

Projet n°3 MMCN

MEZIANE Mohamed Yacine - TANTOUCH Maher - PELLÉ Gabriel

On considère le système 3D suivant:

$$\begin{aligned}v' &= v - v^3/3 - w \\w' &= -u + v - \frac{1.3}{1 + \exp(\frac{c-w}{0.05})} \\u' &= \mu(-0.4 - v)\end{aligned}$$

Où on admet que μ et c sont des constantes, avec $\mu = 0.01$.

a. On fixe $c = -0.32$:

En analysant la figure (1) qui représente l'évolution dynamique de V , On aperçoit:

Régime transitoire : Durée dépendante des conditions initiales et de sa distance des points fixes. On commence avec $v, w, u = (0.1, 0.1, 0.2)$.

Régime permanent : On rentre dans un cycle (Cadre rouge) composé de deux parties qui se répètent à l'identique indépendamment des conditions initiales (figure 2):

Phase oscillante(cadre vert - figure 2): 9 oscillations périodiques ($T \approx 8.5\text{ms}$) et une amplitude qui décroît à chaque cycle, cela évoque la présence d'un *foyer instable*.

Transition (cadre bleu - figure 2): Cependant dans la 9ème oscillation, le système n'atteint pas un certain seuil par l'existence d'une perturbation par un *col*.

Phase d'amplification (cadre rose figure 2): il existe une oscillation à amplitude globale croissante et fait 7 pics suivis par à un retour au seuil qui correspond au point d'inflexion dans le graphe (étoile - figure 3) vers -25mV , et là on revient à nouveau dans un nouveau cycle identique au précédent et qui dure environ 140 mS . Cet aspect croissant exponentiellement est plutôt évocateur de l'existence d'un *foyer instable*.

Figure 1

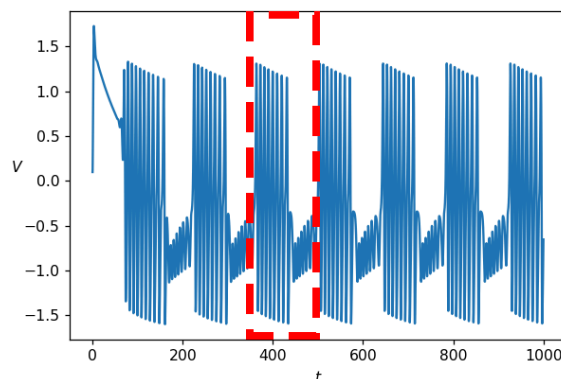
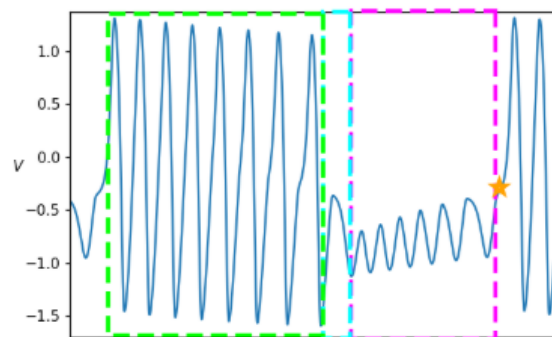


Figure 2



En analysant le portrait de phase (V,W) durant un seul cycle, présent dans la figure 5, on remarque que la nullcline de V est quadratique et celle de W est sigmoïde:

Phase oscillante: Le grand cycle dans le plot reflète la présence des 8 oscillations avec chaque cycle qui se déplace à gauche par rapport au précédent ce qui reflète la nature du *foyer instable*.

Transition: On visualise la perturbation de la 9ème oscillation par la présence d'un point fixe aux alentours de $(-0.4;-0.4)$, Cette dernière se retrouve de l'autre côté du point fixe instable (*probablement un col*) et doit alors subir ses contraintes.

Phase d'amplification: Un autre point fixe instable impose des oscillations croissantes d'une façon exponentielle jusqu'à l'atteinte du seuil qui permet de rejoindre l'autre côté du col et recommencer tout le cycle à nouveau. Cela indique la présence d'un *foyer instable*.

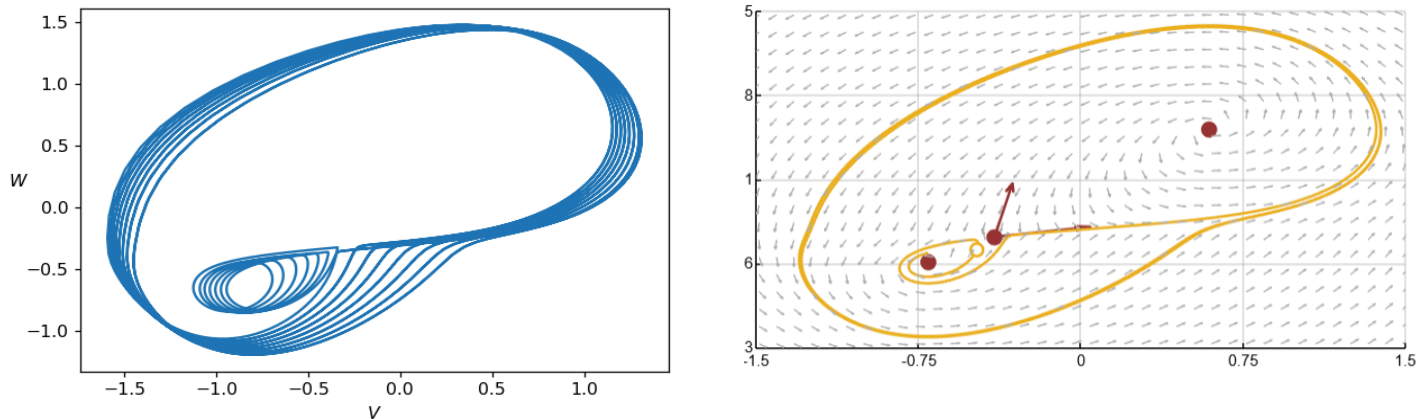


Figure 3 : gauche : solution (v, w) ; droite : solution (v, w) dans le plan de phase

On fixe $c = -0.55$:

En analysant la figure (1) qui représente l'évolution dynamique de V, On aperçoit:

Régime transitoire : Durée dépendante des conditions initiales et de sa distance des points fixes. On commence avec $v, w, u = (0.1, 0.1, 0.2)$.

Régime permanent : On rentre dans un cycle composé d'oscillations identiques toute la durée de la simulation (figure 2):

Phase oscillante: oscillations périodiques ($T \approx 8.5\text{ms}$) et une amplitude maximale identique à chaque cycle avec une amplitude globale conservée, cela évoque la présence d'un *cycle limite stable*.

Pas de transition: Toutes les oscillations arrivent au seuil et déclenchent des nouveaux cycles, probablement dû à une absence du Col.

Pas de phase d'amplification: absence de perturbateur local qui peut indiquer la disparition du foyer instable.

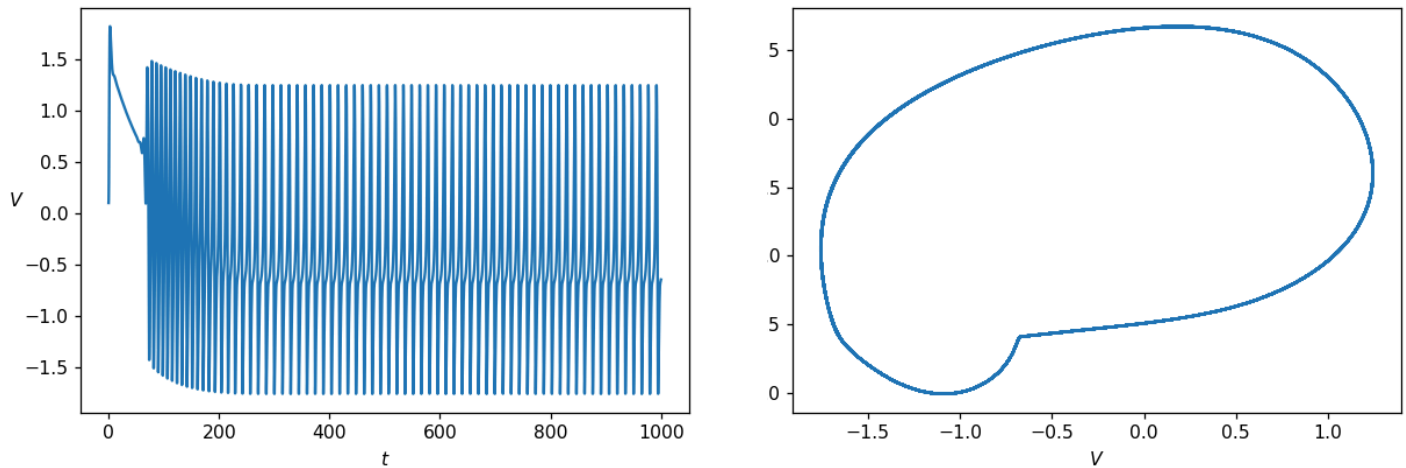


Figure 4 : gauche : V en fonction du temps ; droite : solution (V, W)

En analysant le portrait de phase (V, W) durant un seul cycle, présent dans la figure 5, on remarque que la nullcline de V est quadratique et celle de W est sigmoïde:

Phase oscillante: Le grand cycle dans le plot reflète la présence du *cycle limite stable*.

Pas de transition: Toutes les oscillations suivent le même chemin sans subir d'autres points fixes.

Pas de phase d'amplification: absence du petit cycle oscillant vu dans l'exemple précédent. Un argument en plus vers l'hypothèse de la disparition du foyer qui était présent dans l'exemple d'avant.

Le fait de passer des points fixes vu précédemment à un cycle limit évoque la présence d'une bifurcation pour $C \in [-0.55; -0.32]$.

On fait l'hypothèse de la présence soit d'une bifurcation de Hopf supercritique ou bien une bifurcation homocline.

b. Approximation du système

Avec $c = -0.55$, fixons u à -1.099 pour simplifier le système.

Pertinence de la simplification:

Cette approximation est justifiée par la dynamique lente de u par rapport à v et w . En effet, avec le paramètre μ à 0.01, u évolue beaucoup plus lentement que v et w , sur des échelles de temps courtes, on peut considérer u quasi-constant.

On observe également dans la simulation de u un intervalle de variation très restreint (de l'ordre de 10^{-1}).

Nous avons une simplification d'une variable lente ou quasi-constante relativement aux deux autres, avec très peu de variation, ce qui justifierait bien cette approximation en théorie. Cependant, en observant les graphiques, on observe que cette approximation élimine la caractéristique oscillatoire du système avec maintenant une stabilisation vers un point fixe plutôt qu'un cycle limite:

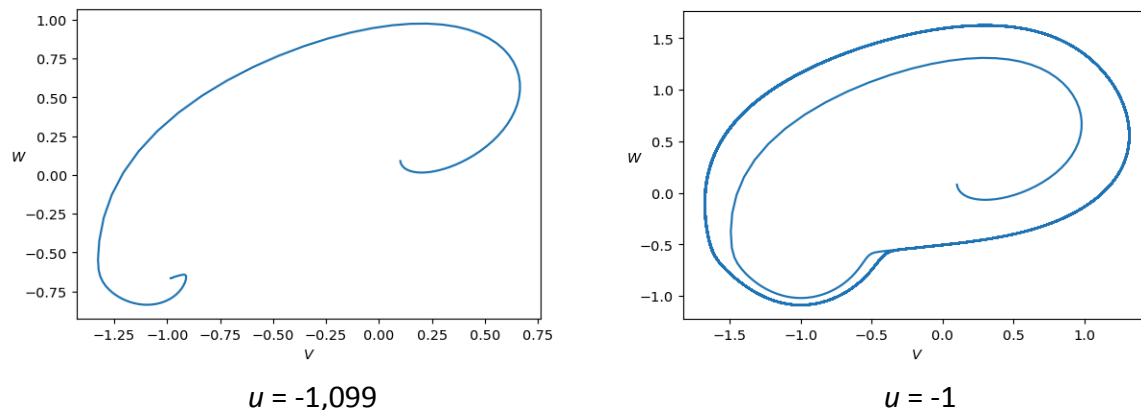


Figure 5 (à gauche : solution (v,w) pour $u = -1.099$; à droite : solution (v,w) pour $u = -1$)

Nous observons que le point fixe se trouve aux alentours de $v,w \approx (-0.98, -0.65)$.

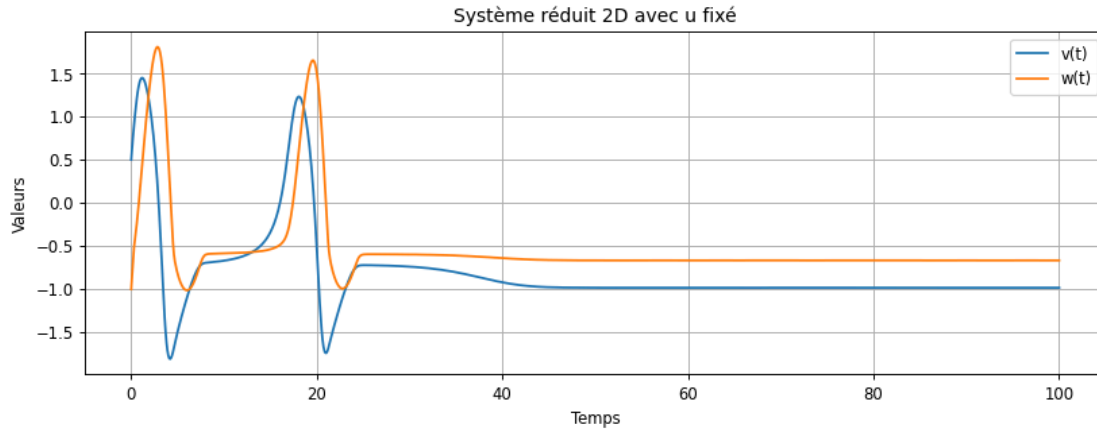
Il semblerait qu'avec les paramètres donnés, l'aspect oscillatoire du système est perdu, et on pourrait trouver un meilleur modèle 2D avec une valeur de u qui permet de retrouver la caractéristique oscillatoire. Nous avons trouvé un tel exemple avec $u = -1$.

Complément de réponse pour b. :

En principe, une telle approximation pourrait être valable sur un intervalle de temps court si le paramètre $\mu \ll 1$: cela ferait que $u(t)$ évoluerait très lentement, ce qui permettrait de "geler" temporairement le comportement rapide de (v,w) . On se placerait alors dans une hypothèse de séparation des échelles de temps, ce qui serait une approche en théorie adaptée.

Or le système complet est ici oscillatoire car possède un cycle limite stable ; comportement qui provient du couplage entre dynamique rapide de (v, w) et de la variable lente u (qui agit comme une force motrice). En fixant u à une valeur constante, on supprime la rétroaction lente

essentielle à la production des oscillations. -> c'est ce qui explique pourquoi la réduction du système en 2D fait perdre le comportement périodique observé initialement, et qu'il n'y ait plus de cycle limite.



On observe ici que le système réduit montre une dynamique convergente vers un point d'équilibre.

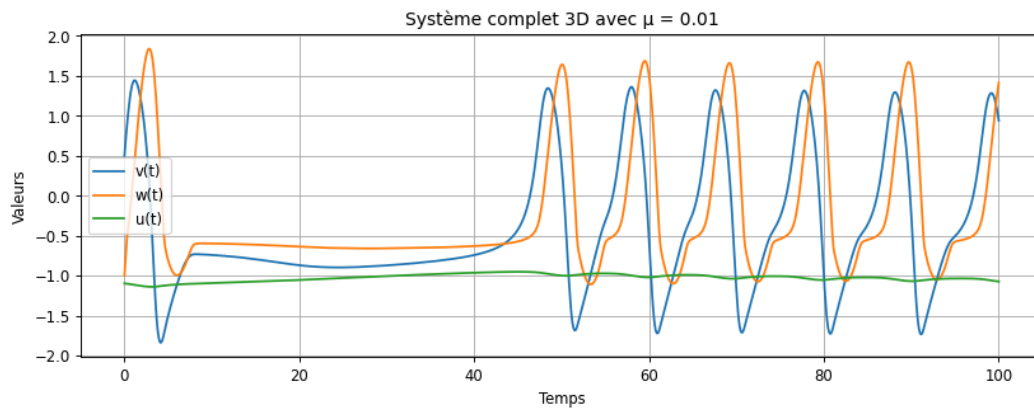


Figure 6 : haut : dans le système réduit en 2D ; bas : dans le système complet en 3D

On voit que le système complet montre une oscillation soutenue (propre à un cycle limite) où $u(t)$ évolue lentement et gouverne les transitions v, w .

L'approximation du système complet par le système réduit (v, w) avec u constant est une bonne approximation locale si et seulement si $\mu \ll 1$ et sur un intervalle de temps court.

c. À l'aide de python:

Nous trouvons les points stationnaires:

- 1: ($V = 0.200999588513989$, $W = 0.198292738138402$)
 2: ($V = -0.71602488953354$, $W = -0.5936582306439868$)
 3: ($V = -0.98351274659990$, $W = -0.66639633104945$)

Ces résultats correspondent aux observations graphiques du système

Vérification par le calcul du col:

Jacobienne:

$$\begin{bmatrix} 1 - v^2 & -1 \\ 1 & \frac{1.3e^{\frac{c-w}{0.05}}}{0.05(1+e^{\frac{c-w}{0.05}})^2} \end{bmatrix}$$

Nous calculons les valeurs propres pour le point 2, qui est le col (par interprétation graphique), et nous obtenons:

$$\lambda_1 = 0.31$$

$$\lambda_2 = -5.23$$

Pour un col, les valeurs propres doivent être de signe opposés, ou avec l'une quasi-nulle. Ces valeurs correspondent bien à un **col**.

d. Analyse des variétés stables et instables du col et identification de la bifurcation

A l'aide d'une simulation du système réduit en 2D, avec les paramètres $u = -1.099$ et $c = 0.55$, nous avons identifié un point stationnaire de type col (où $(v, w) = (-0.716, -0.594)$). Ce point a été localisé numériquement dans le plan de phase, puis confirmé analytiquement par le calcul de la matrice Jacobienne en ce point. Le calcul des valeurs propres des matrices indique une variété instable ($0.31 > 0$) et une stable ($-5.23 < 0$), signature typique d'un point col.

A partir de ce point, nous avons simulé les variétés stables et instable :

- La variété instable est associée à la direction de l'espace propre où $\lambda_1 > 0$ qui correspondent à des trajectoires qui s'éloignent du col.
- Inversement, la variété stable correspond à la direction $\lambda_2 < 0$ et est caractérisée par des trajectoires qui convergent vers le col.

A partir de cette visualisation, on peut voir que ces variétés délimitent différentes dynamiques dans l'espace des phases. Concrètement, la variété instable mène vers une zone où des oscillations croissantes commencent à apparaître, tandis que la variété stable agit comme une barrière entre ces oscillations.

Quand on fait varier le paramètre c , on observe une transition intéressante : pour $c = -0.32$, un foyer instable apparaît ce qui entraîne des oscillations transitoires amplifiées ; et pour $c = -0.55$, ce foyer disparaît et est remplacé par un cycle limite stable. Cela correspond à un comportement typique de bifurcation.

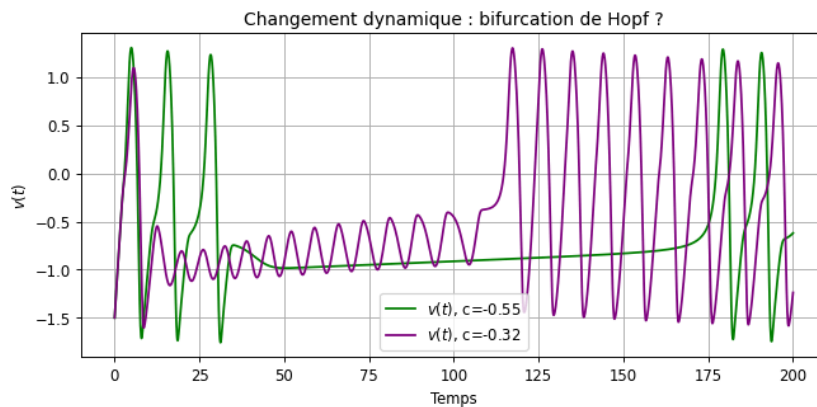


Figure 7 : V en fonction de t suivant $c = -0.55$ et $c = -0.32$

Il apparaît cohérent de proposer à partir de cette approche que le système traverse une **bifurcation de Hopf supercritique** pour des valeurs de c comprises entre -0.55 et -0.32 . Ce type de bifurcation se produit lorsque, à partir d'un point fixe instable, un cycle limite stable émerge. Cette hypothèse est renforcée par la structure des variétés autour du col (absence de reconnexion au même point des variétés instables comme on le voit dans la figure 4) et par la régularité des oscillations observées dans les simulations (cf figure ci-dessus) après transition.

On avait envisagé qu'il aurait pu s'agir d'une bifurcation homocline, mais comme les variétés instables ne se reconnectent pas au même point, cela semble nettement moins probable ici. On ne peut cependant pas complètement exclure cette possibilité étant donné que la réduction du système en un modèle en 2D limite les conclusions à l'échelle globale du système (on peut par exemple manquer d'informations sur de potentiels dynamiques plus complexes, comme il peut y en avoir lors d'une bifurcation homocline.)