Z-transformacija

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Uvod

- Motivacija za uvodjenje ove transformacije je da Fourierova transformacija nije primjenljiva za sve sekvence (ne konvergira) i korisno je imati generalizaciju Fourierove transformacije koja pokriva širu klasu signala.
- Fourierova transformacija:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- z-transformacija:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

z-transformacija

- Kontinualna funkcija kompleksne promjenljive z.
- Definirana kao stepeni red.
- Uvodimo operator $Z\{\cdot\} \Rightarrow Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$
- Vezu između sekvence i njene z-transformacije označavamo sa:

$$x[n] \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(z)$$

- Bilateralno transformaciji je alternativa unilateralna transformacija:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Veza sa Fourierovom transformacijom

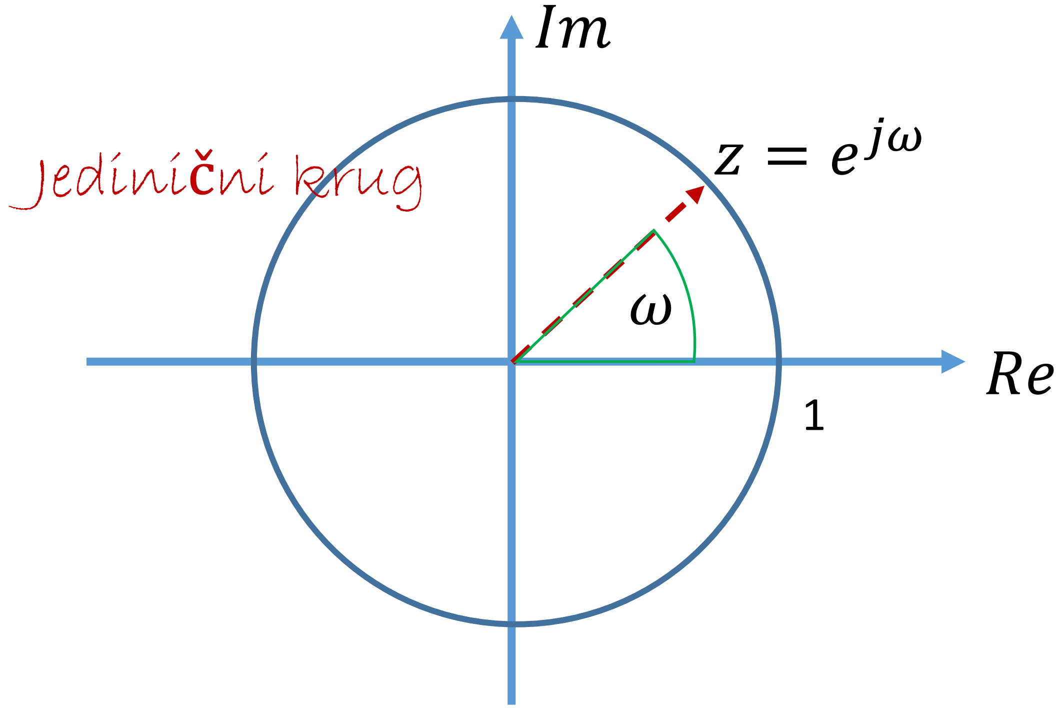
- Postoji bliska veza: kompleksnu promjenljivu *z* zamijenimo sa $e^{j\omega}$.
- Vrijedi $z = r \cdot e^{j\omega}$. Ako se ovo zamijeni u jednačinu za z-transformaciju:

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}$$

- Prethodnu jednačinu možemo interpretirati kao Fourierovu transformaciju proizvoda izvorne sekvence *x[n]* i eksponencijalne sekvence r^{-n}.
- Za r=1, dobijamo Fourierovu transformaciju.

Prikaz i interpretacija z-transformacije

- Pogodno prikazivati u kompleksnoj ravni.
- U z-ravni, $|z| = 1$ odgovara jediničnom krugu.
- z-tranformacija određena na jediničnom krugu odgovara Fourierovoj transformaciji.



Tačke na jediničnom krugu

- Ako određujemo X(z) na jediničnom krugu, u tačkama od $z = 1$ $(\omega = 0)$, zatim $z = j$ $(\omega = \pi/2)$ do $z = -1$ $(\omega = \pi)$, izračunali smo Fourierovu transformaciju za $0 \leq \omega \leq \pi$.
- Za preostale tačke na jediničnom krugu odgovaraju Fourierovoj transformaciji za $\pi \leq \omega \leq 2\pi$.
- Ovakva reprezentacija Fourierove transformacije dovodi do izražaja njenu periodičnost.

Konvergencija z-transformacije

- z-transformacija ne konvergira za sve sekvence x[n] ili za sve vrijednosti *z*.
- Za datu sekvencu *x[n]* skup vrijednosti *z* za koju z-transformacija konvergira nazivamo oblast konvergencije (*Region of Convergence* - ROC).
- Znamo da je potrebno za konvergenciju Fourierove transformacije da je sekvenca *x[n]* apsolutno sumabilna. To primijenimo na z-transformaciju:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

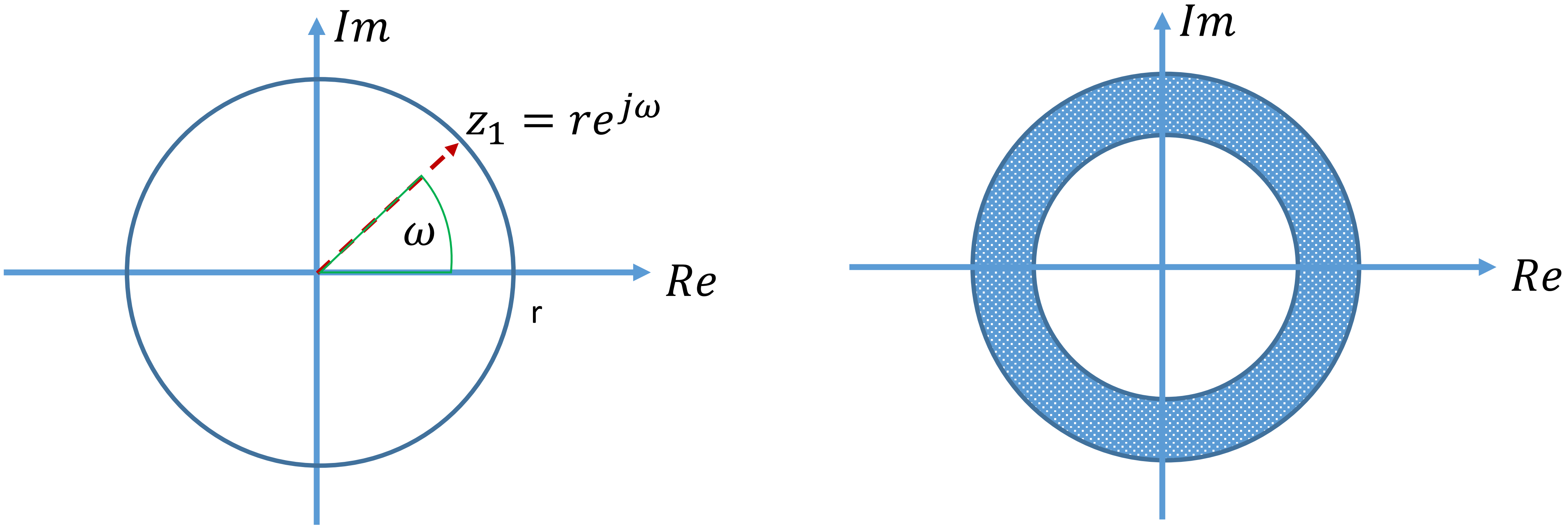
Konvergencija z-transformacije

- Zbog člana r^{-n} moguće je da z-transformacija konvergira i kada to nije slučaj sa Fourierovom transformacijom.
- Primjer je sekvenca *x[n] = u[n]* koja nije apsolutno sumabilna i prema tome Fourierova transformacija ne konvergira apsolutno. Međutim sekvenca $r^{-n}u[n]$ je apsolutno sumabilna za *r > 1*. To znači da z-transformacija *u[n]* postoji za |z| > 1 (oblast konvergencije).
- Konvergencija reda zavisi samo od */z/* pošto je */z/* konačno kada je:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|\,|z^{-n}| < \infty$$

Oblast konvergencije (ROC)

- Ako je neka tačka $z = z_1$ unutar ROC-a, tada su sve tačke $|z|$ koje leže na krugu $|z| = |z_1|$ takođe u ROC.
- Posljedica je da je ROC prsten u z-ravni sa centrom u koordinatnom početku.



Konvergencija z-transformacije

- Loranov red i prema tome to je analitička funkcija u svakoj tački unutar ROC-a.
- z-transformacija i svi njeni izvodi moraju biti kontinualne funkcije od z unutar oblasti konvergencije.
- Na primjer, niti jedna od donje dvije sekvence nije apsolutno sumabilna.

$$x_1[n] = \frac{sin\omega_0 n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty$$

$$x_2[n] = cos\omega_0 n, \qquad -\infty < n < \infty$$

- Nijedna od ovih sekvenci pomnožena sa r^{-n} nije apsolutno sumabilna za bilo koju vrijednost *r* i ove sekvence nemaju z-transformaciju koja apsolutno konvergira za neko *z*.
- Sekvence imaju konačnu energiju i Fourierova transformacija konvergira u smislu srednjih kvadrata nekoj periodičnoj funkciji sa prekidom.

Primjer: Desna eksponencijalna sekvenca

$$x[n] = a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

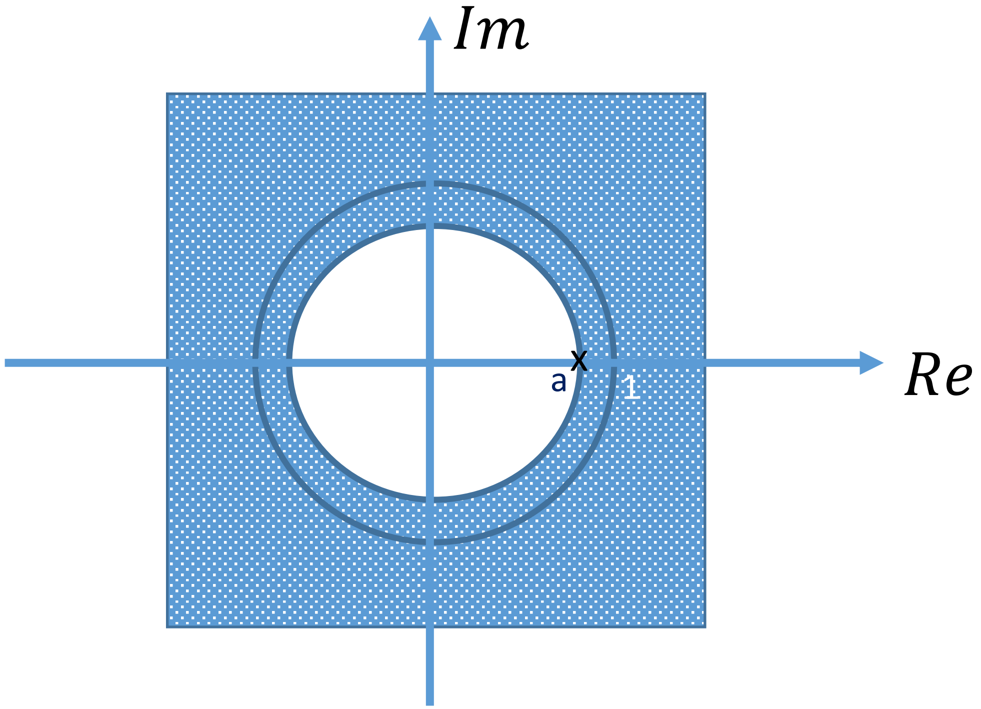
Uslov konvergencije: $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$

Ovo je stepeni red, tako da je konvergencija određena uslovom: $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > a$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}}$$

$ROC\colon |z| > a$

$$a = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad ROC\colon |z| > 1$$



Primjer: Lijeva eksponencijalna sekvenca

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \quad \overset{Z}{\leftrightarrow} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^n)u[-n-1]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$$

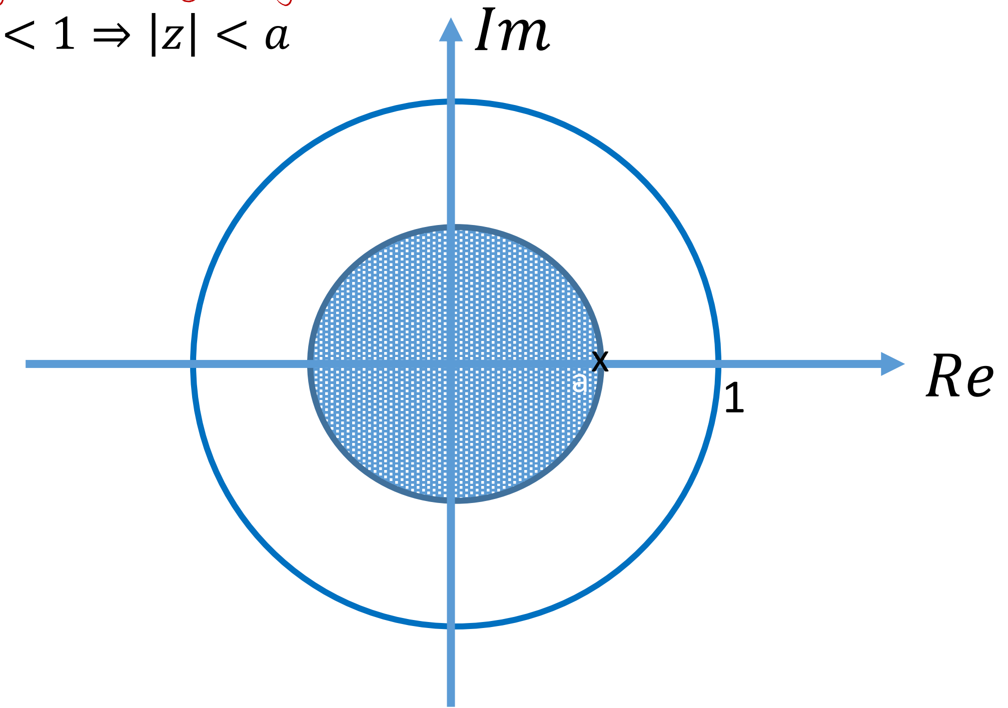
$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

Uslov konvergencije: $\sum_{n=0}^{\infty} |a^{-1}z|^n < \infty$

Ovo je stepeni red, tako da je konvergencija određena uslovom: $|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow |z| < a$

$$\boxed{X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = 1 - \frac{a}{a-z} = \frac{z}{z-a}}$$

$ROC: |z| < a$



$$a = 1 \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad ROC: |z| < 1$$

Primjer: Suma dvije eksponencijalne sekvence

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad \overset{z}{\leftrightarrow} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right] z^{-n}$$

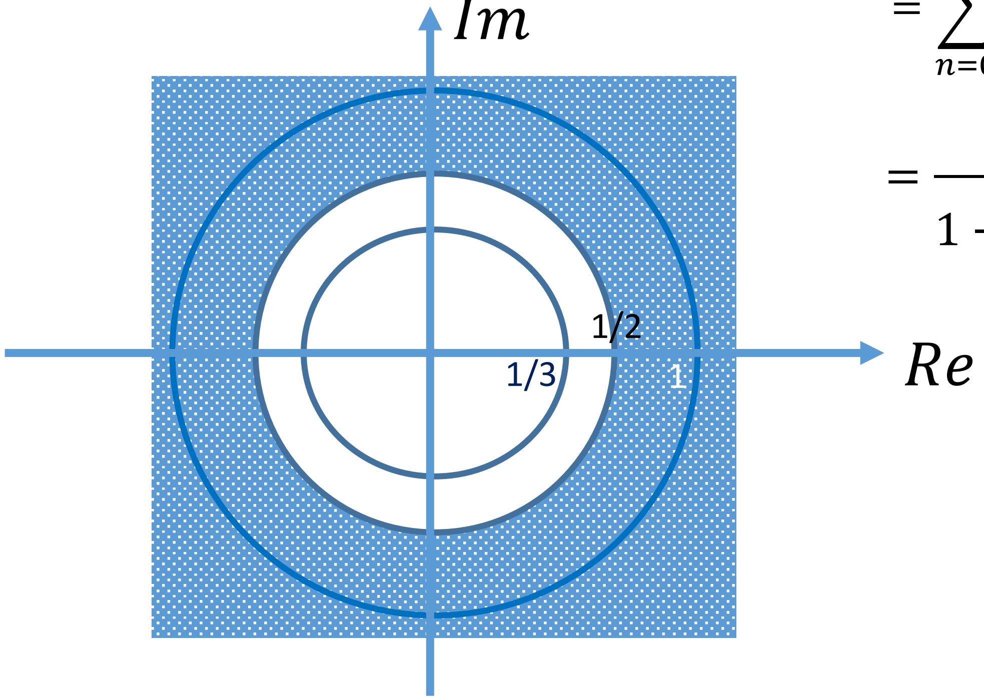
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{2z\left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

Oblast konvergencije:

$$|z| > \frac{1}{2} \; i |z| > \frac{1}{3}$$



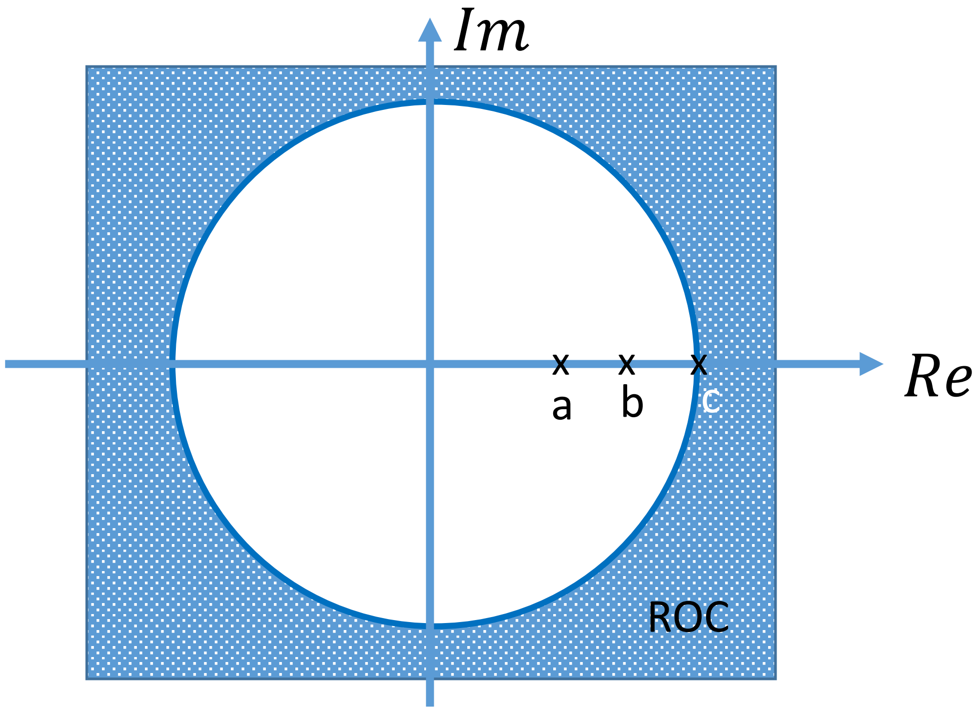
Osobine oblasti konvergencije

- Oblast konvergencije z-transformacije zavisi od prirode signala.
- Ako pretpostavimo da je algenraski izraz za z-transformaciju sekvence x[n] razlomak, osim za $n = \pm\infty$, tada vrijedi:
  - ROC je prsten u z-ravni sa centrom u koordinatnom početku.
    $$0 \leq r_R < |z| \leq r_L < \infty$$
  - Fourierova transformacija *x[n]* apsolutno konvergira ako i samo ako ROC z-transformacije sadrži jedinični krug.
  - ROC ne može sadržati polove.
  - Ako je *x[n]* sekvenca konačnog trajanja, tj. sekvenca koja je nula osim na intervalu $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2$, tada je oblast konvergencije cijela z-ravan, osim $z = 0$ i $z = \infty$.

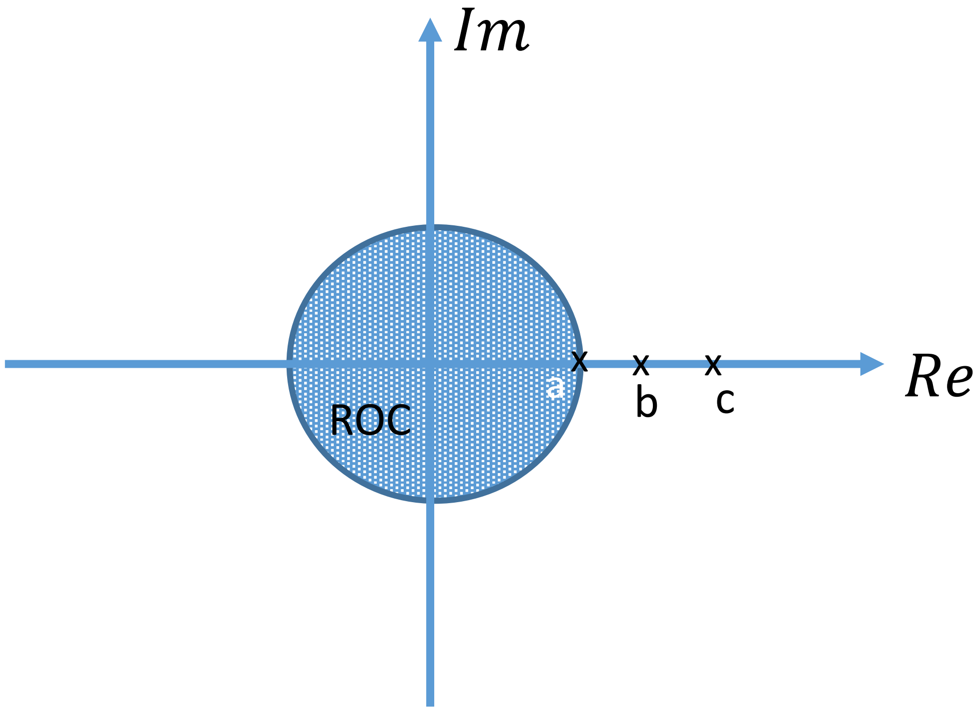
Osobine oblasti konvergencije

- Ako je *x[n]* desna sekvenca, tj. sekvenca koja je nula za $n < N_1 < \infty$, ROC se proteže prema vani od krajnjeg vanjskog (najveće amplitude) konačnog pola u X(z) prema beskonačno.
- Ako je *x[n]* lijeva sekvenca, tj. sekvenca koja je nula za $n > N_2 > \infty$, ROC se prostire unutra od krajnjeg unutrašnjeg pola (najmanje apsolutne vrijednosti) različitog od nule prema (a može ga i uključivati) koordinatnom početku *z=0*.
- Dvostrana sekvenca je sekvenca beskonačno dugog trajanja koja nije ni lijeva ni desna. Ako je *x[n]* dvostrana sekvenca, ROC će biti prsten u z-ravni, ograničen sa unutrašnjim i vanjskim polom i neće sadržavati polove.
- ROC mora biti povezana oblast.

Osobine oblasti konvergencije

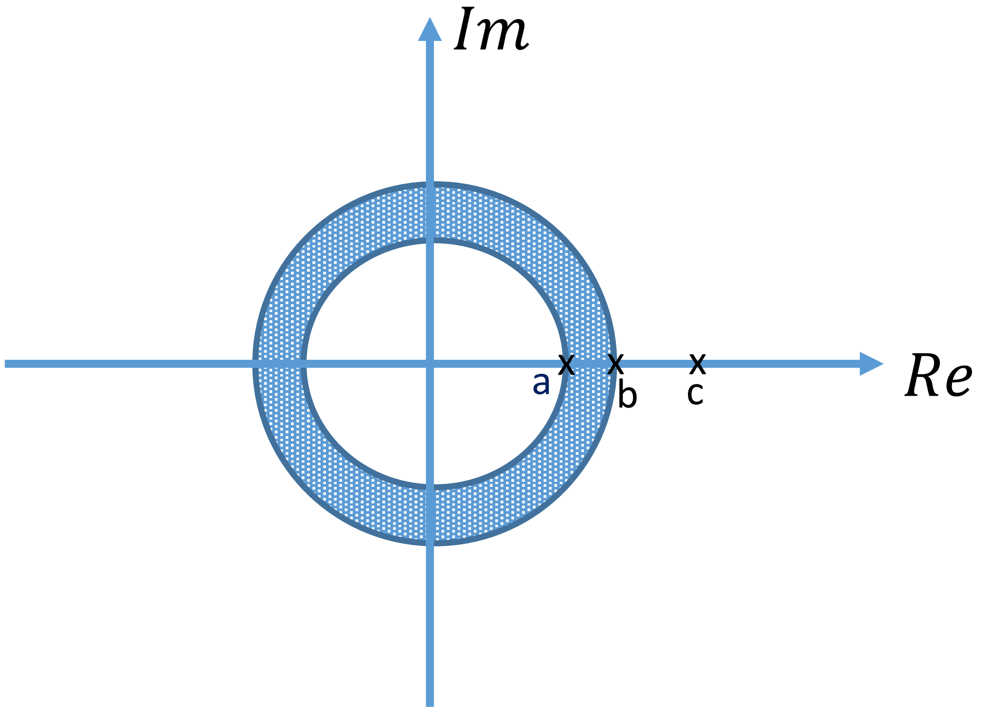


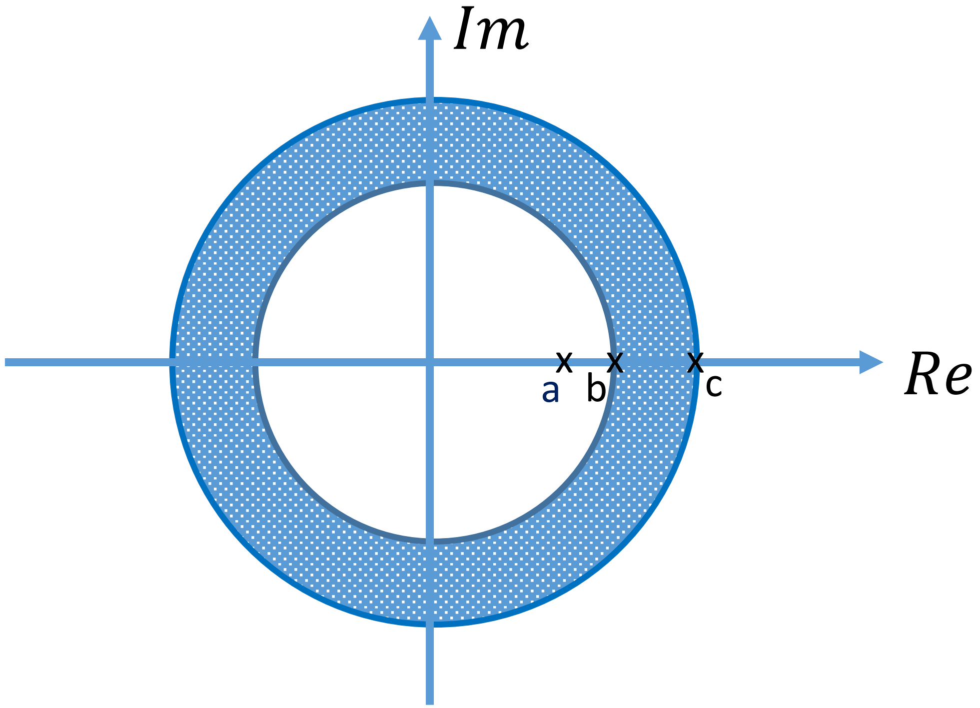
DESNA SEKVENCA



LIJEVA SEKVENCA

Osobine oblasti konvergencije

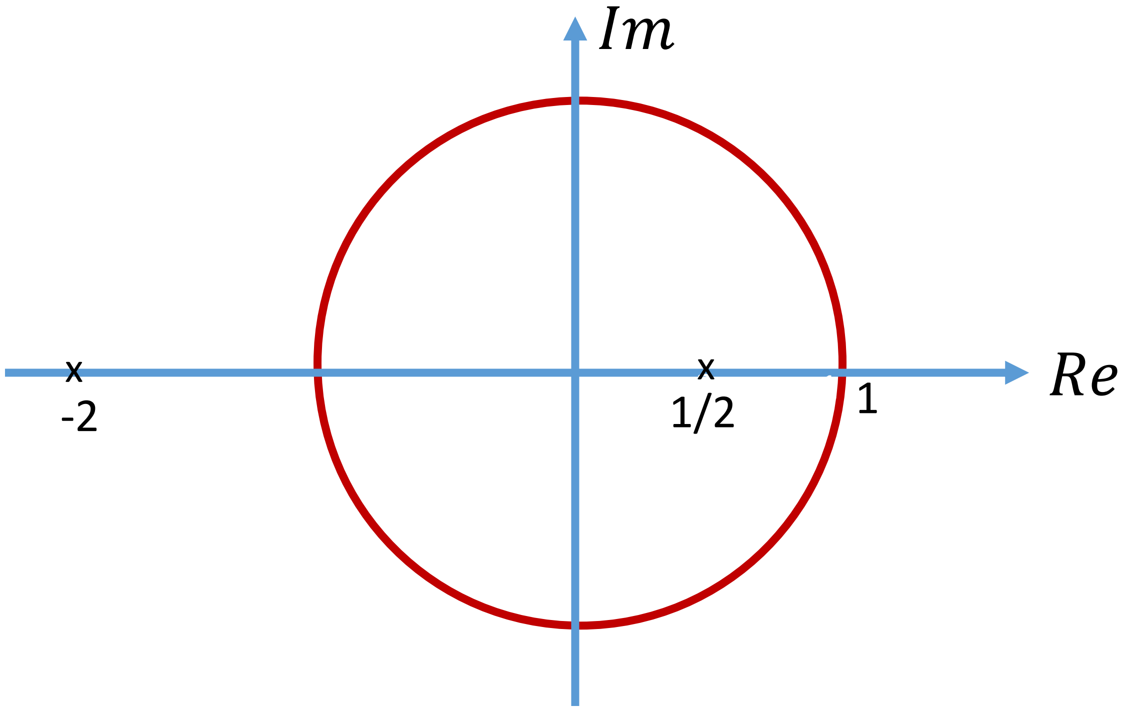




DVOSTRANA SEKVENCA

Stabilnost, kauzalnost i oblast konvergencije

- Posmatramo LTI system sa impulsnim odzivom *h[n]*, čija je z-transformacija *H(z)*, sa polovima kao na slici.



Stabilnost, kauzalnost i oblast konvergencije

- Tri moguće oblasti konvergencije, koje se mogu povezati sa 8 navedenih osobina.
- Ako je system stabilan, odnosno impulsni odziv je apsolutno sumabilan i ima Fourierovu transformaciju, tada ROC sadrži jedinični krug.
- Za navedeni sistem sa prethodnog slajda, uslov stabilnosti je da je ROC jednak $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Posljedica je da *h[n]* mora biti dvostrana sekvenca.
- Ako je system kauzalan, h[n] mora biti desna sekvenca i to znači da je oblast konvergencije $|z| > 2$. Tada system nije stabilan.
- **Očigledno je da navedeni system ne može biti istovremeno i stabilan i kauzalan.**

Inverzna z-transformacija

- Zasnovana je specijalnom slučaju Cauchy integralnog teorema.
- $\frac{1}{2\pi j}\oint_C \ z^{-l}dz = \begin{cases} 1, & l = 1 \\ 0, & l \neq 1 \end{cases}$
- gdje je C kontura koja obuhvata koordinatni početak a obilazi se u smjeru kazaljke na satu.
- *X(z)* pomnožimo sa z^{n-1} i izračunamo krivolinijski integral.

Inverzna z-transformacija

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m+n-1}dz =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-(m-n+1)}\, dz$$

=1 samo kada je m=n

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

$$= x[n]$$

Inverzna z-transformacija. Rastavljanje na parcijalne razlomke

- Za tipične vrste sekvenci i z-transformacije koje se susreću u analizi diskretnih LTI Sistema, dovoljne su i manje formalne procedure.
- Npr. Ako je X(z) izraženo kao polinom:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

- Očigledno je da postoji *N* polova i *M* nula različitih od nule.
- Postojaće i *M-N* polova u *z=0* ako je *M>N*, odnosno *N-M* nula u *z=0* kada je *N>M*.
- Ne postoje polovi i nule za $z = \infty$.

Razlaganje na parcijalne razlomke

- *X(z)* se izrazi u obliku: $X(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1-d_k z^{-1})}$
- Pri čemu c_k nule *X(z)* različite od nule, a d_k polovi *X(z)* različiti od nule.
- Ako je M<N i ako su svi polovi prvoga reda, X(z) se može zapisati kao:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

- Koeficijente A_k računamo kao:

$$A_k = (1-d_k z^{-1})X(z)\big|z = d_k$$

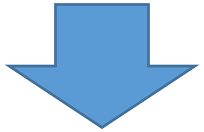
Tablica z-transformacije

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m>0$) or ∞ (if $m<0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

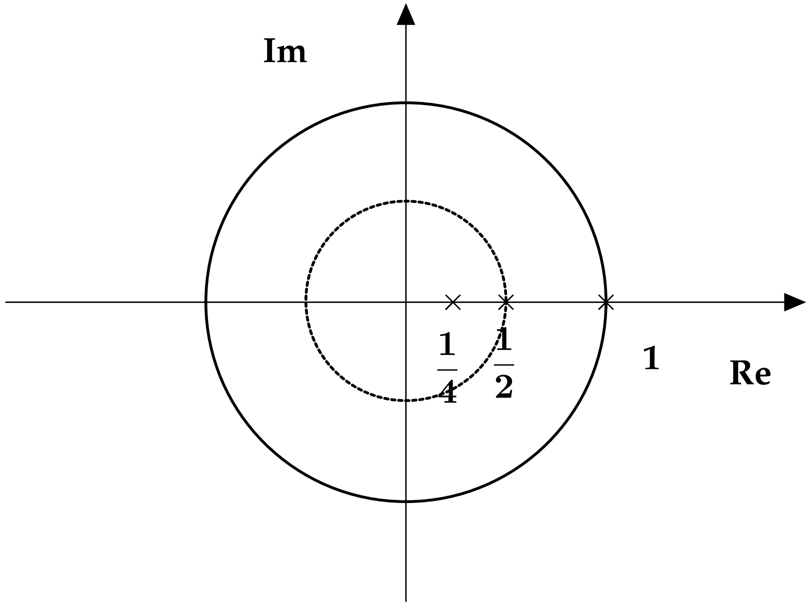
Primjer:

- Razmatramo sekvencu *x[n]* čija je z-transformacija drugog reda:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, |z| > \frac{1}{2}$$



x[n] je desna sekvenca!



Primjer:

- Oba pola su prvog reda i možemo pisati:

$$X(Z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4}Z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}}$$

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4}Z^{-1})X(Z)\Big|_{Z=\frac{1}{4}} = (-1)$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2}Z^{-1})X(Z)\Big|_{Z=\frac{1}{2}} = 2$$

$$X(Z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4}Z^{-1})} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}Z^{-1}} \Rightarrow x[n] = 2(\frac{1}{2})^n u[n] - (\frac{1}{4})^n u[n]$$

Na osnovu tablice z-transformacije:

z-transformacija kao razvoj u red

- Definicija z-transformacije je Laurentov red, pri čemu uzorci sekvence *x[n]* predstavljaju koeficijente uz z^{-n}.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \cdots + x[-2]z^{2} + x[-1]z^{1} + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2}$$

- Direktno se može očitati bilo koja vrijednost u sekvenci tražeći koeficijent uz odgovarajući stepen.

Sekvenca konačne dužine

- Pretpostavimo da je dato: $X(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$

- Ima dvostruki pol u *z=0*, tako da rastavljanje na parcijalne razlomke nije odgovarajuća tehnika.
- Preformuliramo gornji izraz: $X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2 \\ -\frac{1}{2}, & n = -1 \\ -1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases}$$

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n+1]$$

Osobine z-transformacije

- Osobine se često moriste skupa sa tehnikama inverzne z-transformacije.
- Navešćemo najbitnije osobine.
- Neka je *X(z)* z-transformacija sekvence *x[n]*, uz $ROC = R_x$.
- R_x je skup vrijednosti *z* takvih da je $r_R < z < r_L$.
- Parovi koje ćemo koristiti u osobinama:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1[n] &\overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z),\ ROC = R_{x1} \\ x_2[n] &\overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z),\ ROC = R_{x2} \end{aligned}}$$

Linearnost

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z),\ ROC \supseteq R_{x1} \cap R_{x2}$$

- Dokaz slijedi iz definicije z transformacije.
- ROC je najmanje presjek pojedinačnih oblasti konvergencije.
- Ako je z-transformacija razlomak i ako nema kraćenja polova, tada je ROC upravo presjek pojedinačnih ROC.
- Ako se desi da se neke nule skrate sa polovima, zajednička (rezultantna) ROC može biti i veća.

Vremenski pomak

- Zakasnimo sekvencu *x[n]* za n_0.

$$x[n-n_0] \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z),\ ROC = R_x$$

- ROC se može promijeniti jer član z^{-n_0} može promijeniti polove u $z = 0$ i $z = \infty$.

Dokaz:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

$$m = n - n_0$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m}\right) z^{-n_0}$$

$$Y(z) = z^{-n_0}X(z)$$

Primjer:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \ |z| > \frac{1}{4} \Rightarrow X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow x[n] = -4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Drugi pristup: $X(z) = z^{-1}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \ |z| > \frac{1}{4} \Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$

Iste sekvence!

z^{-1} →kašnjenje za jedan uzorak

Množenje se eksponencijalnom sekvencom

$$z_0{}^n x[n] \stackrel{Z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \; ROC = |z_0| R_x$$

- $ROC = |z_0|R_x$ označava R_x koje je skalirano sa $|z_0|$.
- Ako je $R_x = r_R < |z| < r_L$, tada je $|z_0|R_x$ skup vrijednosti *z* takvih da je $|z_0|r_R < |z| < |z_0|r_L$.
- Lokacije polova i nula su pomnožene sa z_0.
- Kada *X(z)* ima pol u $z = z_1$, tada $X(z/z_1)$ ima pol u $z = z_0 z_1$.
- Ako je z_0 pozitivan realan broj, skaliranje se interpretira kao skupljanje i širenje u z-ravni.

$$y[n] = z_0{}^n x[n]$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0{}^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Eksponencijalno množenje

$$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$$

$$\underbrace{x[n] = \frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2}[re^{-j\omega_0}]^n u[n]}$$

Iskoristićemo poznati izraz:

$$\boxed{u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}, \ |z| > 1}$$

$$\frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}}, |z| > r$$

$$\frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}, |z| > r$$

$$ROC = |z_0| R_x = r R_x => |z| > r$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1 - r\cos\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z{-1} + r^2 z^{-2}}, \ |z| > r$$

Diferenciranje *X(z)*

$$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -\mathrm{z}\frac{dX(z)}{dz}, ROC = R_x$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$-\mathrm{z}\frac{dX(z)}{dz} = -\mathrm{z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n)x[n]z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = Z\{nx[n]\}$$

Primjer: z-transformacija kada *X(z)* nije razlomak

$$X(z) = log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|$$

Poznato nam je:

$$\boxed{a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}$$

$$\boxed{a^{n-1} u[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}}{1 - az^{-1}}} \Rightarrow \boxed{(-1)^{n-1} a^{n-1} u[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}}{1 + az^{-1}}}$$

$$nx[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \; |z| > a$$

Zbog -a!

$$nx[n] = a(-1)^{n-1} a^{n-1} u[n-1]$$

$$x[n] = (-1)^n \frac{a^n}{n} u[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \log(1 + az^{-1}), \; |z| > |a|$$

Konjugovanje kompleksne sekvence

$$x^*[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X^*(z^*), \qquad ROC = R_x$$

Inverzija vremena

$$x^*[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} X^*(1/z^*), \qquad ROC = 1/R_x$$

- $ROC = 1/R_x$ označava inverziju R_x, odnosno ako je R_x skup vrijednosti takvih da je $r_R < |z| < r_L$, tada je oblast konvergencije skup vrijednosti z takvih da je $\frac{1}{r_L} < |z| < \frac{1}{r_R}$.
- Ako je z_0 u ROC za $x[n]$, tada je $\frac{1}{z_0^*}$ u ROC z-transformacije $x^*[-n]$.
- Za realne sekvence vrijedi:

$$x[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(1/z), \qquad ROC = 1/R_x$$

$$y[n] = x^*[-n] \Longrightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[-n] z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] \left(z^*\right)^{-n} \right)^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{z^*}\right)^{-n} \right)^* = X^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

Konvolucija dvije sekvence

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z),\ ROC = R_{x1} \cap R_{x2}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n} \\
s : m = n - k \qquad &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} \right\} z^{-k} \\
&= X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \\
&= X_1(z)X_2(z)
\end{aligned}$$

Primjer

$$x_1[n] = a^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \; |z| > |a|$$

$$x_2[n] = u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \; |z| > 1.$$

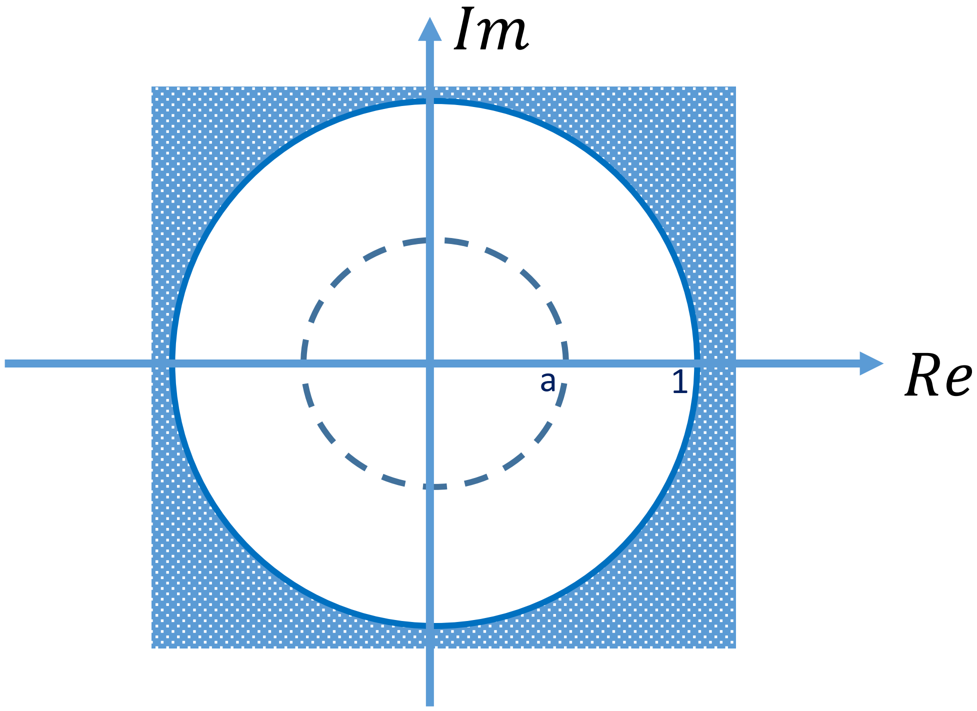
$Za\ |a| < 1, vrijedi:$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)}, \; |z| > 1$$

Inverzna z-transformacija

$$Y(z) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right), \; |z| > 1$$

$$y[n] = \frac{1}{1-a}\left(u[n] - a^{n+1}u[n]\right)$$



Teorem o početnoj vrijednosti

- Ako je $x[n] = 0$ za $n < 0$ (odnosno $x[n]$ je kauzalna sekvenca), tada vrijedi:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Zaista,

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + \lim_{z\to\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]$$

$= 0$

Reducira se na sumu $\sum_{n=1}^{\infty} x[n]z^{-n}$

z-transformacija i diferencne jednačine

- z-transformacija je posebno korisna za analizu sistema opisanih diferencnim jednačinama.
- Diferencna jednačina oblika

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k}{a_0}\right)y[n-k] + \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]$$

opisuje kauzalni LTI sistem ako je ulaz nula do trenutka $n = 0$ i azadovoljen je uslov početnog mirovanja do trenutka kada ulza postaje različit od nule, tj.

$$y[-N], y[-N+1], y[-N+2], \dots y[-1] = 0$$

- Diferencna jednačina sa ispunjenim uslovom početnog mirovanja opisuje LTI sistem, i od interesa je poznavati prenosnu funkciju sistema $H(z)$.

z-transformacija i diferencne jednačine

- Ako potražimo z-transformaciju lijeve i desne strane prethodne diferencne jednačine, i iskoristimo osbinu linearnosti i vremensog pomaka, dolazimo do izraza:

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k}{a_0}\right)z^{-k}Y(z) + \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)z^{-k}X(z)$$

- Riješimo prethodnu jednačinu po $Y[z]$:

$$Y(z) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}\right)X(z)$$

z-transformacija i diferencne jednačine

- Prenosna funkcija sistema je:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- S obzirom da je sistem opisan prvobitnom diferencnom jednačinom kauzalan LTI sistem, mora imati oblast konvergencije oblika $|z| > r_R$ i pošto oblast konvergencije ne može sadržati polove, r_R mora biti jednako amplitudi pola u $H(z)$ koji je najudaljeniji od koordinatnog početka.
- Ekvivalentni izraz je:

$$H(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

z-transformacija i diferencne jednačine

- Očigledno je da će biti M nula i N polova različitih do nule kada su koeficijenti a_0, b_0, a_N, b_M različiti od nule.
- Ako je $M > N$, imamo $M - N$ polova u tački $z = 0$.
- Kada je $M < N$, imamo $N - M$ nula u tački $z = 0$

Primjer: sistem 1. reda

- Pretpostavimo da imamo kauzalan LTI sistem opisan jednačinom:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

- Primijenimo z-transformaciju:

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- Iz tablica z-transformacije odredimo impulsni odziv, uzimajući u obzir da je oblast konvergencije $|z| > |a|$:

$$h[n] = a^n u[n]$$

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.