DIZAJN DIGITALNIH FILTERA

Prof. dr. Nermin Suljanović

-Digitalna obrada signala-

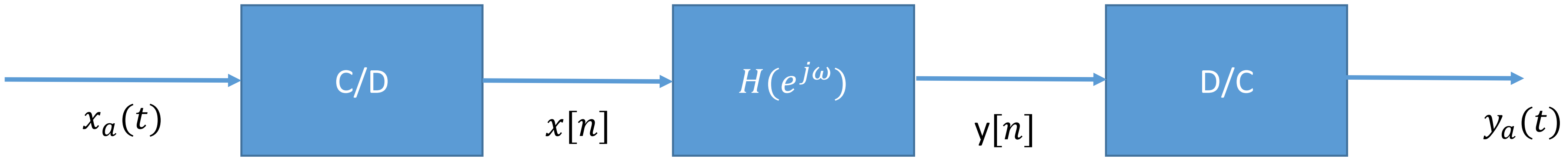
Uvod

- Filteri su značajna klasa LTI sistema.
- **Filter** = sistem koji propušta komponente u ulaznom signalu određene frekvencije a ostale potpuno odbacuje.
- Filter se implementira na digitalnoj platformi i obično koristi za filtriranje signala koji se dobiju postupkom A/D konverzije analognog vremenski-kontinualnog signala.
- Dizajn filtera uključuje korake:
  - specifikacija željenih osobina,
  - aproksimacija specifikacije primjenom kauzalnih vremenski-diskretnih sistema, i
  - realizacija sistema.
- Specifikacija se daje u frekventnom domenu!

Specifikacija filtera

- Implementacija filtera je predstavljena na slici.
- Ako je ulazni signal frekventno ograničen i ako je frekvencija uzorkovanja dovoljno velika da se izbjegne preklapanje spektara, cjelokupni sistem se ponaša kao vremenski kontinualan sistem sa frekventnim odzivom:

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$



Specifikacija filtera

- U ovakvim slučajevima je jednostavno prevesti specifikacije sa vremenski-kontinualnog filtera u vremenski diskretni filter kroz relaciju $\omega = \Omega T$.
- Frekventni odziv $H(e^{j\omega})$ je specificiran na jednom periodu kroz jednačinu

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_{eff}\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| < \pi$$

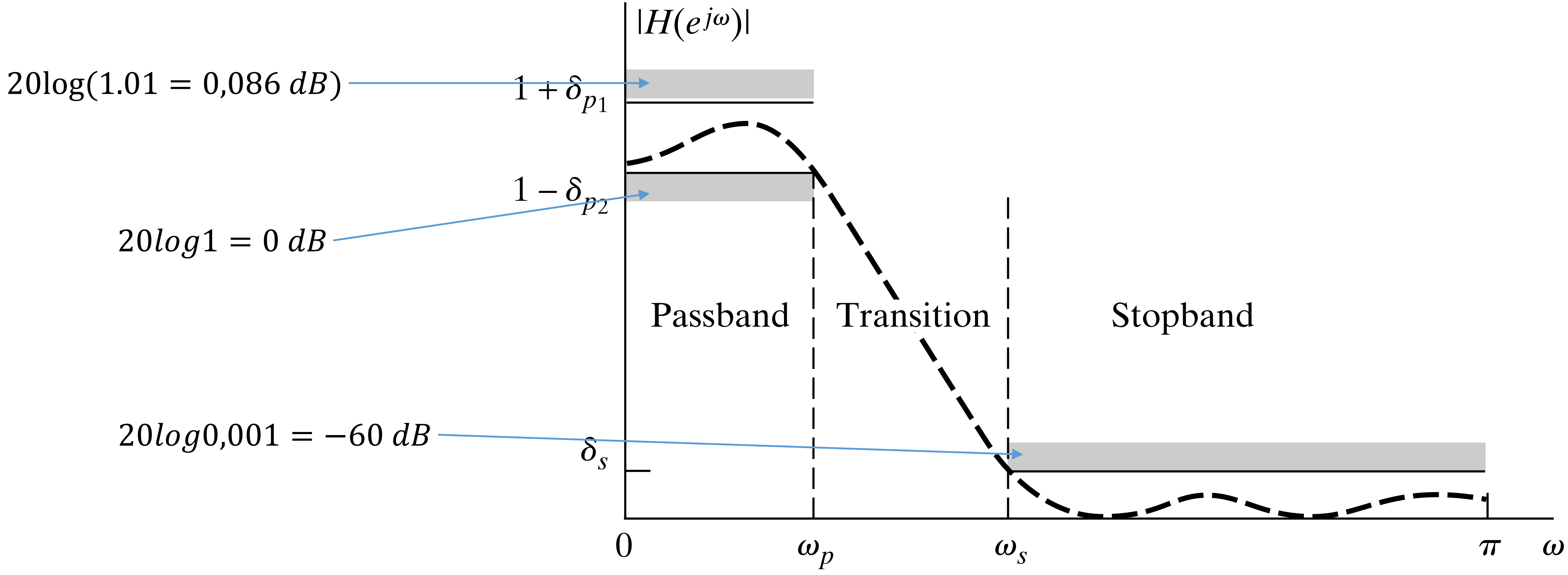
Primjer: Određivanje specifikacije za vremenski-diskretni filter

- Uzmimo za primjer vremenski-diskretni filter koji treba koristiti za NF filter vremenski-kontinualnih signala.
- Zadana frekvencija uzorkovanja je 10^4 uzoraka/s ($T = 10^{-4}\ s$) i da filter ima sljedeće osobine:

1. Pojačanje $\left|H_{eff}(j\Omega)\right|$ treba biti ± 0.01 od jedinice u frekv. opsegu $0 \leq \Omega \leq 2\pi \cdot 2000.$
2. Pojačanje ne smije biti veće od 0.001 u frekventnom opsegu $2\pi \cdot 3000 \leq \Omega$.

- Ove specifikacije su prikazane na sljedećoj slici, uz: $\delta_1 = 0{,}01; \delta_2 = 0{,}01;\ \Omega_p = 2\pi \cdot 2000;\ \Omega_s = 2\pi \cdot 3000$
- U propusnom opsegu, idealno pojačanje je 1 ali može varirati od $1 - \delta_1$ do $1 + \delta_1$.

Primjer: Određivanje specifikacije za vremenski-diskretni filter



Primjer: Određivanje specifikacije za vremenski-diskretni filter

- U propusnom opsegu, amplituda frekventnog odziva treba biti u granicama:

$$(1-\delta_1) \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq (1+\delta_1), |\omega| \leq \omega_p \qquad \omega_p = 2\pi \cdot 2000 \cdot 10^{-4} = 0{,}4\pi\, rad/s$$

- U neprpusnom opsegu treba da vrijedi:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \leq \delta_2, \omega_s \leq |\omega| \leq \pi \qquad \omega_s = 2\pi \cdot 3000 \cdot 10^{-4} = 0{,}6\pi\, rad/s$$

- U nastavku ćemo specificirati filtere u smislu vremenski-diskretne frekventne varijable ω.

- **NISMO POSTAVILI NIKAKVA OGRANIČENJA NA FAZNU KARAKTERISTIKU, DOK SE LOGIČNO POSTAVLJAJU ZAHTJEVI NA STABILNOST I KAUZALNOST SISTEMA!**

Dizajn IIR filtera

- Transformacija vremenski-kontinualnog filtera, koji zadovoljava specifikacije, u vremenski-diskretni filter.
- Osnovna svojstva vremenski-kontinualnih filtera se moraju zadržati u frekventnom-odzivu vremenski-diskretnih filtera (*potrebno imaginarnu osu u s-ravni preslikati u jedinični krug u z-ravni*).
- <u>**Stabilan**</u> vremenski-kontinualni filter želimo preslikati u <u>**stabilan**</u> vremenski-diskretan filter.
- Vremenski-kontinualan filter ima polove u lijevoj poluravni s-ravni implicira da će vremenski-diskretan filter imati **polove unutar jediničnog kruga** u z-ravni.

Dizajn IIR filtera pomoću invarijantnosti impulsnog odziva

- Impulsni odziv vrem.-diskretnog filtera se bira proporcionalno ekvidistantnim uzorcima u impulsnom odzivu vrem.-kontinualnog filtera:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d), \qquad T_d \rightarrow period\ uzorkovanja$$

- Zanima nas veza između frekventnih odziva vrem.-diskretnih i vrem.-kontinualnih filtera:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right)$$

$$H_c \rightarrow frekv.odziv\ vrem.-kontinualnog\ filtera$$

- Ako je vremenski-kontinualni filter sa ograničenim propusnim opsegom tako da je

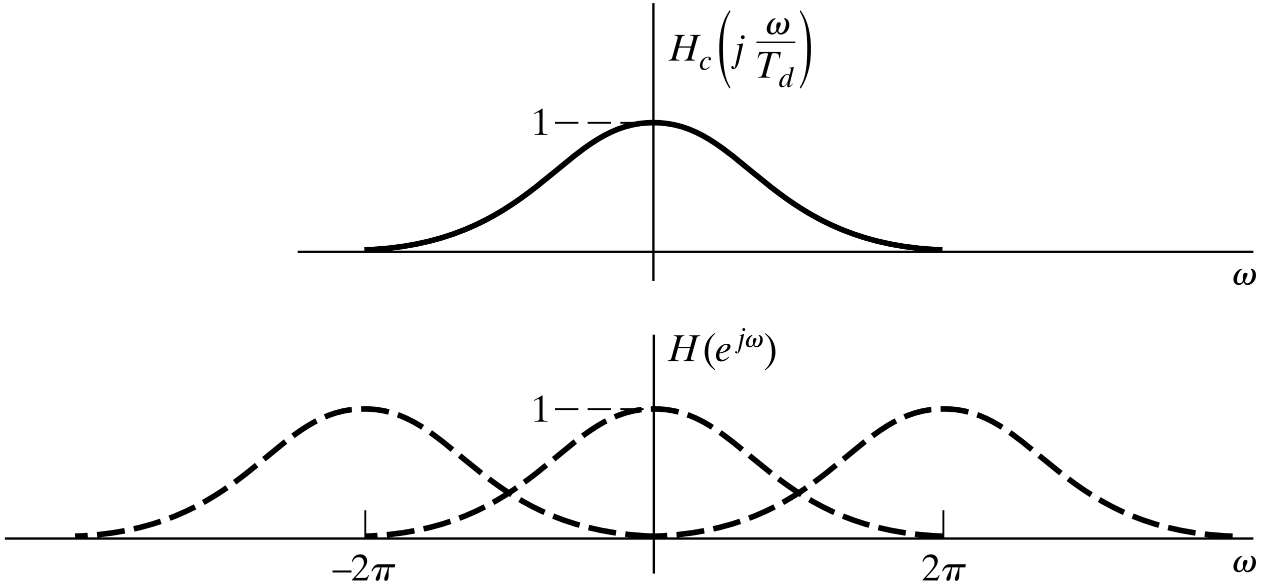
$$H_c(j\Omega) = 0\ za\ |\Omega| \geq \pi/T_d$$

- tada je

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), |\omega| \leq \pi \qquad (*)$$

Dizajn IIR filtera pomoću invarijantnosti impulsnog odziva

- Frekventni odzivi vremenski-kontinualnog i vremenski-diskretnog filtera su povezani linearnim skaliranjem frekventne ose, tj. $\omega = \Omega T_d, |\omega| < \pi$.
- Na žalost, svaki realni vrem-kont. filter nema u potpunosti ograničen propusni opseg pa dolazi do preklapanja između susjednih spektara u manjoj ili većoj mjeri.
- Na višim frekvencijama ova interferencija može biti mala i filter se može dizajnirati na ovaj način.



Dizajn IIR filtera pomoću invarijantnosti impulsnog odziva

- U prvom koraku se specifikacije za vremenski-diskretan filter transformiraju u specifikaciju za vremenski-kontinualan filter pomoću jednačine (*).
- Ako napravimo pretpostavku da je preklapanje spektara zanemarivo, specifikaciju za $H_c(j\omega)$ dobijamo primjenom izraza:

$$\Omega = \omega / T_d$$

- S obzirom da su osnovne specifikacije vezane za vremenski-diskretnu frekvenciju, ako se poveća frekvencija uzorkovanja tada će granična frekvencija vremenski-kontinualnog filtera proporcionalno narasti.
- U praksi se potencijalno preklapanje spektara kompnezira pomoću još strožijih specifikacija, posebno u propusnom opsegu (“stop-band”).

Dizajn IIR filtera pomoću invarijantnosti impulsnog odziva

- Da bi izveli transformaciju prenosne funkcije, analiziraćemo vremenski-kontinualan filter čija je prenosna funkcija oblika:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

- Radi jednostavnosti smo pretpostavili da su svi polovi jednostruki. Odgovarajući impulsni odziv je:

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Dizajn IIR filtera pomoću invarijantnosti impulsnog odziva

- Impulsni odziv vremenski-diskretnog kauzalnog filtera dobijamo uzorkovanjem $T_d h_c(t)$, tj.

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k . e^{s_k n T_d} \cdot u[n] = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k \left(e^{s_k T_d}\right)^n \cdot u[n]$$

- Prema tome, prenosna funkcija vremenski-diskretnog kauzalnog filtera je:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d \cdot A_k}{1 - e^{s_k T_d} \cdot z^{-1}}$$

- Uočavamo da se pol $s = s_k$ u s-ravni preslikava u pol $z = e^{s_k T_d}$ u z-ravni.
- Kada je vrem.-kont. sistem stabilan, odgovarajući realni dio s_k je manji od nule i amplituda $e^{s_k T_d}$ je manja od 1 tako da je odgovarajući pol unutar jediničnog kruga i kazualan vremenski-diskretni filter je stabilan.
- Relacija između vremenski-kontinualne i vremenski-diskretne frekvencije je linearna!

Pr: Impulsna invarijantnost sa *Butterworth* filterom

- Dizajniramo vremenski-diskretni NF filter primjernom impulsne invarijantnosti na vremenski-kontinualan *Butterworth* filter.
- Specifikacije vremenski-diskretnog filtera su:

$$0{,}89125 \le \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 1, \qquad 0 \le |\omega| \le 0{,}2 \cdot \pi$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \le 0{,}17783, \qquad 0{,}3 \cdot \pi \le |\omega| \le \pi$$

- S obzirom da se parametar T_d skraćuje u proceduri impulsne invarijantnosti, izabraćemo T_d=1 tako da je $\omega = \Omega$.
- Pretpostavićemo da se efekat preklapanja spektara može zanemariti.
- Želimo dizajnirati vremenski-kontinualni Butterworth za koji je:

$$0{,}89125 \le |H_c(j\Omega)| \le 1, \qquad 0 \le |\Omega| \le 0{,}2 \cdot \pi$$

$$|H_c(j\Omega)| \le 0{,}17783, \qquad 0{,}3 \cdot \pi \le |\Omega| \le \pi$$

Pr: Impulsna invarijantnost sa *Butterworth* filterom

- S obzirom da je amplituda Butterworth filtera monotona funkcija frekvencije, prethodne dvije jednačine su zadovoljene ako vrijedi:

$$|H_c(j0{,}2 \cdot \pi)| \geq 0{,}89125, \qquad |H_c(j0{,}3 \cdot \pi)| \leq 0{,}17783$$

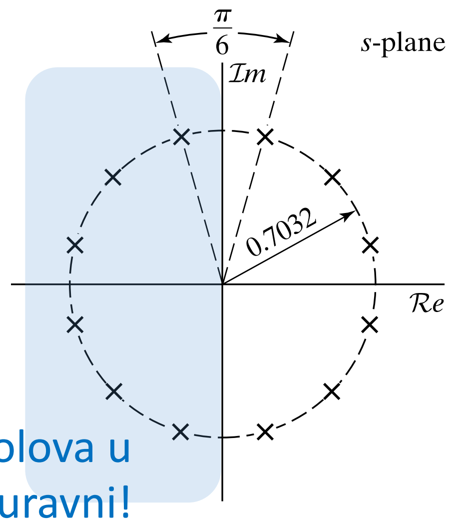
- Kvadrat amplitudnog odziva Butterworth filtera ima oblik:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

- Dizajn se svodi na određivanje parametara Ω_c i N.

$$1 + \left(\frac{0{,}2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89125}\right)^2 \qquad N = 5{,}8858 \qquad N = 6$$

$$1 + \left(\frac{0{,}3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.17783}\right)^2 \qquad \Omega_c = 0{,}70474 \qquad \Omega_c = 0{,}7032$$



Tri para polova u lijevoj poluravni!

Pr: Impulsna invarijantnost sa *Butterworth* filterom

- Imamo 3 para polova koji se nalaze u lijevoj poluravni s-ravni: $-0{,}182 \pm j0{,}679; -0{,}497 \pm j0{,}497; -0{,}679 \pm j0{,}182$

$$H_c(s) = \frac{0{,}12093}{(s^2 + 0{,}3640s + 0{,}4945)(s^2 + 0{,}9945s + 0{,}4945)(s^2 + 1{,}3585s + 0{,}4945)}$$

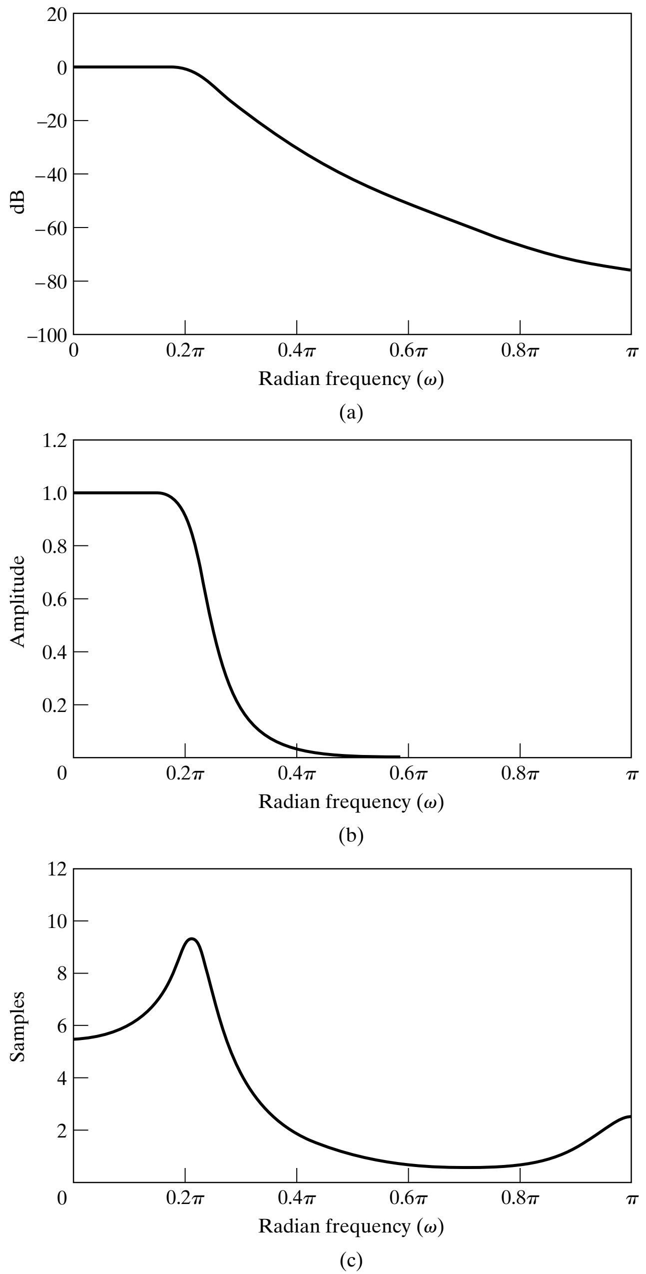
- Rastavimo na parcijalne razlomke i iskoristimo transformaciju

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} \cdot z^{-1}}$$

- te kombiniramo konjugovano-kompleksne članove:

$$H(z) = \frac{0{,}2871 - 0{,}4466 \cdot z^{-1}}{1 - 1{,}2971 \cdot z^{-1} + 0{,}6949 \cdot z^{-2}} + \frac{-2{,}1428 + 1{,}1455 \cdot z^{-1}}{1 - 1{,}0691 \cdot z^{-1} + 0{,}3699 \cdot z^{-2}} + \frac{1{,}8557 - 0{,}6303 \cdot z^{-1}}{1 - 0{,}9972 \cdot z^{-1} + 0{,}2570 \cdot z^{-2}}$$

Pr: Impulsna invarijantnost sa *Butterworth* filterom



Bilinearna transformacija

- Bilinearna transformacija je algebarska transformacija koja preslikava cijelu $j\Omega$ osu u s-ravni u jedan obrtaj duž jediničnog kruga u z-ravni.
- S obzirom da je $-\infty \leq \Omega \leq \infty$, te da se Ω preslikava u ω za koje vrijedi $-\pi \leq \omega \leq \pi$, ova transformacija mora biti NELINEARNA.
- Bilinearna transformacija odgovara zmjeni s sa:

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \quad (**)$$

- tako da je

$$H(z) = H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\right)$$

- Period uzorkovanja T_d je uključen u transformaciju jer se diferencna jednačina koja odgovara $H(z)$ može dobiti primjenom trapezoidnog integracijskog pravila na diferencijalnu jednačinu koja odgovara $H_c(s)$, gdje je T_d korak u numeričkoj integraciji.

Bilinearna transformacija

- Da bi odredili osobine bilinearne transformacije, jednačinu (**) riješimo po z:

$$z = \frac{1 + \left(\frac{T_d}{2}\right) \cdot s}{1 - \left(\frac{T_d}{2}\right) \cdot s}$$

- Zamjenom $s = \sigma + j\Omega$ dobijamo:

$$z = \frac{1 + \frac{\sigma T_d}{2} + j\frac{\Omega T_d}{2}}{1 - \frac{\sigma T_d}{2} - j\frac{\Omega T_d}{2}}$$

- $\sigma < 0 \rightarrow |z| < 1$ za svako Ω.
- $\sigma > 0 \rightarrow |z| > 1$ za svako Ω.
- Ako je pol $H_c(s)$ u lijevoj s-poluravni, njegova slika u z-ravni će biti unutar jediničnog kruga.
- **Kauzalan stabilan vremenski-kontinualan filter se preslikava u kauzalan stabilan vremenski diskretan filter!**

Bilinearna transformacija

- S ciljem da pokažemo da se osa $j\Omega$ preslikava u jedinični krug, zamijenićemo $s = j\Omega$ u jednačini za z:

$$z = \frac{1 + j\,\frac{\Omega T_d}{2}}{1 - j\,\frac{\Omega T_d}{2}}$$

- Iz prethodne jednačine je jasno da je $|z| = 1$ za sve vrijednosti s na $j\Omega$ osi. Sada je:

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\,\frac{\Omega T_d}{2}}{1 - j\,\frac{\Omega T_d}{2}}$$

- Da bi odredili vezu između ω i Ω, u jednačini (**) zamijenimo $z = e^{j\omega}$:

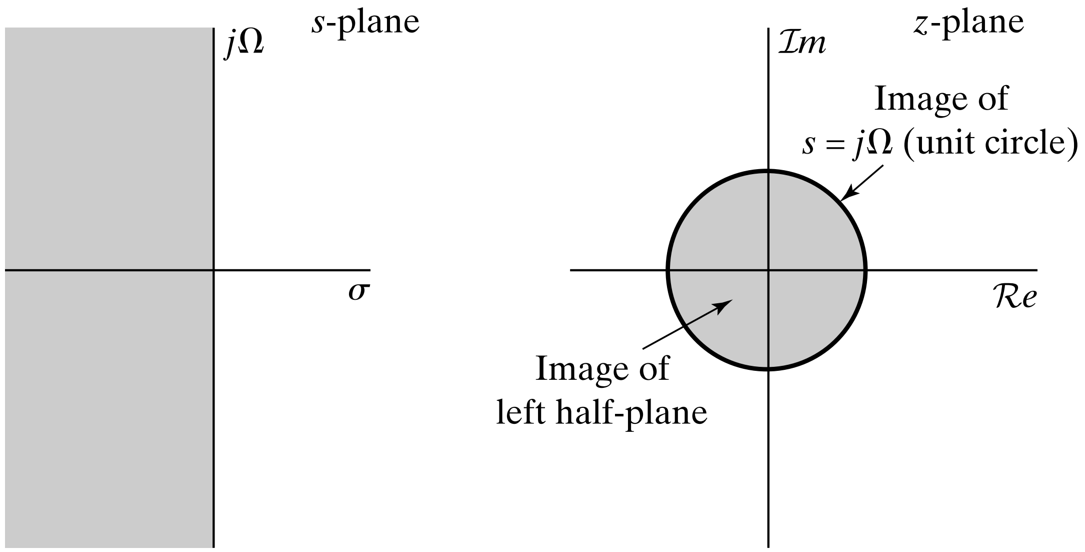
$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}\right)$$

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d}\left[\frac{2e^{-j\omega/2}\left(jsin\,\frac{\omega}{2}\right)}{2e^{-j\omega/2}\left(cos\,\frac{\omega}{2}\right)}\right] = \frac{2j}{T_d}\,tg\,\frac{\omega}{2}$$

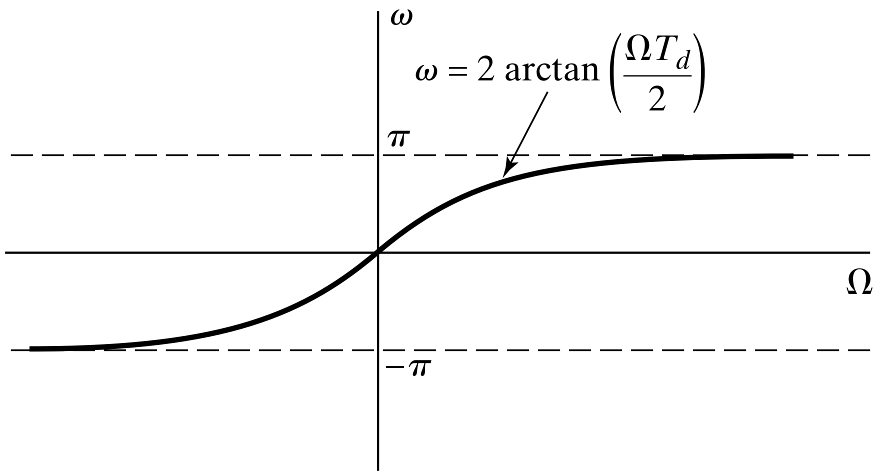
Bilinearna transformacija

- Očigledno je $\sigma = 0$ i $\Omega = \dfrac{2}{T_d} tg \dfrac{\omega}{2} \rightarrow \omega = 2arctg \dfrac{\Omega T_d}{2}$

- Opseg frekvencija $0 \leq \Omega \leq \infty$ se mapira u $0 \leq \omega \leq \pi$, a $-\infty < \Omega < 0$ u $-\pi \leq \omega \leq 0$.

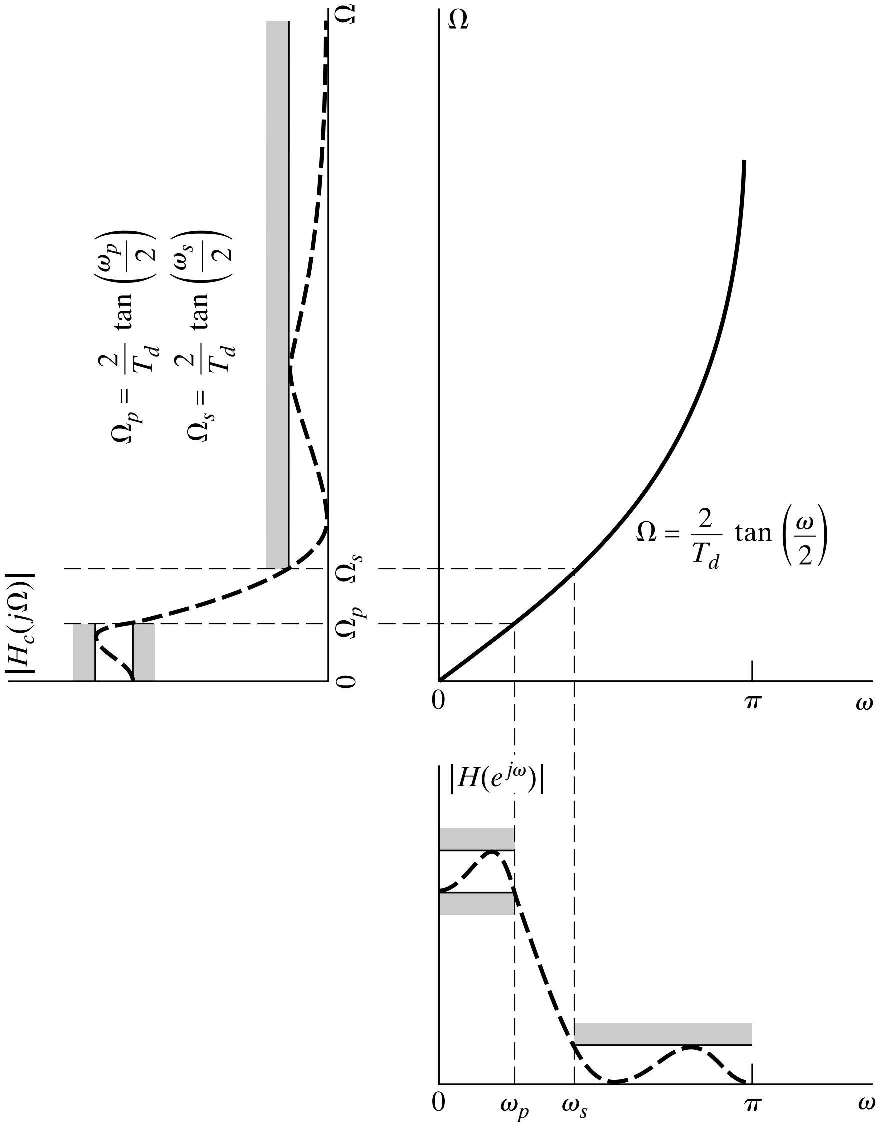


Mapiranje s-ravni u z-ravan



Mapiranje kontinualne frekvencije u diskretnu

Preslikavanje vremenski-kontinualnog NF filtera u vremenski-diskretan NF filter



Bilinearna transformacija

- Bilinearna transformacija prevazilazi problem preklapanja spektara jer cijelu imaginarnu osu u s-ravni preslika u jedinični krug u z-ravni.
- Ovo se plaća nelinearnom kompresijom frekventne ose.
- Distorzija frekventne ose se manifestira u preslikavanju fazne karakteristike .
- Za primjer primjenimo bilinearnu transformaciju na filter sa linearnom fazom $e^{-s\alpha}$:

$$H_c(s) = e^{-s\cdot\alpha} \qquad s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad \Longrightarrow \quad H(z) = e^{-\frac{2}{T_d}\cdot\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\cdot\alpha}$$

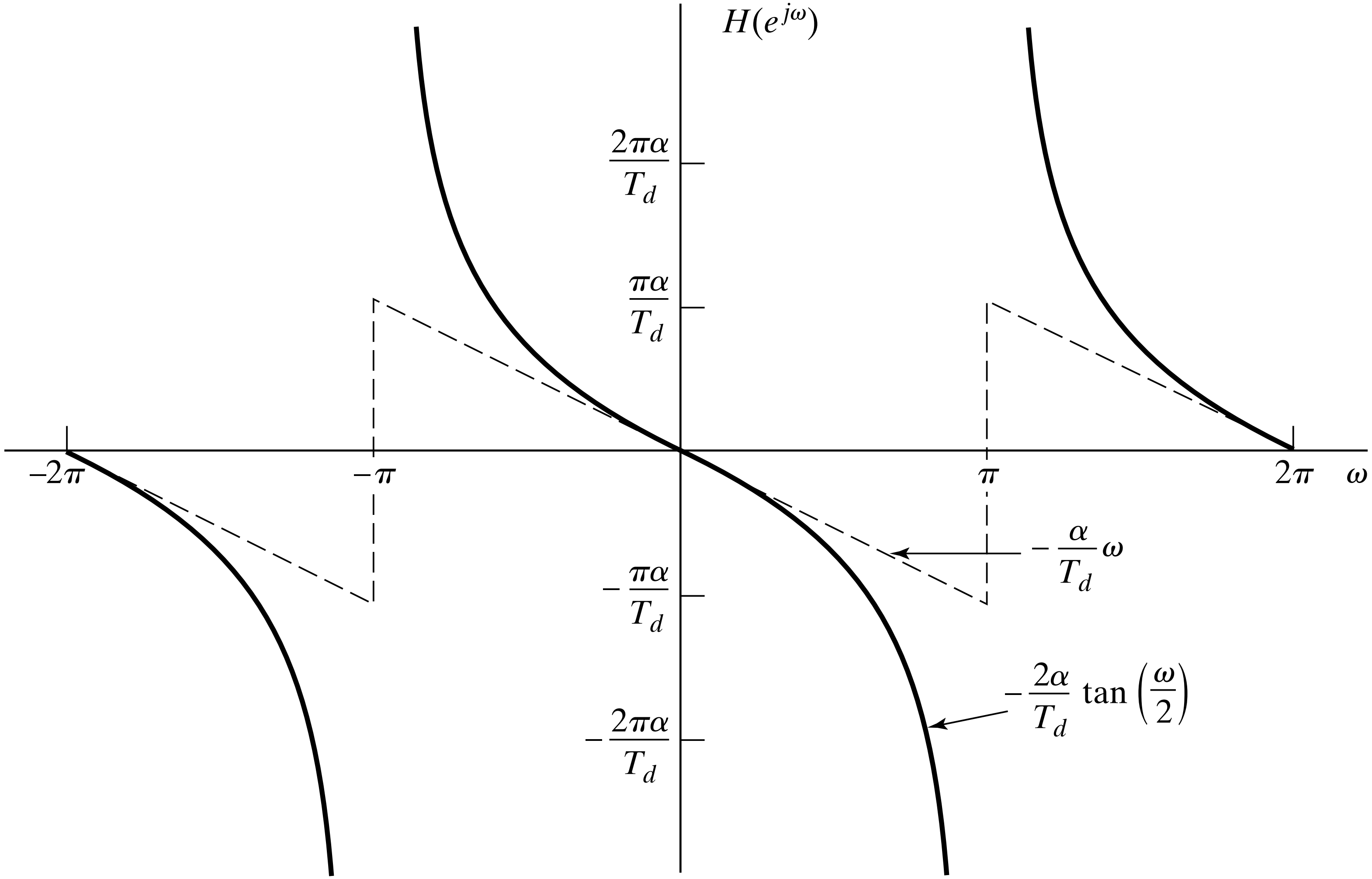
- Izračunamo $H(z)$ na jediničnom krugu, odnosno uzmemo $z = e^{j\omega}$ da dobijemo frekventni odziv.

$$\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = jtg\frac{\omega}{2} \quad \Longrightarrow \quad H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\frac{2\alpha}{T_d}tg\frac{\omega}{2}} \quad arg\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -\frac{2\alpha}{T_d}tg\frac{\omega}{2}$$

Bilinearna transformacija

- Kada vremenski-diskretan filter treba zadržati linearnu fazu, to ne možemo postići pomoću bilinearne transformacije.

Utjecaj bilinearne transformacije na linearnu fazu



Dizajn FIR filtera

- Za razliku od IIR filtera, gotovo uvijek su ograničeni na vremenski-diskretne implementacije.
- Tehnike dizajna se temelje na **direktnoj aproksimaciji željenog frekventnog odziva** vremenski-diskretnog sistema.
- Aproksimira se amplitudni odziv FIR sistema uz pretpostavku **linearne faze**.
- Prozorski metod (*Window method*) je najjednostavniji.
- P.p. da se željeni frekventni odziv može predstaviti sa

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n} \qquad (***)$$

- gdje se impulsni odziv $h_d[n]$ može predstaviti kao

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega$$

Dizajn FIR filtera

- Direktan pristup za dobijanje kauzalne FIR aproksimacije sistema je da se ograniči ("zaokruži") trajanje impulsnog odziva.
- Jednačina (***) se može posmatrati kao Fourierov red periodičnog frekventnog odziva $H_d(e^{j\omega})$, gdje su uzorci $h_d[n]$ koeficijenti reda.
- Najlakši način da se dobije kauzalni FIR filter jeste da se definira novi sistem sa impulsnim odzivom $h[n]$ koji je jednak:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], 0 \leq n \leq M \\ 0, \qquad ostalo\ n \end{cases}$$

- Općenito, $h[n]$ možemo predstaviti kao proizvod:

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

- gdje je $w[n]$ pravougaoni prozor.

Dizajn FIR filtera

- $w[n]$ je pravougaoni prozor:

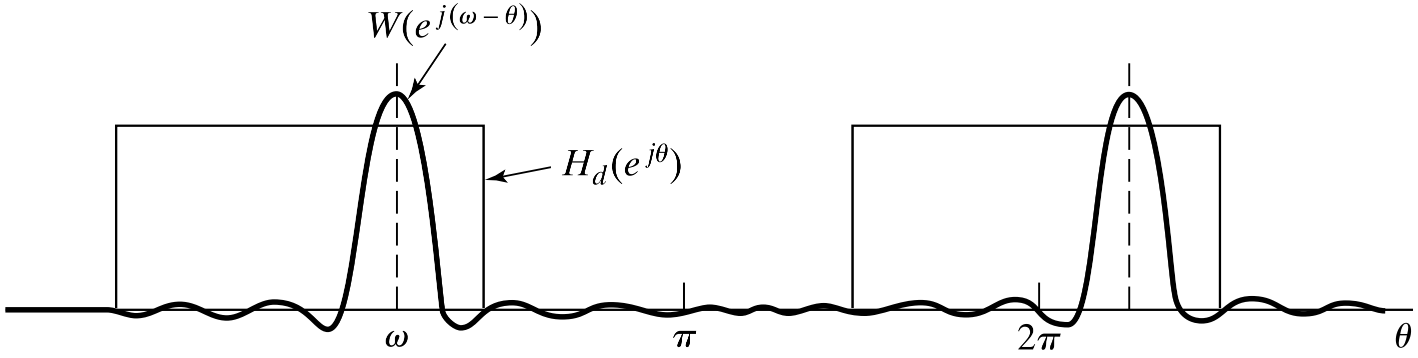
$$\mathrm{w}[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq M \\ 0, \qquad ostalo\ n \end{cases}$$

- U frekventnom domenu ovakva modulacija ima za posljedicu:

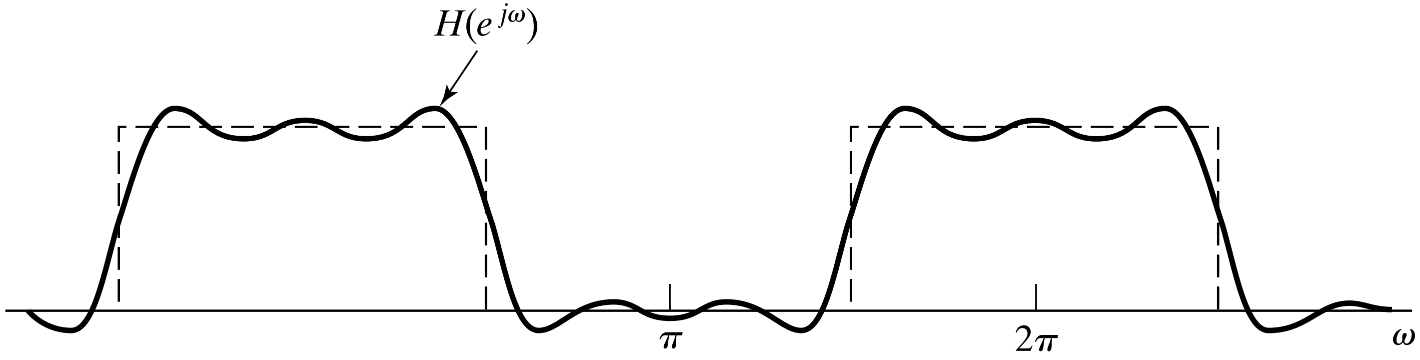
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\theta}\right) W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

- $H\left(e^{j\omega}\right)$ je **periodična konvolucija** željenog idealnog frekventnog odziva sa Fourierovom transformacijom prozora.
- Frekventni odziv $H\left(e^{j\omega}\right)$ je "*zamrljana*" verzija željenog frekventnog odziva $H_d(e^{j\omega})$.
- Ako je $w[n] = 1$ za svako n (nema skraćivanja), $W\left(e^{j\omega}\right)$ je periodična povorka δ impulsa sa periodom 2π, i $H\left(e^{j\omega}\right) = H_d\left(e^{j\omega}\right)$.

Posljedica ograničavanja trajanja impulsnog odziva



(a)



(b)

Dizajn FIR filtera

- Ova interpretacija govori da ako izaberemo $w[n]$ tako da je $W\left(e^{j\omega}\right)$ koncentrirano u uskom opsegu frekvencija oko $\omega = 0$, tada će $H\left(e^{j\omega}\right)$ ličiti na $H_d\left(e^{j\omega}\right)$, osim u tačkama gdje imamo naglu promjenu u $H_d\left(e^{j\omega}\right)$.
- Želimo izabrati $w[n]$ da traje što je moguće kraće da bi minimizirali izračunavanja u implementaciji, dok $W\left(e^{j\omega}\right)$ treba da aproksimira impuls.
- Navedena dva zahtjeva su kontradiktorna, što možemo vidjeti na primjeru pravougaonog prozora.

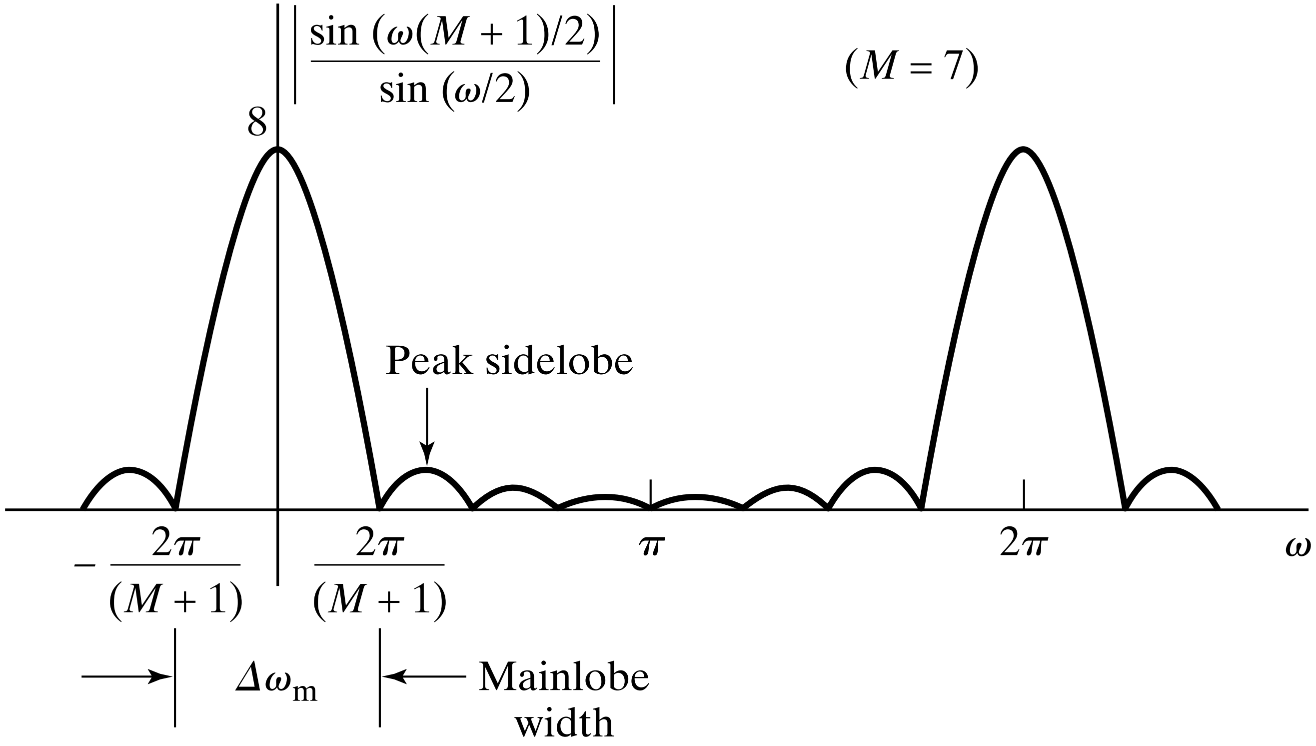
$$W\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2} \frac{sin\frac{\omega(M+1)}{2}}{sin\frac{\omega}{2}}$$

- Ima generalno linearnu fazu.
- Sa povećanjem *M*, širina glavnog krila se smanjuje.

Dizajn FIR filtera

- Širina glavnog krila je $\Delta\omega_m = 4\pi/(M+1)$.
- Bočna krila su velika kod pravougaonog prozora, i sa povećanjem *M* amplitude osnovnog i bočnih krila rastu.

$W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)H_d\left(e^{j\theta}\right)$ oscilira kada svako krilo prolazi mjesto diskontinuiteta u $H_d\left(e^{j\omega}\right)$ u skladu sa konvolucijom!



Dizajn FIR filtera

- U teoriji Fourierovih redova ova pojava neuniformne konvergencije je poznata kao Gibssov fenomen.
- Rješenje je da prozorska funkcija na obje strane nema nagli prekid, već se prozor glatko približava nuli.
- Ovako se smanjuju bočna krila, ali se proširuje glavno krilo i tranzicijsko područje u tački diskontinuiteta postaje šire.

Najčešće korišteni prozori

- Pravougaoni

$$w[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq M \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

- Bartlett

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{M}, 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - \dfrac{2n}{M}, \dfrac{M}{2} < n \leq M \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

- Hann

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right), 0 \leq n \leq M \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

Najčešće korišteni prozori

- Hamming

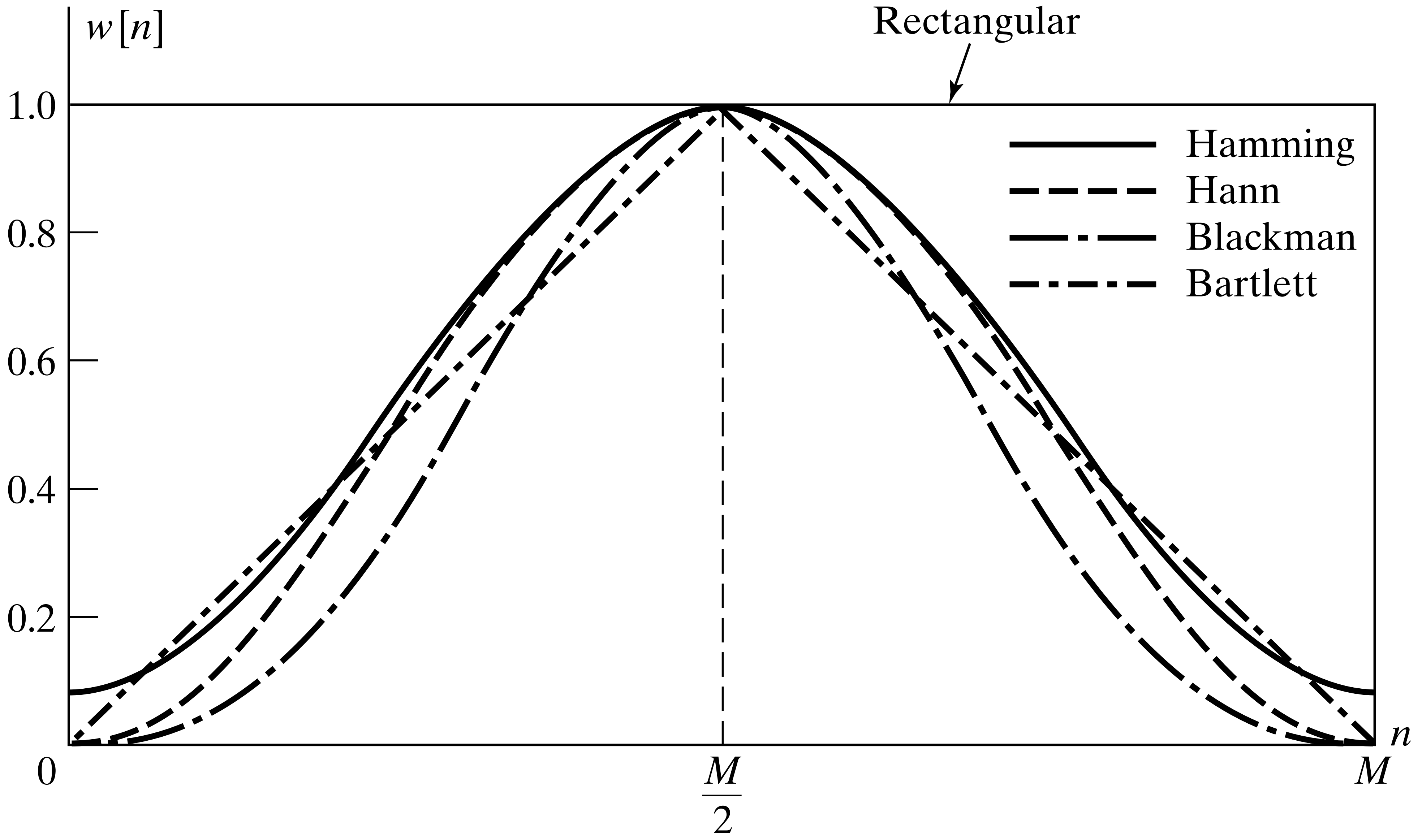
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), 0 \leq n \leq M \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

- Blackman

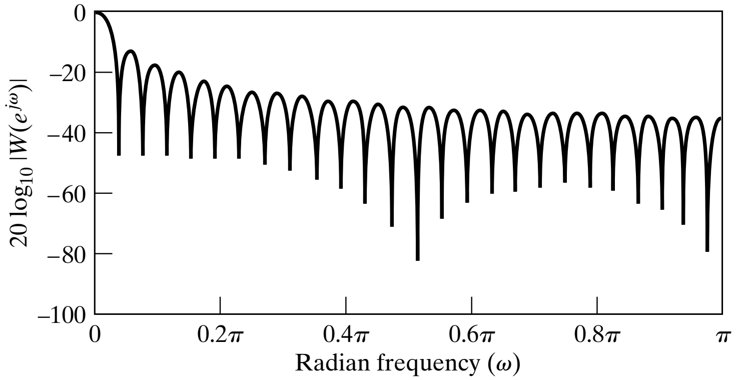
$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), \qquad 0 \leq n \leq M \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

- Navedeni prozori imaju osobinu da se njihove Fourierove transformacije koncentriraju oko $\omega = 0$, a imaju jednostavan oblik za izračunavanje.

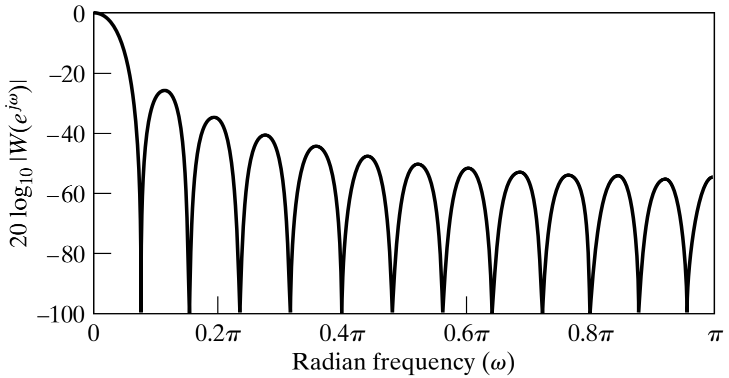
Najčešće korišteni prozori



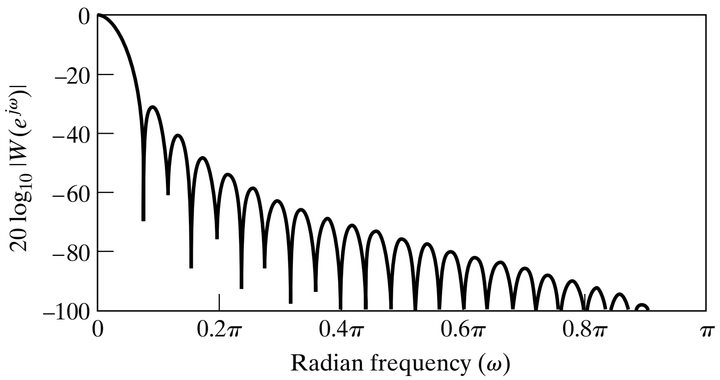
Fourierova transformacija najčešće korištenih prozora (M=50)



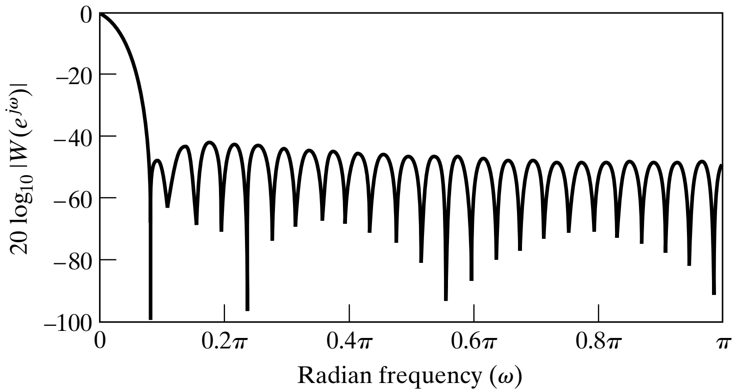
Pravougaoni



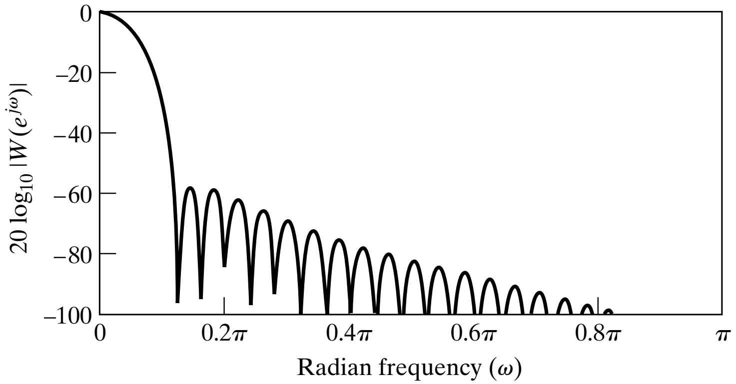
Bartlett



Hann



Hamming



Blackman

Linearna faza FIR filtera

- Svi prozori su dizajnirani da ispune uvjet da imaju linearnu fazu.
- Svaki od prozora zadovoljava uslov

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], 0 \leq n \leq M \\ 0, za\ ostalo\ n \end{cases}$$

- tj. **svi su simetrični u odnosu na tačku M/2.**
- Kao posljedicu imamo da su njihove Fourierove transformacije oblika

$$W\left(e^{j\omega}\right) = W_e\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{-j\omega M/2}$$

- gdje je $W_e\left(e^{j\omega}\right)$ realna parna funkcija od ω.
- Ako je željeni impulsni odziv takođe simetričan u odnosu na tačku M/2, tj. ako je $h_d[M-n] = h_d[n]$ tada impulsni odziv pomnožen sa prozorskom funkcijom takođe ima simetriju.

Linearna faza FIR filtera

- Vrijedi:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = A_e\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{-j\omega M/2}$$

- gdje je $A_e\left(e^{j\omega}\right)$ realna i parna funkcija od ω.
- Ako je željeni impulsni odziv asimetričan u odnosu na M/2, tj. $h_d[M-n] = -h_d[n]$, tada će i impulsni odziv pomnožen sa prozorskom funkcijom također biti asimetričan u odnosu na M/2 i rezultantni frekventni odziv će imati generaliziranu linearnu fazu sa faznim pomakom π/2:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = jA_o\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{-j\omega M/2}$$

- gdje je $A_o\left(e^{j\omega}\right)$ realna i neparna funkcija od ω.

Pr: NF filter sa linearnom fazom

- Željeni frekventni odziv je

$$H_{lp}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, |\omega| < \omega_c \\ 0, \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- gdje je generalizirana linearna faza uključena u definiciju idealnog NF filtera.
- Odgovarajući impulsni odziv je:

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{sin\left[\omega_c\left(n - \frac{M}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)} \; za \; -\infty < n < \infty$$

- Impulsni odziv je simetričan u odnosu na M/2 i koristimo simetričan prozor da dobijemo filter sa linearnom fazom.

$$h[n] = \frac{sin\left[\omega_c\left(n - \frac{M}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M}{2}\right)} \cdot w[n]$$

Linearna faza

- Pretpostavimo simetriju $h_d[M-n] = h_d[n]$. Tada je

$$H_d\left(e^{j\omega}\right) = H_e\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{-j\omega M/2}$$

$$H_d\left(e^{j\omega}\right) \rightarrow realna\ i\ parna\ funkcija$$

- Ako je prozor simetričan, vrijedi:

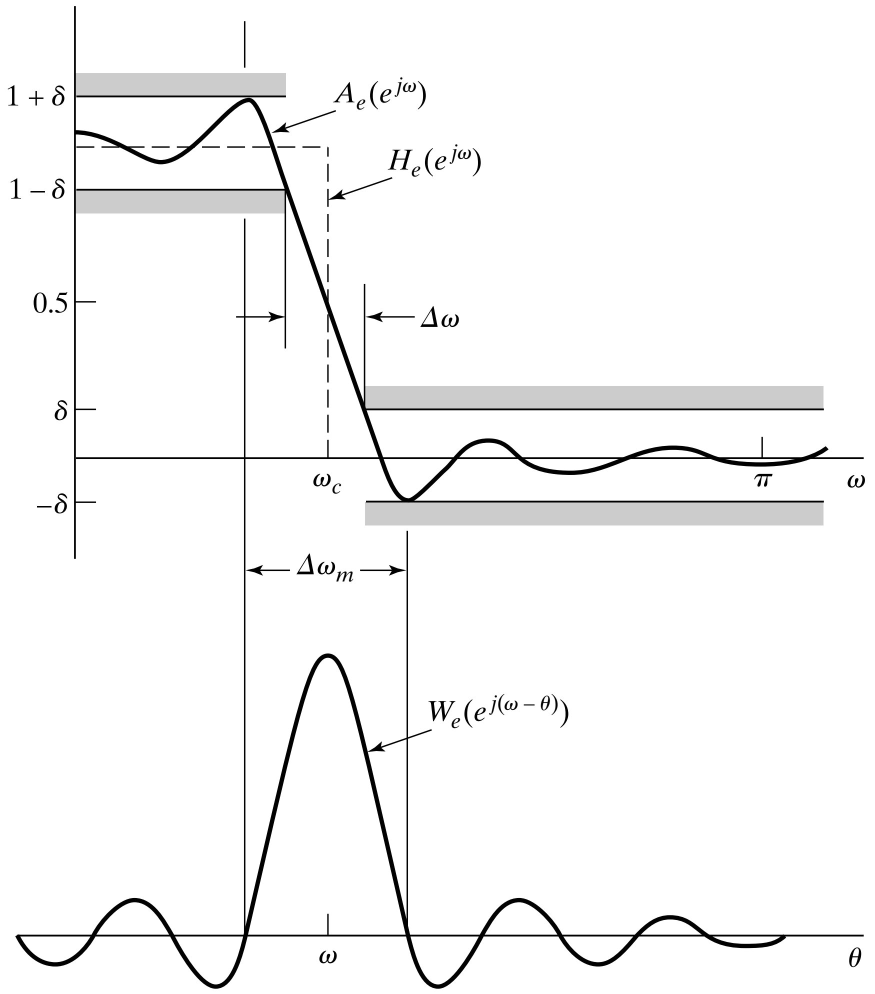
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e\left(e^{j\theta}\right) e^{-\frac{j\theta M}{2}} W_e\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) e^{-\frac{j(\omega-\theta)M}{2}} d\theta$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = A_e(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega M/2}$$

$$A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_e\left(e^{j\theta}\right) W_e\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$$

Linearna faza

- Rezultantni sistem ima linearnu fazu a realna funkcija $A_e(e^{j\omega})$ je rezultat konvolucije realnih funkcija $H_e(e^{j\omega})$ i $W_e(e^{j\omega})$.



Linearna faza

- Kada je simetrična funkcija $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ centrirana u tački diskontinuiteta $\omega = \omega_c$, samo jedna njena polovina učestvuje u $A_e(e^{j\omega})$.
- Vrh (preskok) u $A_e(e^{j\omega})$ prije tačke diskontinuiteta se događa kada je prva nula sa desne strane u $W_e(e^{j\omega})$ zauzela poziciju $\omega = \omega_c$.
- Prvi minimum u $A_e(e^{j\omega})$ se dogodi kada glavno krilo izađe iz propusnog opsega $H_e(e^{j\omega})$,tj. kada prva nula sa lijeve strane vrha glavnog krila u $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ dođe u tačku $\omega = \omega_c$.
- **Rastojanje između dva vrha sa dvije strane diskontinuiteta je približno jednako širini glavnog krila (vidi prethodnu sliku).**
- Zbog simetrije $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$, aproksimacija teži da bude simetrična oko $\omega = \omega_c$.

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 2014.