SISTEMI OPISANI LINEARNIM DIFERENCNIM JEDNAČINAMA

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima

- Veza između ulaza i izlaza (*x[n]* i *y[n]*) određena linearnom diferencnom jednačinom *N*-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$a_k, b_k \Longrightarrow koeficijenti\ diferencne\ jednačine$$

Akumulator možemo opisati na ovaj način

Jednačina koja povezuje
ulaz i izlaz
akumulatora

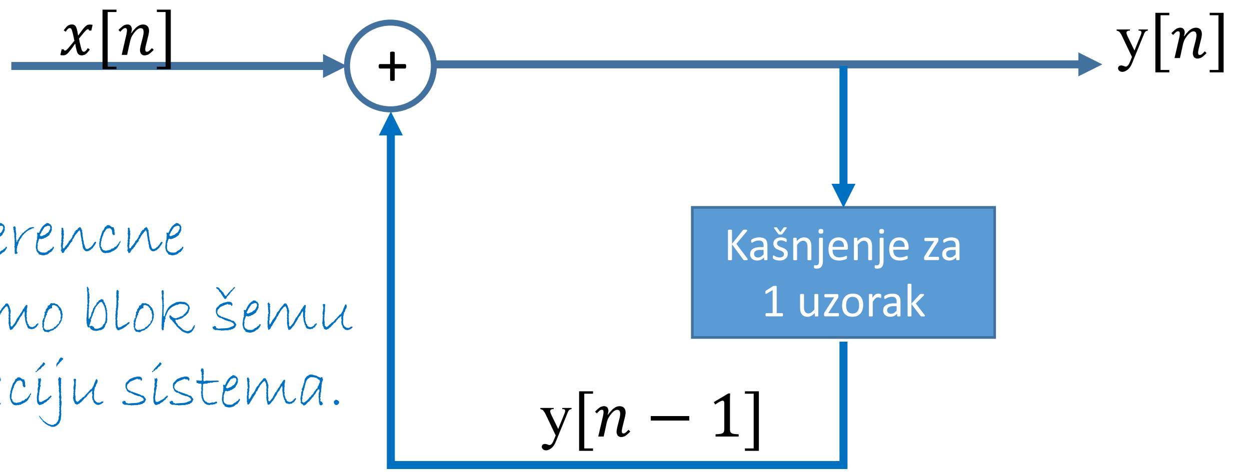
Zapišemo je u
drugom obliku

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \Longrightarrow \quad y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \quad \Longrightarrow \quad y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Linearna diferencna jednačina koja opisuje akumulator

$$\boxed{y[n] - y[n-1] = x[n]}$$



Na osnovu diferencne jednačine crtamo blok šemu za implementaciju sistema.

Usrednjavanje u kliznom prozoru

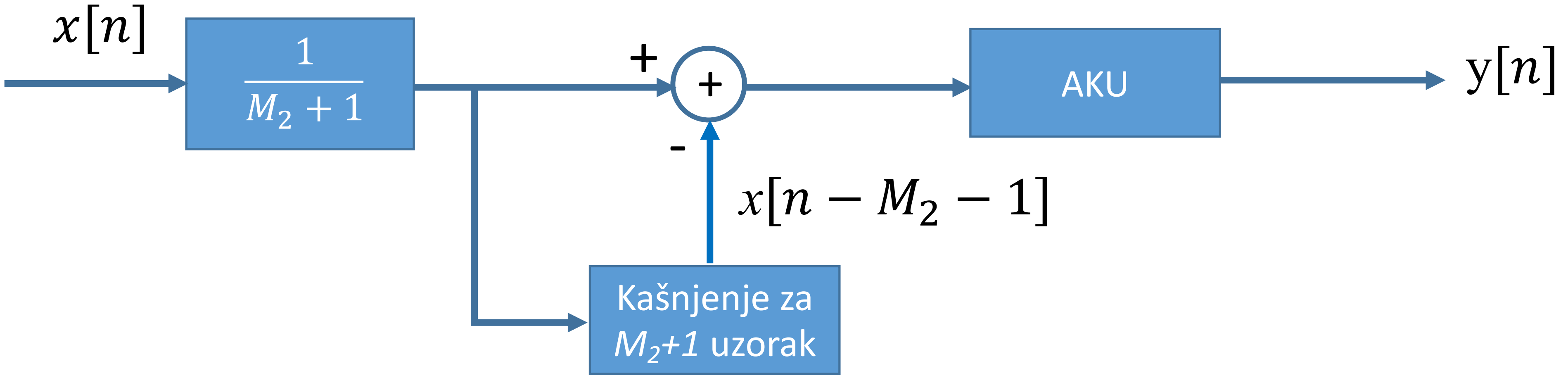
- Uzećemo slučaj $M_1 = 0$ tako da je sistem kauzalan.
- Pogledajmo odziv sistema i njegov impulsni odziv:

$$\underbrace{y[n] = \frac{1}{M_2+1}\sum_{k=0}^{M_2} x[n-k] \qquad h[n] = \frac{1}{M_2+1}\sum_{k=0}^{M_2} \delta[n-k] = \frac{1}{M_2+1}\left(u[n] - u[n-M_2-1]\right)}$$

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{M_2+1}\left(\delta[n] - \delta[n-M_2-1]\right) * u[n]}$$

Ovu jednačinu iskoristimo za dizajn sistema.

Usrednjavanje u kliznom prozoru



Za ovu blok šemu možemo napisati diferencnu jednačinu:

$$x_1[n] = \frac{1}{M_2+1}(x[n] - x[n-M_2-1])$$

Akumulator

$$y[n] - y[n-1] = x_1[n]$$

$$\boxed{y[n] - y[n-1] = \frac{1}{M_2+1}(x[n] - x[n-M_2-1])}$$

Primjer izračuna diferencne jednačine

Sistem

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

Ulaz

$$x[n] = K\delta[n]$$

Početni uslov

$$y[-1] = c$$

Za $n > (-1)$:

$$y[0] = ac + K$$

$$y[1] = ay[0] + 0 = a(ac + k) = a^2c + aK$$

$$y[2] = ay[1] + 0 = a(a^2c + ak) = a^3c + a^2K$$

$$y[3] = ay[2] + 0 = a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K$$

$$\boxed{n \geq 0 => y[n] = a^{n+1}c + a^nK}$$

Generalizacija

Primjer izračuna diferencne jednačine

- Da bi odredili izlaz za n < *0*, diferencnu jednačinu izrazimo u obliku:

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n])$$
$$y[n] = a^{-1}(y[n+1] - x[n+1]$$

- i iskoristimo početni uslov:

Za $n < (-1)$:

$$y[-2] = a^{-1}(y[-1] - x[-1]) = a^{-1}c$$
$$y[-3] = a^{-1}(y[-2] - x[-2]) = a^{-1}a^{-1}c = a^{-2}c$$
$$y[-4] = a^{-1}(y[-3] - x[-3]) = a^{-1}a^{-2}c = a^{-3}c$$

$$\boxed{y[n] = a^{n+1}c, n \leq -1}$$

Generalizacija

Primjer izračuna diferencne jednačine

- Konačno rješenje, za svako *n*:

$$\boxed{y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n], \forall n}$$

Rekapitulacija

- Ako je sistem karakteriziran linearnom diferencnom jednačinom sa konstanim koeficijentima i ako je linearan, vremenski invarijantan i kauzalan, rješenje je jedinstveno.
- U našem slučaju početno rješenje je izraženo u formi početnog mirovanja. To znači da ako je ulaz $x[n] = 0$ za $n \leq n_0$, odziv $y[n]$ mora biti nula za $n \leq n_0$.
- Ovo su dovoljni početni uslovi da bi se rekurzivno odredio odziv $y[n]$ za $n \geq n_0$.

Zaključak

- Za sistem za koji ulaz i izlaz zadovoljavaju linearnu diferencnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima vrijedi:
  - Izlaz za dati ulaz nije jedinstven i zavisi od početnih uslova/početnog stanja.
  - Ako je početni uslov dat u obliku N uzastopnih vrijednosti izlaza, kasnije vrijednosti se mogu dobiti preuređivanjem diferencne jednačine za rastuće n.
  - Linearnost, vremenska invarijantost i kauzalnost sistemma zavisi od početnih uslova. Ako vrijedi dodatni uslov da je sistem u početnom mirovanju, tada je sistem linearan,vremenski invarijantan i kauzalan.

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.