ANALIZA VREMENSKI-DISKRETNIH SISTEMA U FREKVENTNOM DOMENU

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Svojstvene funkcije LTI sistema

- Razmotrimo odziv sistema na kompleksnu eksponencijalnu sekvencu:

Ulaz

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

Odziv sistema

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

Frekventni odziv sistema

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{arg(H(e^{j\omega}))}$$

Svojstvena funkcija LTI sistema

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Odgovarajuća svojstvena vrijednost

Sistem koji unosi idealno kašnjenje

Sistem

$$y[n] = x[n - n_d] \Rightarrow x[n] = e^{j\omega n} => y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}$$

Frekventni odziv $H(j\omega) = e^{-j\omega n_d}$

Drugi način

$$h[n] = \delta[n - n_d] \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &|H(e^{j\omega})| = 1 \\ &arg(H(e^{j\omega})) = -\omega n_d \end{aligned}}$$

Generalizacija

- Ako se signal može predstaviti kao linearna kombinacija kompleksnog eksponencijalnog signala u obliku:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

- odziv LTI sistema je jednak:

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

- *Ako x[n] možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju kompleksnih eksponencijalnih sekvenci, tada je odziv moguće odrediti pomoću prethodne jednačine, ako poznajemo frekventni odziv sistema.*

Odziv LTI Sistema na sinusni signal

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

$$x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$$

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0})\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$$

$$x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0})\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\boxed{y[n] = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]}$$

Za realno h[n] vrijedi: $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0}) \Rightarrow y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$

Za idealno kašnjenje od nd uzoraka: $y[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d) = A\cos[\omega_0(n - n_d) + \phi]$

Razlika u odnosu na vremenski-kontinualne sisteme

- Značajna razlika je u činjenici da je frekventni odziv diskretnih LTI sistema uvijek periodična funkcija frekvencije ω sa periodom 2π.

Zamijenimo ω sa ω+2π

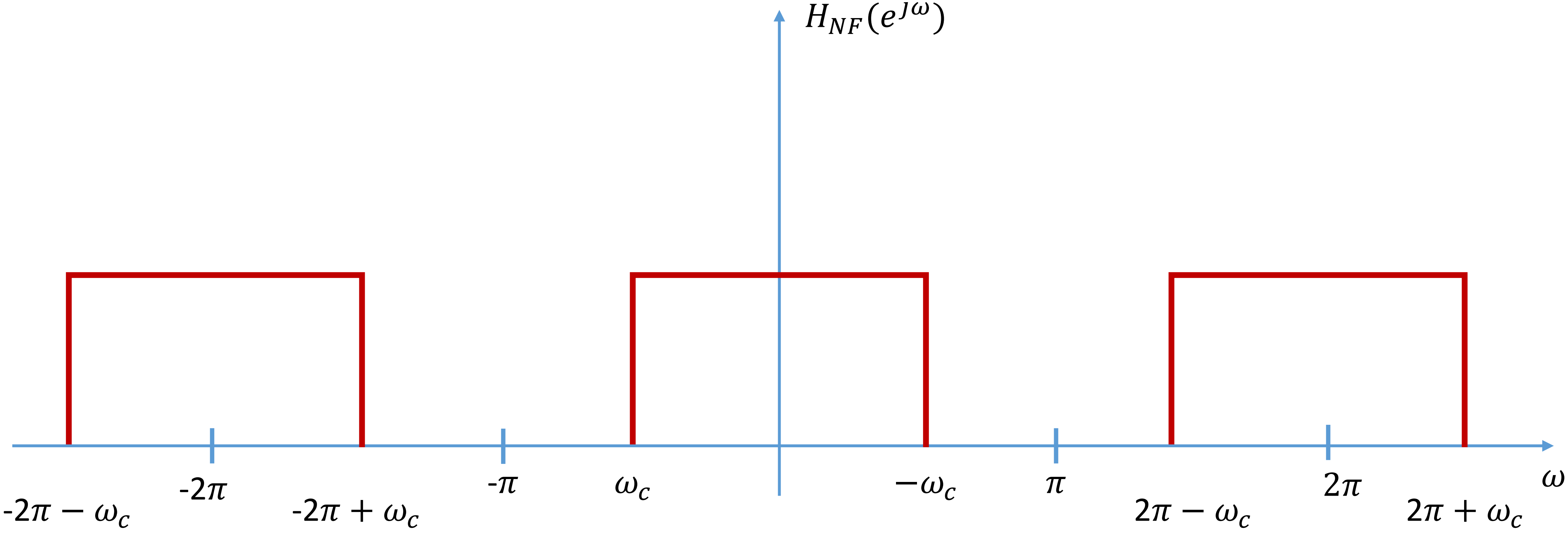
$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}$$

$$e^{\pm j2\pi k} = 1$$

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}e^{-j\omega\pi n} = e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j(\omega+2\pi)} = H(e^{j\omega}) \Rightarrow \boxed{H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), r\epsilon\mathbb{Z}}$$

Primjer: Idealni NF filter



Primjer: Usrednjavanje u kliznom prozoru

Impulsni odziv

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{za ostalo n} \end{cases}$$

Frekventni odziv

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

Poznata jednakost

$$\boxed{\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1-\alpha}, N_2 \ge N_1}$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

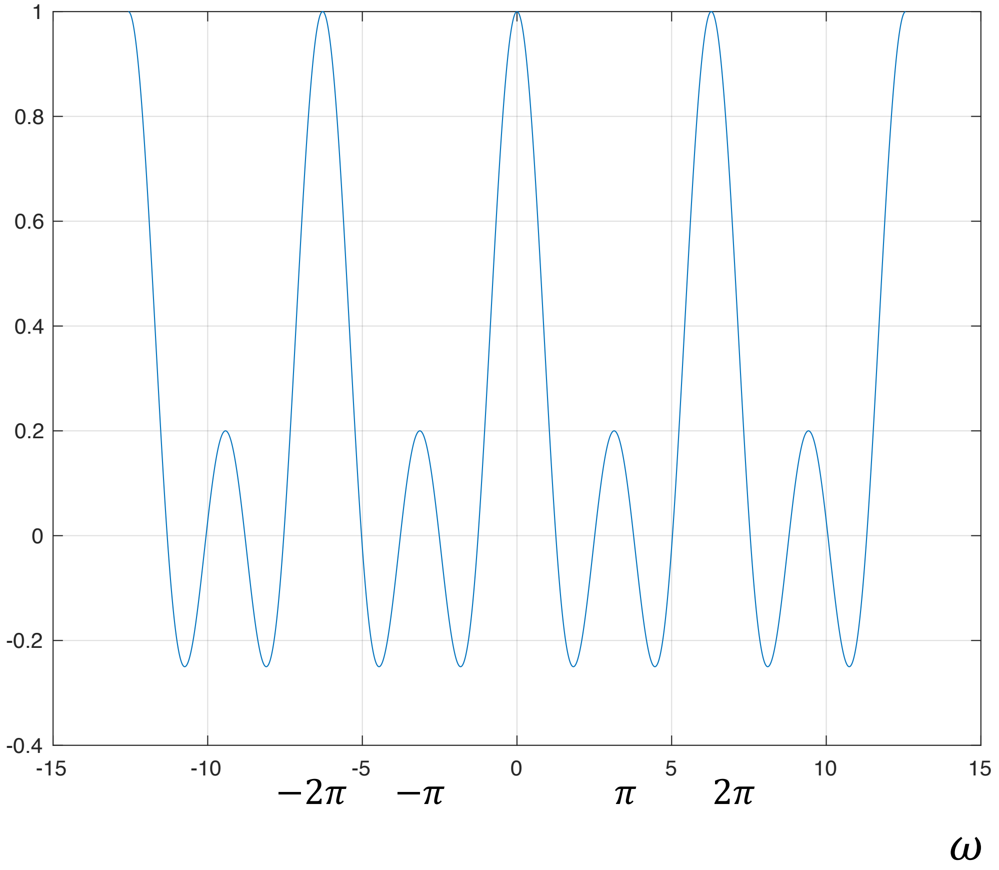
$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1 - e^{-j\omega}} e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2}$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{\sin[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$$

Primjer: Usrednjavanje u kliznom prozoru

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$



Amplitudna karakteristika za $M_1=0$ i $M_2=4$!

Fazna karakteristika je linearna!

Trenutno (iznenadno) dovedeni kompleksni eksponencijalni signal na ulaz

Ulaz

$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$

Primjeni konvolucionu sumu

Odziv kauzalnog LTI sistema

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega k}, & n \geq 0 \end{cases}$$

Za n≥0: $y[n] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega k}$

Za kauzalan LTI sistem je h[k]=0 za k<0.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

$$\boxed{y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}}$$

Stacionarni odziv $y_{ss}[n]$

Tranzijentni odziv $y_t[n]$

Trenutno (iznenadno) dovedeni kompleksni eksponencijalni signal na ulaz

- Amplituda tranzijentnog odziva je ograničena:

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|$$

- Očigledno je da ako je impulsni odziv konačne dužine, odnosno *h[n] = 0* osim za 0≤n≤m, tada je član $y_t[n] = 0$ za $n + 1 > M$ odnosno $n > M-1$. Tada je:

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}, \text{za n} > M - 1$$

Tranzijenti odziv

- Ako imulsni odziv ima beskonačno trajanje, tranzijentni odziv ne nestaje naglo već polako iščezava ako se uzorci u *h[n]* približavaju nuli sa povećanjem *n*. Tada vrijedi:

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

- Tranzijentni odziv je ograničen sumom apsolutnih vrijednosti svih uzoraka u impulsnom odzivu.
- Za stabilne sisteme tranzijentni odziv se značajno smanjuje kada n→∞.
- Dovoljan uslov da tranzijenti uslov iščezne jeste da je LTI sistem stabilan.

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k] e^{-j\omega k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Fourierova transformacija sekvence

- Veliki broj sekvenci se može predstaviti pomoću Fourierovog integrala:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

Inverzna Fourierova transformacija, kao superpozicija beskonačno malih kompleksnih sinusoida oblika:

$$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- pri čemu je:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Kompleksan broj

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\arg X(e^{j\omega})}$$

Fourierova transformacija sekvence

- Frekventni odziv LTI sistema je Fourierova transformacija impulsnog odziva, te se impulsni odziv može izazvati preko **inverzne Fourierove transformacije**:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega n}) e^{j\omega n} d\omega$$

- Frekventni odziv je periodična funkcija, pa je i Fourierova transformacija periodična funkcija sa 2π.
- U nastavku ćemo pokazati da je prethodna jednačina inverzna jednačini koja određuje $H(e^{j\omega})$.

Fourierova transformacija sekvence

- Izraz za $H(e^{j\omega})$ uvrstimo u prethodnu jednačinu:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}\right)e^{j\omega n}\,d\omega = \hat{x}[n]$$

- Potrebno je pokazati da je $\hat{x}[n] = x[n]$.

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}\,d\omega\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}d\omega = \frac{\sin\pi(n-m)}{n-m} = \begin{cases}1, m = k\\ 0, m \neq k\end{cases} = \delta[n-m]$$

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m] = x[n]$$

Fourierova transformacija sekvence

- Kada je $x[n]$ sumabilno, tada $X(e^{j\omega})$ postoji.
- Dovoljan uslov.

$$|X(e^{j\omega})| = |\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n]|||e^{-j\omega n}| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Apsolutna sumabilnost za iznenadno dovedeni eksponecijalni signal

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a^n e^{-j\omega})^n$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \text{, ako je } |ae^{-j\omega}| < 1 \implies |a| < 1$$

Uslov apsolutne sumabilnosti!

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \text{ako je } |a| < 1$$

Apsolutna sumabilnost

- Dovoljan uslov za postojanje Fourierove transformacije.
- Garantira uniformnu konvergenciju.
- Neke sekvence nisu apsolutno sumabilne ali su kvadratno sumabilne. Tada energija greške teži nuli.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$

Primjer: NF filter

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

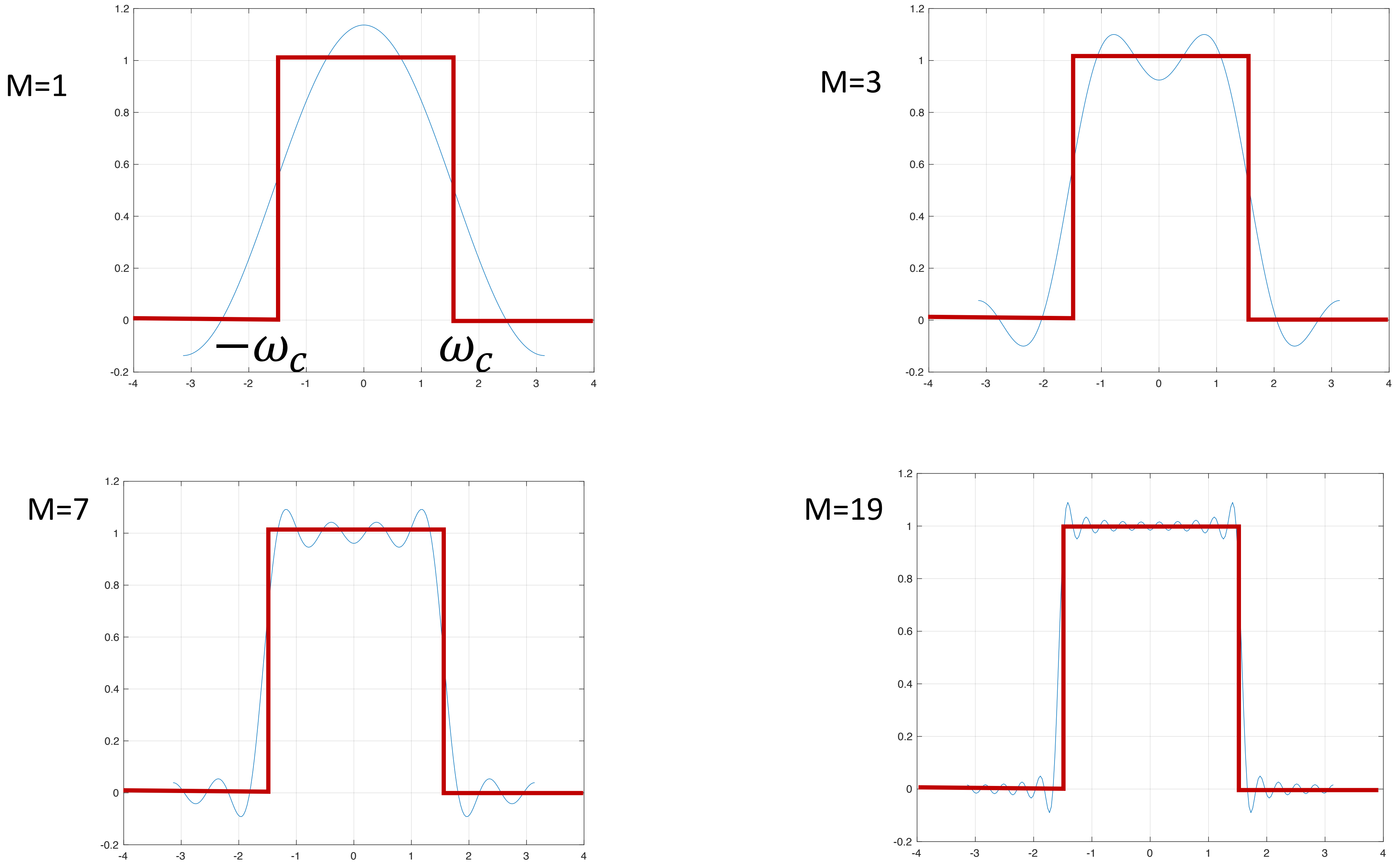
$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j n}[e^{j\omega n}]_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{1}{2\pi j n}(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \ -\infty < n < \infty \end{aligned}$$

Uočimo da je $h_{lp}[n] \neq 0$ za $n < 0$, pa je idealni NF filter akauzalan. $h_{lp}[n]$ nije apsolutno sumabilno.

Impulsni odziv pada proporcinalno sa $1/n$, kada se n približava beskonačnosti.

Za potrebe analize ćemo posmatrati frekeventni odziv sa konačnim brojem članova M:

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$


M=1
$-\omega_c$
ω_c
M=3
M=7
M=19

Fourierova transformacija konstante

- *x[n]=1* za svako *n*.
- Sekvenca nije apsolutno sumabilna niti kvadratno sumabilna i izraz
- $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$
- ne konvergira ni u jednom smislu.
- Međutim, Fourierova transfrmacija sekvence x[n] je periodična povorka impulse:
- $$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r)$$
- δ impulse su funkcije kontinualne promjenljive ω i imaju beskonačnu visinu, nultu širinu i jediničnu površinu.

Fourierova transformacija konstante

- Prethodna jednačina zadovoljava inverznu Fourierovu transformaciju:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi r)\right)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}2\pi\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega+2\pi r)e^{j\omega n}d\omega = 1
\end{aligned}
$$

Fourierova transformacija kompleksnih eksponencijalnih sekvenci

- Razmatramo sekvencu x[n] čija je Fourierova transformacija periodična povorka δ impulse.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

- Očigledno je da vrijedi $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$. Ako izabrano ω_0 ne zadovoljava ovaj uslov, onda postoji ω_0 na datom interval jer se impulse periodično ponavljaju sa 2π.
- Do tražene sekvence dolazimo pomoću inverzne Fourerove transformacije.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega \Longrightarrow x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n$$

Fourierova transformacija *u[n]*

$$u[n] = u_1[n] + u_2[n]$$

$$u_1[n] = \frac{1}{2}$$

$$u_2[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, za } n \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{, za } n < 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = u_2[n] - u_2[n-1]$$

$$F.T.\{\delta[n]\} = 1$$

Fourierova transformacija *u[n]*

$$F.T. u_2[n] - u_2[n-1] = U_2(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}U_2(e^{j\omega}) = U_2(e^{j\omega})[1 - e^{-j\omega}]$$

$$1 = U_2(e^{j\omega})[1 - e^{-j\omega}] \Rightarrow U_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$U_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r)$$

Fourierova transformacija *u[n]*

$$U(e^{j\omega}) = U_1(e^{j\omega}) + U_2(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r)$$

Ovo je drugi primjer sekvence koja nije apsolutno sumabilna niti kvadratno sumabilna.

Osobine Fourierove transformacije

- Linearnost
- Pomak u vremenskom i frekventnom domenu
- Inverzija vremena
- Diferenciranje u frekventnom domenu
- Parsevalov teorem
- Konvolucija

Linearnost

Ako je $x_1[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$, $x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$ vrijedi:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Pomak po vremenu

$$x[n] \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad x[n-n_d] \Leftrightarrow e^{-j\omega n_d} X\left(e^{j\omega}\right)$$

Dokaz:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Big\downarrow \; n - n_d$$

$$x[n-n_d] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-n_d)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})]e^{j\omega n}d\omega \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 n}x[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Pomak po frekvenciji

$$X(e^{j(\omega-\omega_0)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{e^{j\omega_0 n}x[n]\}e^{-j\omega n}$$

Inverzija vremena

$$\mathrm{x}[n] \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}[-n] \Leftrightarrow X\left(e^{-j\omega}\right)$$

Za relane signale: $\mathrm{x}[-n] \Leftrightarrow X^{*}\left(e^{j\omega}\right)$

Diferenciranje u frekventnom domenu

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \quad \Rightarrow \quad nx[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Parsevalov teorem

$$x[n] \overset{F.}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$\Downarrow$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Spektralna gustine energije signala

Konvolucija

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}),\, h[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) \qquad x[n] = e^{j\omega n} \implies y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega}\Delta\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_k H(e^{jk\Delta\omega})X(e^{jk\Delta\omega}e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \Longrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Vremensko kašnjenje kao poseban slučaj konvolucije

$$\delta[n-n_d] \xrightarrow{F.T.} e^{-j\omega n_d}$$

$$h[n] = \delta[n-n_d] \implies y[n] = x[n] * \delta[n-n_d] = x[n-n_d]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \implies Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$$

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.