PROMJENA FREKVENCIJE UZORKOVANJA PRIMJENOM DIGITALNE OBRADE SIGNALA

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Promjena frekvencije uzorkovanja primjenom digitalne obrade signala

Postupkom uzorkovanja, moguće je vremenski-kontinualan signal $x_c(t)$ predstaviti vremenski-diskretnim signalom koji sadrži njegove uzorke:

$$x[n] = x_c(nT)$$

Nekada je potrebno promijeniti (smanjiti ili povećati) frekvenciju uzorkovanja diskretnog signala, odnosno:

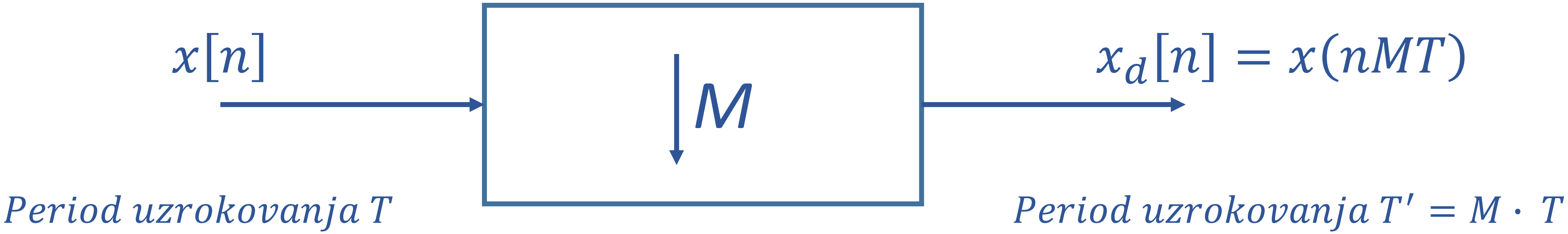
$$x'[n] = x_c[nT']$$

Redukcija frekvencije uzorkovanja cjelobrojnim faktorom

Frekvencija uzorkovanja sekvence može se reducirati „uzorkovanjem“, odnosno definiranjem nove sekvence:

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$$

KOMPRESOR FREKVENCIJE UZORKOVANJA



Redukcija frekvencije uzorkovanja cjelobrojnim faktorom

- Signal $x_d[n]$ se može dobiti uzorkovanjem signala $x_c(t)$ sa periodom uzorkovanja $T' = MT$.
- Ako je ispunjen uslov $X_c(j\Omega) = 0$ za $|\Omega| \geq \Omega_N$, tada je $x_d[n]$ tačna predstava signala $x_c(t)$ za $\frac{\pi}{T'} = \frac{\pi}{MT} \geq \Omega_N$.
- Frekvenciju uzorkovanja možemo umanjiti za faktor *M* bez preklapanja spektara uzorkovanog signala ako je:
  - izvorna frekvencija uzorkovanja barem M-puta veća od Nyquistove brzine ili
  - ako se prvo frekventni opseg sekvence umanji za M-puta digitalnim filtriranjem.
- Engleski termin za redukciju frekvencije uzorkovanja je “downsampling”.
- Dalja analiza se vrši u frekventnom domenu, izvođenjem matematičkog izraza koji opisuje spektre signala na ulazi i izlazu “kompresora frekvencije uzorkovanja”.

Redukcija frekvencije uzorkovanja cjelobrojnim faktorom

$$x[n] = x_c(nT) \xrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \qquad T' = MT$$

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nT') \xrightarrow{\text{FT}} X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'}\right)\right) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right)$$

$Indeks\ r\ u\ sumi\ izrazimo\ preko\ faktora\ redukcije\ M{:}\ \ r = i + k \cdot M$

$„k“\ i\ „i“\ su\ cijeli\ brojevi\ tako\ da\ vrijedi{:} -\infty < k < \infty, 0 \le i \le M-1$

$$\underbrace{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}}_{\substack{M\,=\,3\\ k\,=\,1}}\underbrace{\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}}_{\substack{M\,=\,3\\ k\,=\,2}}\boxed{7} \qquad r = 7 = \underbrace{1}_{i\,=\,1} + \underbrace{2}_{k\,=\,2} \cdot \underbrace{3}_{\text{M}=\,3}$$

Spektar signala nakon redukcije frekvencije uzorkovanja

$$\Rightarrow\quad X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT}\right)\right)\right]$$

Redukcija frekvencije uzorkovanja cjelobrojnim faktorom

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\underbrace{\boxed{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT}-\frac{2\pi k}{T}-\frac{2\pi i}{MT}\right)\right)}}_{X\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right)}\right]$$

$$X\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT}-\frac{2\pi k}{T}-\frac{2\pi i}{MT}\right)\right)$$

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\right)$$

Spektar signala poslije redukcije frekvencije uzorkovanja se može posmatrati kao M kopija periodične Fourierove transformacije $X\left(e^{j\omega}\right)$, frekventno skaliranih sa M i pomjerenih za cjelobrojni multipl 2π.

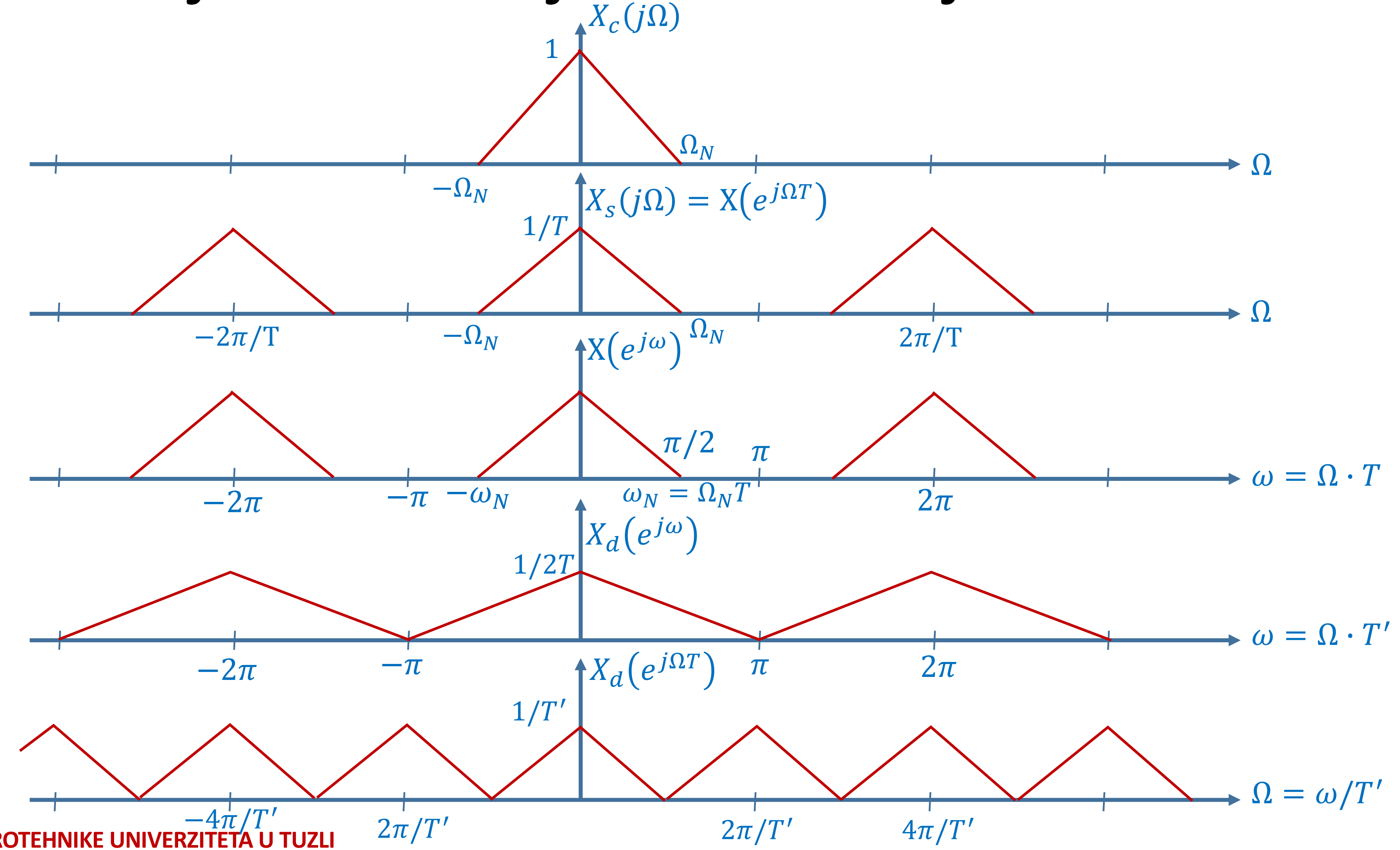
Redukcija frekvencije uzorkovanja cjelobrojnim faktorom

- Očigledno je da će $X_d\left(e^{j\omega}\right)$ biti periodično sa periodom 2π.
- Da bi se izbjeglo preklapanje spektara, potrebno je da bude ispunjen uslov

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 0 \; za \; \omega_N \leq |\omega| \leq \pi \text{ i } 2\pi/M \geq 2\omega_N$$

- Na sljedećem slajdu je ilustriran spektar za $M = 2$.

Redukcija frekvencije uzorkovanja M=2

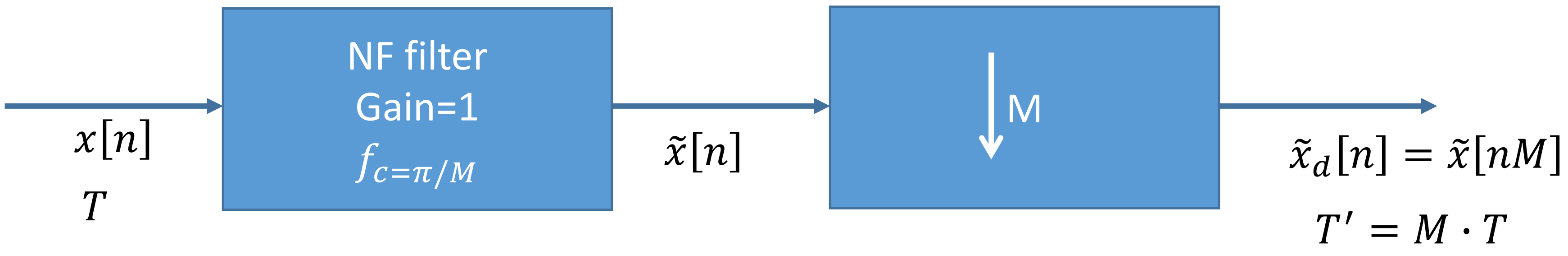


Redukcija frekvencije uzorkovanja M=2

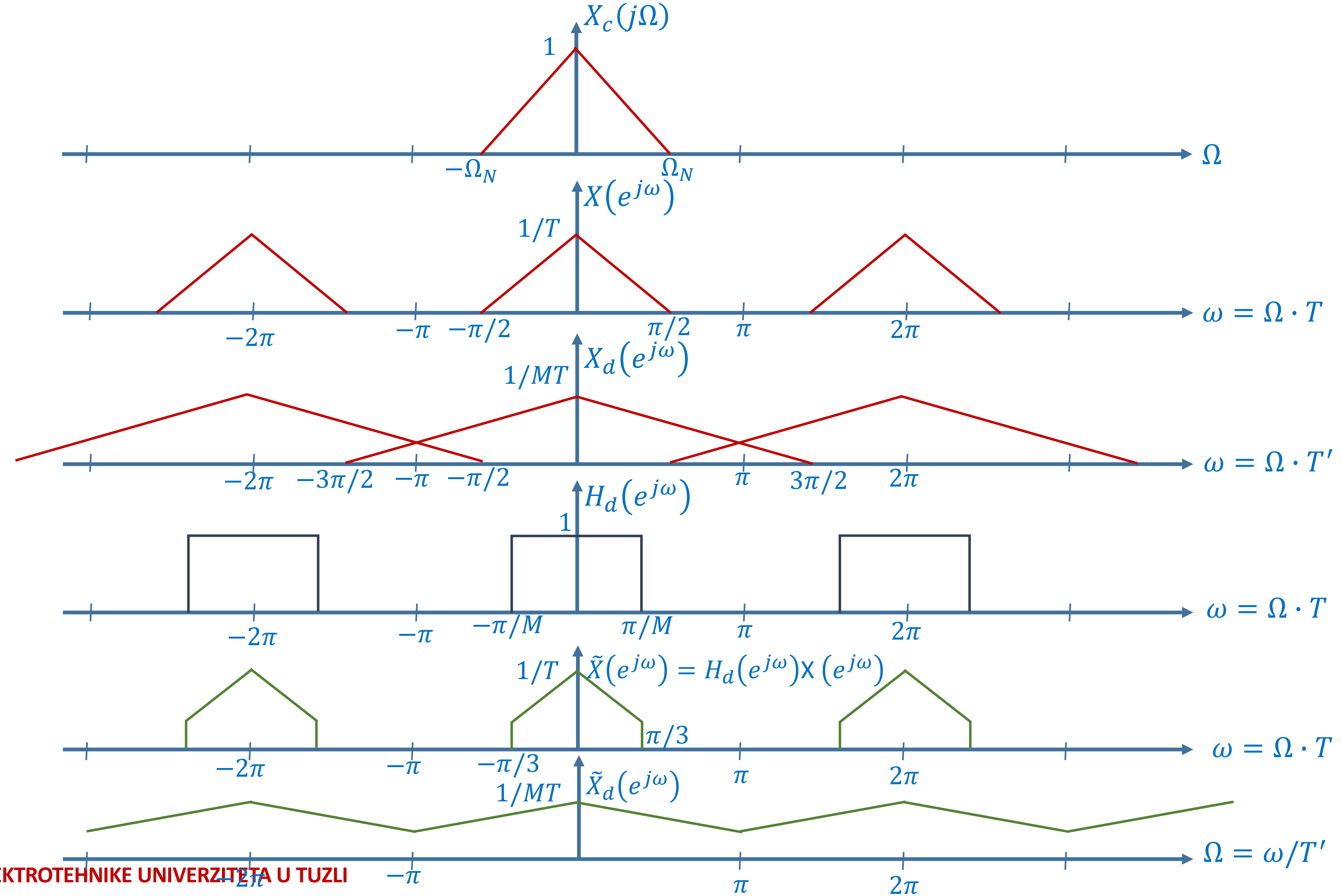
- U primjeru $\frac{2\pi}{T} = 4\Omega_N$, odnosno kada se frekvencija uzorkovanja smanji 2 puta, na donjoj smo granici da izbjegnemo preklapanje spektara i da nije moguće rekonstruirati izvorni signal.
- Vrijedi $\frac{2\pi}{T} = 4\Omega_N \Rightarrow \omega_N = \Omega_N \cdot T = 2\pi$.
- Ako smanjimo frekvenciju uzorkovanja tri puta (M=3), dobijamo sekvencu $x_d[n] = x[3n] = x_c[3nT]$.
- S obzirom da je $M \cdot \omega_N = \frac{3\pi}{2} > \pi$, dolazi do preklapanja spektara.
- Da bi se ovo izbjeglo, potrebno je da vrijedi $\omega_N \cdot M < \pi$ ili $\omega_N < \pi/M$.
- Ova primjer je ilustriran na sljedećim slajdovima.

Redukcija frekvencije uzorkovanja M=3

- Ako $x[n]$ filtriramo idealnim NF filterom sa graničnom frekvencijom π/M, tada je moguće umanjiti frekvenciju uzorkovanja izlazne sekvence $\tilde{x}[n]$.



Redukcija frekvencije uzorkovanja M=3



Povećanje frekvencije uzorkovanja za cjelobrojni faktor

- Razmatramo signal $x[n]$ čiju frekvenciju uzorkovanja treba da povećamo faktor za L.
- Ako uzmemo u obzir vremenski-kontinualni signal $x_c(t)$ koji uzorkujemo, cilj nam je da dobijemo uzorke:

$$x_i[n] = x_c(nT')$$

- gdje je $T' = T/L$, iz sekvence uzoraka:

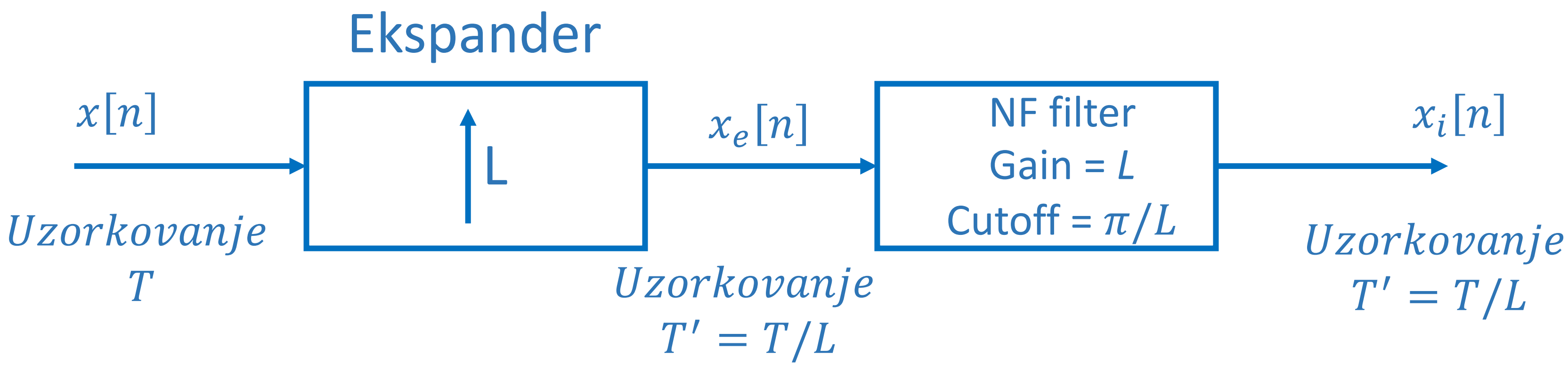
$$x[n] = x_c(nT)$$

- Ovu opreaciju povećanja frekvencije uzorkovanja označavamo kao ***upsampling***. Očigledno je:

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Povećanje frekvencije uzorkovanja za cjelobrojni faktor

- Na donjoj slici je prikazan sistem za dobivanje $x_i[n]$ iz $x[n]$ pomoću digitalne obrade signala.



$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & za\ ostalo\ n \end{cases}$$

Digitalni NF filter sa graničnom frekvencijom π/L i pojačanjem L.

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]$$

Povećanje frekvencije uzorkovanja za cjelobrojni faktor

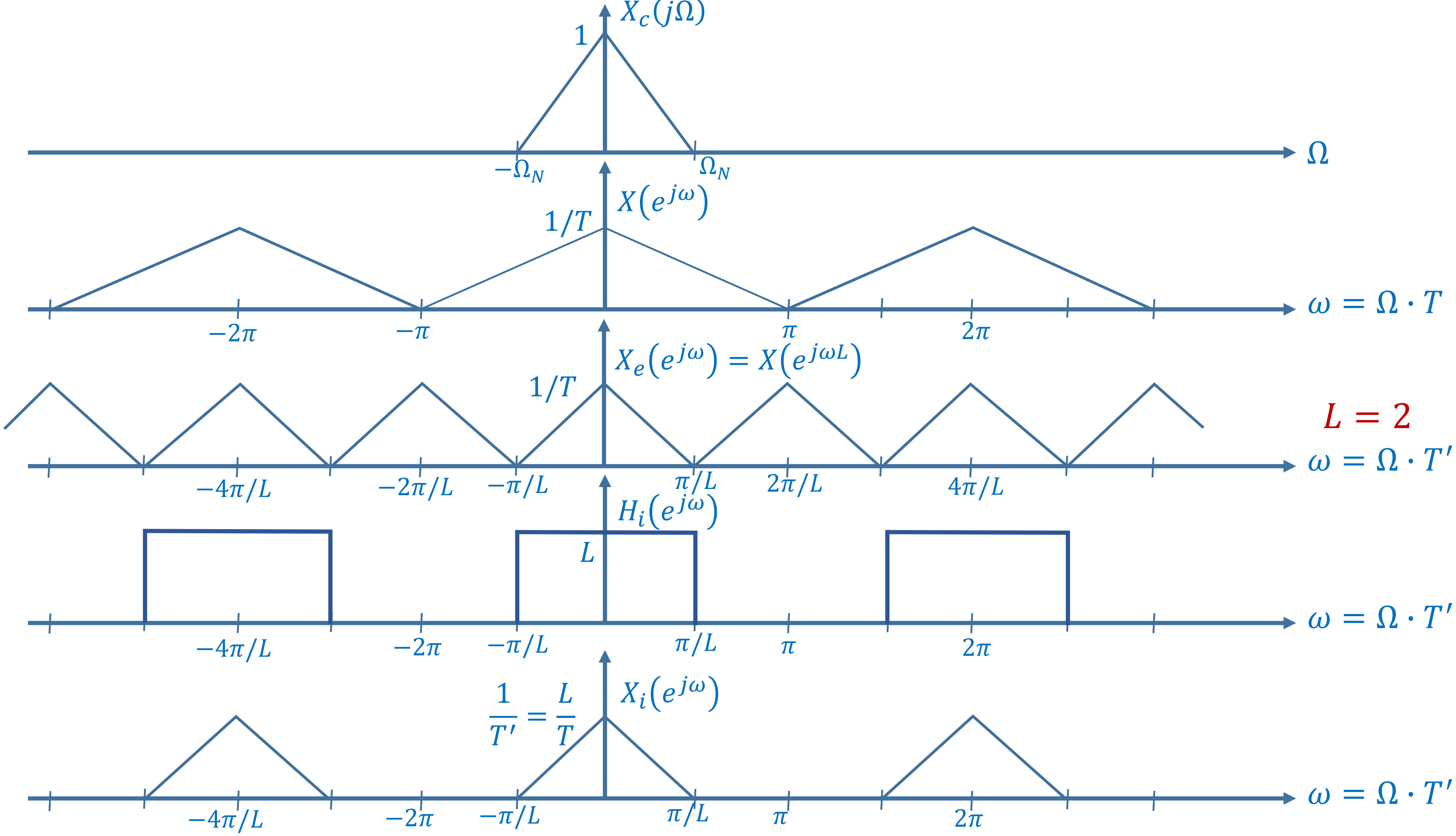
- U prvom koraku se kreira sekvenca $x_e[n]$ (povorka δ impulsa), koja se vodi na ulaz NF filtera za rekonstrukciju sekvence.
- Fourierova transformacija sekvence $x_e[n]$ je:

$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL] \right) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-\omega Lk} = X(e^{j\omega L})$$

- Fourierova transformacija izlaza ekspandera je frekventno-skalirana verzija Fourierove transformacije ulaznog signala.
- Vidimo da se ω mijenja sa $\omega \cdot L$, tako da je sada ω normalizirano kao $\omega = \Omega \cdot T'$.
- Ovaj rezultat je grafički prikazan na sljedećem slajdu.

Redukcija frekvencije uzorkovanja M=3



Povećanje frekvencije uzorkovanja za cjelobrojni faktor

- Sa dijagrama na prethodnom slajdu možemo uočiti da se spektar $X_i\left(e^{j\omega}\right)$ može dobiti iz spektra $X_e\left(e^{j\omega}\right)$ korekcijom skaliranja amplitude sa $1/T$ na $1/T'$ i odbacivanjem svih frekventno-skaliranih kopija $X_c(j\Omega)$, osim onih na frekvencijama koje su cjelobrojni multipl 2π.
- Pojačanje filtera mora biti L jer je $L \cdot \left(\frac{1}{T}\right) = \left[\frac{1}{\frac{T}{L}}\right] = \frac{1}{T'}$ i graničnu frekvenciju π/L.
- Ovakav seistem se naziva **interpolator** jer popunjava nedostajuće uzorke te se operacija “*upsmapling*” posmatra kao interpolacija.
- Impulsni odziv interpolacijskog filtera je

$$h_i[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}$$

- Znamo da je

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]$$

Povećanje frekvencije uzorkovanja za cjelobrojni faktor

- Očigledno je da za impulsni odziv vrijedi:

$$h_i[0] = 1, h_i[n] = 0 \text{ za n} = \pm\text{L}, \pm2\text{L}, \dots.$$

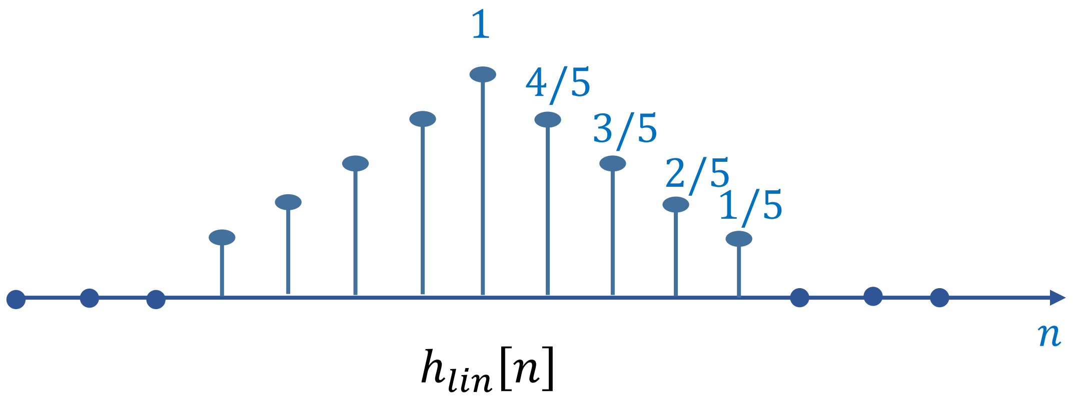
- U nekim primjerima je dovoljno koristiti linearnu interpolaciju koja se implementira pomoću filtera čiji je impulsni odziv jednak:

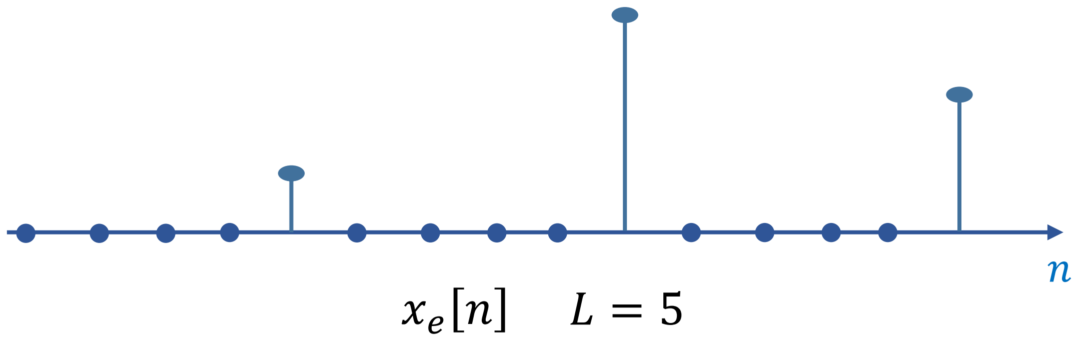
$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{L}, |n| \leq L \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

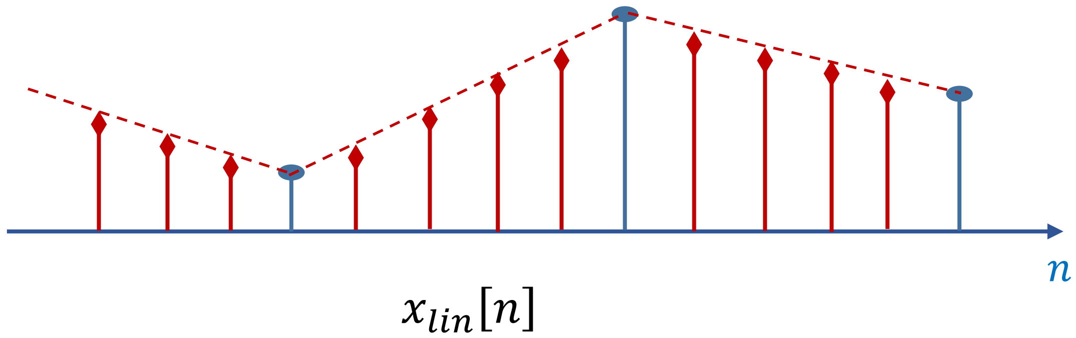
- Izlaz linearnog interpolatora je jednak:

$$x_{lin}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_e[k] h_{lin}[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{lin}[n-kL]$$

Povećanje frekvencije uzorkovanja za cjelobrojni faktor



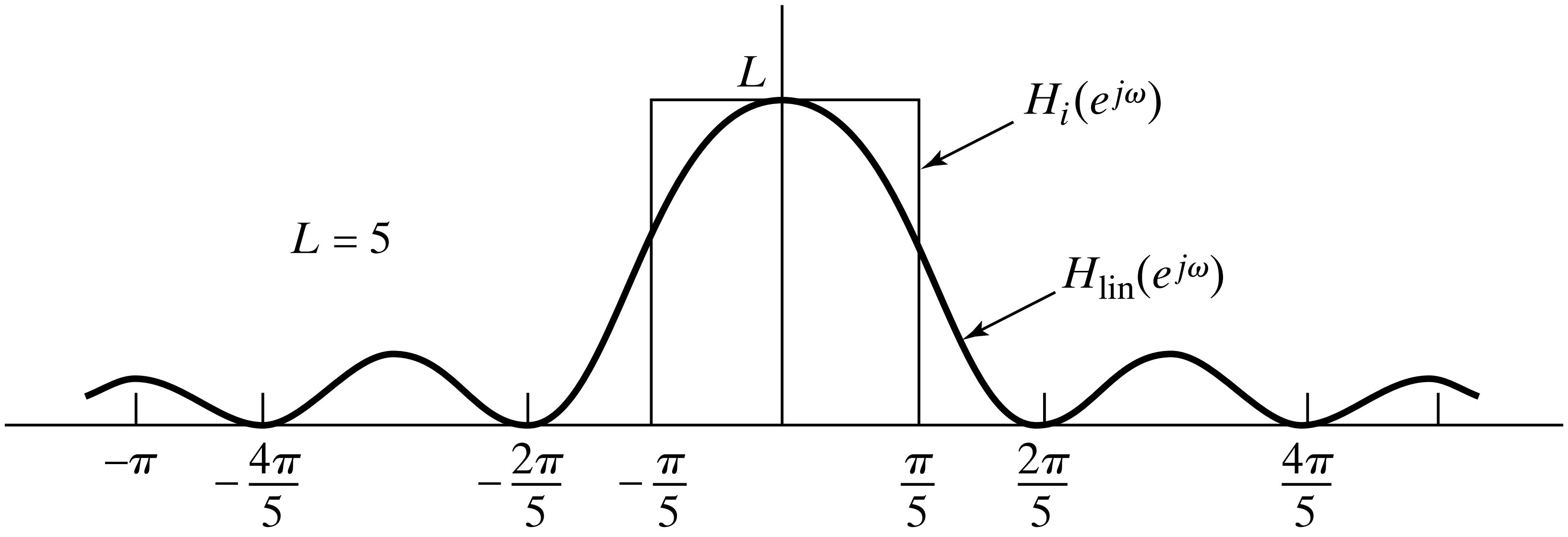




Vidimo da je $x_{lin}[n]$ identično sekvenci koja bi se dobila linearnom interpolacijom između uzoraka.
Uočite da je $h_{lin}[0] = 1$, i $h_{lin}[n] = 0\ za\ n = \pm L, \pm 2L, \ldots$. tako da je $x_{lin}[n] = x[n/L]\ u\ n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots$

Frekventni odziv filtera za linearnu interpolaciju

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\left[\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin \omega/2}\right]^2$$



Linearna interpolacija nije najbolja opcija jer će sadržavati značajnu energiju u opsegu frekvencija $\frac{\pi}{L} < |\omega| < \pi$ u slučaju da se ulazni signal uzorkuje Nyquistovom brzinom.
Ako je frekvencija uzorkovanja značajno veća od Nyqustove brzine, linearni interpolator će biti uspješniji u pomaku frekventno-skaliranih kopija $X_c(j\omega)$ na cjelobrojnim multiplima $2\pi/L$.

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.