération sur les nombres complexes

On pose  $u = 1+i$  et  $v = 1+i\sqrt{3}$ .

On a vu dans l'exercice précédent que  $u = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$  et  $v = 2e^{i\pi/3}$ . On en déduit les réponses suivantes :

1.  $|u| = \sqrt{2}$  et  $|v| = 2$
2.  $\arg(u) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$  et  $\arg(v) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$
3.  $z = \frac{u}{v} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{|1+i\sqrt{3}|^2} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{10}$
4.  $z = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
5.  $z$  a pour module  $1/\sqrt{2}$  et un de ses arguments est  $-\pi/12$ .
6. D'après la question 3,  $z = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{10}$ . D'après la question 4,  $z = \frac{\cos(-\pi/12)}{\sqrt{2}} + i\frac{\sin(-\pi/12)}{\sqrt{2}}$ .  
Par identification des termes,

$$\cos(-\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1+\sqrt{3}) \quad \sin(-\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1-\sqrt{3})$$

On conclut à l'aide des relations trigonométriques entre cos et sin :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1-\sqrt{3}) \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}(1+\sqrt{3})$$

### Exercice 4 : Simplification de nombre complexe

Ecrire sous forme algébrique et puis trigonométrique le nombre complexe ci-dessous :

$$z = \left( \frac{1+i-\sqrt{3}(i-1)}{1+i} \right)^2$$

Ce nombre a l'air un peu pénible mais certaines parties ressemblent à des quantités déjà vues. On commence par simplifier  $z$  sous la forme :

$$z = \left( 1 + \sqrt{3} \frac{i-1}{1+i} \right)^2$$

On a déjà vu dans la question 1 de l'exercice 2 que  $\frac{i-1}{1+i} = \overline{\left(\frac{i+1}{1-i}\right)} = \overline{e^{i\pi/2}} = \bar{i} = -i$ . On a donc  $z = (1-i\sqrt{3})^2 = (2e^{-i\pi/3})^2$  (voir question 2 de l'exercice 2), c'est à dire  $z = 4e^{-2i\pi/3} = -2 - i2\sqrt{3}$

### Exercice 5 : Puissance d'un nombre complexe

De façon générale, la forme exponentielle est beaucoup plus pratique pour calculer la puissance d'un nombre complexe

1. Déterminer le module et un argument de  $\frac{1+i}{1-i}$ . En déduire la valeur de  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$  On a vu précédemment que  $z = \frac{1+i}{1-i} = i$  et on sait que  $i^4 = 1$ . Il suffit donc de trouver le reste de la division entière de 2017 par 4. On a  $2017 = 2016 + 1 = 4 \times 504 + 1$  et donc  $z^{2017} = i^{2017} = i^{4 \times 504 + 1} = (i^4)^{504} \times i = 1^{504} \times i = i$
2. Déterminer le module et un argument de  $1 + i\sqrt{3}$ . En déduire la valeur de  $(1 + i\sqrt{3})^{2010}$  On a déjà vu que  $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$  et on sait que  $(e^{i\pi/3})^6 = e^{2i\pi} = 1$ . Il faut donc trouver le reste de la division entière de 2010 par 6. On a  $2010 = 6 \times 335$  et donc  $z^{2010} = (2e^{i\pi/3})^{2010} = 2^{2010} (e^{i\pi/3})^{2010} = 2^{2010} (e^{i\pi/3})^{6 \times 335} = 2^{2010} \left((e^{i\pi/3})^6\right)^{335} = 2^{2010} \times 1^{335} = 2^{2010}$
3. Déterminer les puissances  $n$ -ièmes de :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \quad z_2 = \frac{1 + i \tan(\theta)}{1 - i \tan(\theta)} \quad z_3 = 1 + \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

$z_1$  peut se réécrire  $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$  d'où on déduit  $z_1^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{12}}$

$z_2$  n'est définie que pour  $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ). Si c'est le cas,  $z_2$  peut se réécrire  $z_2 = \frac{\frac{\cos \theta + i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos \theta - i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$  d'où on déduit  $z_2^n = e^{2in\theta} = \cos(2n\theta) + i \sin(2n\theta)$

$z_3$  peut se réécrire  $z_3 = 1 + e^{i\phi}$ . Ce n'est pas une forme exponentielle mais on peut s'en rapprocher en "factorisant par le demi-angle", c'est à dire en mettant  $e^{i\phi/2}$  en facteur :  $z_3 = e^{i\phi/2} (e^{-i\phi/2} + e^{i\phi/2}) = 2 \cos(\phi/2) e^{i\phi/2}$ . Il est alors plus facile de calculer la puissance sous la forme :  $z_3^n = \left(2 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{i\frac{n\phi}{2}}$

### Exercice 6 : Linéarisation

Linéariser les expressions suivantes

1.  $f = \sin^5(x)$  Comme détaillé dans le cours, on utilise les formules d'Euler et de Moivre.

$$\begin{aligned} \sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\ &= \frac{1}{(2i)^5} [(e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4(-e^{-ix})^1 + 10(e^{ix})^3(-e^{-ix})^2 \\ &\quad + 10(e^{ix})^2(-e^{-ix})^3 + 5(e^{ix})^1(-e^{-ix})^4 + (-e^{-ix})^5] \\ &= \frac{1}{32i} [e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}] \\ &= \frac{1}{32i} \left[ \underbrace{e^{i5x} - e^{-5ix}}_{=2i \sin(5x)} - 5 \underbrace{(e^{i3x} - e^{-i3x})}_{=2i \sin(3x)} + 10 \underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{=2i \sin(x)} \right] \\ &= \frac{1}{16} [\sin(5x) - 5 \sin(3x) + 10 \sin(x)] \end{aligned}$$

où la deuxième ligne est une application directe du binôme de Newton (une généralisation de l'inégalité remarquable  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ )

2.  $g = \cos^3(x) \sin^4(x)$  On procède comme décrit dans le cours en développant d'un côté  $\cos^3(x)$  et de l'autre  $\sin^4(x)$ .

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\ &= \frac{1}{(2i)^4} [(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(-e^{-ix})^1 + 6(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2 \\ &\quad + 4(e^{ix})^1(-e^{-ix})^3 + (-e^{-ix})^5] \\ &= \frac{1}{16} [e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}]\end{aligned}$$

Et on s'arrête là (on ne rassemble pas les termes pour faire apparaître des cos et des sin car il faut encore développer  $\cos^3(x)$ ).

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{2^3} [(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(e^{-ix})^1 + 3(e^{ix})^1(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3] \\ &= \frac{1}{8} [e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}]\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier les deux expressions (sans se tromper) :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) \sin^4(x) &= \frac{1}{16 \times 8} [e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}] [e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}] \\ &= \frac{1}{128} [e^{i7x} - 4e^{i5x} + 6e^{i3x} - 4e^{ix} + e^{-ix} \\ &\quad + 3e^{i5x} - 12e^{i3x} + 18e^{ix} - 12e^{-ix} + 3e^{-i3x} \\ &\quad + 3e^{i3x} - 12e^{ix} + 18e^{-ix} - 12e^{-i3x} + 3e^{-i5x} \\ &\quad + e^{ix} - 4e^{-ix} + 6e^{-i3x} - 4e^{-i5x} + e^{-i7x}] \\ &= \frac{1}{128} [e^{i7x} - e^{i5x} - 3e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} - 3e^{-i3x} - e^{-i5x} + e^{-i7x}] \\ &= \frac{1}{128} \left[ \underbrace{e^{i7x} + e^{-i7x}}_{2 \cos(7x)} - \underbrace{(e^{i5x} + e^{-i5x})}_{2 \cos(5x)} - 3 \underbrace{(e^{i3x} + e^{-i3x})}_{2 \cos(3x)} + 3 \underbrace{(e^{ix} + e^{-ix})}_{2 \cos(x)} \right] \\ &= \frac{1}{64} [\cos(7x) - \cos(5x) - 3 \cos(3x) + 3 \cos(x)]\end{aligned}$$

**Remarque :** On aurait pu s'épargner quelques calculs en utilisant l'égalité  $\cos(x) \sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$  et en développant  $g$  sous la forme  $g = \frac{1}{8} \sin^3(2x) \sin(x)$ .

**Remarque :** Une façon simple de diagnostiquer une erreur de calcul est la nature de votre résultat : vous partez d'une expression réelle, vous devez aboutir à une expression réelle. S'il vous reste des  $i$  dans le résultats, vous avez fait une faute quelque part.

3.  $h = \sin^3(x) \cos^2(x)$  On pourrait raisonner comme pour le calcul de  $g$  mais on va ruser pour faire moins de calcul en notant que  $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ . On a donc  $h = \sin^3(x)(1 - \sin^2(x)) = \sin^3(x) - \sin^5(x) = \sin^3(x) - f$ . On peut calculer  $\sin^3(x)$  comme dans la question

1 :

$$\begin{aligned}
 \sin^3(x) &= \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{(2i)^3} [(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(-e^{-ix})^1 + 3(e^{ix})^1(-e^{-ix})^2 + (-e^{-ix})^3] \\
 &= \frac{1}{8i} [e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}] \\
 &= \frac{1}{8i} \left[ \underbrace{e^{i3x} - e^{-i3x}}_{=2i \sin(3x)} - 3 \underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{=2i \sin(x)} \right] \\
 &= \frac{1}{4} [\sin(3x) - 3 \sin(x)]
 \end{aligned}$$

En combinant les linéarisations de  $\sin^3(x)$  et  $\sin^5(x)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{1}{4} [\sin(3x) - 3 \sin(x)] - \frac{1}{16} [\sin(5x) - 5 \sin(3x) + 10 \sin(x)] \\
 &= \frac{1}{16} [-\sin(5x) + 9 \sin(3x) - 22 \sin(x)]
 \end{aligned}$$

### Exercice 7 : Puissance d'un nombre complexe

Comment choisir l'entier naturel  $n$  pour que  $(\sqrt{3} + i)^n$  soit réel ? Imaginaire ?

Comme pour les autres exercices avec des puissances, on commence par écrire le nombre complexe de départ sous forme exponentielle. On a déjà vu que  $z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  (voir question 4 de l'exercice 2). On sait donc  $z^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$ . À partir de là, on peut raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
 z^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{6}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = 0 + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
 z^n \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{6}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6k + 3 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Autrement dit  $z^n$  est réel si et seulement si  $n$  est multiple de 6 (parfois noté  $n \equiv 0 [6]$ ), et imaginaire si et seulement si le reste de la division entière de  $n$  par 6 est 3 (parfois noté  $n \equiv 3 [6]$ ).