POPL2 (08-04-2020)

Srijith P.K.

Logic programming

- Computation as deduction
- Represent natural numbers 0, 1, 2, . . . as terms of the form z, s(z), s(s(z)), . . ., using two function symbols (z of arity 0 and s of arity 1)

$$\frac{}{\mathsf{even}(\mathsf{z})}\ \mathsf{evz} \qquad\qquad \frac{\mathsf{even}(N)}{\mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(N)))}\ \mathsf{evs}$$

goal directed strategy even(s(s(s(z)))).

$$\vdots$$

$$\frac{\mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{z}))}{\mathsf{even}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z}))))}\ \mathsf{evs}.$$

Logic programs to compute values

- Represent natural numbers 0, 1, 2, . . . as terms of the form z, s(z), s(s(z)), . . ., using two function symbols (z of arity 0 and s of arity 1)
- compute sums and differences of natural numbers
- Predicate plus(m,n,p)
- Inference rules

$$\frac{\mathsf{plus}(M, N, P)}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(M), N, \mathsf{s}(P))}\ \mathsf{ps} \qquad\qquad \frac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, N, N)}\ \mathsf{pz}.$$

$$\begin{array}{lcl} (m+1)+n & = & (m+n)+1 \\ 0+n & = & n \end{array}$$

1 + 1 = ?

- Goal : plus(s(z), s(z),R)
- Search not only constructs a proof, but also a term t for R such that plus(s(z), s(z), t) is true.

1 + 1 = ?

- Goal : plus(s(z), s(z),R)

$$\frac{\mathsf{plus}(M, N, P)}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(M), N, \mathsf{s}(P))}\ \mathsf{ps} \qquad\qquad \frac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, N, N)}\ \mathsf{pz}.$$

1 + 1 = ?

- Goal : plus(s(z), s(z),R)

$$\frac{\mathsf{plus}(M, N, P)}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(M), N, \mathsf{s}(P))}\ \mathsf{ps} \qquad \frac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, N, N)}\ \mathsf{pz}.$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}), P)\end{array}}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}), R)}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } R = \mathsf{s}(P)$$

1 + 1 = ?

- Goal : plus(s(z), s(z),R)

$$\frac{\mathsf{plus}(M, N, P)}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(M), N, \mathsf{s}(P))}\ \mathsf{ps} \qquad \frac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, N, N)}\ \mathsf{pz}.$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}), P)\end{matrix}}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}), R)}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } R = \mathsf{s}(P)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}), P)}\ \mathsf{pz} \quad \text{with } P = \mathsf{s}(\mathsf{z})}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}), R)}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } R = \mathsf{s}(P)$$

1 + 1 = ?

- Goal : plus(s(z), s(z),R)
- Search not only constructs a proof, but also a term t for R such that plus(s(z), s(z), t) is true.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathsf{plus}(\mathsf{z},\mathsf{s}(\mathsf{z}),P)\end{array}}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}),\mathsf{s}(\mathsf{z}),R)}\,\mathsf{ps}\quad \text{with } R=\mathsf{s}(P)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z},\mathsf{s}(\mathsf{z}),P)}\,\mathsf{pz}\quad \text{with } P=\mathsf{s}(\mathsf{z})}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}),\mathsf{s}(\mathsf{z}),R)}\,\mathsf{ps}\quad \text{with } R=\mathsf{s}(P)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z},\mathsf{s}(\mathsf{z}),\mathsf{s}(\mathsf{z}))}\,\mathsf{pz}}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}),\mathsf{s}(\mathsf{z}),\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\,\mathsf{ps}$$

1 + 1 = ?

Query

Logic variables

- Goal : plus(s(z), s(z),R)
- Search not only constructs a proof, but also a term t for R such that plus(s(z), s(z), t) is true.

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}), P)\end{array}}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}), R)}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } R = \mathsf{s}(P)$$

$$\frac{\dfrac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}), P)}\ \mathsf{pz} \quad \text{with } P = \mathsf{s}(\mathsf{z})}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}), R)}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } R = \mathsf{s}(P)$$

Answer substitution

$$\frac{\dfrac{}{\mathsf{plus}(\mathsf{z}, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}))}\ \mathsf{pz}}{\mathsf{plus}(\mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\ \mathsf{ps}$$

Backtracking

- **Choice point :** during proof search if the goal matches the conclusion of more than one rule.
- **Backtracking** : pick the first among the rules that match, in the order they were presented.
- **Example :** Perform substraction 2-1 = ?

Substraction

- Query : plus(M, s(z), s(s(z))) % M s.t. M+1 = 2 => M = 2-1

Substraction

- Query : plus(M, s(z), s(s(z))) % M s.t. M+1 = 2 => M = 2-1

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathsf{plus}(M_1, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}))\end{array}}{\mathsf{plus}(M, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } M = \mathsf{s}(M_1)$$

Substraction

- Query : plus(M, s(z), s(s(z))) % M s.t. M+1 = 2 => M = 2-1

$$\cfrac{\vdots}{\cfrac{\mathsf{plus}(M_1, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}))}{\mathsf{plus}(M, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\ \mathsf{ps}\quad \text{with } M = \mathsf{s}(M_1)}$$

Both ps and pz matches

$$\vdots$$

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{plus}(M_2, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{z})}{\mathsf{plus}(M_1, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}))}\ \mathsf{ps}\quad \text{with } M_1 = \mathsf{s}(M_2)}{\mathsf{plus}(M, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\ \mathsf{ps}\quad \text{with } M = \mathsf{s}(M_1)$$

Substraction

- Query : plus(M, s(z), s(s(z))) % M s.t. M+1 = 2 => M = 2-1

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathsf{plus}(M_1, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}))\end{array}}{\mathsf{plus}(M, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } M = \mathsf{s}(M_1)$$

Both ps and pz matches

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathsf{plus}(M_1, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{z}))}\ \mathsf{pz} \quad \text{with } M_1 = \mathsf{z}}{\mathsf{plus}(M, \mathsf{s}(\mathsf{z}), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{z})))}\ \mathsf{ps} \quad \text{with } M = \mathsf{s}(M_1)$$

answer substitution $M = \mathsf{s}(\mathsf{z})$.