Računarska grafika

Vektori se inače označavaju sa strelicom iznad slova (npr. $\vec{v}$), ali se u računarskoj grafici često označavaju sa podebljanim slovom (npr. $\boldsymbol{v}$).

Dvodimenzionalni vektor ima oblik:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

gdje su x i y koordinate vrha vektora.

Transformacija vektora ili koordinatnog sistema se vrši množenjem vektora sa matricom transformacije, i to sa lijeve strane. Matrice transformacija su kvadratne matrice.

Za proizvoljnu matricu transformacije M_1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

množenjem iste sa proizvoljnim vektorom $\boldsymbol{v}$ se primjenjuje ta transformacija na vektor $\boldsymbol{v}$ i dobija se novi vektor (npr. $\boldsymbol{v'}$):

$$\boldsymbol{v'} = M_1 \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

gdje su x' i y' koordinate vektora nakon transformacije.

U računarskoj grafici se koristi **homogeni koordinatni sistem**. Koristi se kako bi se transofmracija translacije (pomijeranja) mogla obaviti pomoću množenja matrice i vektora (umjesto pomoću sabiranja dva vektora). Sabiranje vektora se izbjegava jer nije moguće komponovati transformacije koje zahtijevaju sabiranje vektora, a komponovanje transformacija olakšava (i time ubrzaje) proračun.

Uvođenjem homogenog koordinatnog sistema svi vektori i matrice se *"proširuju"* za jednu dimenziju. Dakle, 2D vektori i matrice transformacija za 2D vektore u 2D homogenom koordinatnom sistemu su generalno:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ k \end{bmatrix}$$

gdje je $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ isto kao i matrica transformacije u *"običnom"* 2D koordinatnom sistemu (M_1). Polja c, f, g, h se koriste pri translaciji (pomijeranju). Polja i i k su (gotovo) uvijek 1, pa se može pisati i:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

a ukoliko transformacija ne uključuje translaciju c, f, g, h će biti 0, pa se u tom slučaju može pisati:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

čime se efektivno dobija ista transformacija kao i u *"običnom"* 2D koordinatnom sistemu.

Transformacije je moguće posmatrati iz dvije perspektive, iz perspektive vektora i perspektive koordinatnog sistema. Kada se na transformacije gleda iz perspektive vektora, tada je koordinatni sistem fiksan (ne miče se), a transformacije se primjenjuju na vektore, dok je u slučaju perspektive koordinatnog sistema slučaj obrnut. Bez obzira kako se gleda na transformacije (iz koje perspektive), transformacije moraju dati isti rezultat.

Neke od osnovnih transformacija su *skaliranje*, *transliranje*, *rotacija* i *smicanje*. Ispod je tabela sa matricama za pomenute transformacije.

transformacija	**za vektore (tačke)**	**za koordinatni sistem**
skaliranje *(scaling)*	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
translacija *(translation)*	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
rotacija *(rotation)*	$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
smicanje *(shear)*	$\begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -h_x & 0 \\ -h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

gdje su:

- $\boldsymbol{S_x}$ i $\boldsymbol{S_y}$ faktori skaliranja (koliko će oblik/koordinata biti povećan/a) po x i y osi respektivno
- $\boldsymbol{d_x}$ i $\boldsymbol{d_y}$ pomjeraji po x i y osi respektivno
- $\boldsymbol{\alpha}$ ugao rotacije
- $\boldsymbol{h_x}$ i $\boldsymbol{h_y}$ faktori smicanja (koliko će oblik/koordinata biti izobličen/a u pravcu ose) po x i y osi respektivno

Efektivno, za sve transformacije osim skaliranja, da bi prešli iz jedne perspektive u drugu potrebno je ispred veličine (d, α, h) potrebno staviti negativan predznak. Ovo je očito iz tabele. Jedino za rotaciju nije očito na prvi pogled, međutim, koristeći parnost funkcije cos i neparnost funkcije sin dobija se:

$$\begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{matrix} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -(-\sin\alpha) & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Više transformacija se može obaviti pomoću jedne matrice korištenjem **kompozicije matrica**. Ukoliko želimo primijeniti transformaciju predstavljenu matricom M_1, a zatim transformaciju predstavljenu matricom M_2, umjesto da vektor množimo sa jednom matricom pa sa drugom, moguće je pomnožiti ove dvije matrice, a zatim rezultujuću matricu pomnožiti sa vektorom. Bitno je voditi računa o tome da se matrice transformacije *"redaju"* **sa desna na lijevo**.

To značu da u slučaju da želimo primijeniti prvo transformatiju čija je matrica M_1, pa zatim M_2 na vektor $\boldsymbol{v}$, to bi uradili kao:

$$\boldsymbol{v_1} = M_2 \cdot M_1 \cdot \boldsymbol{v}$$

gdje je $\boldsymbol{v_1}$ rezultujući vektor. A ako bi htjeli uraditi prvi transformaciju M_2, pa M_1, to bi uradili kao:

$$\boldsymbol{v_2} = M_1 \cdot M_2 \cdot \boldsymbol{v}$$

gdje je $\boldsymbol{v_2}$ rezultujući vektor i u opštem slučaju se razlikuje se od vektora $\boldsymbol{v_1}$.

Ove matrice se mogu pomnožiti čime se dobija nova matrica:

$$M = M_2 \cdot M_1$$

Množenjem proizvoljnog vektora $\boldsymbol{v}$ sa rezultujućom matricom M će proizvesti isti rezultat kao množenjem vektora $\boldsymbol{v}$ sa matricom M_1, pa zatim sa matricom M_2. Ovo je rezultat osobine asocijativnosti množenja matrica:

$$(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$$

Dakle, generalno, ako želimo primijeniti n transformacija (predstavljenih matricama $M_1, M_2, ..., M_n$) na neki vektor $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v'} = M_n \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot \boldsymbol{v}$$

Proizvod matrica se može izračunati zasebno:

$$M = M_n \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1$$

I zatim pomnožiti sa vektorom $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v'} = M \cdot \boldsymbol{v}$$

Zašto bi ovo radili? Zamislimo da imamo 10 transformacija koje želimo uraditi i 100 vektora koje želimo transformisati. Ako bi na svaki vektor primijenili tih 10 transformacija zasebno to je 1000 operacija. Međutim, šta ako prvo komponujemo ovih 10 matrica? Komponovanje je 9 operacija množenja (množenje 10 matrica). Zatim primjena transformacije na 100 vektora je dodatnih 100 operacija množenja (svaki vektor sa komponovanom matricom). Komponovanjem pa množenjem se izvršava 109 operacija množenja u odnosu na 1000 bez komponovanja. Komponovanje dakle znatno ubrzava proračun.

Također, ako se vratimo na razlog zbog kojeg je uveden homogeni koordinatni sistem (translacija), ovo znači da ako ne bi bio uveden taj koordinani sistem, translacije vektora bi znatno usporavale proračune jer komponovanje matrica ne bi bilo moguće ako je bar jedna od njih matrica translacije (jer zahtijeva sabiranje, a ne samo množenje).