UZORKOVANJE VREMENSKI-KONTINUALNIH SIGNALA

Prof. dr. Nermin Suljanović

- Digitalna obrada signala –

Uvod

- Vremenski-diskretni signali se najčešće pojavljuju kao rezultat uzorkovanja vremenski-kontinualnih signala.
- Periodično uzorkovanje, u kojem se niz uzoraka *x[n]* dobija iz vremenski-kontinualnog signala $x_c(t)$ u skladu sa izrazom:

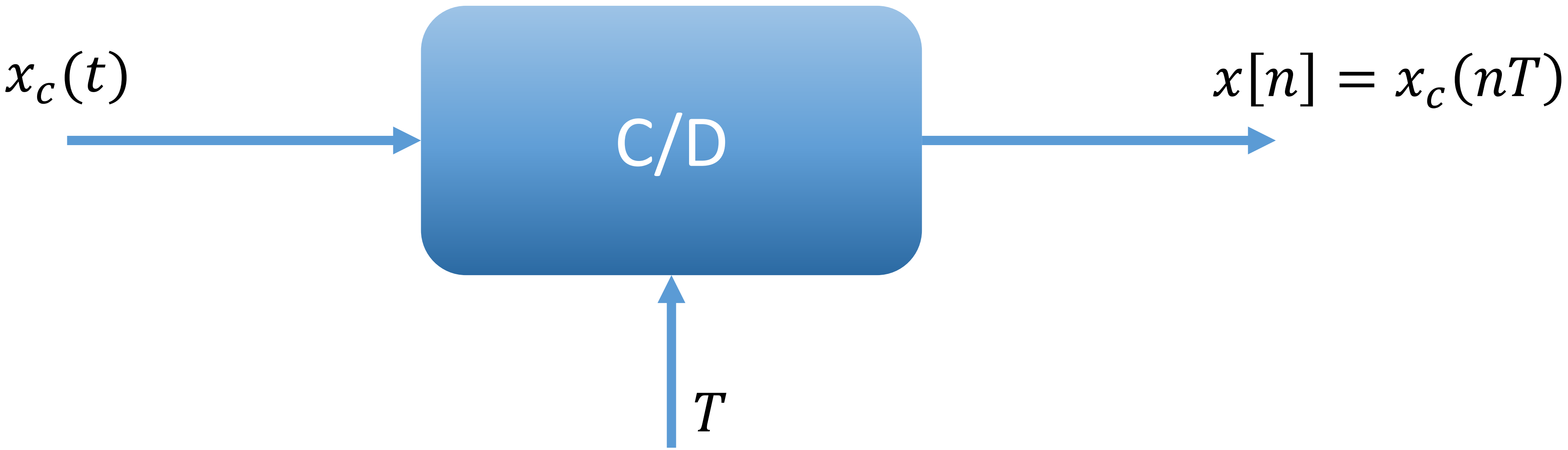
$$x[n] = x_c(nT), -\infty < n < \infty$$

$$T \Rightarrow period\ uzorkovanja \qquad f_s = \frac{1}{T} \Rightarrow frekvencija\ uzorkovanja$$

$$(broj\ uzoraka\ uzetih\ u\ jednoj\ sekundi)$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow rad/s$$

Idealni kontinualno-diskretni konvertor

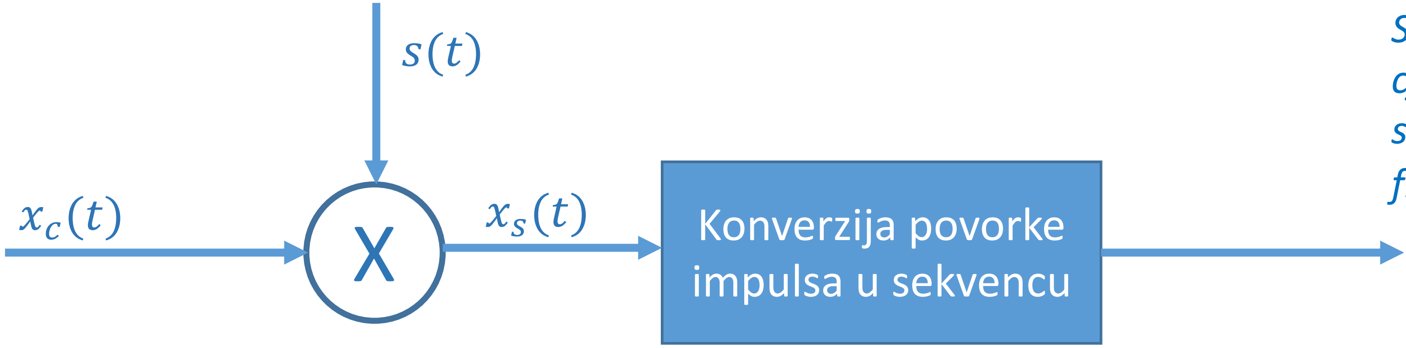


Na osnovu jednačine sa prethodnog slajda!

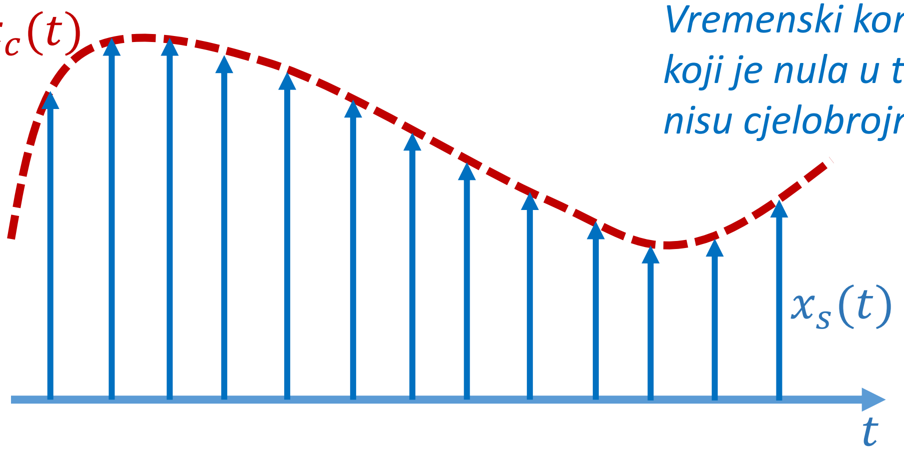
Idealno uzorkovanje

- Matematički se modelira sa dvije faze.
- 1. faza: Modulator sa povorkom δ impulsa.
- 2. faza: Konverzija povorke impulsa u sekvencu.

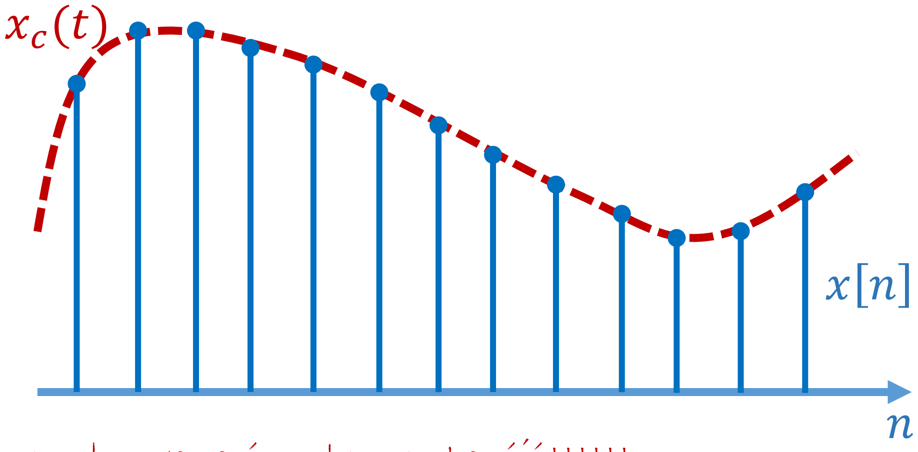
Sekvenca indeksirana cjelobrojnom varijablom "n" i ne sadrži eksplicitnu informaciju o frekvenciji uzorkovanja.



$x[n] = x_c(nT)$



Vremenski kontinualni signal koji je nula u trenucima koji nisu cjelobrojni multipl T.



Slika je matematički model koji ne odgovara implementaciji!!!!!!

Analiza uzorkovanja u frekventnom domenu

- Idealno uzorkovanje predstavljamo kao modulaciju signala kojeg uzorkujemo povorokom δ impulsa.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot s(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Analiza uzorkovanja u frekventnom domenu

- Fourierova transformacija signala $x_s(t)$ je konvolucija Fourierovih transformacija $X_c(j\Omega)$ i $X_S(j\Omega)$

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Kopije $X_c(j\Omega)$ su pomjerene za cjelobrojni multipl frekvencije uzorkovanja i superponirane da daju periodičnu Fourierovu transformaciju.

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_s(j\Omega) * S(j\Omega) = \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\big(j(\Omega - k\Omega_s)\big)}_{\text{Periodično ponovljene kopije Fourierove transformacije signala } x_c(t).}$$

Periodično ponovljene kopije Fourierove transformacije signala $x_c(t)$.

Analiza uzorkovanja u frekventnom domenu

- Za $\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N$, odnosno $\Omega_s > 2\Omega_N$ (Ω_N je najveća frekvencija u spektru signala kojeg uzorkujemo), replike se ne preklapaju i signal $x_c(t)$ se može rekonstruirati iz signala $x_s(t)$ pomoću NF filtera.

NYQUISTOV TEOREM O UZORKOVANJU:

Neka je $x_c(t)$ signal u osnovnom opsegu sa ograničenim spektrom $X_c(j\Omega) = 0\ za\ |\Omega| \geq \Omega_N$.
Tada je $x_c(t)$ jedinstveno određen svojim uzorcima $x[n] = x_c(nT),\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. ako vrijedi:

$$\Omega_S = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

Frekvencija Ω_N se obično naziva **Nyquistova frekvencija** a $2\Omega_N$ se naziva **Nyquistova brzina**.

Određivanje spektra uzorkovanog signala

- Određujemo spektar $X(e^{j\omega})$, odnosno vremenski-diskretnu Fourierovu transformaciju sekvence $x[n]$, izraženu preko $X_s(j\Omega)$ i $X_c(j\Omega)$.
- Primijenit ćemo Fourierovu transformaciju na izraz:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$FT\{\delta(t-\tau)\} = e^{-j\Omega\tau}$$

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega Tn}$$

$$x[n] = x(nT) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T})}$$

Određivanje spektra uzorkovanog signala

- Na osnovu prethodnih izraza možemo pisati:

$$X\left(e^{j\Omega T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$\Big\Downarrow \quad \omega = \Omega \cdot T$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Zaključimo

- Zaključujemo da je $X\left(e^{j\omega}\right)$ frekventno − skaliranja verzija $X_s(j\Omega)$ sa frekventnim skaliranjem $\underline{\omega = \Omega \cdot T}$.
- Skaliranje se može posmatrati kao normalizacija frekventne ose na način da se frekvencija $\Omega = \Omega_s$ u $X_s(j\Omega)$ preslika u frekvenciju $\omega = 2\pi$ za $X\left(e^{j\omega}\right)$.
- Normalizacija u frekventnom domenu postoji zbog preslikavanja $x_s(t)$ u $x[n]$ vremenskom domenu.

Rekonstrukcija izvornog signala iz uzoraka

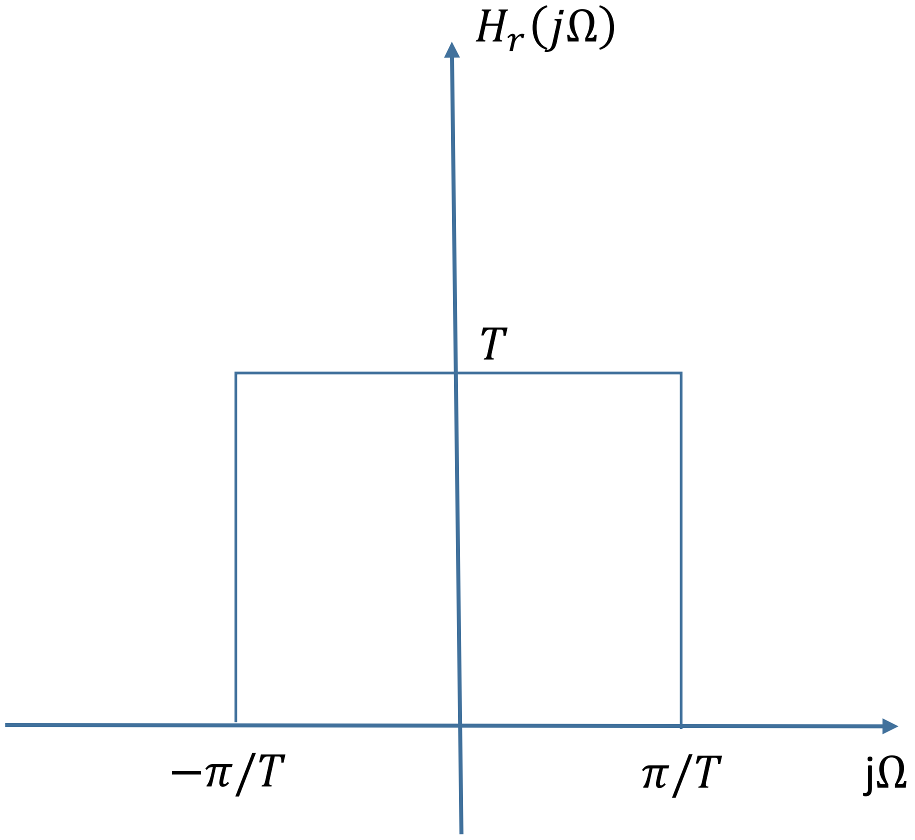
- Rekonstrukcija se vrši propuštanjem uzorkovanog signala (sekvence) kroz NF filter.

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{NF filter}\\ H_r(j\Omega), h_r(t)\end{array}} \longrightarrow x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT)$$

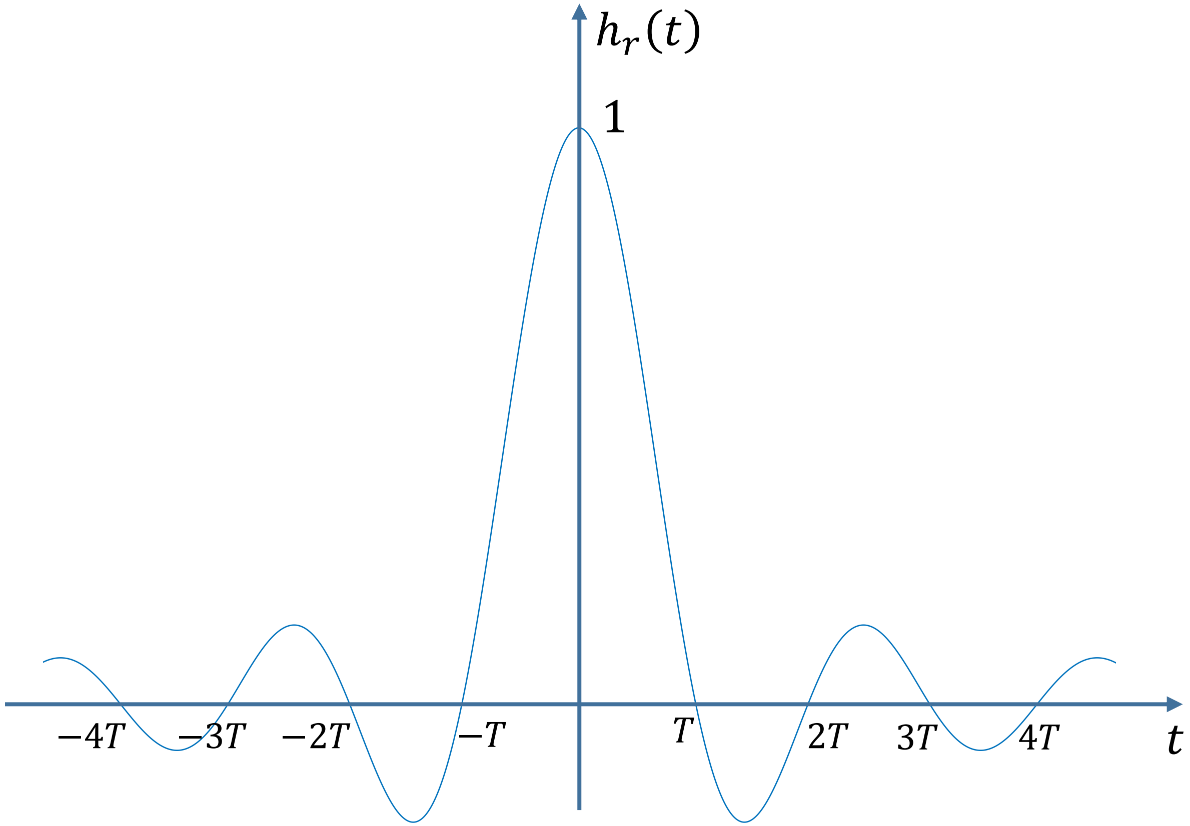
Potrebno je izabrati NF filter sa graničnom frekvencijom Ω_c koja je između Ω_N i $\Omega_s - \Omega_N$. Obično se bira $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2} = \pi/T$.

$$h_r(t) = \frac{\sin\frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin\frac{\pi(t-nT)}{T}}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}}$$

Rekonstrukcija izvornog signala iz uzoraka

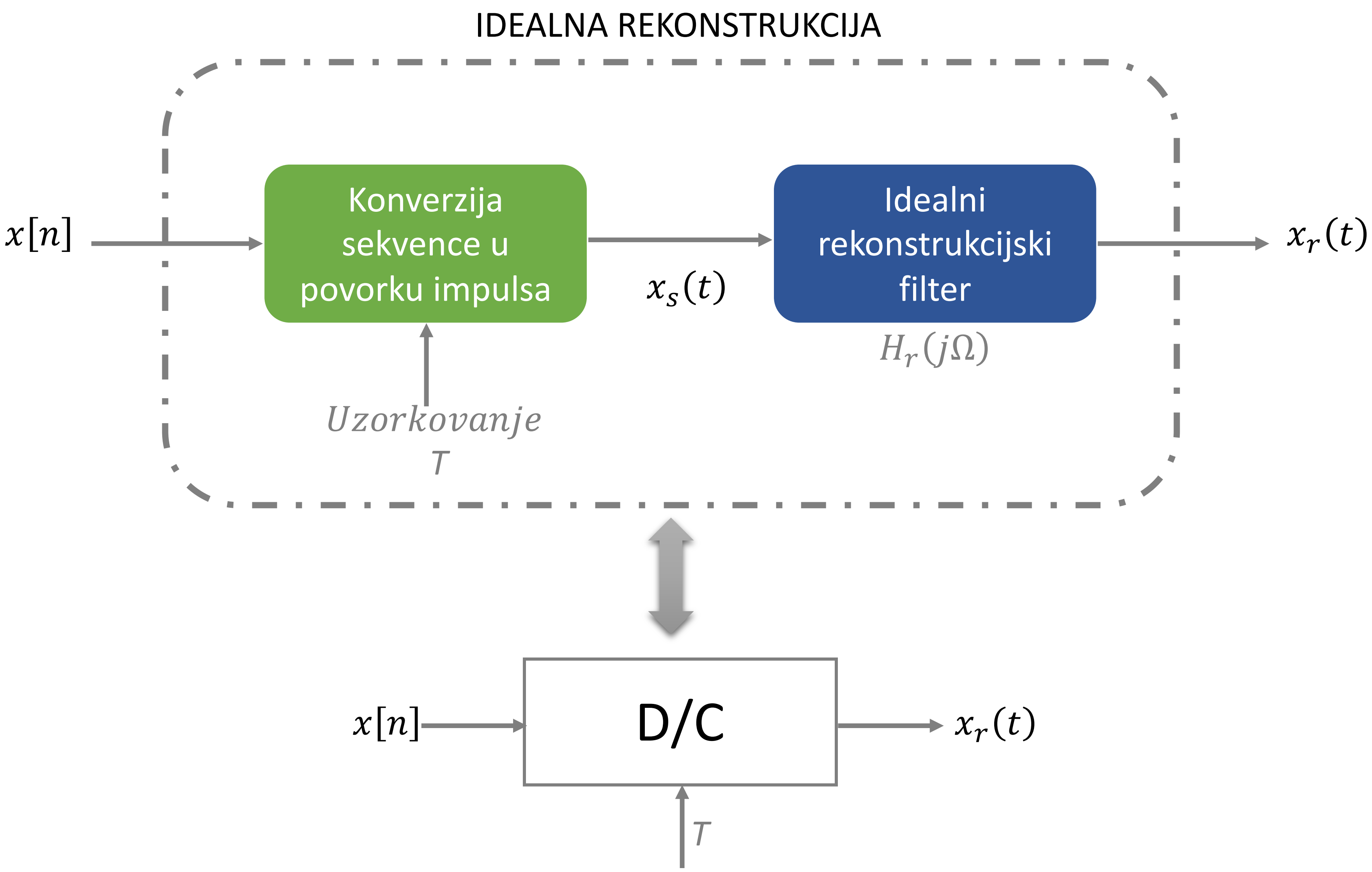


Frekventni odziv rekonstrukcijskog filtera



i njegov impulsni odziv.

Idealni konvertor diskretnog signala u kontinualni



Veza ulaz-izlaz

Ulazni signal u NF filter $\Rightarrow$ $$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t-nT)$$

Primjenimo Fourierovu transformaciju na obje strane jednačine:

$$H_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_r(j\Omega)e^{-j\Omega Tn}$$

Član koji se pojavljuje jer imamo kašnjenje impulsnog odziva za nT.

$$H_r(t) = H_r(j\Omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn}$$

Izlazi ispred sume jer ne zavisi od n.

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X\left(e^{j\Omega T}\right)$$

$X\left(e^{j\omega}\right)$je frekventno skalirano, odnosno ω je zamijenjeno sa ΩT.

Literatura

- A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, “Discrete-time signal processing”, *Prentice-Hall*, 1999.