VREMENSKI INVARIJANTI (LTI) SISTEMI

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Definicija vremenske invarijantnosti

- Ne mijenja svoje karakterstike sa vremenom.
- Vremenski pomak ulazne sekvence dovodi do jednakog vremenskog pomaka u izlaznoj sekvenci.
- Za proizvoljno n_0 vrijedi:

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

Primjer: Akumulator

$$\boxed{y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]}$$

Vremenski invarijantan!

$$x_1[n] = x[n-n_0]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]$$

$$\Big\downarrow \; k_1 = k - n_0$$

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] = y[n-n_0]$$

Linearnost

- Vrijedi osobina superpozicije.

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

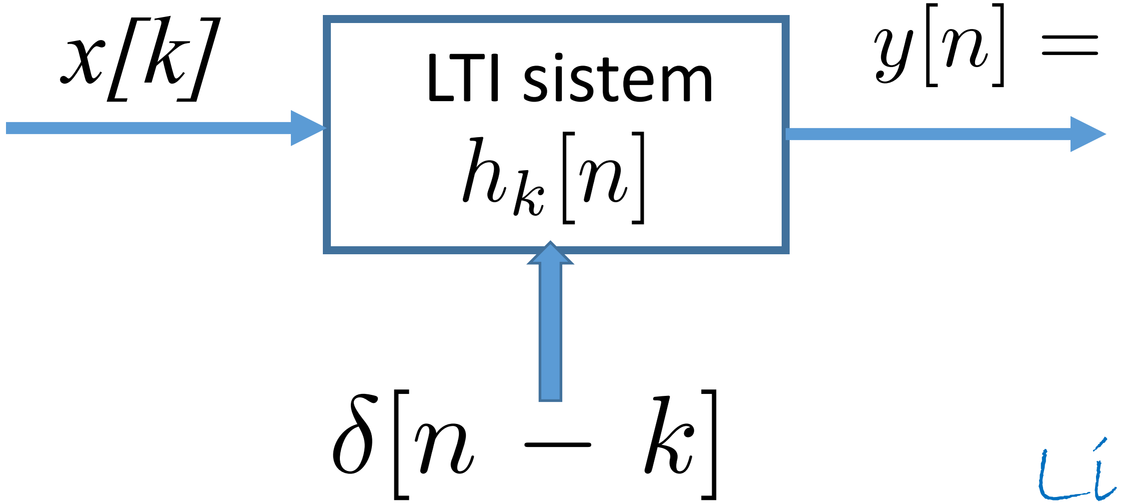
$$\Downarrow$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) = a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$$

$$= ay_1[n] + by_2[n]$$

Linearni vremenski invarijantni (LTI) sistemi

- Značajna primjena u domenu digitalne obrade signala.



$$y[n] = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \right\}$$

Linearnost

$$\boxed{\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \end{aligned}}$$

LTI sistem

- Vremenska invarijantnost znači da ako je *h[n]* odziv sistema na *δ[n]*, tada je odziv na *δ[n – k]* jednak *h[n – k]*.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta[n-k]\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Konvoluciona suma

Konvolucija

- Prilikom izračuna jednog uzorka *y[n]* uzima se cijela ulazna sekvenca *x[n]* i impulsni odziv *h[n]*.

k= 0: $x[0]\delta[n] \Rightarrow x[0]h[n]$

k= 1: $x[1]\delta[n-1] \Rightarrow x[1]h[n-1]$

k= 2: $x[2]\delta[n-2] \Rightarrow x[2]h[n-2]$

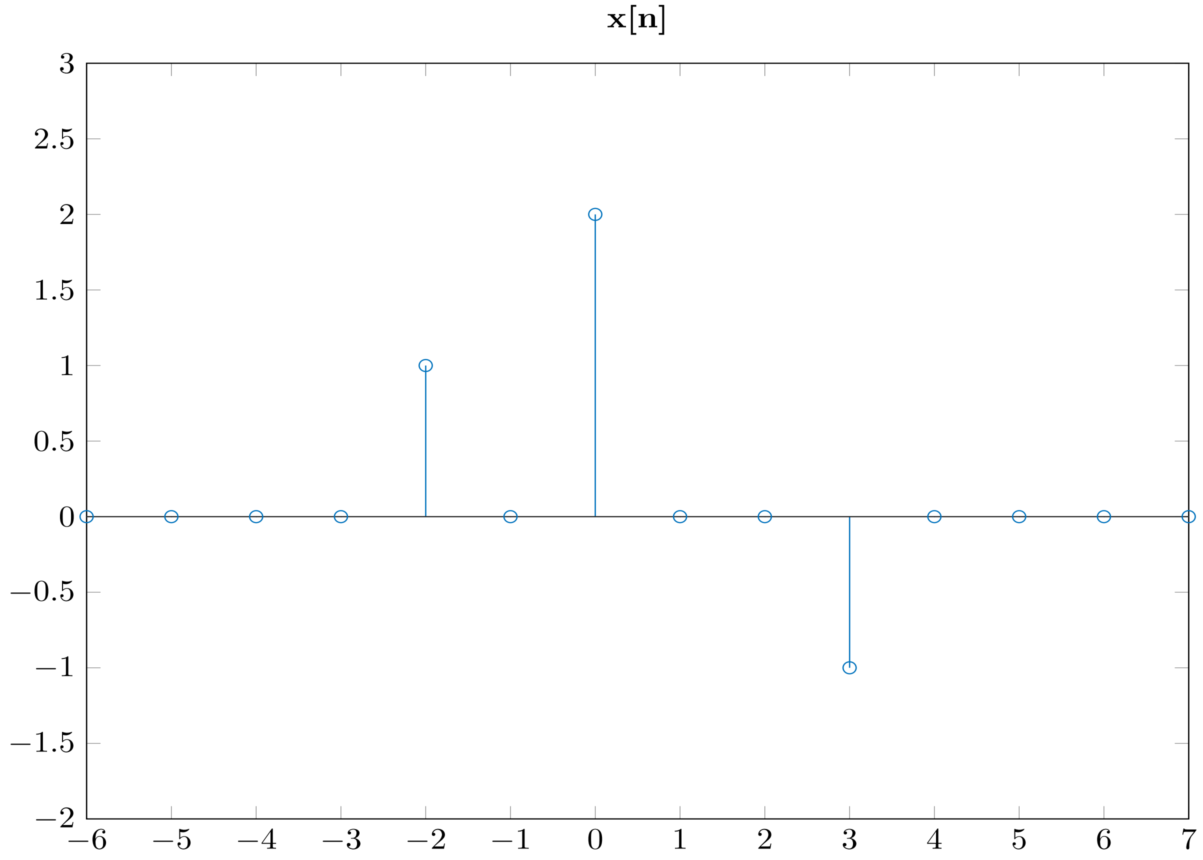
k= 3: $x[3]\delta[n-3] \Rightarrow x[3]h[n-3]$

Σ

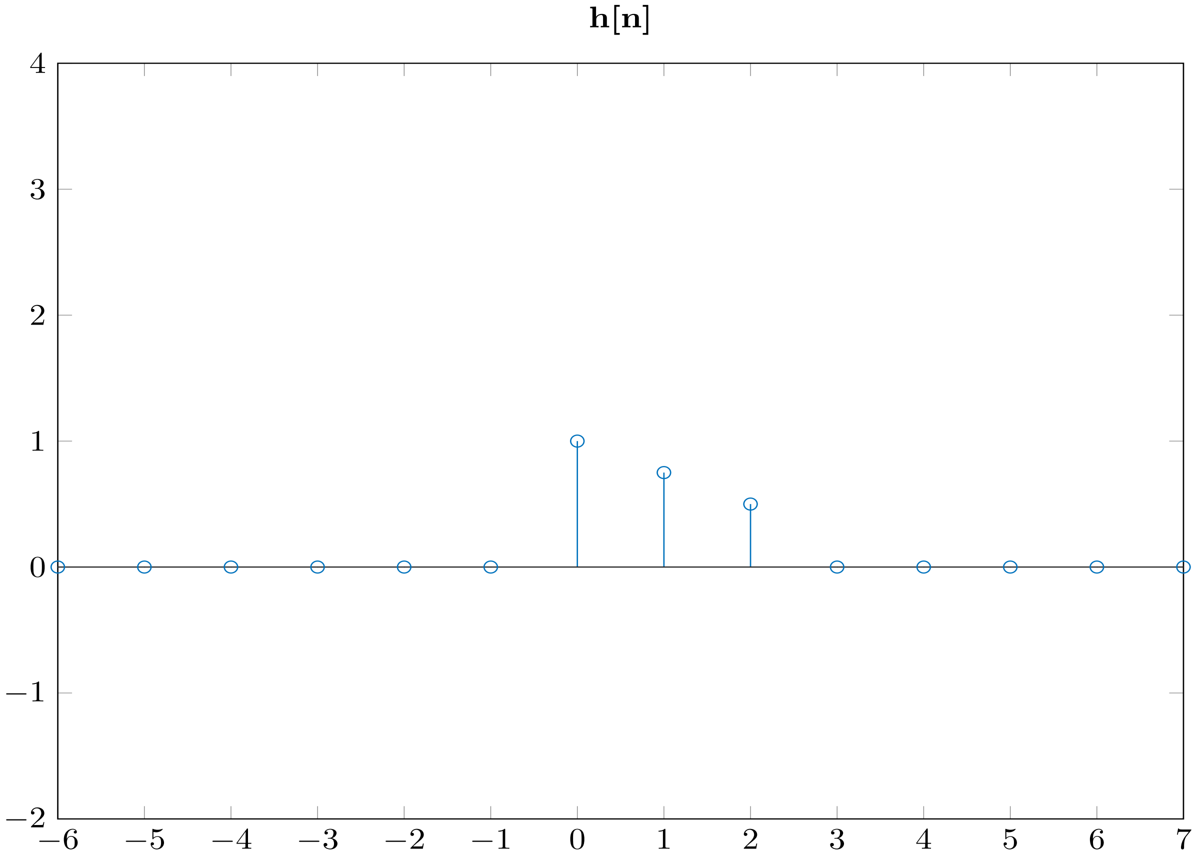
y$[n]$

Izračunamo za svako moguće k, od $-\infty$ do ∞!

Primjer izračuna



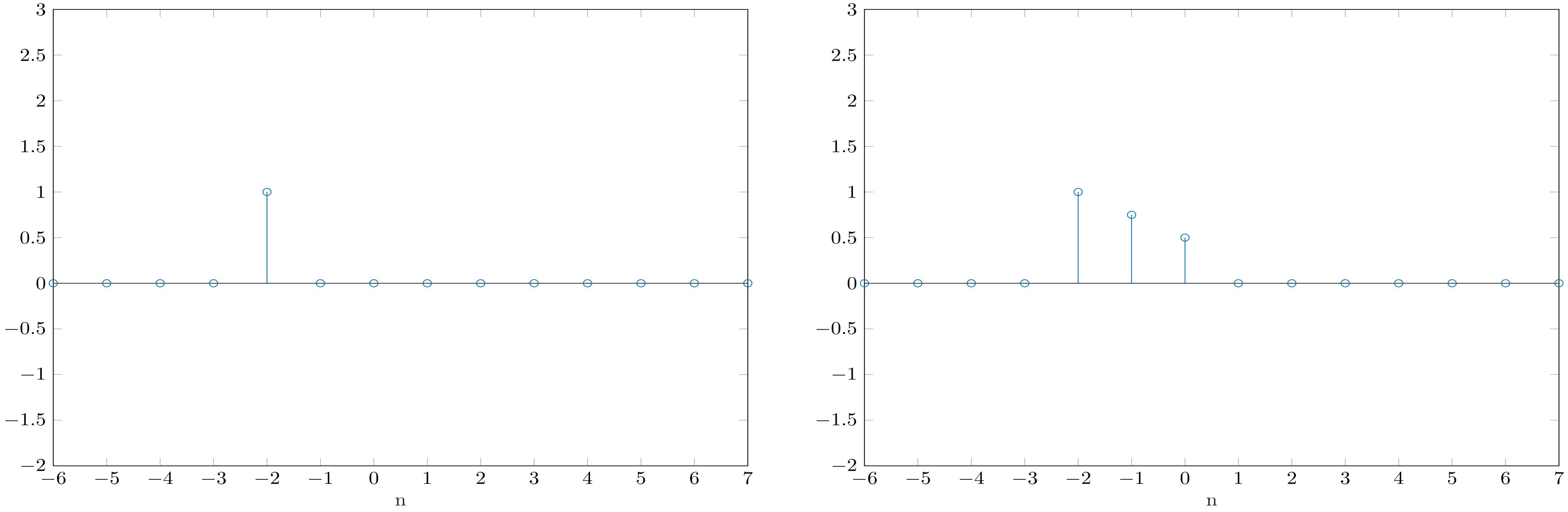
Ulazna sekvenca



Impulsni odziv

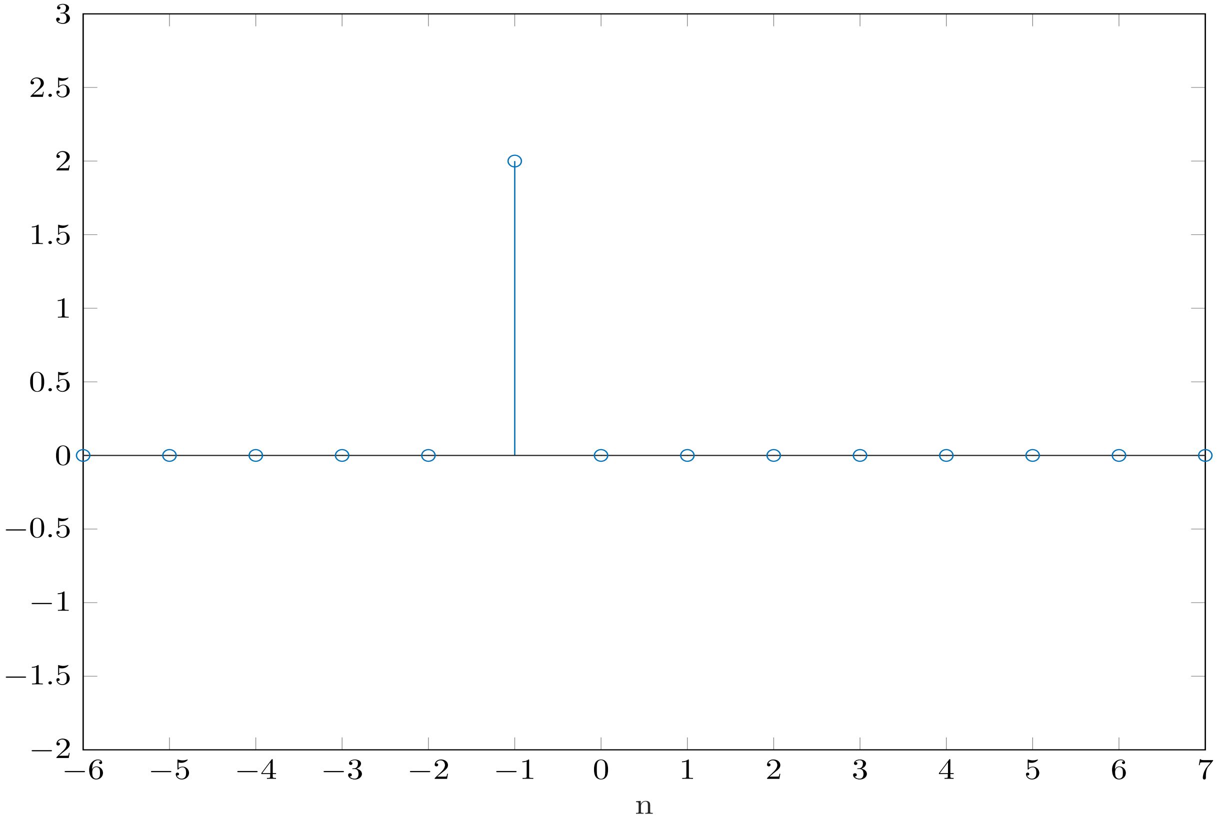
Računamo odziv za prvi uzorka u ulaznoj sekvenci (*n*=-*2*)

$x[-2]\delta[n+2]$ $\qquad$ $x[-2]h[n+2]$

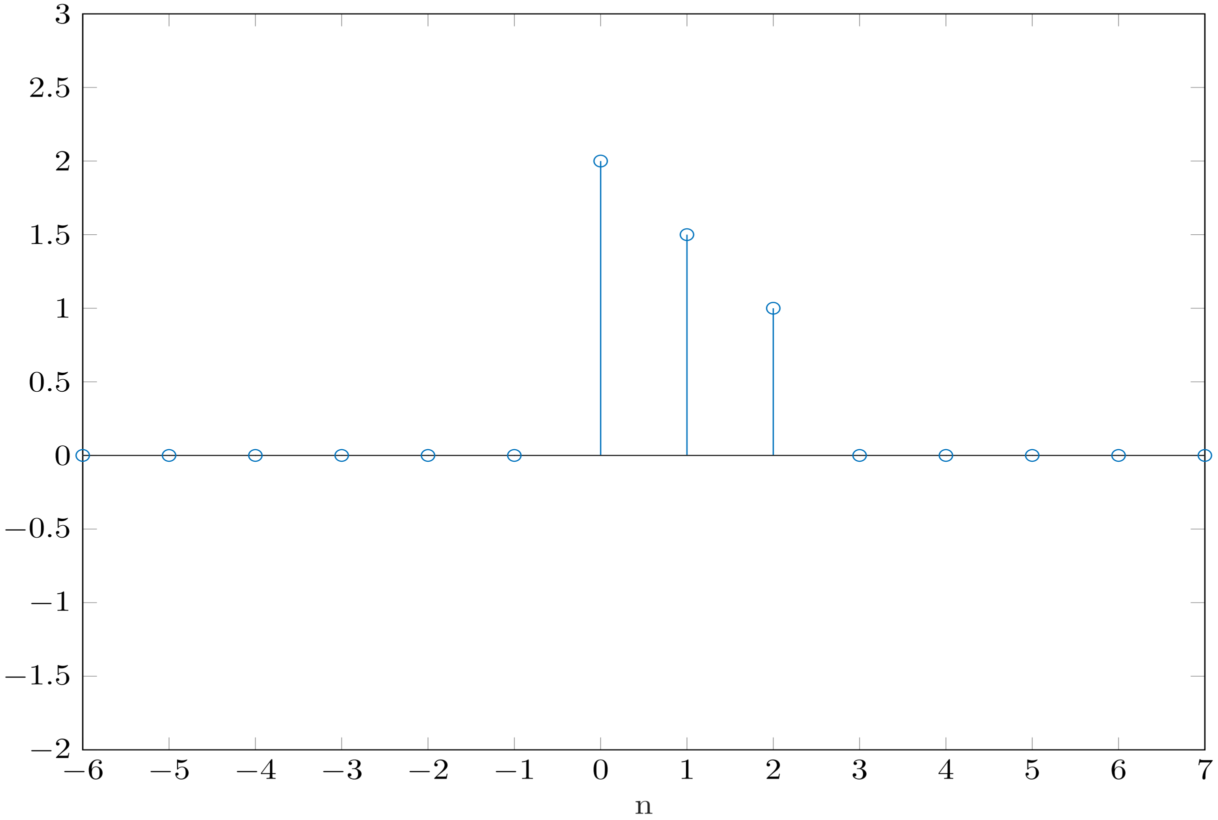


Za drugi uzorak....

$x[0]\delta[n]$

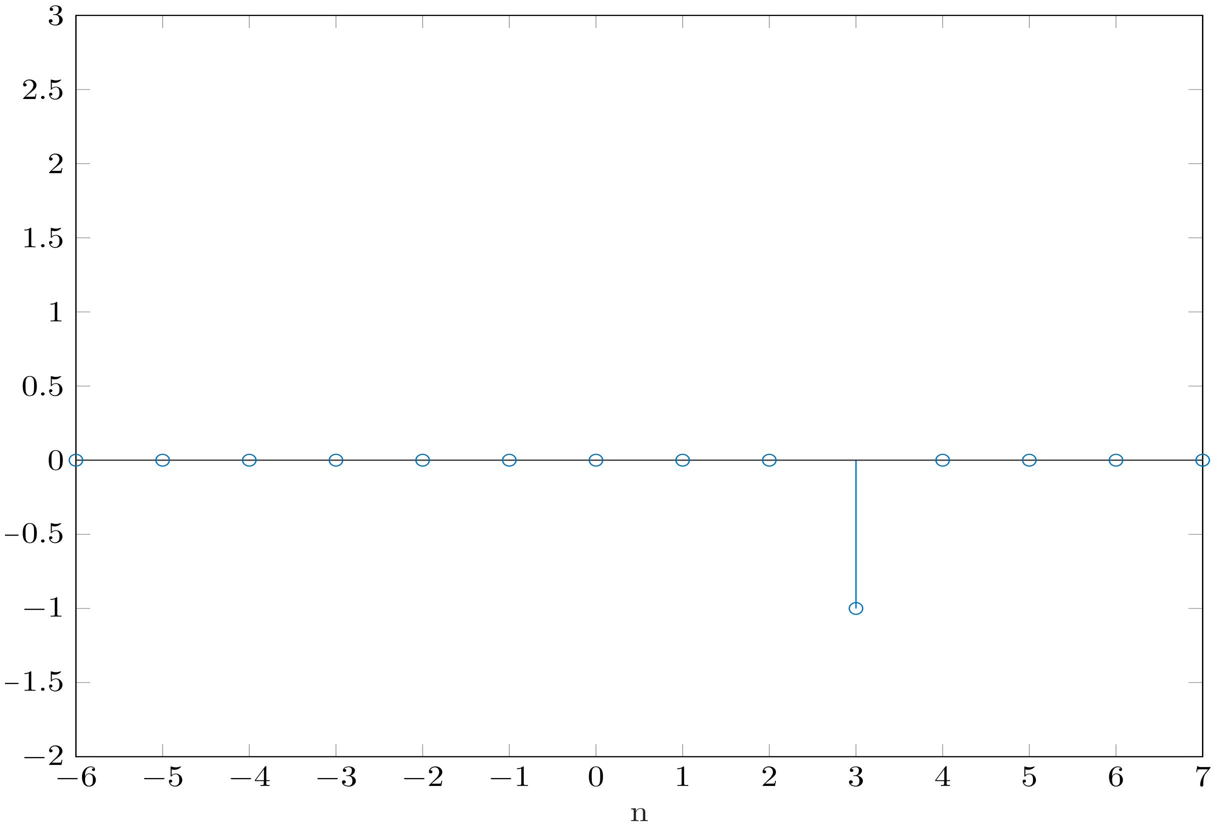


$x[0]h[n]$

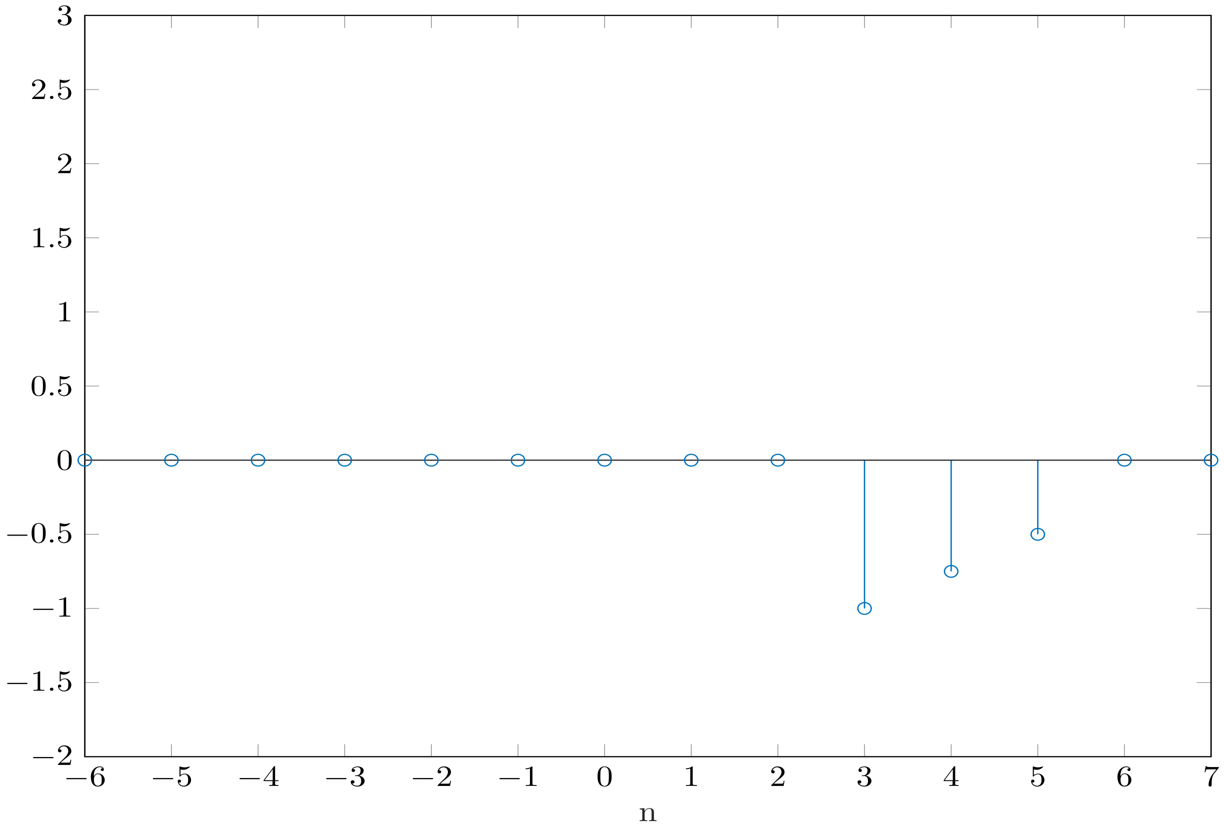


Za treći uzorak....

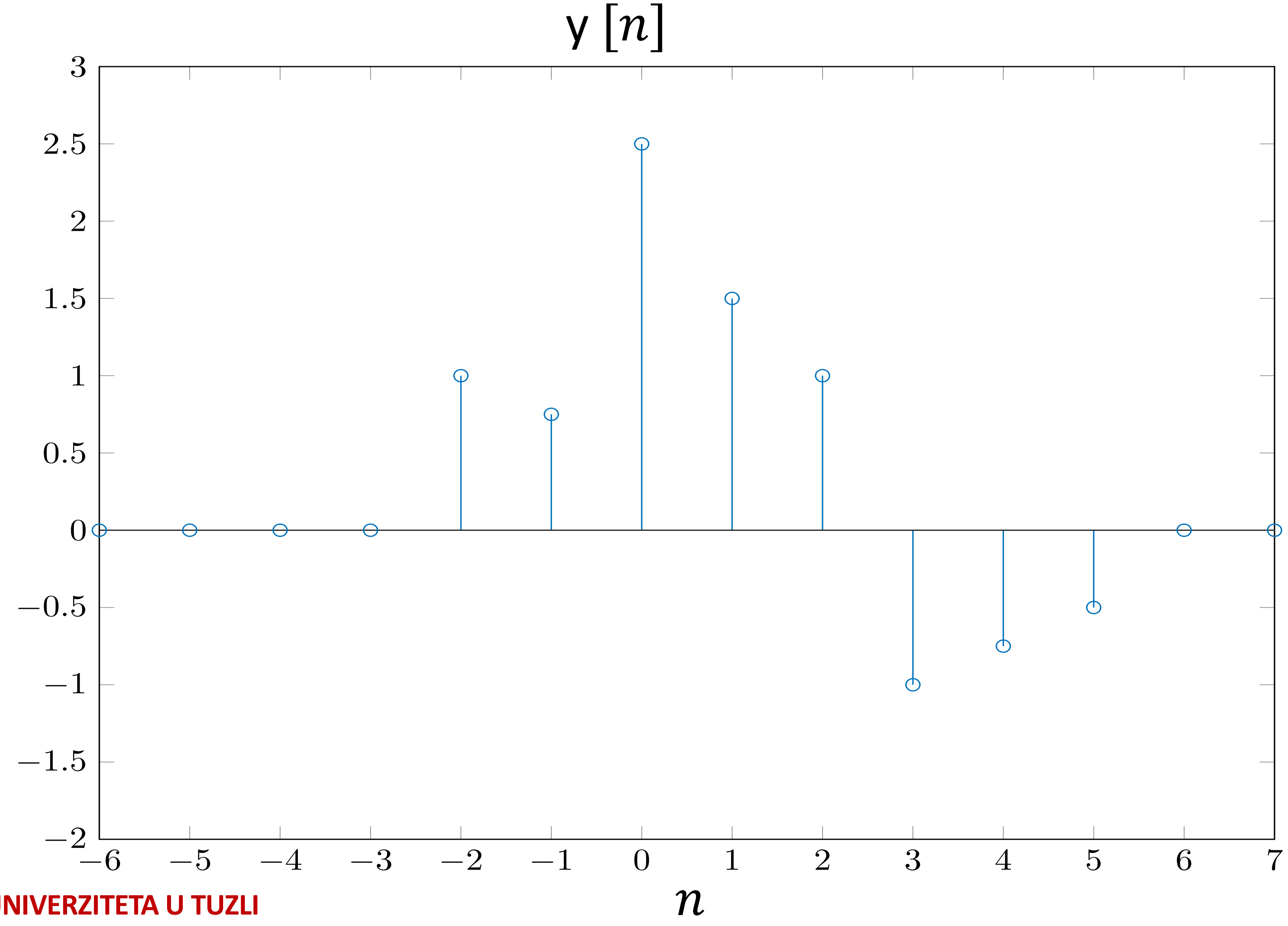
$x[3]\delta[n-3]$



$x[3]h[n-3]$



Na kraju saberemo sve parcijalne odzive



Izračun konvolucione sume

1. Refleksija $h[k]$ oko koodrinatnog početka da bi dobili $h[-k]$.
2. Pomak reflektirane sekvence za n uzoraka.
3. Sekvence $x[k]$ i $h[n-k]$ se množe za $-\infty < k < \infty$ i proizvodi se sumiraju da bi se izračunao uzorak $y[n]$.
4. Da bi se izračunao naredni izlazni uzorak, sekvenca $h[-k]$ se pomjeri za na poziciju novog uzorka (npr. za jedan uzorak) i ponavlja se procedura.

Primjer

Jedinice samo od 0 do N!

$$h[n] = u[n] - u[n - N]$$

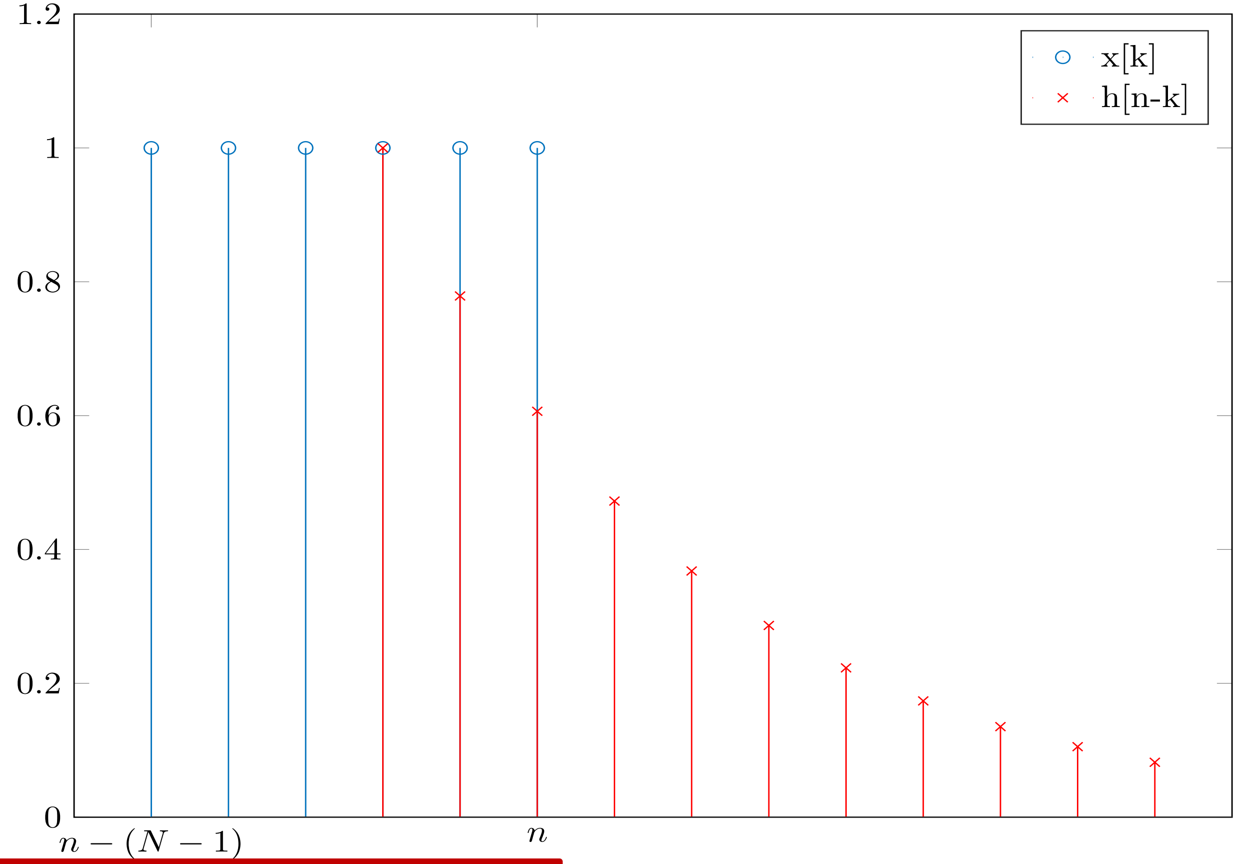
$$x[n] = a^n u[n]$$

Postoji za n>0!

Za N<0, ne poklapaju se sekvence i y[n]=0!

Primjer

$$\underbrace{n \geq 0 \quad i \quad n - N + 1 \leq 0}_{\boxed{0 \leq n \leq N-1}}$$



$$\boxed{x[k]h[n-k] = a^k y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k, \quad za \;\; 0 \leq n \leq N-1}$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1-\alpha}, \quad N_2 > N_1 \Longrightarrow y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

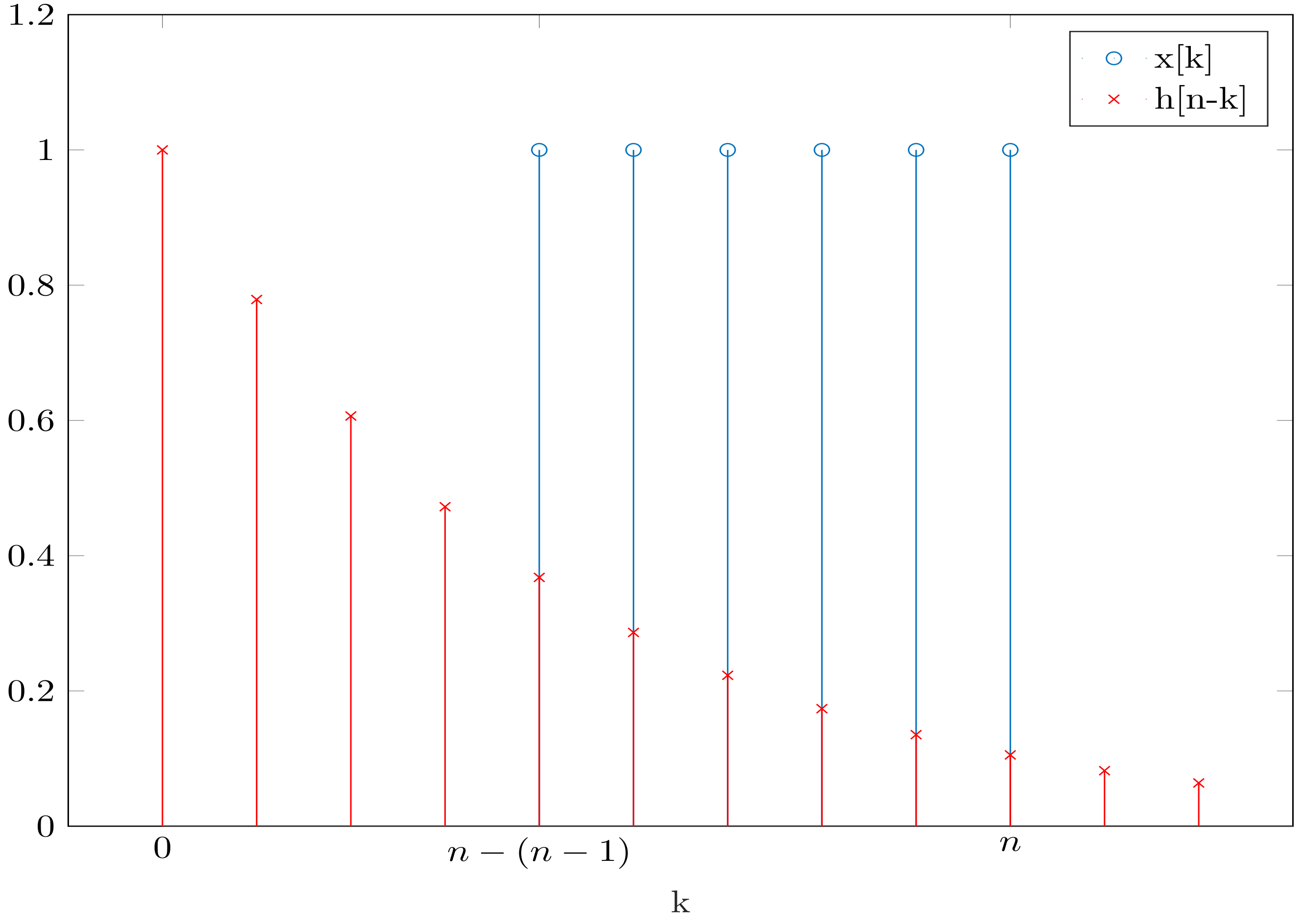
Primjer

$$0 < n - N + 1$$

ili

$$N - 1 < n$$

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k$$



$$\boxed{y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\left(\frac{1-a^N}{1-a}\right)}$$

Konačno rješenje

$$y[n] = \begin{cases} 0, \quad n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n-N+1}(\dfrac{1-a^N}{1-a}), \quad N-1 < n \end{cases}$$

Komutativnost konvolucije

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \xrightarrow{m = n - k} y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

$$= h[n] * x[n]$$

Stabilnost LTI sistema

- LTI sistem je stabilan ako i samo ako je njegov impulsni odziv apsolutno sumabilan, odnosno:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Zaista, $$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$|x[n]| \leq B_x \longrightarrow |y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Ispunjen dovoljan uslov!

Stabilnost LTI sistema

- Da bi pokazali da je ispunjen potreban uslov, moramo pokazati da ako je S = ∞, možemo pronaći ograničenu sekvencu koja će uzrokovati neograničen izlaz.
- Primjer sekvence:

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{h^*[n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases}$$

Ograničena sekvenca uvijek sa Bx=1!

Izlaz u trenutku n=0:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = S$$

Ako S postane beskonačno, našli smo izlaz koji je beskonačan za ograničen ulaz.

Kauzalnost LTI sistema

- Kod kauzalnih sistema, izlaz $y[n_0]$ zavisi samo od ulaznih uzoraka $x[n]$ do tog trenutka, odnosno $n \leq n_0$.
- Uslov kauzalnosti izvodimo iz konvolucione sume.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

- Za kauzalnost je potrebno da je $h[m]=0$ u svim tačkama u kojima je $n-m>n$, tj. $m<0$. Prema tome, za kauzalne LTI sisteme vrijedi:

$$h[n] = 0, n < 0$$

Primjer: Idealno kašnjenje

$$y[n] = x[n - n_d], -\infty < n < \infty$$

$$h[n] = \delta[n - n_d], n_d > 0$$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n - n_d]| = 1$$

Sistem je stabilan!

Primjer: Usrednjavanje sa kliznim prozorom

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{k=M_2} x[n-k]$$

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{k=M_2} \delta[n-k] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{ostalo n} \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-M_1}^{M_2} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} = 1$$

$$S = \underbrace{\frac{1}{M_1 + M_2 + 1} + ... + \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} = 1}_{\text{M1+M2+1 puta}}$$

Sistem je stabilan!

FIR sistemi

- Sistemi čiji impulsni odziv ima samo konačan broj elemenata različitih od nule se nazivaju sistemi sa konačnim impulsnim odzivom (***finite-duration impulse response*** **- FIR**).
- **FIR sistemi su uvijek stabilni.**

Primjer: akumulator je nestabilan sistem

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u[n]$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty$$

IIR sistemi

- Vidimo da je impulsni odziv akumulatora beskonačan.
- Ovo je primjer sistema sa beskonačno dugim trajanjem impulsnog odziva (***infinite-duration impulse response - IIR***).
- Primjer stabilnog IIR sistema:

$$h[n] = a^n u[n], |a| < 1.$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a| = \frac{1}{1 - |a|} < \infty$$

Šta će se desiti ako je $|a| > 1$?

Konvolucija može pojednostaviti analizu sistema

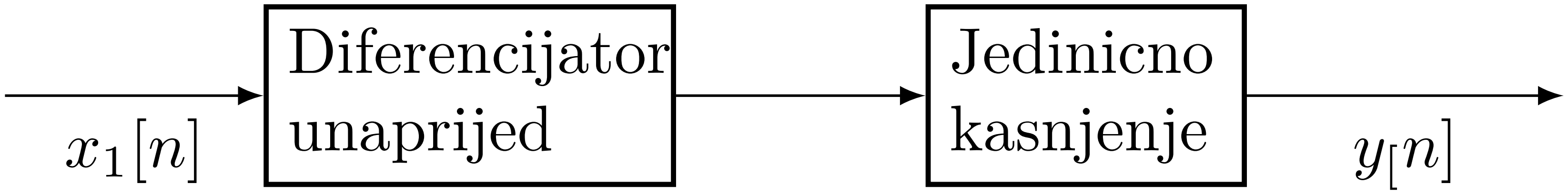
- Koncept konvolucije kao operacije između dvije sekvence vodi pojednostavljenju problema u analizi sistema.
- Na primjer, za sistem koji unosi kašnjenje vrijedi:

$$x[n] * \delta[n - n_d] = \delta[n - n_d] * x[n] = x[n - n_d]$$

Primjer: Diferencijator unaprijed je akauzalan sistem

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$

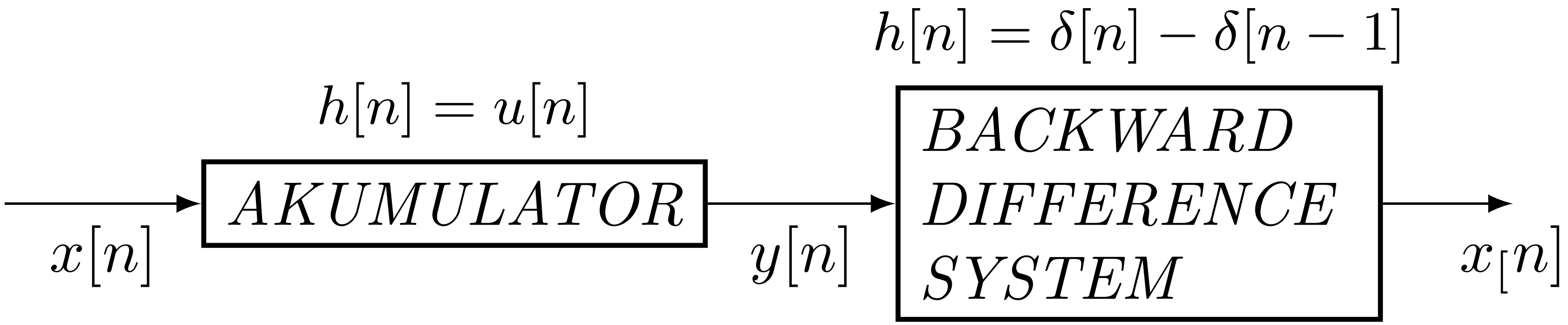
Možemo ga učini kauzalnim dodavanjem kašnjenja:



$$h[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] = \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Svaki akauzalni FIR system se može napraviti kauzalnim ako mu se doda dovoljno kašnjenje!

Inverzni sistem



$$h[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

Inverzni sistem

$$h[n] * hi[n] = hi[n] * h[n] = \delta[n]$$

- Kaskadna veza akumulatora i diferencijatora unazad formira sistem čiji je impulsni odziv jedinični (delta) impuls.
- S obzirom da je $x[n] * \delta[n] = x[n]$, odziv ovakvog sistema će biti jednak ulazu.
- U opštem slučaju,ako je impulsni odziv LTI sistema *h[n]*,onda je njegov inverzni sistem, ako postoji određeen impulsnim odzivom $h_i[n]$ za koji vrijedi:

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.