Implementacija LTI sistema pomoću DFT-a

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

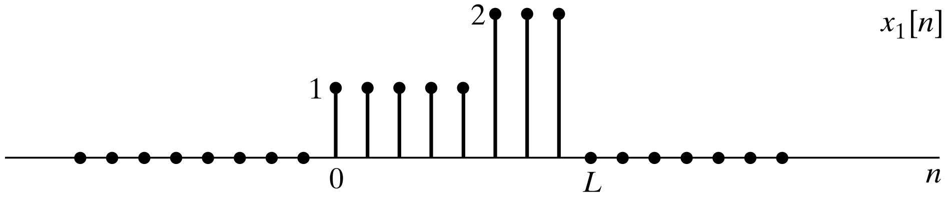
Uvod

- S obzirom da se LTI sistemi mogu implementirati pomoću konvolucije, znači da bi se kružna konvolucija mogla iskoristiti za ovu svrhu.
- S obzirom da je za implementaciju LTI sistema potrebna linearna konvolucija, potrebna je detaljnija analiza na koji način se to može postići kružnom konvolucijom.
- Pretpostavimo da imamo ulazni sekvencu $x[n]$ sa L tačaka i impulsni odziv $h[n]$ sa P tačaka.
- Linearna konvolucija ove dvije sekvence je sekvenca $y[n]$ dužine $L + P - 1$ tačaka.
- Da vi kružna i linerna konvolucija bile identične, potrebno je da kružna konvolucija ima dužinu najmanje od $L + P - 1$ tačaka.

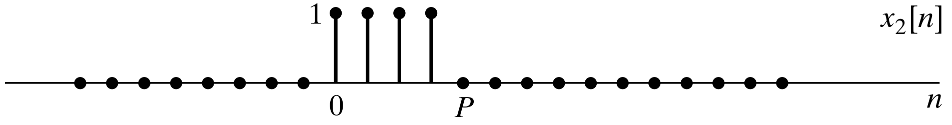
Uvod

- Kružna konvolucija se može dobiti i množenjem diskretne Fourierove transformacije sekvenci $x[n]$ i $h[n]$.
- S obzirom da želimo da ovaj proizvod predstavlja DFT linerane konvolucije sekvenci $x[n]$ i $h[n]$ dužine dužine $L + P - 1$ tačaka, DFT koji računamo mora biti najmanje ove dužine.
- Zbog toga je potrebno proširiti $x[n]$ i $h[n]$ sa dovoljnim brojem nula da se dostigne ova dužina (eng. *zero-padding*).
- Ova procedura omogućava izračun linearne konvolucije dvije sekvence konačne dužine.
- Drugim riječima, odziv FIR sistema na sekvencu konačne dužine se može izračunati na ovaj način.

Ilustracija linearne i kružne konvolucije

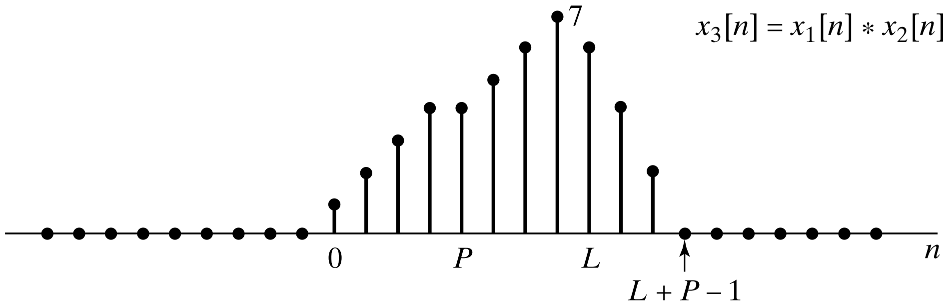


(a)



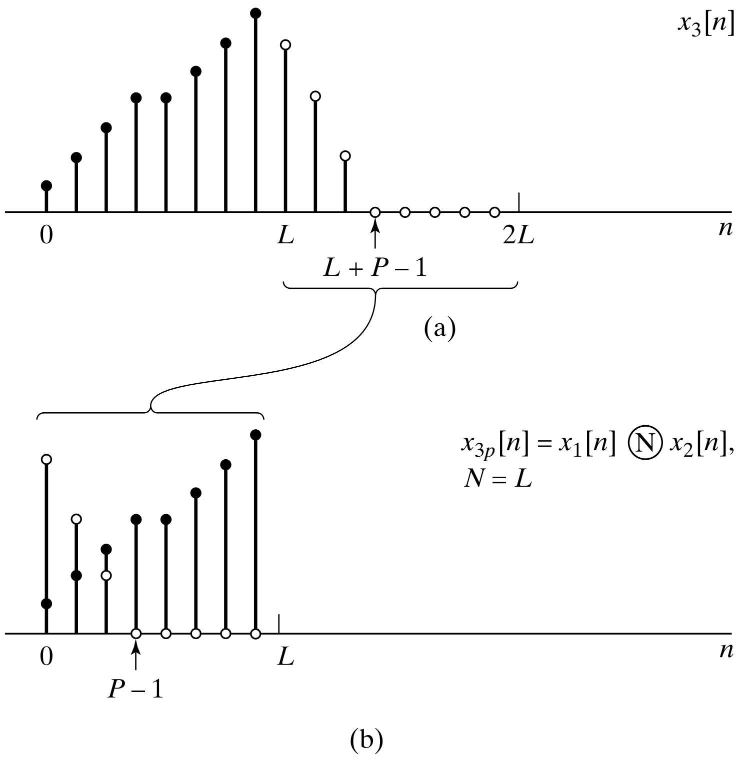
(b)

Linearna konvolucija

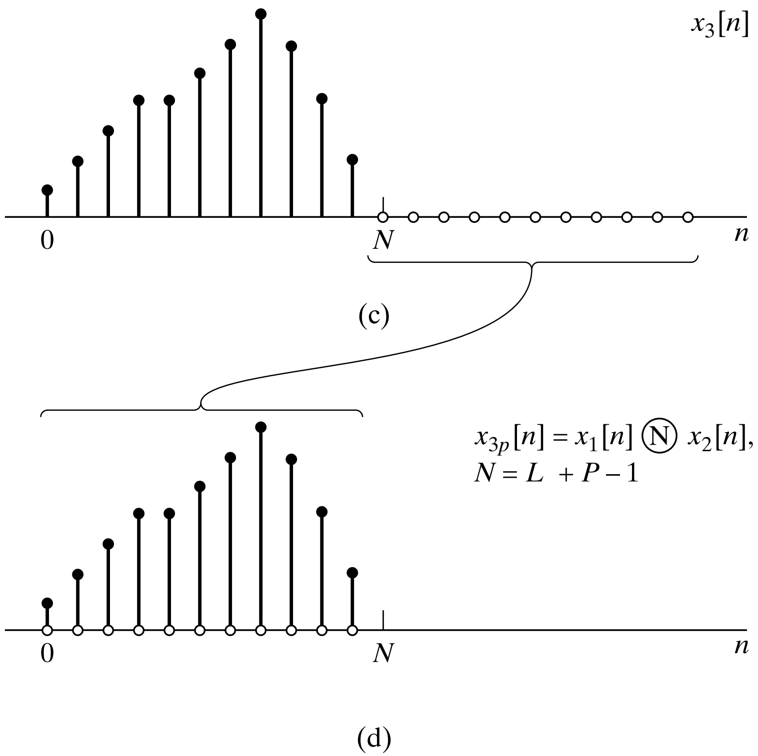


(c)

Ilustracija linearne i kružne konvolucije



Produžimo dužinu sekvenci



Kružna konvolucija za dužinu sekvenci L, gdje se jasno vidi "kruženje" uzoraka

Kružna konvolucija za dužinu sekvenci $L + P - 1$. Rezultat je isti kao za linearnu konvoluciju.

Procedura izračuna kružne konvolucije

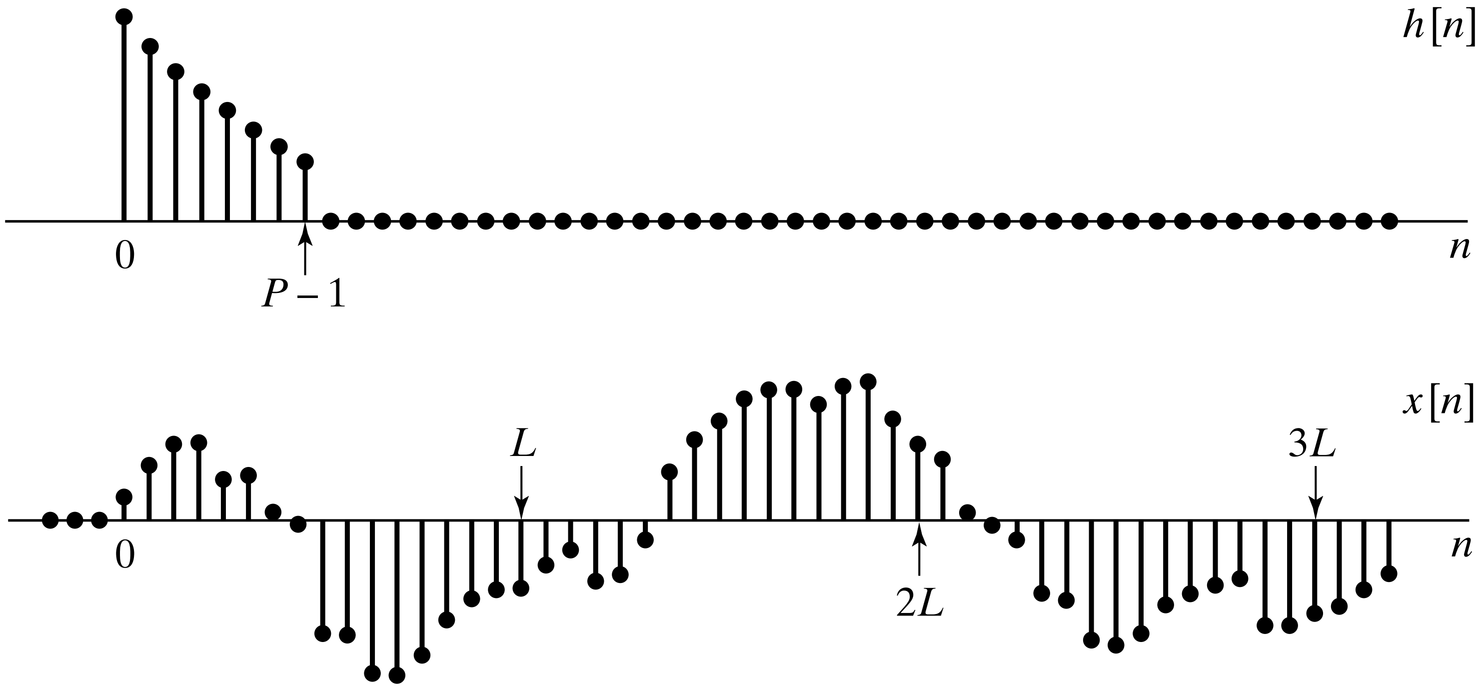
a. Izračunati DFT u N tačaka $X_1[k]$ i $X_2[k]$ dvije sekvence $x_1[n]$ i $x_2[n]$.
b. Izračunati proizvod $X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2\ [k]$ za $0 \leq k \leq N - 1$.
c. Izračunati sekvencu (kružnu konvoluciju) $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$ kao inverznu DFT od $X_3[k]$.

Blokovska konvolucija

- Značajnija kašnjenja prilikom filtriranja (obrade) signala se pojavljuju jer se izlazni uzorci ne mogu izračunati dok se ne prikupe svi ulazni uzorci.
- Rješenje za to je korištenje blokovske konvolucije, u kojoj se signal segmentira u sekcije dužine L.
- Svaka sekcija ulazi u konvoluciju sa impulsnim odzivom konačne dužine i sekcije na izlazu se združuju na adekvatan način da se formira odziv.
- Linearna konvolucija svakog bloka se implementira primjenom DFT-a.

Blokovska konvolucija

- Razmatramo impulsno odziv $h[n]$ dužine P i signal $x[n]$.
- Pretpostavljamo da je $x[n] = 0$ za $n < 0$ i da je dužina $x[n]$ puno veća od P.



Blokovska konvolucija

- Signal $x[n]$ se može predstaviti kao suma veremenski-pomjerenih sekvenci konačne dužine L, odnosno

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL]$$

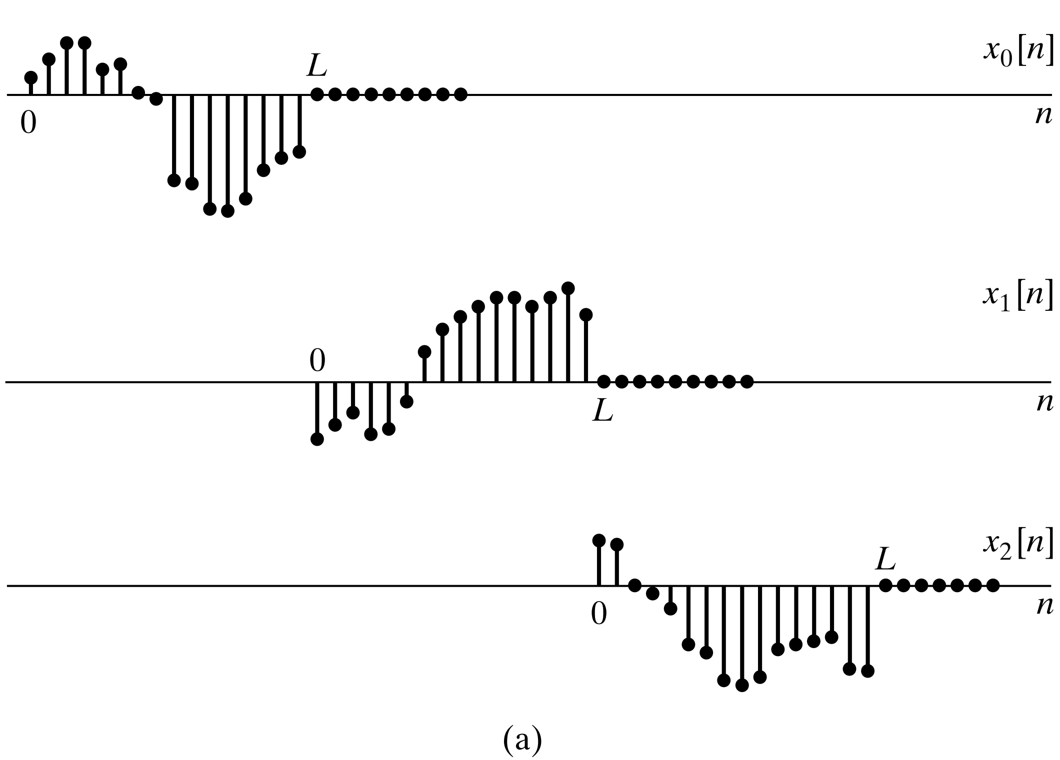
$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0, \qquad za\ ostalo\ n \end{cases}$$

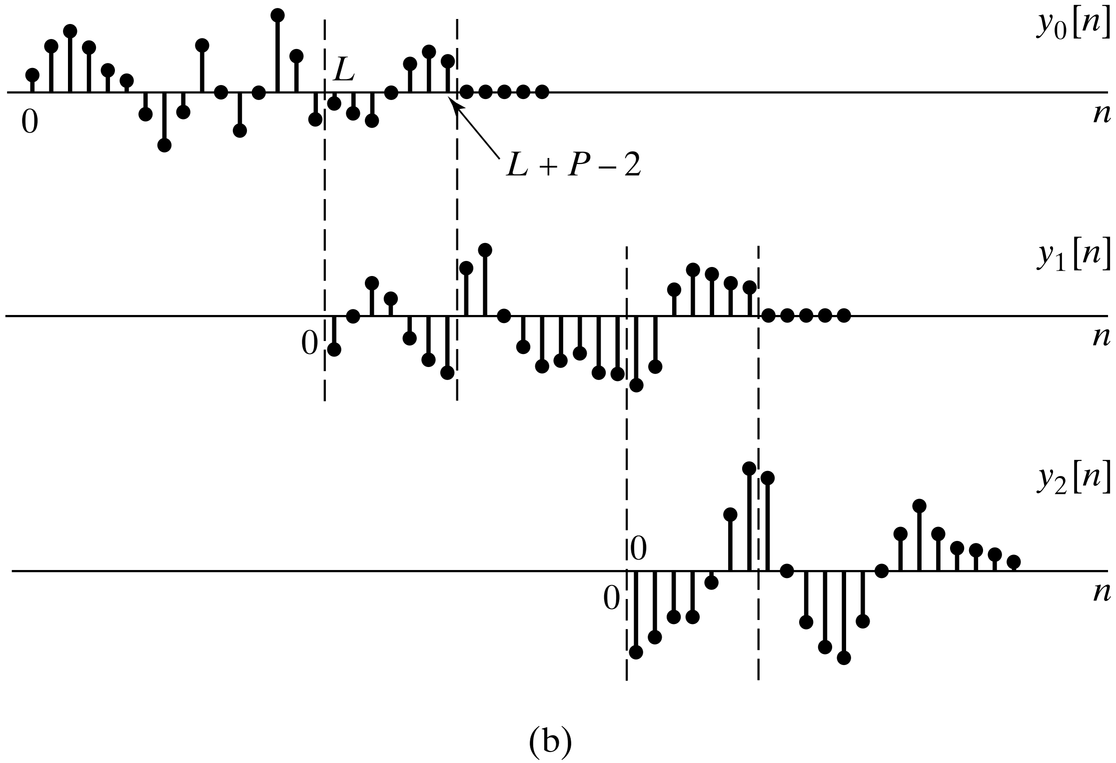
- Odziv LTI sistema je:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL]$$

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]$$

Blokovska konvolucija





Dekompozicija signala $x[n]$ na segmente dužine L

Konvolucija svakog segmenta sa impulsnim odzivom h$[n]$

Blokovska konvolucija

- Ova metoda za formiranje izlaznog signala sumiranjem odziva na pojedinačne sekcije se naziva *overlap-add* metod, jer se filtrirane sekcije preklapaju i dodaju da bi se formirao izlazni signal.
- Preklapanje se dešava jer je linearna konvolucija svake sekcije duža od pojedinačnih sekcija.
- `fftfilt` vrši FIR filtriranje korištenjem OA metoda.
- `y = fftfilt(b,x)` filtrira vektor `x` pomoću FIR filtera određenog koeficijentima `b`.
- `y = fftfilt(b,x,n)` koristi n da odredi dužinu sekvence za FFT.
- Daje identičan rezultat kao i funkcija `filter`.

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, “Discrete-time signal processing”, *Pearson New International Edition*, 2014.