

Exercices « Différentielles »

Exercice 1 : Calcul de différentielles

Exprimer dy en fonction de dx quand y et x sont liés par les relations suivantes :

1. $y = ax + b$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) $dy = \frac{dy}{dx}dx = a dx$
2. $y = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) $dy = \frac{dy}{dx}dx = x^{n-1}dx$
3. $y = \ln(x)$ $dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{dx}{x}$
4. $y = e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) $dy = \frac{dy}{dx}dx = \alpha e^{\alpha x}dx$
5. $y = x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$), on pourra écrire $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ $dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{d e^{\alpha \ln(x)}}{d \ln(x)} \frac{d \ln(x)}{dx} dx = \alpha e^{\alpha \ln(x)} \frac{1}{x} dx = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} dx = \alpha x^{\alpha-1} dx$. On retrouve la même formule que pour la question 3. Le fait d'élever à une puissance entière ou réelle ne change pas le résultat.

Exercice 2 : "Intégration" de différentielles

A partir des relations différentielles suivantes, proposer une relation entre y et x :

Il s'agit essentiellement d'un exercice de reconnaissance de forme, qui est facilité si on a fait l'exercice 1 précédemment.

1. $dy = 5dx$ $y = 5x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
2. $dy = nx^{n-1}dx$ $y = x^n + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
3. $dy = \frac{dx}{x}$ $y = \ln(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
4. $dy = \alpha e^{\alpha x} dx$ $y = e^{\alpha x} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
5. $dy = \cos(x)dx$ $y = \sin(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
6. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ l'égalité peut se réécrire $\ln(y) = \ln(x) + K$ (avec $K \in \mathbb{R}$) et donc $y = K'x$ (avec $K' = \exp(K) \in \mathbb{R}$)

Exercice 3 : Dérivées de fonctions composées (I)

Calculer les dérivées suivantes :

Il s'agit systématiquement de composées avec la fonction $x \mapsto 1/x$. On peut utiliser le formulaire pour calculer ces dérivées.

$$\begin{array}{ll} \frac{d(\tan(\alpha))}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & \frac{d[1/\cos(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \\ \frac{d[1/\sin(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} & \frac{d[1/\tan(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{-1}{\sin^2(\alpha)} \end{array}$$

Si vous avez des problèmes à retrouver ces résultats, n'hésitez pas à demander à vos camarades avant de venir me voir

Exercice 4 : Dérivées de fonctions composées (II)

Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{d[u \ln(u) - u]}{du}$$

$$\frac{d[1/(1 + \epsilon^2)]}{d\epsilon}$$

$$\frac{d^2[\sin^2(\theta)]}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2[\ln(y)]}{dy^2}$$

$$\frac{d[(v - 1)e^v]}{dv}$$

$$\frac{d[1/\tan \alpha]}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2[x\sqrt{x}]}{dx^2}$$

$$\frac{d^2[z^3 + 3z^2 + 3z + 1]}{dz^2}$$

Exercice 5 : Dérivées de fonctions composées (III)

Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{d[(1 + u^3)^4]}{du}$$

$$\frac{d[\ln(1 - x)]}{dx}$$

$$\frac{d[\tan^2(\theta)]}{d\theta}$$

$$\frac{d[1/\sqrt{1 + u^2}]}{du}$$

$$\frac{d[\sqrt{1 + v^2}]}{dv}$$

$$\frac{d[2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{8})]}{d\alpha}$$

$$\frac{d[e^{-y^2}]}{dy}$$

$$\frac{d[\sqrt{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}]}{dz}$$

Exercice 6 : Dérivées de fonctions réciproques

Calculer les dérivées suivantes des fonctions $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\arctan(x)$.

Vu en cours

Exercice 7 : Dérivées et tableau de variation

Déterminer l'image de l'intervalle I par les fonctions suivantes :

$f : x \mapsto e^x - x$	pour $I = \mathbb{R}$	pour $I = (0, e)$
$g : x \mapsto \ln(x + 1) - x$	pour $I = (-1, 0)$	pour $I = [0, e]$
$h : x \mapsto \frac{e^x + 1}{x + 2}$	pour $I = (-\infty, -2)$	pour $I = \mathbb{R}_+$

Voir transparents du cours (p. 38)

Exercice 8 : Dérivées et optima

Trouver les minimums et maximums globaux des fonctions suivantes (il est recommandé de s'aider d'un ordinateur pour calculer f en différentes valeurs, les exercices avec un (*) sont difficiles) :

$$\begin{array}{ll}
f(z) = 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 & \text{pour } z \in [-2, 6] \\
f(z) = 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 & \text{pour } z \in [-2, 4] \\
f(z) = 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 & \text{pour } z \in [0, 2] \\
f(t) = \frac{3-4t}{t^2+1} & \text{pour } t \in [-2, 4] \\
f(x) = 3\cos(2x) - 5x & \text{pour } x \in [0, 6] \quad (*) \\
f(x) = x\cos(x) - \sin(x) & \text{pour } x \in [-15, -5] \\
f(z) = z^2e^{1-z} & \text{pour } z \in [-1/2, 5/2] \\
f(t) = \ln(t^2 + t + 3) & \text{pour } t \in [-2, 2]
\end{array}$$

Voir transparents du cours (p. 59)

Exercice 9 : Dérivées et limites

Calculer, à l'aide de dérivées, les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x) - \ln(3)}{x - 3} = \ln'(3) = \frac{1}{3} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \underbrace{g'}_{g(x)=\sqrt{x+2}}(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4} \\
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \exp'(2) = e^2 & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x + 1} \underbrace{g'}_{g(x)=x^{2019}}(-1) = 2019 \times (-1)^{2018} = 2019
\end{array}$$

Exercice 10 : Dérivées successives

On considère la fonction $f(x) = (x+1)e^{-x}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$.
2. Expliciter a_n
3. Vérifier que la suite $c_n = (-1)^n b_n$ est arithmétique. En déduire b_n puis $f^{(n)}(x)$.