UVOD U DISKRETNE SIGNALE I SISTEME

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE UNIVERZITETA U TUZLI

Opis kursa

- Prof. dr. Nermin Suljanović
- 3+1+1
- Završni ispit: 40b
- Predispitne aktivnosti: 60b
  - 2 testa: 40b
  - 2 projekta: 20b (Python)

Preporučena literatura za kurs

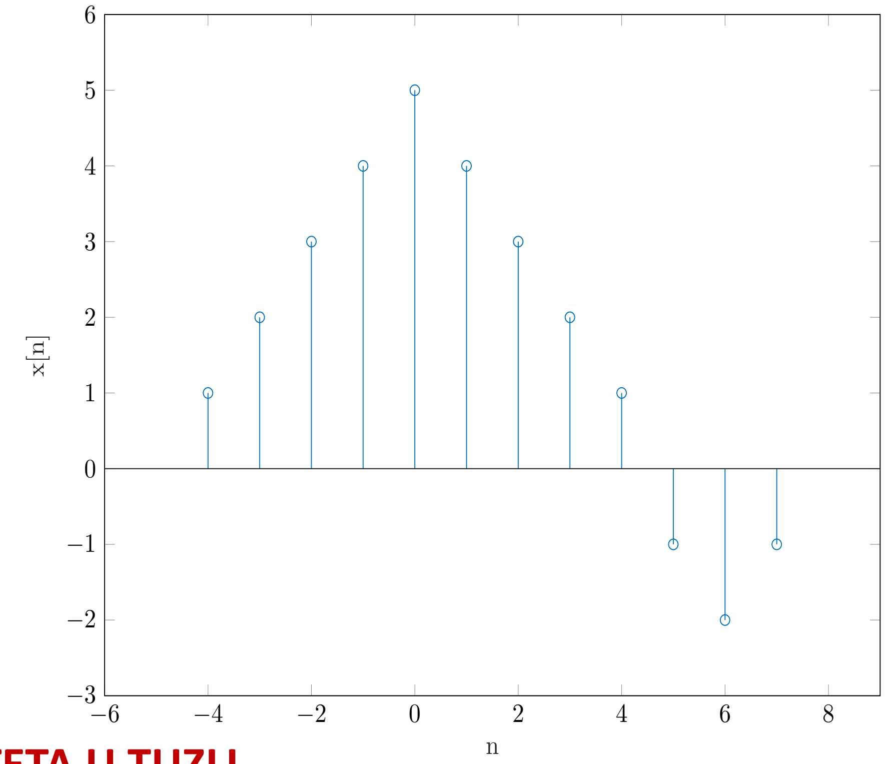
- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.

Definicija signala

- Općenito nose informaciju o stanju ili ponašanju nekog sistema.
- Fizički se mogu biti predstaviti preko napona, struja i elektromagnetnih polja.
- Matematički se opisuju funkcijama jedne ili više promjenljivih.
- Obično je argument funkcije vrijeme, koje može biti kontinualno i diskretno.
- **Vremenski-diskretni signali**: definirani samo u diskretnim trenucima vremena.

Vremenski-diskretni signali

- Predstavljaju se kao sekvence brojeva: $x[n] = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty$
- Obično su rezultat uzorkovanja analognog signala: $x[n] = x(nT), \quad -\infty < n < \infty$



Vremenski-diskretni signali

- Proizvod i suma dvije sekvence x[n] i y[n] se definiraju kao proizvod i suma uzorak po uzorak.
- Množenje sekvence x[n] sa skalarom α se definira kao množenje svakog uzorka skalarom α.
- Kašnjenje: $y[n] = x[n - n_0]$

Osnovni signali

- Jedinični impuls
- Jedinična odskočna sekvenca
- Kompleksna eksponencijalna sekvenca
- Sinusna sekvenca

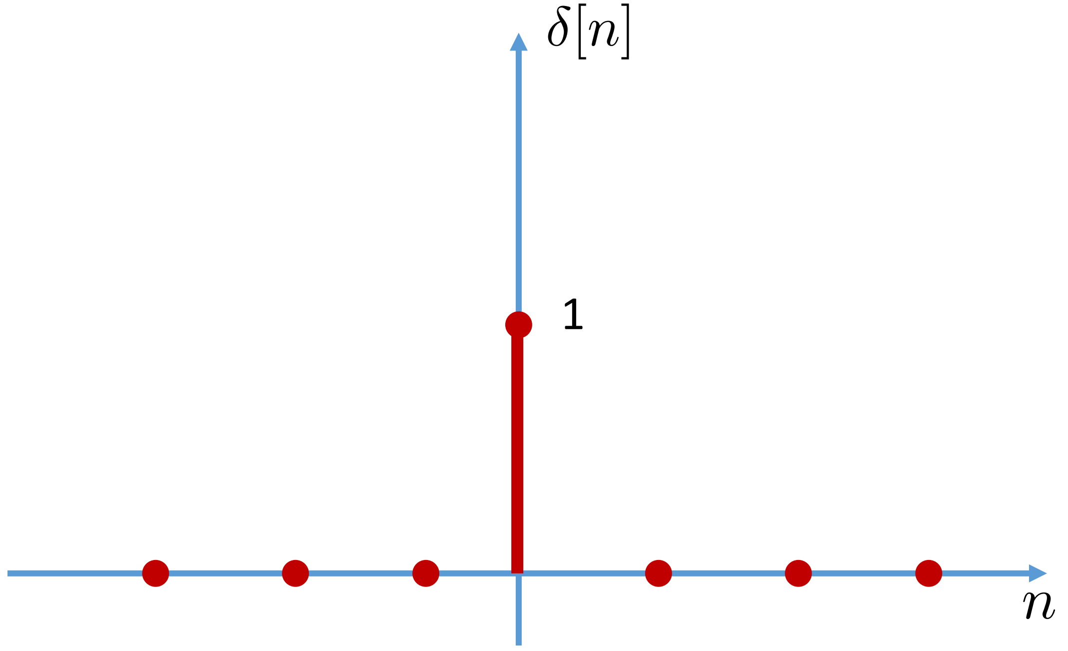
Jedinični impuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Primjer predstavljanja proizvoljne sekvence

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$



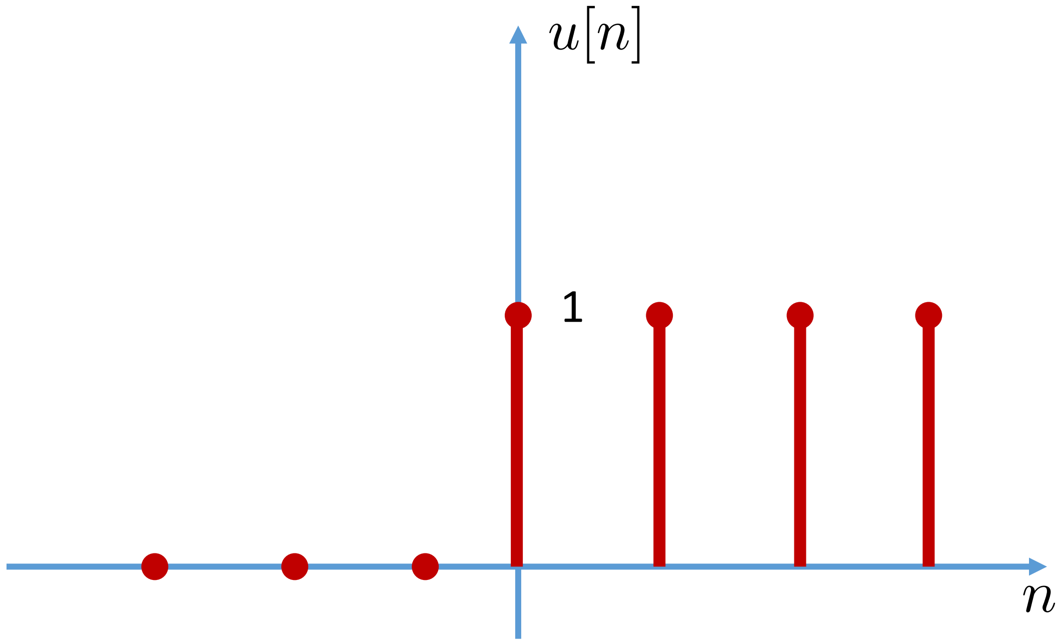
Jedinična odskočna sekvenca

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\delta[n-k]$$

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



Kompleksna eksponencijalna/sinusna sekvenca

$$\boxed{x[n] = A\alpha^n}$$

$$\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}, \quad A = |A|e^{j\phi}$$

Sinusna sekvenca

$$x[n] = A\ cos(\omega_0 n + \phi), \forall n$$

$$x[n] = A\alpha^n = |A||\alpha|^n cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n sin(\omega_0 n + \phi)$$

Periodičnost

$$x[n] = x[n+N], \quad \forall n$$

$$Acos(\omega_0 n + \phi) = Acos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$

$$\omega_0 N = 2\pi k$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Periodičnost sinusne sekvence

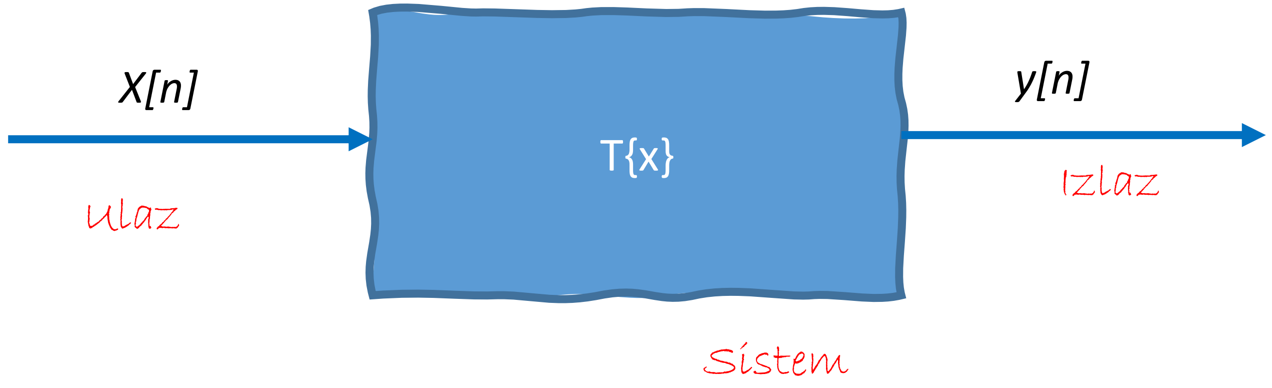
- Kompleksne eksponencijalne i sinusne sekvence nisu nužno periodične sa n sa periodom $2\pi/\omega_0$ i zavisno od perioda ω_0 nužno ne moraju biti periodične.
- S obzirom da frekvencije ω_0 i $\omega_0 + 2\pi k$ ne možemo razlikovati, jasno je da postoji N različitih frekvencija za koje su odgovarajuće sekvence periodične sa periodom N.
- Ova svojstva su osnova za teoriju i dizajn računarskih algoritama diskretne Fourierove analize.

Zaključak o periodičnosti

- Kada se kod vremenski-kontinualnog signala $x(t) = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ povećava ω_0 signal $x(t)$ osciluje sve brže i brže.
- Za diskretni sinusni signal $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$ sa povećanjem ω_0 od 0 do π brzina oscilacija se povećava. Sa daljim povećavanjem ω_0 od π do 2π oscilacije postaju sporije.
- Zbog toga se frekvencije ω_0 u okolini $2\pi k$ označavaju kao niske frekvencije, a u okolini $\pi + 2\pi k$ kao visoke frekvencije.

Vremenski diskretni sistemi

- Matematički opis je transformacija ili operator T{x} koji preslikava ulaznu sekvencu *x[n]* u izlaznu sekvencu *y[n]*.



Primjeri

Idealan sistem sa kašnjenjem $y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty$

Klizno usrednjavanje
$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$
$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \ \dots \ + x[n] + x[n-1] + \ \dots \ + x[n - M_2]\}$$

Računa n-ti uzorak izlazne sekvence kao srednju vrijednost od $(M_1 + M_2 + 1)$ uzoraka ulazne sekvence oko n-tog uzorka.

Sistemi bez memorije

- Izlaz u nekom diskretnom trenutku zavisi samo od ulaza u tom trenutku.

$$\boxed{y[n] = (x[n])^2, \quad \forall n}$$

Linearni sistemi

Aditivnost

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

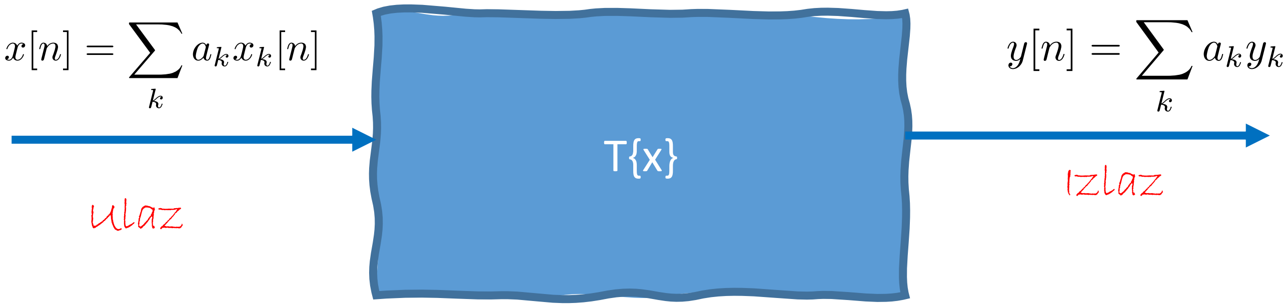
$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$ Homogenost

- Vrijedi princip superpozicije.

$$\boxed{T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]}$$

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n]$$

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$



Linearan sistem

Akumulator kao primjer linearnog sistema

- Izlaz u trenutku *n* predstavlja sumu tekućeg i svih prethodnih ulaznih uzoraka.

Pretpostavka

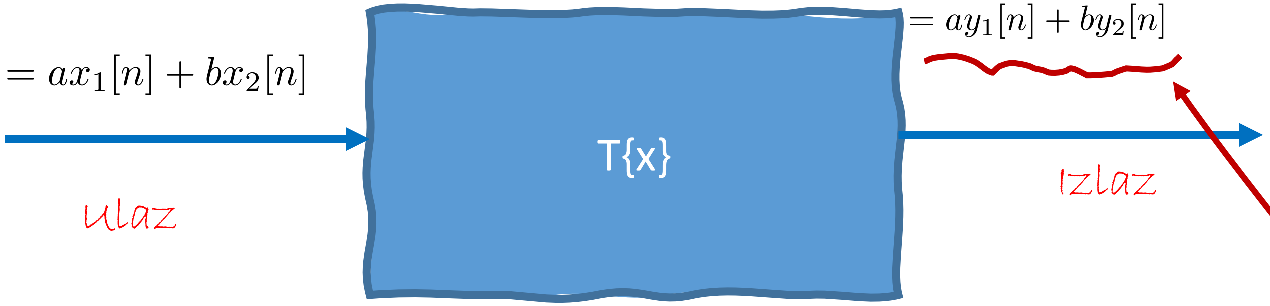
$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$$

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) = a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$$

$$= ay_1[n] + by_2[n]$$



akumulator

Linearan sistem!

Vremenski invarijatni sistemi

- Vremenski pomak ulazne sekvence uzrokuje jednak pomak u izlaznoj sekvenci.
- Kada je sistem vremenski invarijantan, za svako n_0 vrijedi da ulazna sekvenca $x_1[n] = x[n - n_0]$ stvara izlaznu sekvencu $y_1[n] = y[n - n_0]$.

Akumulator je vremenski invarijantan sistem

$$x_1[n] = x[n-n_0] \qquad y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] \Rightarrow y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] = y[n-n_0]$$

Smjena: $k_1 = k - n_0$

$$\boxed{y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]}$$

Kompresor je vremenski varijantan sistem

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty$$

M je pozitivan cijeli broj.

$$x_1[n] = x[n - n_0] \quad \Rightarrow$$

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0]$$

$$y[n - n_0] = y[n - n_0] = x[M(n - n_0)]$$

$$\Downarrow$$

$$y[n - n_0] \neq y_1[n]$$

Kauzalnost

- Sistem je kauzalan ako, za proizvoljno n_0, vrijednost izlazne sekvence za $n = n_0$ zavisi samo od vrijednosti ulaza za $n \leq n_0$.

Akauzalan sistem $y[n] = x[n+1] - x[n]$

Stabilnost

- Sistem je stabilan u smislu BIBO (*bounded input/bounded output*) ako i samo ako ulazna sekvenca koja je ograničena po amplitudi stvara ograničen odziv (po amplitudi).

Ulaz $x[n]$ je ograničen ako postoji pozitivan konačan broj B_x tako da je

$$|x[n]| \leq B_x, < \infty, \forall n$$

Stabilnost zahtjeva da za svaki ograničen ulaz postoji i konačan broj B_y tako da je

$$|y[n]| \leq B_y, < \infty, \forall n$$

Za vježbu, ispitajte stabilnost akumulatora!

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.