Auditorne vježbe 3

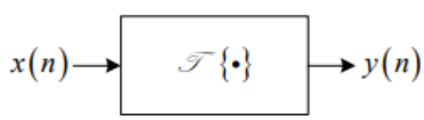
Osobine diskretnih sistema

Sistem opisujemo kao proces kojim se vrši transformacija signala. Signal koji se transformiše nazivamo ulaznim signalom ili pobudom sistema, dok rezultat transformacije označavamo kao izlazni signal, ili odziv sistema. Dakle, *diskretni sistem* definišemo kao proces čiji rezultat je transformacija diskretnog ulaznog signala u diskretni izlazni signal, simbolički zapisana sa:

$$y(n)=\mathscr{T}\left\{x(n)\right\},$$

ili:

$$x(n)\rightarrow y(n),$$



Blok dijagram diskretnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom.

Razumijevanje osnovnih osobina diskretnih sistema olakšava analizu sistema i obradu signala. Sistemi mogu biti sa i bez memorije, kauzalni i nekauzalni, stabilni i nestabilni, invertibilni ili ne, itd. Od naročitog su značaja linearnost i vremenska invarijantnost, te se posebno izdvaja klasa sistema sa ovim osobinama.

3.1 Linearnost

Kažemo da je diskretni sistem *linearan* ako ispunjava princip *homogenosti* i princip *aditivnosti*. Princip homogenosti je ispunjen ako vrijedi da je:

$$x(n) \rightarrow y(n) \Rightarrow ax(n) \rightarrow ay(n), \ \forall a \in \mathbb{C},$$

dok je principu aditivnosti ispunjen ako vrijedi sljedeće:

$$x_1(n) \rightarrow y_1(n) \wedge x_2(n) \rightarrow y_2(n) \Rightarrow x_1(n) + x_2(n) \rightarrow y_1(n) + y_2(n).$$

Kod linearnih sistema odziv na težinsku suma signala je jednak na isti način formiranoj težinskoj sumi pojedinačnih odziva na svaki od tih signala:

$$\begin{aligned} & x_1(n) \rightarrow y_1(n) \wedge x_2(n) \rightarrow y_2(n) \Rightarrow \\ & ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n), \ \forall a,b \in \mathbb{C} \end{aligned}.$$

3.2 Vremenska invarijantnost

Ako pomak ulaznog signala u domenu diskretnog vremena uzrokuje samo vremenski pomak izlaznog signala za isti iznos vremenskih intervala, pri čemu vrijednosti elemenata signala ostaju nepromijenjene, kažemo da je sistem *vremenski invarijantan*. Pri tome pod izlaznim signalom podrazumijevamo odziv pri nultim početnim uslovima. Kod vremenski invarijantnih sistema oblik izlaznog signala ne zavisi od trenutka u kome se dovodi pobudni signal. Osobinu vremenske invarijantnosti diskretnih sistema zapisujemo na sljedeći način:

$$x(n) \rightarrow y(n) \Rightarrow x(n-n_0) \rightarrow y(n-n_0).$$

3.3 Sistemi sa i bez memorije

Sistem bez memorije je onaj sistem kod koga izlazni signal u nekom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaznog signala u tom trenutku. Najjednostavniji primjer diskretnog sistema bez memorije je sistem koji prenosi signal bez promjena, opisan relacijom:

$$y(n) = x(n).$$

Kod *sistema sa memorijom* izlazni signal ne zavisi samo od trenutne, već i od prethodnih vrijednosti ulaznog i/ili izlaznog signala. Na primjer, izlani signal sistema sa memorijom:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k),$$

je jednak zbiru svih prethodnih vrijednosti ulaznog signala.

3.4 Kauzalnost

Sistem je *kauzalan* ako izlaz u bilo kom trenutku zavisi samo od vrijednosti ulaza u tekućem i prethodnim trenucima, što znači da kod kauzalnih sistema signal odziva ne postoji prije dovođenja pobudnog signala na ulaz sistema. Na primjer, sistem opisan sa

$$y(n) = x(n) - x(n - n_0), \;\; n_0 > 0$$

je kauzalan, dok sistem:

$$y(n) = x(n) - x(n + n_0), \;\; n_0 > 0.$$

nije kauzalan. Napomenimo da su svi sistemi bez memorije kauzalni.

3.5 Stabilnost

Sistem je *stabilan* ako mala promjena ulaza ne generiše izlaz koji divergira. To znači da odziv na ograničenu pobudu mora biti ograničen. U suprotnom, sistem je nestbilan.

Zadatak 3.1

Provjeriti da li su sljedeći sistemi: linearni, vremenski invarijantni, kauzalni, sa/bez memorije i stabilni.

a) y[n]=sign[x[n]]

b) $y[n] = \sum_{k=-n+1}^{\infty} x[1-k]$

c) $y[n] = 2^{-|x[n-2]|}$

d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

e) $y[n] = \alpha x[n] + \beta$

f) $y[n] = \alpha(x[n] - x[n-1])$

Zadatak 3.2

Za date impulsne odzive LTI sistema, odrediti da li je sistem kauzalan ili ne:

a) $h[n] = (1/2)^n u[n]$

b) $h[n] = (1/2)^n u[n-1]$

c) $h[n] = (1/2)^{|n|}$

d) $h[n] = u[n+2] - u[n-2]$

e) $h[n] = (1/3)^n u[n] + 3^n u[-n-1]$

Zadatak 3.3

Za date impulsne odzive LTI sistema, provjeriti stabilnost sistema.

a) $h[n] = 4^n u[n], akonimabeskonačnuvrijednost$

b) $h[n] = u[n] - u[n-10]$

c) $h[n] = 3^n u[-n-1], akonimabeskonačnuvrijednost$

d) $h[n] = 2u[n+5] - u[n] - u[n-5]$