DISKRETNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA (DFT)

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Uvod

- Za sekvence konačne dužine trajanja postoji alternativna Fourirova reprezentacija koju nazivamo ***DISKRETNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA (DFT).***
- DFT **NIJE** funkcija kontinualne varijable već je i sama sekvenca koja odgovara ekvidistantnim uzorcima Fourierove transformacije signala.
- DFT ima ključnu ulogu u implementaciji različitih algoritama digitalne obrade signala.
- Matematičke izraze za DFT ćemo izvesti na osnovu predstavljanja periodičnih sekvenci pomoću Fourierovih redova, gdje je jedan period jednak sekvenci konačnog trajanja.
- Na ovaj način ćemo istaći periodičnost DFT-a, kojoj treba dati posebnu pažnju tokom primjene DFT-a.

Diskretni Fourierovi redovi

- Razmatramo periodičnu sekvencu

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN], \qquad r, n \rightarrow cijeli\ brojevi \tag{1}$$

- Ovakva sekvenca se može predstaviti pomoću sume harmonijskih kompleksnih eksponencijalnih sekvenci, sa frekvencijama koji su cjelobrojni multipl osnovne frekvencije $2\pi/N$, tj:

$$e_k[\mathrm{n}] = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = e_k[\mathrm{n} + rN] \tag{2}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k} \tilde{X}[k] e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \tag{3}$$

- Fourierov red bilo koje vremenski-diskretne sekvence zahtjeva samo *N* harmonika.

$$e_{k+lN}[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k+lN)n} = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} e^{j2\pi ln} = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = e_k\ [n] \tag{4}$$

- gdje je l cijeli broj.

Diskretni Fourierovi redovi

- Prema tome, Fourierov red periodične sekvence $\tilde{x}[n]$ sadrži samo *N* harmonika:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \qquad (5)$$

- Da bi odredili koeficijente Fourierovog reda $\tilde{X}[k]$, iskoristićemo ortogonalnost skupa kompleksnih eksponencijalnih sekvenci. Prethodnu jednačinu pomnožimo sa obje strane sa $e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn}$ i sumiramo od *n=0* do *n=N-1*:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k-r)n} \qquad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn} = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k-r)n}\right] \qquad (7)$$

Diskretni Fourierovi redovi

- Iskoristićemo ortogonalnost:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k-r = mN, m \; cijeli \; broj \\ 0, & za \; ostale \; vrijednosti \end{cases} \quad (8)$$

- Jednačina (7) se na osnovu (8) reducira tako da određujemo koeficijente FR-a kao:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \quad (9)$$

- Uočimo da je sekvenca $\tilde{X}[k]$ periodična sa periodom *N*.

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k+N)n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}\right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k] \quad (10)$$

- ***KOEFICIJENTI FOURIEROVOG REDA SE MOGU INTERPRETIRATI KAO SEKVENCA KONAČNE DUŽINE ILI KAO PERIODIČNA SEKVENCA!***

Diskretni Fourierovi redovi

- Iz čisto praktičnih razloga se uvodi kompleksna veličina

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{11}$$

- tako da se par jednačina (analiza i sinteza) diskretnog Fourierovog reda može zapisati u obliku

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \tag{12}$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \tag{13}$$

- U obje jednačine $\tilde{X}[k]$ i $\tilde{x}[n]$ su periodične sekvence.
- Notacija koja se koristi za diskretne Fourierove redove je

$$\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] \tag{14}$$

Pomak sekvence

- Ako periodična sekvenca $\tilde{x}[n]$ ima Fourierove koeficijente $\tilde{X}[k]$, tada vrijedi

$$\tilde{x}[n-m] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} W_N^{km} \tilde{X}[k] \qquad (15)$$

- Svaki pomak u sekvenci koji je veći ili jednak od perioda ($m \geq N$) ne može se razlikovati od kraćeg pomaka m_1 za koji vrijedi $m = m_1 + m_2 N$, gdje su m_1 i m_2 cijeli brojevi i $0 \leq m_1 \leq N - 1$.
- Ovo obično zapisujemo i kao $m_1 = m \; mod \; N$, odnosno rezultat cjelobrojnog dijeljenja.
- S obzirom da su koeficijenti Fourierovog reda periodične sekvence također periodična sekvenca, vrijedi

$$W_N^{-kl} \tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k-l] \qquad (16)$$

Periodična konvolucija

- Neka su $\tilde{x}_1[n]\ i\ \tilde{x}_2[n]$ dvije periodične sekvence sa periodom *N,* sa koeficijentima diskretnog Fourierovog reda $\tilde{X}_1[k]\ i\ \tilde{X}_2[k]$. Tada proizvod

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] \tag{17}$$

- predstavlja koeficijente Fourierovog reda sekvence

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n-m] \tag{18}$$

- Prethodna jednačina opisuje periodičnu konvoluciju.
- Periodična konvolucija je komutativna, odnosno vrijedi

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n]\tilde{x}_1[n-m] \tag{19}$$

Fourierova transformacija periodičnih signala

- Ako je $\tilde{x}[n]$ periodična sekvenca sa periodom *N* i ako njoj odgovaraju koeficijenti diskretnog Fourierovog reda $\tilde{X}[k]$, tada je Fourierova transformacija ove sekvence definira kao povorka impulsa

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (20)$$

- Uočimo da je $\tilde{X}(e^{j\omega})$ je periodično sa 2π dok je $\tilde{X}[k]$ periodično sa *N*.
- Impulsi su na frekventnoj osi na rastojanju $2\pi/N$.
- Ako je sekvenca $\tilde{x}[n]$ formira od sekvence konačne dužine $x[n]$ čija je Fourierova transformacija $X(e^{j\omega})$, vrijedi

$$\tilde{X}[k] = X\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$$

- Periodična sekvenca $\tilde{X}[k]$ odgovara uzorcima Fourierove transformacije sekvence konačne dužine dobijene izdvajanjem jednog perioda iz sekvence $\tilde{x}[n]$.
- Imamo *N* jednako udaljenih uzoraka na frekventnoj osi između $\omega = 0$ i $\omega = 2\pi$, sa razmakom uzoraka $2\pi/N$.

Fourierova transformacija periodičnih signala

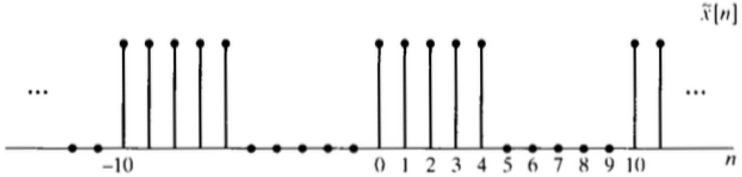
- Jednačinu (20) možemo dokazati preko inverzne Fourierove transformacije:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}[k]\int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

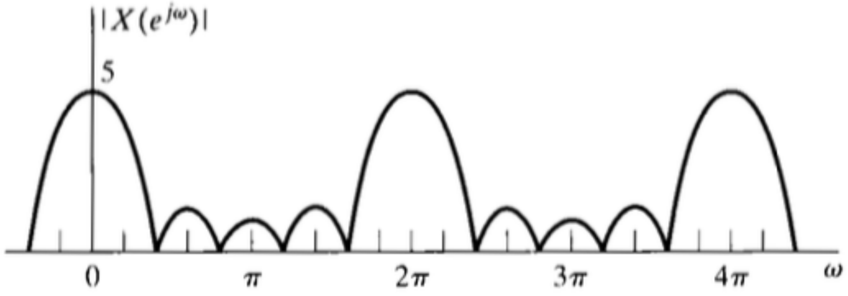
- Rezultantna suma je od 0 do $N-1$ jer su impulsi koji odgovaraju $k=0,1,2,\ldots(N-1)$ locirani na intervalu od $0-\varepsilon$ do $2\pi-\varepsilon$.
- Desna strana prethodne jednačine je jednaka predstavi signala $\tilde{x}[n]$ pomoću Fourierovog reda.

Fourierova transformacija periodičnih signala

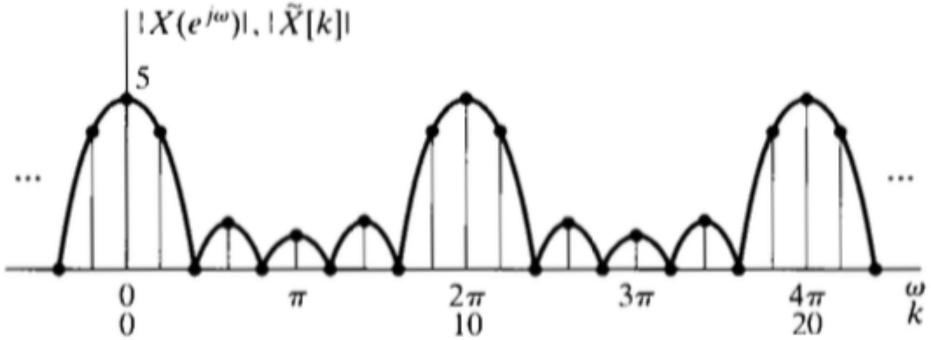
$$x[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq 4 \\ 0, ostalo\ n \end{cases}$$



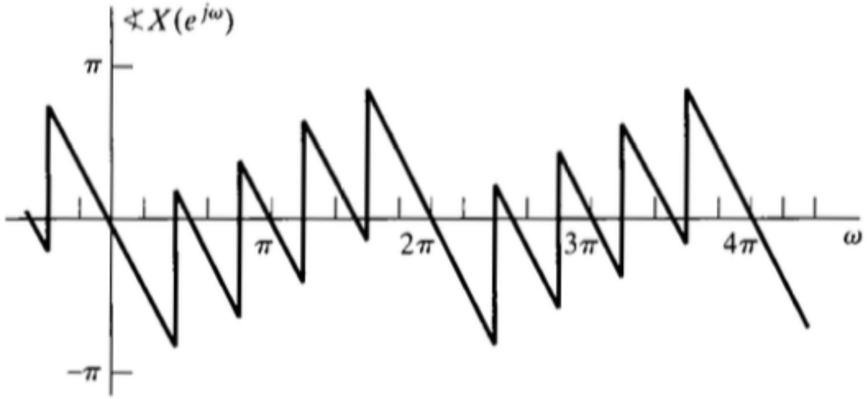
$N = 10$



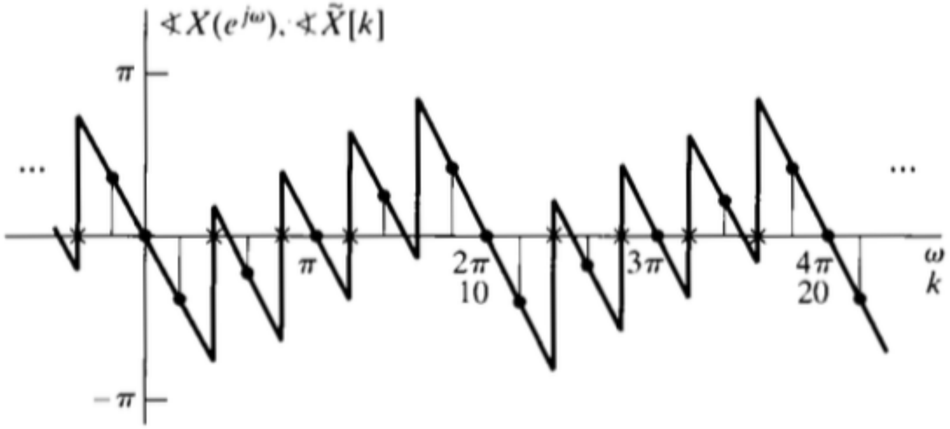
(a)



(a)



(b)



(b)

Diskretna Fourierova transformacija

- Razmatramo sekvencu $x[n]$ konačne dužine *N* uzoraka, takvu da je $x[n] = 0$ van opsega $0 \leq n \leq N - 1$.
- U velikom broju primjera, želimo smatrati da sekvenca ima dužinu N čak i kada je njena dužina $M \leq N$. Za preostalih $N - M$ uzoraka uzmemo nule.
- Svaku sekvencu konačne dužine možemo povezati sa periodičnom sekvencom

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \tag{21}$$

- Sekvenca konačne dužine $x[n]$ se može dobiti iz periodične sekvence iz

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases} \tag{22}$$

Diskretna Fourierova transformacija

- Koeficijenti Fourierovog reda sekvence $\tilde{x}[n]$ su uzorci (razmaknuti na frekventnoj osi za $2\pi/N$) su uzorci Fourierove transformacije sekvence konačne dužine $x[n]$.
- S obzirom da je $x[n]$ konačne dužine, očigledno je da ne dolazi do preklapanja sa članovima $x[n - rN]$ za različite vrijednosti r. Zato se jednačina (20) može zapisati i preko cjelobrojnog dijeljenja kao

$$\tilde{x}[n] = x[n \, mod \, N] = \mathrm{x}[((n))_N] \tag{23}$$

- Vidjeli smo da su i $\tilde{X}[k]$ i $\tilde{x}[n]$ periodične sekvence sa istim periodom *N*.
- Da bi zadržali dualnost između vremenskog i frekventnog domena, biramo koeficijente diskretnog Fourierovog reda koje povezujemo sa sekvencom konačne dužine da bude konačna sekvenca koja odgovara jednom periodu $\tilde{X}[k]$.
- Sekvenca konačne dužine $X[k]$ se naziva **diskretna Fourierova transformacija** (DFT).

Diskretna Fourierova transformacija

- DFT $X[k]$ je povezana sa koeficijentima diskretnog Fourierovog reda $\tilde{X}[k]$ izrazom

$$\tilde{X}[k] = X[k \ mod \ N] \qquad (24)$$

- Znamo da su $\tilde{X}[k]$ i $\tilde{x}[n]$ povezani relacijama

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \qquad (25)$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \qquad (26)$$

- S obzirom da prethodne dvije jednačine uključuju interval od 0 do *N-1*, uzimajući u obzir sve prethodne jednačine slijedi:

Diskretna Fourierova transformacija

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, za\ ostalo\ k \end{cases} \tag{27}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases} \tag{28}$$

- U opštem slučaju, jednačine za DFT su:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \tag{29}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \tag{30}$$

Diskretna Fourierova transformacija

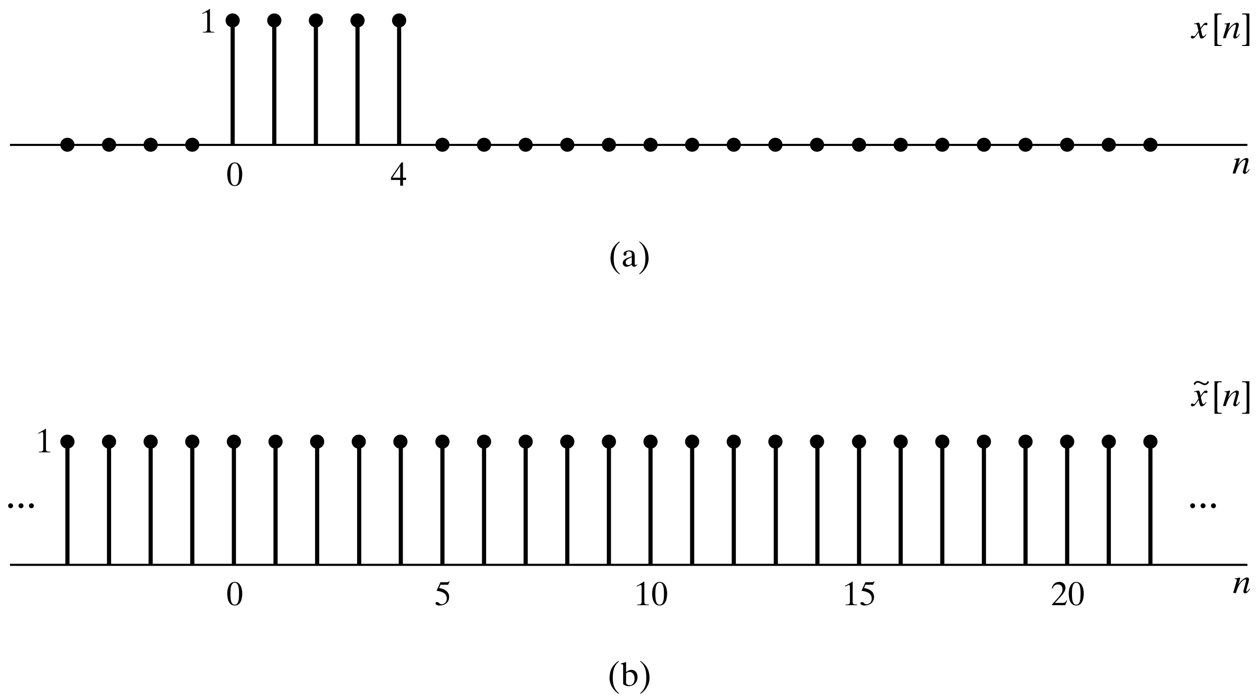
- Iako u prethodne dvije jednačine nije eksplicitno naglašeno, podrazimijeva se da je $X[k] = 0$ za k van intervala $0 \leq k \leq N-1$ i $x[n] = 0$ za n van intervala $0 \leq n \leq N-1$.
- Relacija između $x[n]$ i $X[k]$ se obično zapisuje kao

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k] \tag{31}$$

- Treba naglasiti da za sekvence konačne dužine nismo eliminirali naslijeđenu periodičnost.
- DFT, kao i DFS, odgovara uzorcima periodične Fourierove transformacije $X(e^{j\omega})$ i ako se jed. (30) koristi da se izračuna $x[n]$ van granica $0 \leq n \leq N-1$, rezultat neće biti nula već periodično produženje $x[n]$.
- NASLIJEĐENA PERIODIČNOST JE UVIJEK PRISUTNA!

DFT pravougaonog impulsa

- Razmatramo sekvencu $x[n]$ konačne dužine $N = 5$ čija je DFT jednaka $X[k]$.
- $\tilde{x}[n]$ je periodična sekvenca čiji DFS odgovara DFT-u sekvence $x[n]$.



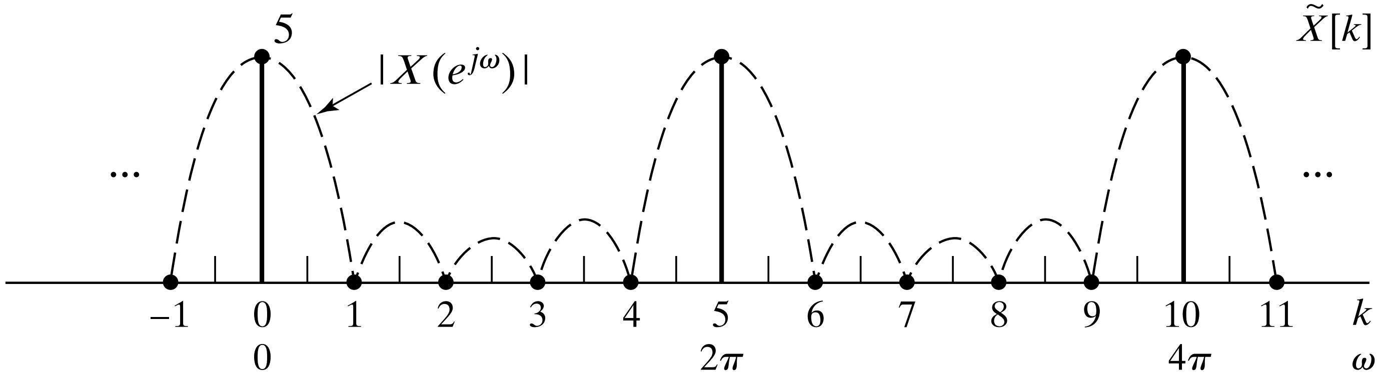
DFT pravougaonog impulsa

- S obzirom da je sekvenca konstantna na intervalu $0 \leq n \leq 4$, vrijedi:

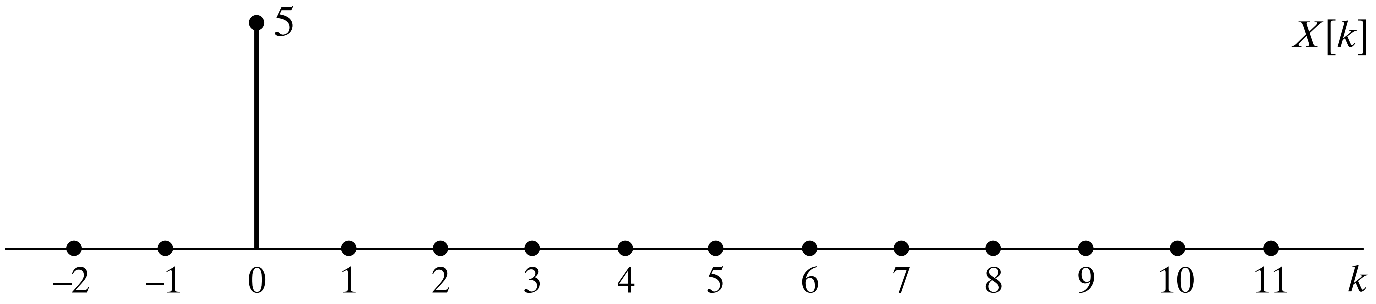
$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi k}{5}\right)n} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(2\pi k/5)}} = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10 \ldots \\ 0, & za\ ostalo\ \ k \end{cases}$$

- $\tilde{X}[k]$ je sekvenca uzoraka $X(e^{j\omega})$ na frekvencijama $\omega_k = 2\pi k/5$.
- DFT sekvence $x[n]$ je izračunato u pet tačaka i odgovara sekvenci konačne dužine koja je jednaka jednom periodu $\tilde{X}[k]$.

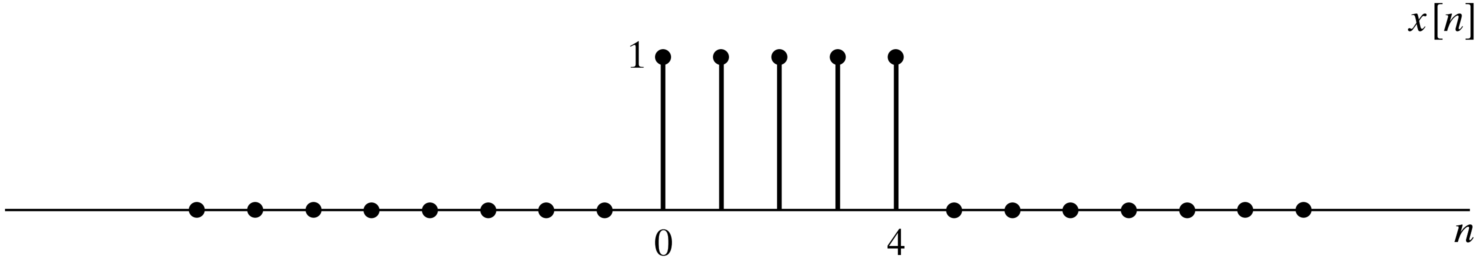
DFT pravougaonog impulsa: N=5



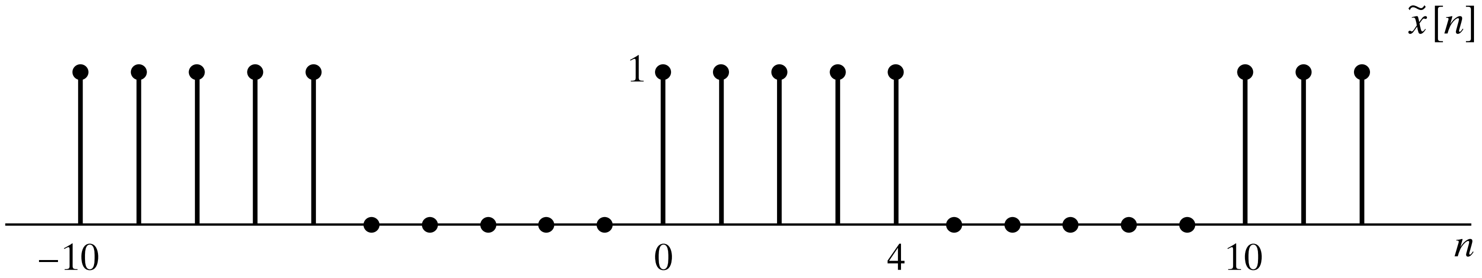
(c)



DFT pravougaonog impulsa: N=10

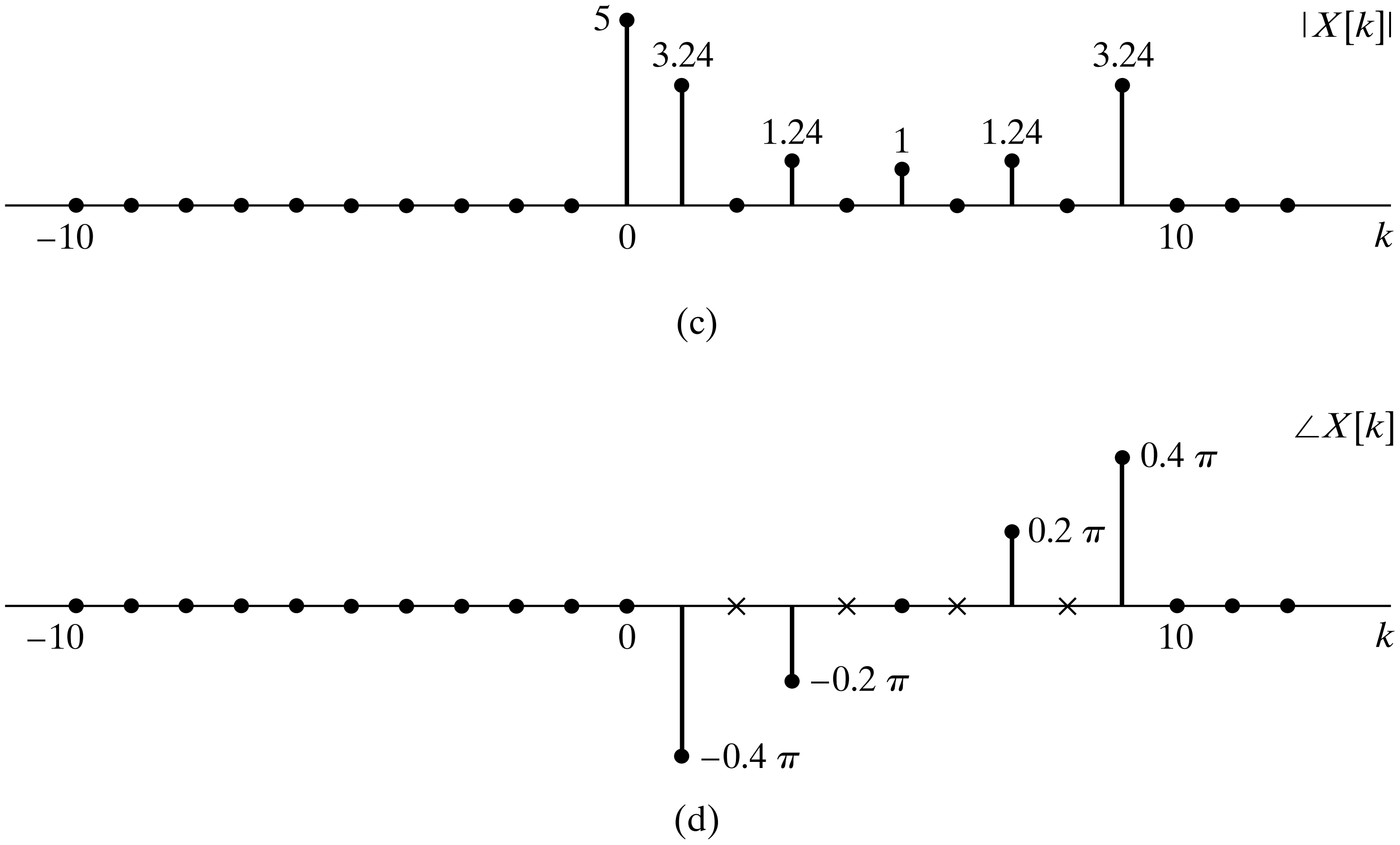


(a)



(b)

DFT pravougaonog impulsa: N=10



Linearnost DFT

- Ako imamo dvije sekvence konačne dužine $x_1[n]$ i $x_2[n]$, i ako ih linearno kombiniramo

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

- tada je DFT ove sekvence jednak

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k]$$

- Ako $x_1[n]$ ima dužinu N_1 i $x_2[n]$ ima dužinu N_2, tada je maksimalna dužina $x_3[n]$ jednaka $N_3 = max\{N_1, N_2\}$.
- DFT se za obje sekvence mora računati za istu dužinu $N \geq N_3$.

Kružni pomak sekvence

- Ako je $X(e^{j\omega})$ Fourierova transformacija sekvence $x[n]$, tada $e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$ predstavlja Fourierovu transformaciju zakašnjele sekvence $x[n-m]$.
- Ako periodična sekvenca $\tilde{x}[n]$ ima koeficijente Fourierovog reda $\tilde{X}[k]$, tada zakašnjela sekvenca $\tilde{x}[n-m]$ ima koeficijente Fourierovog reda $e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)m}\tilde{X}[k]$.
- Sada ćemo razmotriti operaciju u vremenskom domenu koja odgovara množenju DFT koeficijenata sekvence konačne dužine $x[n]$ sa faktorom $e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)m}$.
- Drugim riječima, tražimo sekvencu $x_1[n]$ za koju vrijedi

$$x_1[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_1[k] = e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)m}X[k]$$

- S obzirom da DFT u *N* tačaka odgovara sekvenci konačne dužine *N*, obje sekvence $x[n]$ i $x_1[n]$ moraju biti nula van intervala $0 \leq n \leq N-1$ pa $x_1[n]$ ne može rezultirati jednostavnim kašnjenjem $x[n]$.

Kružni pomak sekvence

- Znamo sljedeće:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] = X[((k))_N]$$

$$\tilde{x}_1[n] = x_1\left[\big((n)\big)_N\right] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k] = X_1[((k))_N]$$

$$X_1[k] = e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)m} X[k]$$

- Prema tome, koeficijenti diskretnog Fourierovog reda za $\tilde{x}_1[n]$ su sljedeći:

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j\left[\frac{2\pi\left((k)\right)_N}{N}\right]m} X[((k))_N]$$

- Uočimo da vrijedi jednakost:

$$e^{-j\left[\frac{2\pi\left((k)\right)_N}{N}\right]m} = e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)m}$$

- tako da možemo izbaciti notaciju $((k))_N$ i pisati:

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)m} \tilde{X}[k]$$

Kružni pomak sekvence

- Zaključujemo da je

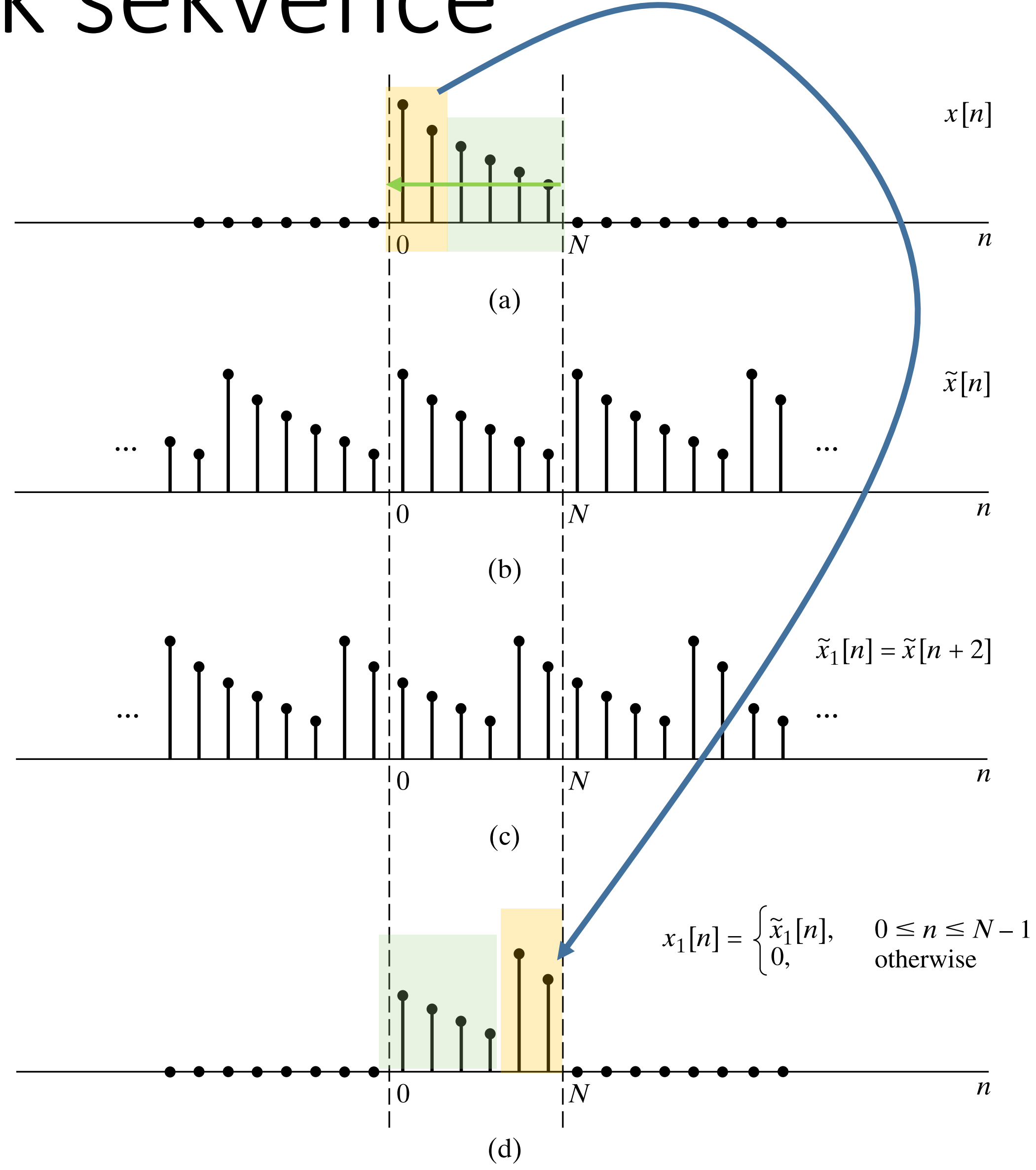
$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[((n-m))_N]$$

- Sekvenca konačne dužine $x_1[n]$ sa zadanom DFT je jednaka

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[\left((n-m)\right)_N, 0 \le n \le N-1] \\ 0, \qquad za\ ostalo\ n \end{cases}$$

- Prethodna jednačina objašnjava kako konstruirati sekvencu $x_1[n]$.

Kružni pomak sekvence



Kružna konvolucija

- Već smo vidjeli da množenje koeficijenata diskretnog Fourierovog reda dvije periodične sekvence odgovara periodičnoj konvoluciji tih sekvenci.
- Razmotrimo dvije sekvence konačne dužine $x_1[n]$ i $x_2[n]$, obje dužine *N*, čije su DFT $X_1[k]$ i $X_2[k]$.
- Želimo odrediti sekvencu $x_3[n]$ čija je DFT $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$.
- $x_3[n]$ odgovara jednom periodu sekvence $\tilde{x}_3[n]$, pa vrijedi jednakost

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m], 0 \leq n \leq N-1$$

- ili ekvivalentno

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2\left[\left((n-m)\right)_N\right], 0 \leq n \leq N-1$$

Kružna konvolucija

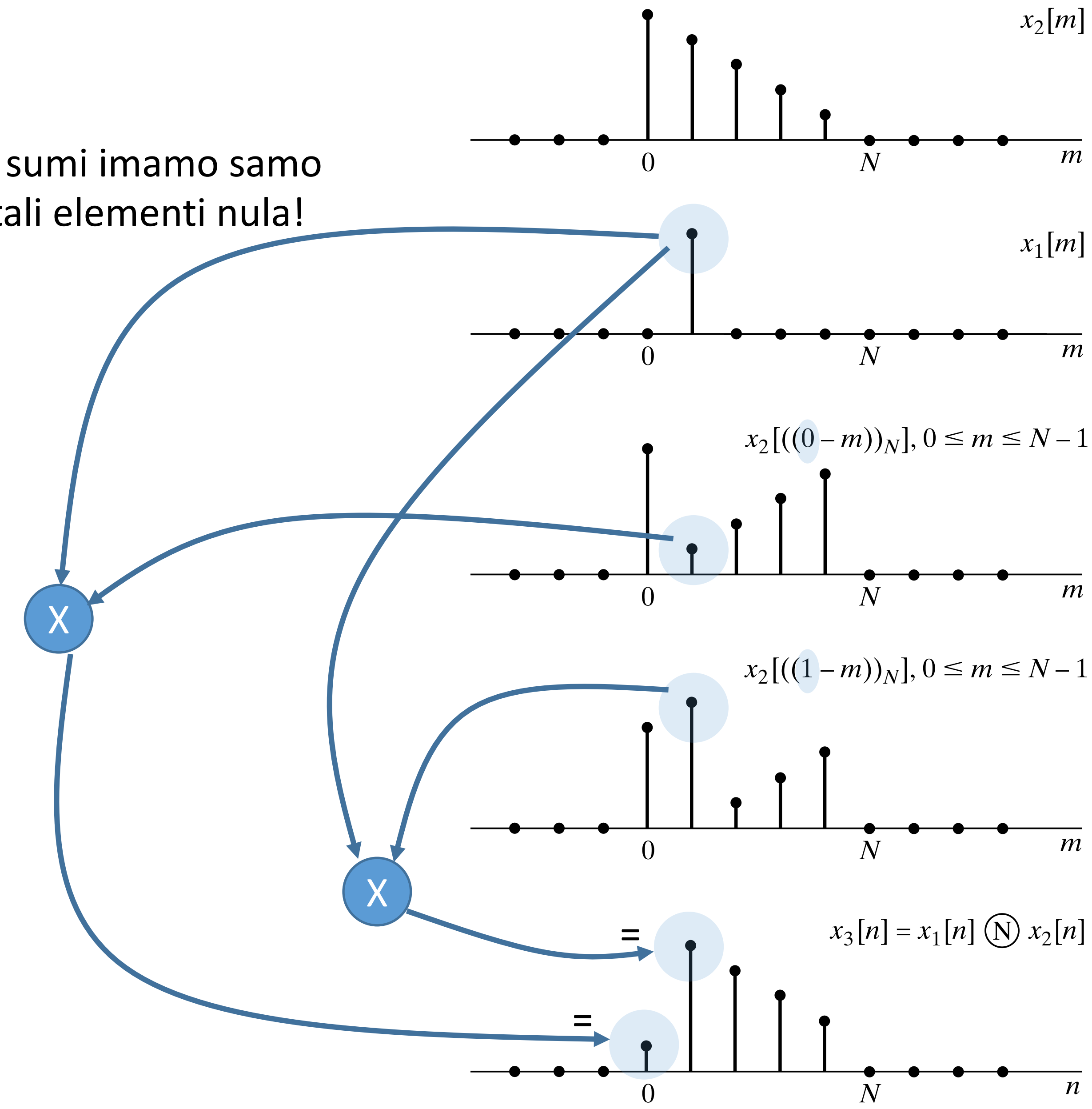
- S obzirom da je $((m))_N = m$ za $0 \leq n \leq N-1$, možemo pisati

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2\left[\left((n-m)\right)_N\right], 0 \leq n \leq N-1$$

- U kružnoj konvoluciji je druga sekvenca kružno vremenski invertovana i kružno pomjerena u odnosu na prvu sekvencu.

Kružna konvolucija-primjer

U ovom primjeru, u sumi imamo samo jedan član jer su ostali elementi nula!



Samo jedan uzorak različit o nule, znači suma se svodi samo na jedan proizvod!

$n = 0$

$n = 1$

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.