DISKRETNA OBRADA VREMENSKI-KONTINUALNIH SIGNALA

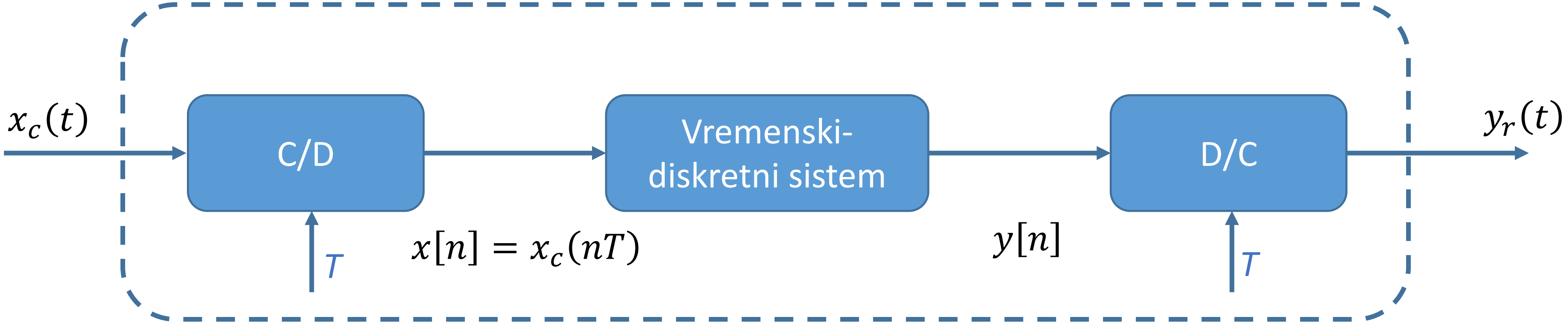
Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE UNIVERZITETA U TUZLI

Koncept

- Većina aplikacija vremenski-diskretnih sistema se odnosi na obradu vremenski-kontinualnih signala.
- Dizajn ovakvih sistema zahtjeva analizu u frekventnom domenu.



Izvana, cjelokupni sistem izgleda kao vremenski-kontinualni sistem.

Opis u frekventom domenu

- Primijenićemo Fourierovu transformaciju na diskretne signale označene na blok šemi sa prethodnog slajda.

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

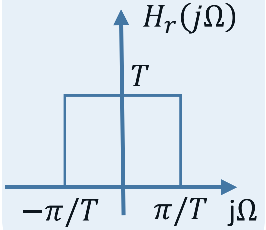
Replike spektra signala kojeg uzorkujemo.

$$y_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\,\frac{sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

Rekonstrukcija signala iz uzoraka *y[n]* pomoću NF filtera.

FT

$$Y_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)\cdot Y(e^{j\Omega T})=\begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), |\Omega|<\pi/T \\ 0, \quad za\ ostalo\ \Omega \end{cases}$$



Spektar kontinualnog signala.

Spektar diskretnog signala y[n].

Linearni vremenski invarijantni (LTI) sistemi

- Ako je diskretni sistem lineran i vremenski invarijantan (LTI), tada je veza između ulaza i izlaza sistema opisana jednačinom:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right)\cdot X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)\cdot Y\left(e^{j\Omega T}\right) \Rightarrow Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)\cdot H\left(e^{j\Omega T}\right)\cdot X\left(e^{j\Omega T}\right)$$

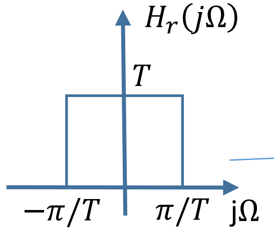
$$\Downarrow$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right) \xrightarrow{\omega\,=\,\Omega T} Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)\cdot H\left(e^{j\Omega T}\right)\cdot\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

Zbog $H_r(j\Omega)$ ostaje samo član za k=0.

$$X_c(j\Omega) = 0 \; za \; |\Omega| \geq \pi/T$$



$H_r(j\Omega)$ poništi 1/T!

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\Omega T}\right)X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

Linearni vremenski invarijantni (LTI) sistemi

- Ako $X_c(j\Omega)$ ima ograničenu širinu spektra, i ako je frekvencija uzorkovanja veća od Nyquistove brzine, cijeli sistem se može ekvivalentizirati vremenski-kontinualnim sistem sa frekventnim odzivom $H_{eff}(j\Omega)$:

$$Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega)$$

$$H_{eff}(j\Omega)=\begin{cases} H\left(e^{j\Omega T}\right), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

Primjer: Diskretna implementacija idealnog kontinualnog diferencijatora

Opisan je jednačinom: $y_c(t) = \frac{d}{dt}\{x_c(t)\} \Rightarrow H_c(j\Omega) = j\Omega$

Implementiramo ga pomoću vremenski-diskretnog sistema, čiji frekventni odziv za ulazne vremenski-kontinualne signale sa ograničenom širinom spektra treba da zadovolji relaciju:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega, za\ |\Omega| < \pi/T \\ 0, za\ |\Omega| \geq \pi/T \end{cases}$$

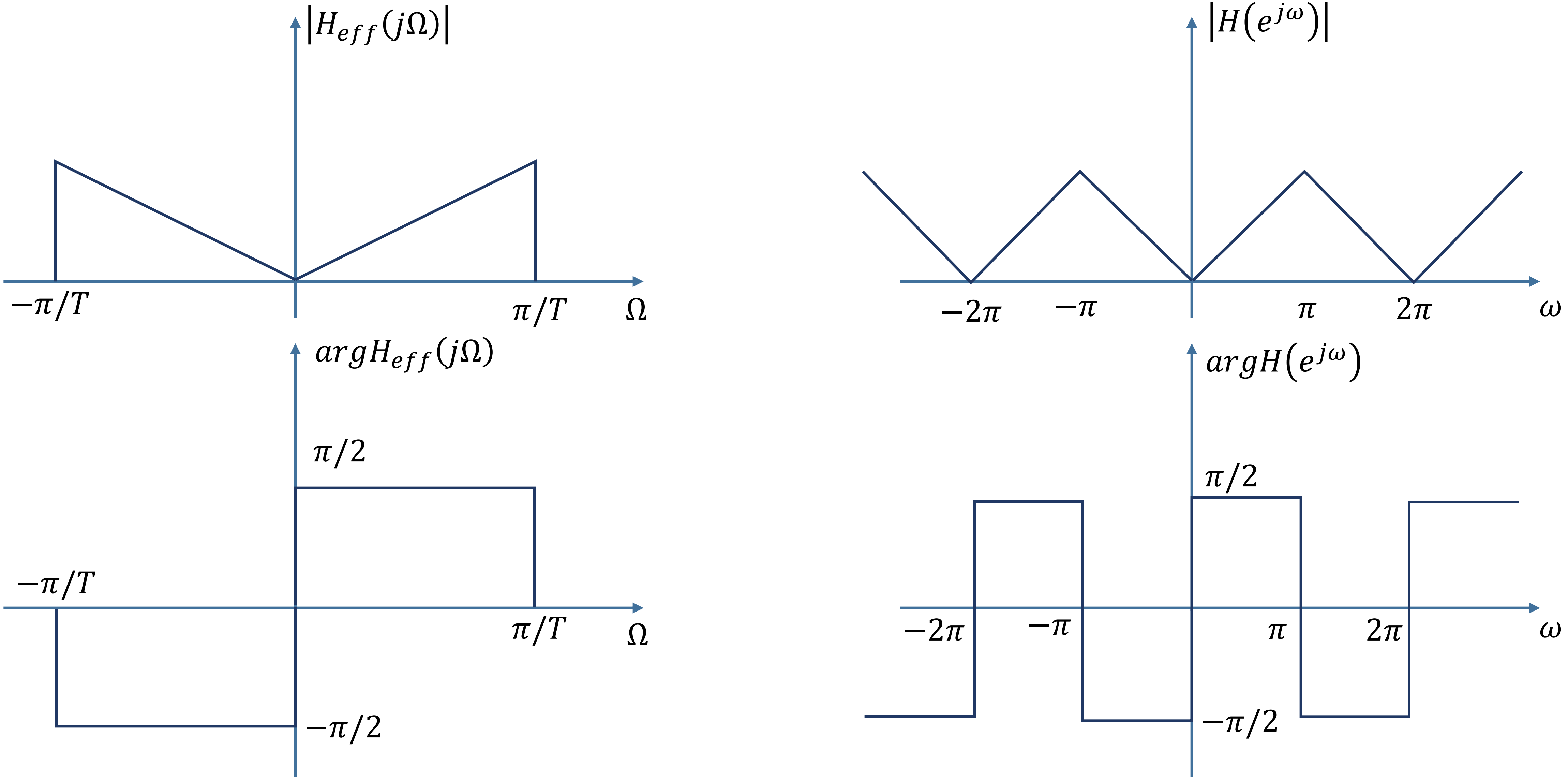
Frekventni odziv diskretnog sistema odrediti ćemo na osnovu poznate relacije između $H_{eff}(j\Omega)$ i $H(e^{j\omega})$.

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \text{ za } |\omega| < \pi}$$

Frekventni odziv je periodičan sa periodom 2π!

Primjenom inverzne Fourierove transformacije ćemo odrediti odgovarajući impulsni odziv.

Primjer: Diskretna implementacija idealnog kontinualnog diferencijatora



Primjer: Diskretna implementacija idealnog kontinualnog diferencijatora

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{j\omega}{T}e^{j\omega n}d\omega$$

$$S: j\omega n = u \to jn \cdot d\omega = du \to d\omega = \frac{du}{jn}$$

$$(u-1)e^u$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-j\pi n}^{j\pi n} \frac{u}{nT}e^u \frac{1}{jn}du = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{nT}\frac{1}{jn}\boxed{\int_{-j\pi n}^{j\pi n} ue^u du}$$

$$= \frac{1}{j2\pi T}\frac{1}{n^2}(j\omega n - 1)e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{j2\pi T}\frac{1}{n^2}\left[(j\pi n - 1)e^{j\pi n} - (-j\pi n - 1)e^{-j\pi n}\right]$$

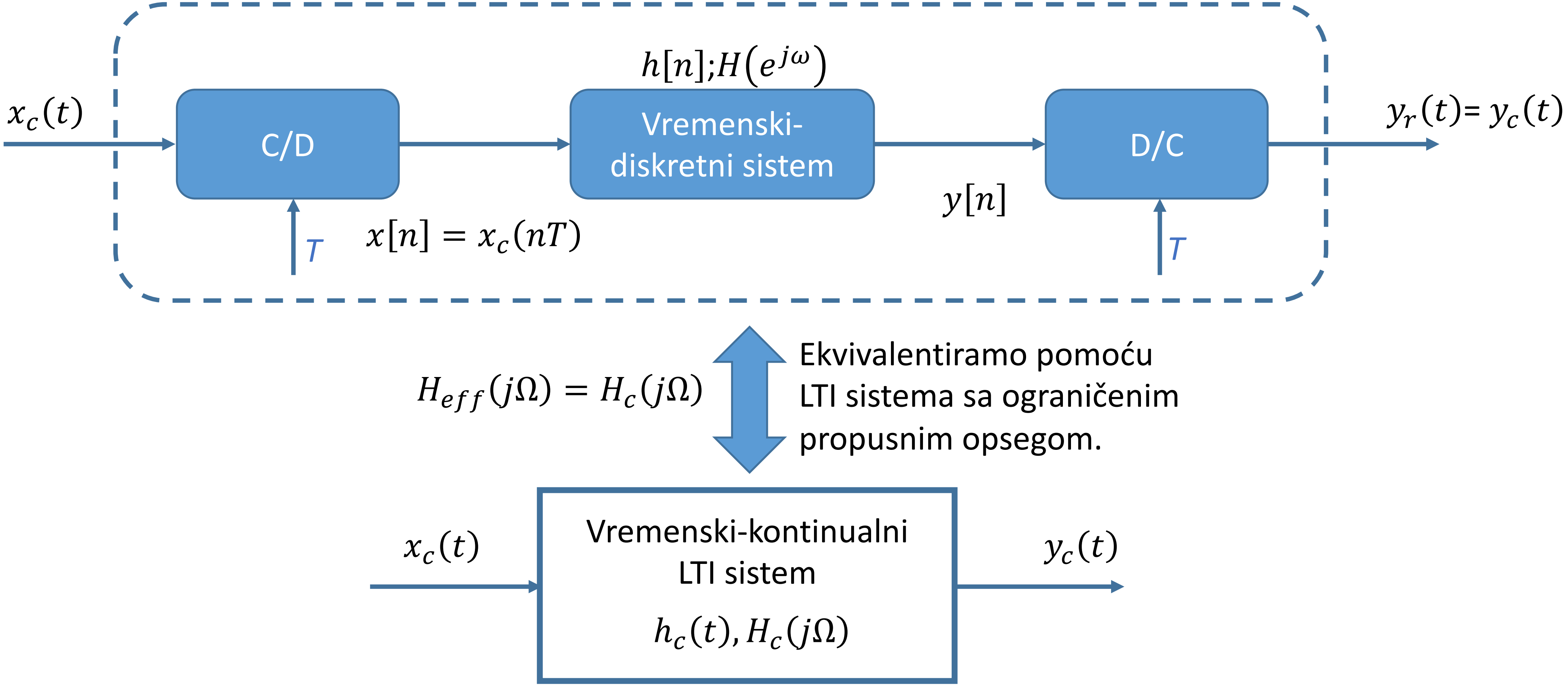
$$= \frac{1}{j2\pi T}\frac{1}{n^2}[(j\pi n - 1)(\cos\pi n + j\sin\pi n) + (j\pi n + 1)(\cos\pi n - j\sin\pi n)]$$

$$= \frac{1}{j2\pi T}\frac{1}{n^2}(2j\pi n \cdot \cos\pi n - 2j \cdot \sin\pi n) = \frac{1}{\pi T}\frac{1}{n^2}(\pi n \cdot \cos\pi n - \sin\pi n), -\infty < n < \infty$$

$$h[n] = 0 \; za \; n = 0$$

$$h[n] = \frac{\cos\pi n}{nT} \; za \; n \neq 0$$

Impulsna invarijantnost



Ekvivalentiramo pomoću LTI sistema sa ograničenim propusnim opsegom.

Impulsna invarijantnost

Pretpostavimo da je $H_c(j\Omega)$ ograničeno. Biramo $H\left(e^{j\omega}\right)$ tako da je $H_{eff}(j\Omega) = H_c(j\Omega)$.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_c(j\omega/T), za\ |\omega| < \pi$$

$$Biramo\ T\ tako\ da\ vrijedi\ \rightarrow H_c(j\Omega) = 0\ za\ |\Omega| \geq \pi/T$$

Pod navedenim ograničenjima, koje postavljaju ove jednačine, može se izvesti relacija koja povezuje vremenski-kontinualni sa vremenski-diskretnim sistemom:

(*) $$h[n] = T \cdot h_c(nT)$$

- Impulsni odziv vremenski-diskretnog sistema je skalirana, uzorkovana verzija $h_c(t)$.
- Kada su $h[n]$ i $h_c(t)$ povezani jednačinom (*), za diskretni sistem kažemo da je **IMPULSNO-INVARIJANTNA VERZIJA** kontinualnog sistema.

Impulsna invarijantnost

Očigledno vrijedi: $h[n] = h_c(nT)$

$$\Big\downarrow \text{FT}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

Poznato nam je: $$H_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT) e^{-j\Omega T n}$$

$$H_s(j\Omega) = H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = H(e^{j\Omega T})$$

Zaključimo:

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| \leq \pi$$

$Uz\ ograničenje$:

$H_c(j\Omega) = 0\ za\ |\Omega| \geq \pi/T$

Impulsna invarijantnost

Očigledno vrijedi: $h[n] = h_c(nT) \longrightarrow \boxed{h[n] = T \cdot h_c(nT)}$

FT

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

Poznato nam je: $$H_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_c(nT) e^{-j\Omega T n}$$

$$H_s(j\Omega) = H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = H(e^{j\Omega T})$$

Zaključimo: $$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| \le \pi$$

$Uz\ ograničenje$:
$H_c(j\Omega) = 0\ za\ |\Omega| \ge \pi/T$

U početnoj jednačini, uzmemo u obzir faktor skaliranja T:

Primjer: Diskretni NF filter

Pretpostavimo da želimo dobiti idealni diskretni NF filter sa graničnom frekvencijom $\omega_c < \pi$. To možemo postići primjenom impulsne invarijatnosti na vremenski-kontinualni idelni NF filter sa graničnom frekvencijom $\Omega_c = \omega_c / T < \pi / T$.

Frekventni odziv idealnog vremenski-kontinualnog NF filtera.

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < \Omega_c \\ 0, |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

Impulsni odziv idealnog vremenski-kontinualnog NF filtera.

$$h_c(t) = \frac{sin(\Omega_c t)}{\pi t}$$

Odredićemo impulsni odziv vremenski-diskretnog sistema primjenom impulsne invarijantnosti:

$$h[n] = T \cdot h_c(nT) = T \cdot \frac{sin(\Omega_c nT)}{\pi nT} = \frac{sin(\omega_c n)}{\pi n}, \text{pri čemu je } \omega_c = \Omega_c \cdot T$$

$$\Big\downarrow \text{FT}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_c \\ 0, \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow H_c(j\omega/T)$$

Primjer: Diskretni NF filter – impulsni odziv

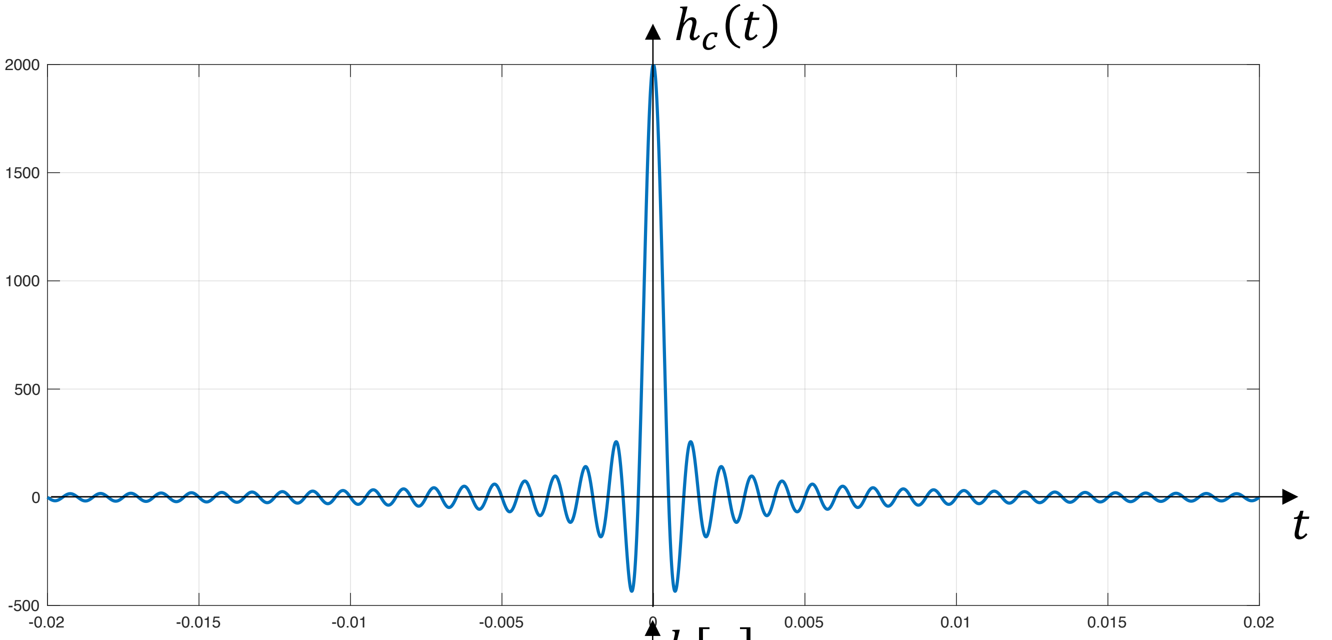
$f_c = 1\ kHz \ \rightarrow \Omega_c = 2000\pi$

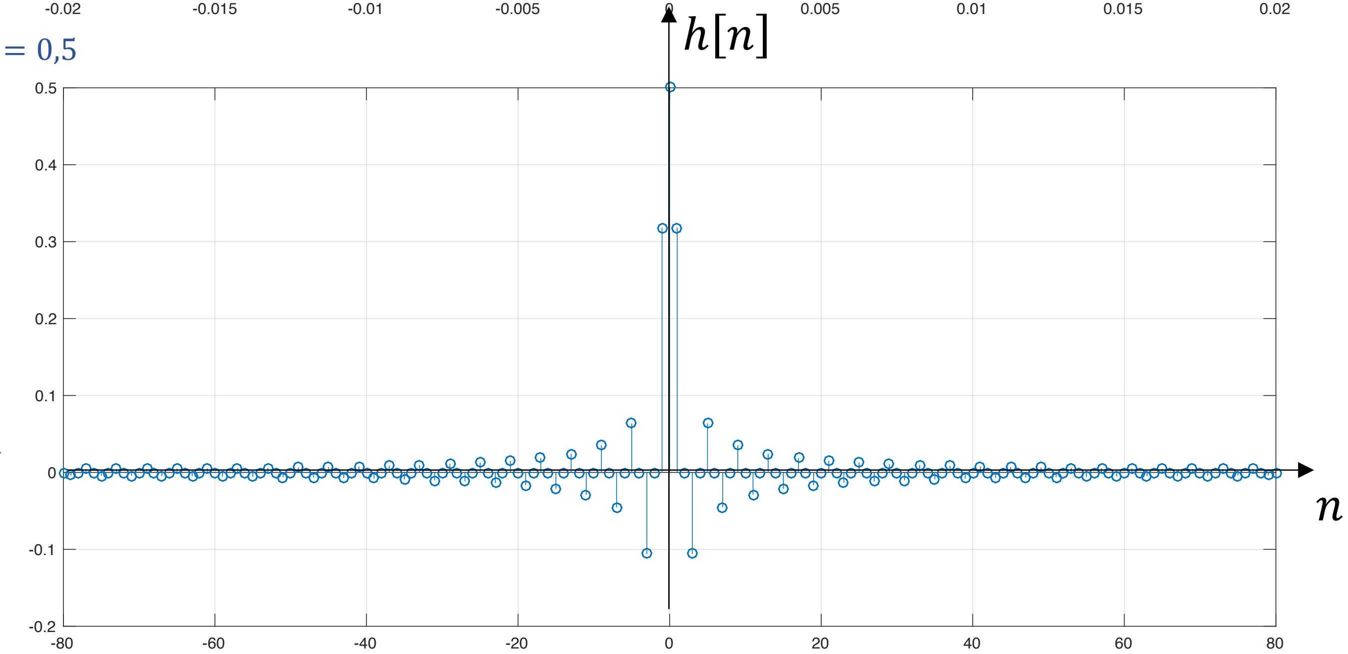
$f_s = 4\ kHz \ \rightarrow T = 0{,}00025$

$\omega_c = \Omega_c \cdot T = \pi/2$

$$h[n] = T \cdot h_c(nT)$$

$2000 * 0{,}00025 = 0{,}5$





Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.