Vektori i matrice

Dr. sci. Emir Skejić, vanr. prof.
Fakultet elektrotehnike Tuzla

Arhitektura softvera

- Objektno orijentiran
- Kreira objekte za stvari koje trebaju biti objekti
- Izbjegava globalne podatke i funkcije
- Enkapsulira podatke
- Obezbjeđuje korisne interfejse
- Stavlja različite objekte u različite datoteke
- Održava klase nižeg nivoa što je moguće više u generičkom formatu

Projekt 1

- Napisati program koji renderira jednostavan 3D objekt (npr. kocka). Program treba nacrtati nekoliko kopija istog objekta s različitim pozicijama/rotacijama.
- Kreirati klasu "Model" koja pohranjuje niz trouglova i ima funkciju "Draw()". "Model" treba imati funkciju "CreateBox(float,float,float)" koja ga inicijalizira u box. Ukoliko želite, možete kreirati i druge oblike.
- Koristite objektno orijentiran pristup koji Vam omogućuje ponovno korištenje klase "Model" za druge projekte i jednostavno dodavanje novih obilježja
- Cilj projekta 1 je upoznavanje s C++ kompajlerom i OpenGL-om (ili Java-om, Direct3D-om…)
- Rok predaje: srijeda, 30. 4. 2025. godine u 23:59 h
- Više detalja u Google Classroom

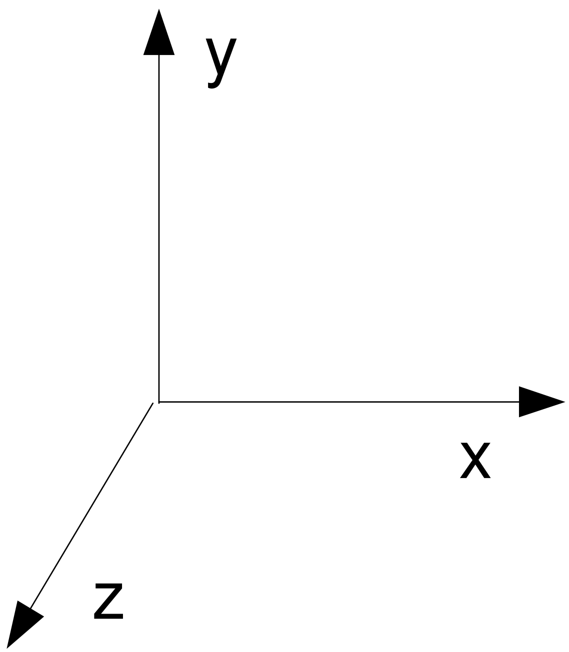
Projekt 1

```
class Vertex {
	Vector3 Position;
	Vector3 Color;
public:
	void Draw();
};

class Triangle {
	Vertex Vert[3];
public:
	void Draw();
};

class Model {
	int NumTris;
	Triangle *Tri;
	void Init(int num)	{delete Tri; Tri=new Triangle[num]; NumTris=num;}
public:
	Model() {NumTris=0; Tri=0;}
	~Model()		{delete Tri;}
	void CreateBox(float x,float y,float z);
	void CreateTeapot();
	void Draw();
};
```

Vektori

Koordinatni sistemi

- Desni koordinatni sistem (engl. *right handed coordinate system*)



Vektorska aritmetika

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x - b_x & a_y - b_y & a_z - b_z \end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{bmatrix}$$

$$s\mathbf{a} = \begin{bmatrix} sa_x & sa_y & sa_z \end{bmatrix}$$

Vektorska algebra

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	Asocijativnost
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	Komutativnost
$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$	Zero identity
$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	Suprotan vektor
$(s+t)\mathbf{a}=s\mathbf{a}+t\mathbf{a}$	Distributivnost
$s(\mathbf{a}+\mathbf{b})=s\mathbf{a}+s\mathbf{b}$	Distributivnost
$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	Multiplikativni identitet

Magnituda vektora

- Magnituda (dužina) vektora je:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Vektor čija je dužina=1.0 naziva se *jedinični vektor*
- Možemo također i *normalizirati* vektor da bi dobili jedinični vektor:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Svojstva magnitude vektora

$$|s\mathbf{a}| = |s||\mathbf{a}|$$

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Nejednakost trougla

Skalarni proizvod

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum \mathrm{a_i b_i}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathrm{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

Skalarni proizvod

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum \mathrm{a_i b_i}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathrm{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_x} & \mathrm{a_y} & \mathrm{a_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b_x} \\ \mathrm{b_y} \\ \mathrm{b_z} \end{bmatrix}$$

Svojstva skalarnog proizvoda

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

$$(s\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=s(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

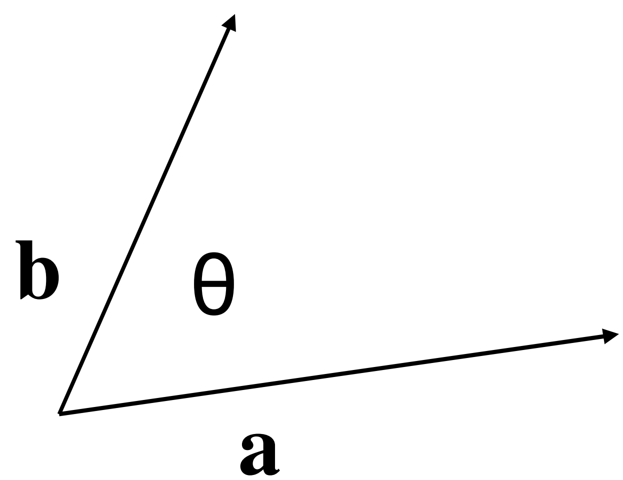
Komutativnost

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Cauchy-Schwartzova nejednakost

Primjer: Ugao između vektora

- Kako odrediti ugao θ između vektora **a** i **b**?

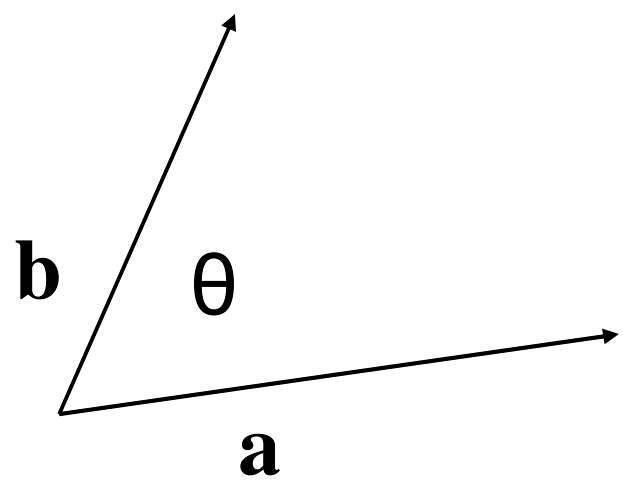


Primjer: Ugao između vektora

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right)$$

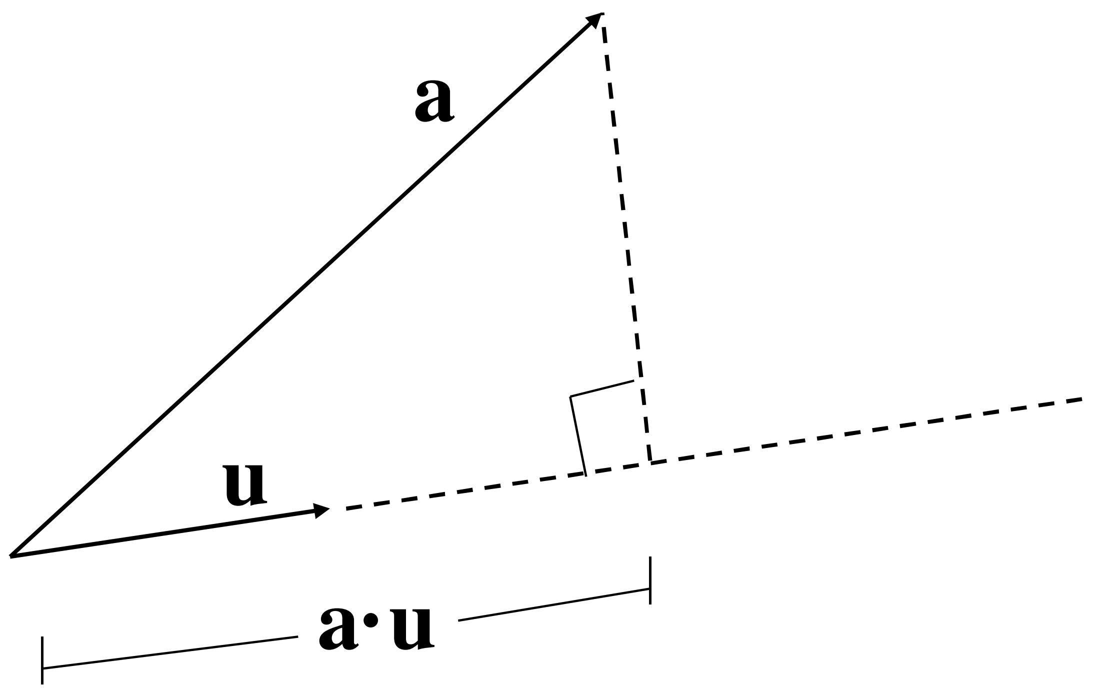


Skalarni proizvodi s opštim vektorima

- Skalarni proizvod je skalarna veličina koja nam govori nešto o vezi između dva vektora
  - Ako je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ tada je $\theta < 90^\circ$
  - Ako je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ tada je $\theta > 90^\circ$
  - Ako je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ tada je $\theta = 90^\circ$ (jedan ili više vektora su degenerirani (0,0,0))

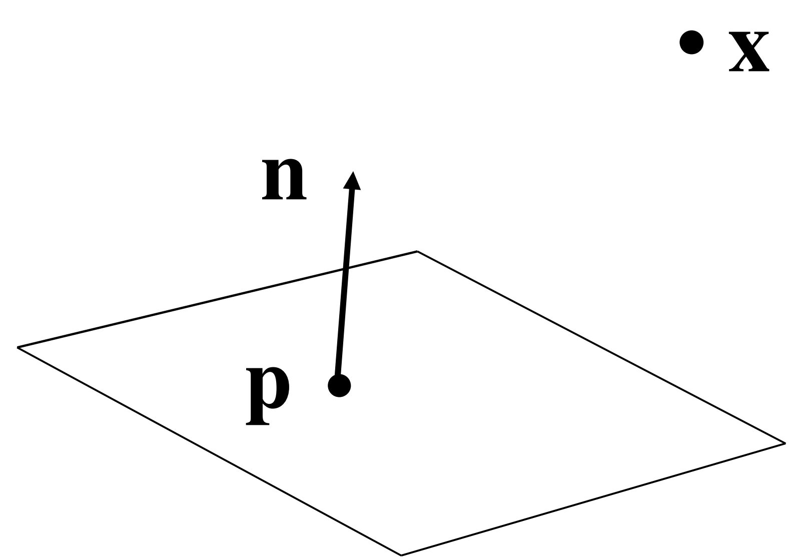
Skalarni proizvodi s jednim jediničnim vektorom

- Ako je $|\mathbf{u}|=1.0$ tada je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$ dužina *projekcije* vektora **a** na vektor **u**



Primjer: Udaljenost od ravni

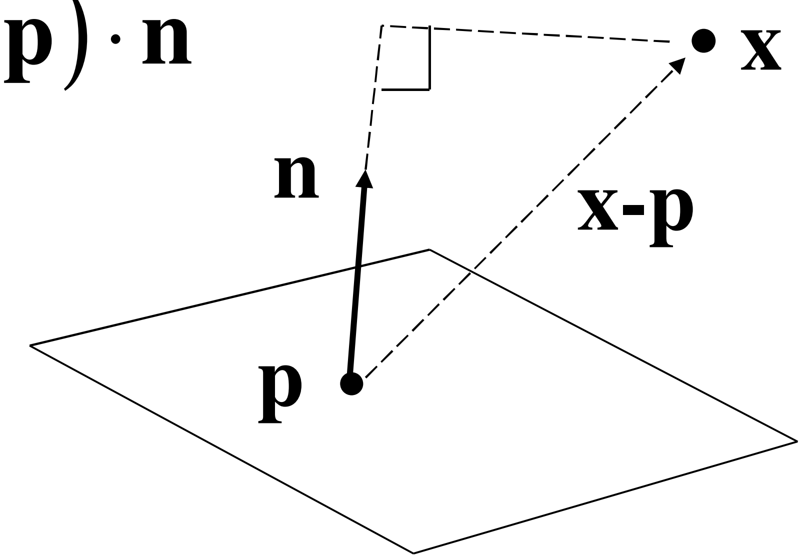
- Ravan je opisana pomoću tačke **p** na ravni i jediničnog vektora normale **n**. Odrediti udaljenost od tačke **x** do ravni



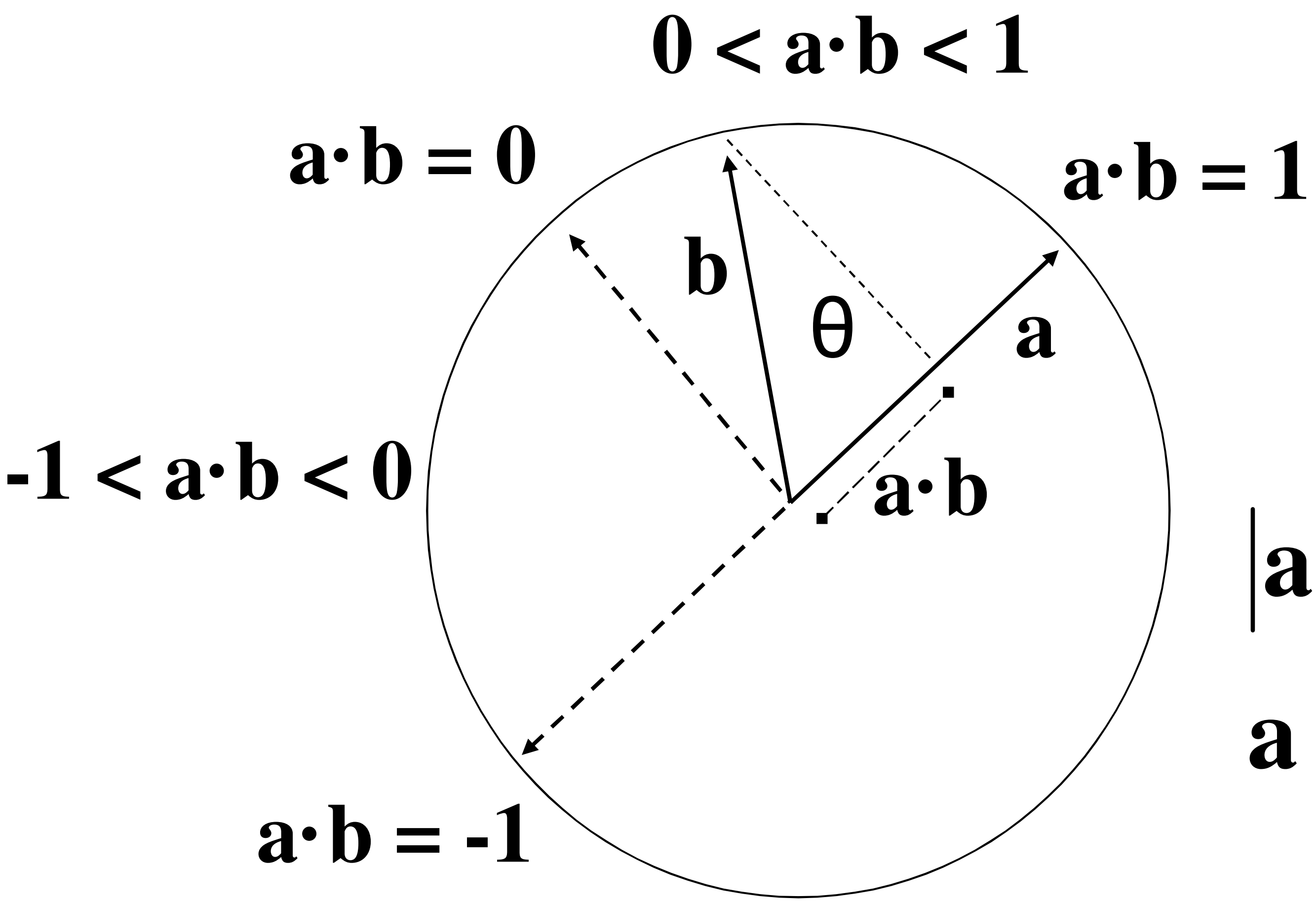
Primjer: Udaljenost od ravni

- Udaljenost je dužina projekcije **x**-**p** na **n**:

$$\mathrm{dist} = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}$$



Skalarni proizvodi s jediničnim vektorima



$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1.0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos(\theta)$$

Vektorski proizvod

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{a_x} & \mathrm{a_y} & \mathrm{a_z} \\ \mathrm{b_x} & \mathrm{b_y} & \mathrm{b_z} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix} \mathrm{a_y b_z - a_z b_y} & \mathrm{a_z b_x - a_x b_z} & \mathrm{a_x b_y - a_y b_x} \end{bmatrix}$$

Svojstva vektorskog proizvoda

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je *vektor* ortogonalan na vektore **a** i **b**, u smjeru definiranom pravilom desne ruke

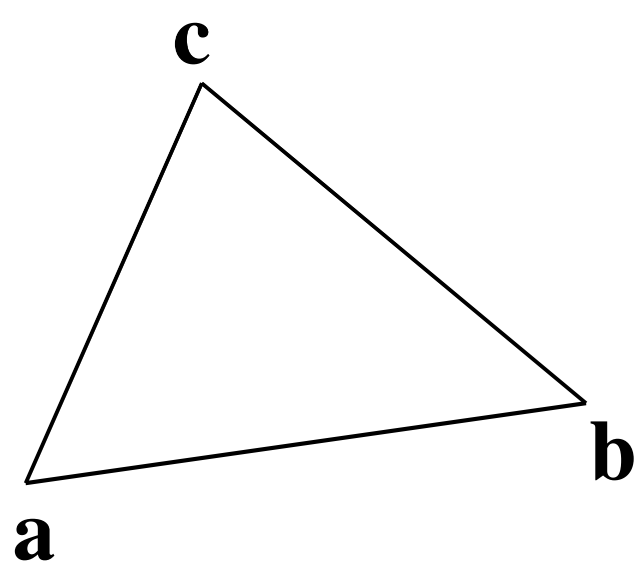
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| =$ Površina paralelograma **ab**

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ ako su **a** i **b** paralelni

Primjer: Normala trougla

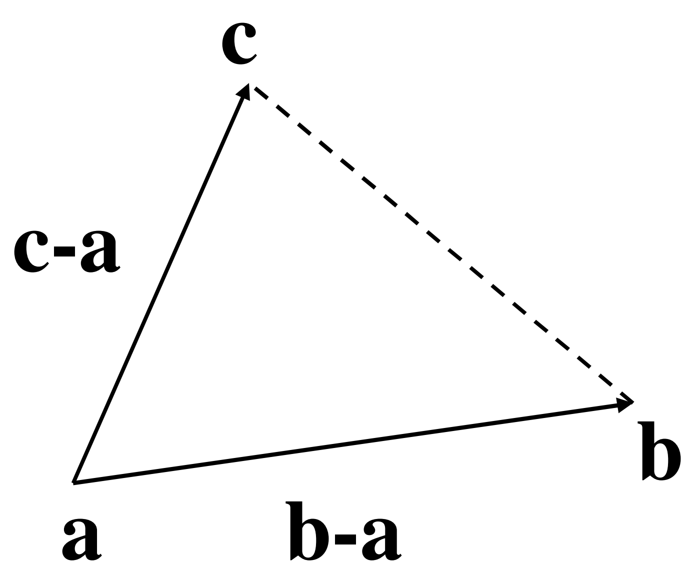
- Odrediti jediničnu normalu trougla definiranog pomoću 3D tačaka **a**, **b** i **c**



Primjer: Normala trougla

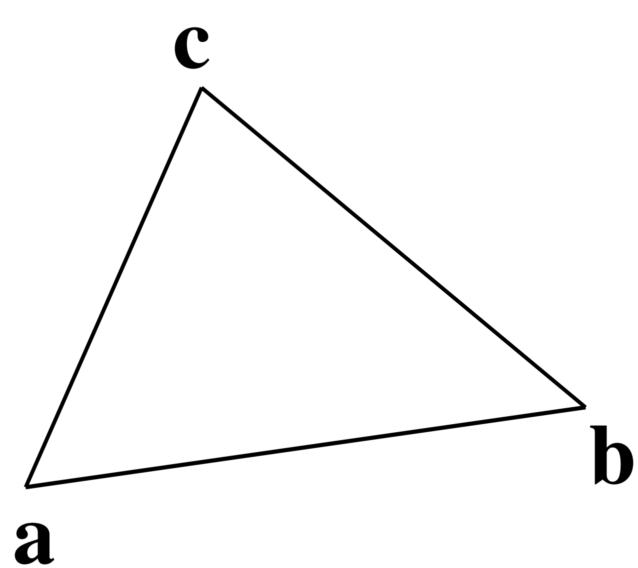
$$\mathbf{n}^* = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}^*}{\left|\mathbf{n}^*\right|}$$



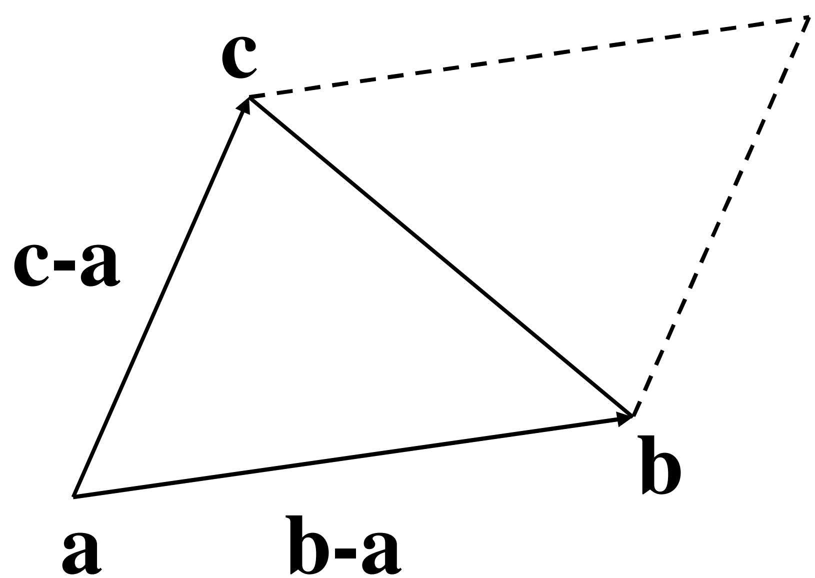
Primjer: Površina trougla

- Odrediti površinu trougla definiranog pomoću 3D tačaka **a**, **b** i **c**



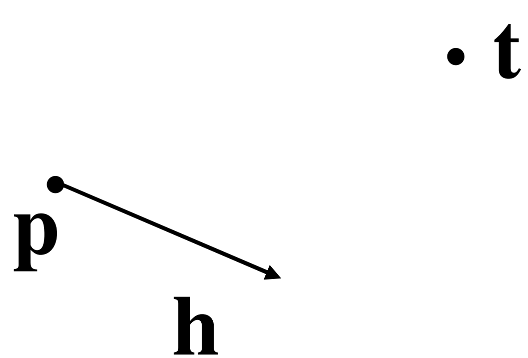
Primjer: Površina trougla

$$\text{površina} = \frac{1}{2}\left|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\right|$$

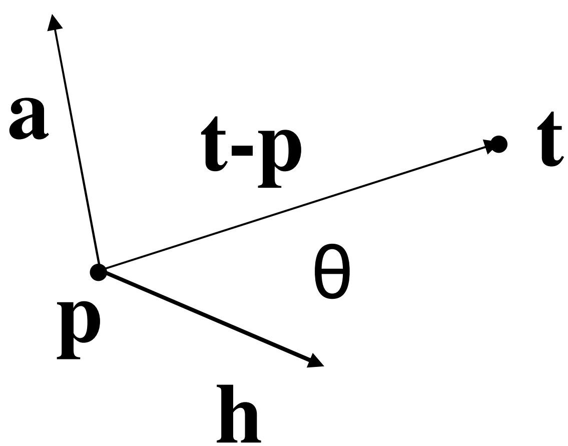


Primjer: Poravnavanje prema cilju

- Objekt se nalazi na poziciji **p** s vektorom smjera (engl. *heading vector*) jedinične dužine **h**. Želimo ga rotirati tako da vektor **h** bude orijentiran prema nekom cilju **t**. Odrediti jediničnu osu rotacije **a** i ugao θ za koji treba rotirati objekt.



Primjer: Poravnavanje prema cilju



$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{h} \times (\mathbf{t} - \mathbf{p})}{\left| \mathbf{h} \times (\mathbf{t} - \mathbf{p}) \right|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{h} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{p})}{\left| (\mathbf{t} - \mathbf{p}) \right|} \right)$$

Klasa Vector

```
class Vector3 {
public:
    Vector3()                                   {x=0.0f; y=0.0f; z=0.0f;}
    Vector3(float x0,float y0,float z0)         {x=x0; y=y0; z=z0;}
    void Set(float x0,float y0,float z0)        {x=x0; y=y0; z=z0;}
    void Add(Vector3 &a)                        {x+=a.x; y+=a.y; z+=a.z;}
    void Add(Vector3 &a,Vector3 &b)             {x=a.x+b.x; y=a.y+b.y; z=a.z+b.z;}
    void Subtract(Vector3 &a)                   {x-=a.x; y-=a.y; z-=a.z;}
    void Subtract(Vector3 &a,Vector3 &b)        {x=a.x-b.x; y=a.y-b.y; z=a.z-b.z;}
    void Negate()                               {x=-x; y=-y; z=-z;}
    void Negate(Vector3 &a)                     {x=-a.x; y=-a.y; z=-a.z;}
    void Scale(float s)                         {x*=s; y*=s; z*=s;}
    void Scale(float s,Vector3 &a)              {x=s*a.x; y=s*a.y; z=s*a.z;}
    float Dot(Vector3 &a)                       {return x*a.x+y*a.y+z*a.z;}
    void Cross(Vector3 &a,Vector3 &b)
        {x=a.y*b.z-a.z*b.y; y=a.z*b.x-a.x*b.z; z=a.x*b.y-a.y*b.x;}
    float Magnitude()                           {return sqrtf(x*x+y*y+z*z);}
    void Normalize()                            {Scale(1.0f/Magnitude());}

    float x,y,z;
};
```

Matrice i transformacije

3D modeli

- Pretpostavimo da imamo 3D model koji ima niz vektora pozicija koji opisuju njegov oblik
- Grupirat ćemo sve vektore pozicija korištene za pohranjivanje podataka u modelu u jednostruki niz $\mathbf{v}_n$ gdje je $0 \le n \le$ NumVerts-1
- Svaki vektor $\mathbf{v}_n$ ima komponente v_{nx} v_{ny} v_{nz}

Translacija

- Recimo da naš 3D model želimo premjestiti s njegove trenutne lokacije negdje drugdje…
- U tehničkom žargonu ovo se naziva *translacija*
- Želimo izračunati novi niz pozicija $\mathbf{v}'_n$ koji predstavlja novu lokaciju
- Pretpostavimo da vektor **d** predstavlja relativni pomak za koji želimo premjestiti objekt
- Može se jednostavno upotrijebiti $\mathbf{v}'_n = \mathbf{v}_n + \mathbf{d}$ da bi se dobio novi niz pozicija

Transformacije

$$\mathbf{v}'_n = \mathbf{v}_n + \mathbf{d}$$

- Ova translacija predstavlja vrlo jednostavan primjer *transformacije* nekog objekta
- Rezultat je da cijeli objekt biva premješten ili *transliran* za **d**
- Od sada ćemo izostavljati indeks $_n$ i samo pisati

  $$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{d}$$

  imajući na umu da je ovo u praksi zapravo petlja nad nekoliko *različitih* vektora $\mathbf{v}_n$ primjenjujući *isti* vektor **d** svaki put

Transformacije

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{d}$$

- Uvijek imajte na umu da se ova kompaktna jednačina može proširiti u

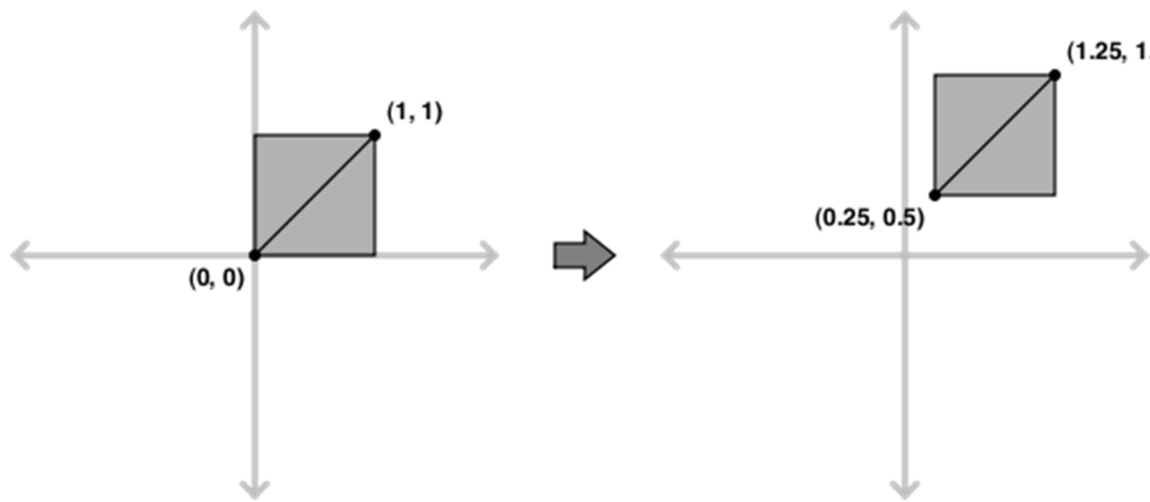
$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

- Ili u sistem linearnih jednačina:

$$v'_x = v_x + d_x$$

$$v'_y = v_y + d_y$$

$$v'_z = v_z + d_z$$



Translacija

Slika opisuje translaciju gdje je $t_x = 0.25$ *i* $t_y = 0.5$.

Rotacija

- Sada zarotirajmo objekt u *xy* ravni za ugao θ, kao da smo ga zavrtjeli oko *z* ose

$$v'_x = \cos(\theta)\, v_x - \sin(\theta)\, v_y$$
$$v'_y = \sin(\theta)\, v_x + \cos(\theta)\, v_y$$
$$v'_z = v_z$$

- Napomena: *Pozitivna* rotacija će rotirati objekt *u smjeru suprotnom kretanju kazaljke sata* kada osa rotacije (z) pokazuje *prema* posmatraču

Rotacija

$$v'_x = \cos(\theta) v_x - \sin(\theta) v_y$$
$$v'_y = \sin(\theta) v_x + \cos(\theta) v_y$$
$$v'_z = v_z$$

- Ovo se može proširiti u:

$$v'_x = \cos(\theta) v_x - \sin(\theta) v_y + 0v_z$$
$$v'_y = \sin(\theta) v_x + \cos(\theta) v_y + 0v_z$$
$$v'_z = 0v_x \qquad + 0v_y \qquad + 1v_z$$

- I ponovo zapisati kao matrična jednačina:

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

- Ili samo kao:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

Rotacija

- Rotacijska transformacija oko *z* ose može se predstaviti u matričnom obliku kao:

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

ili u kompaktnijem obliku kao:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

gdje je

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

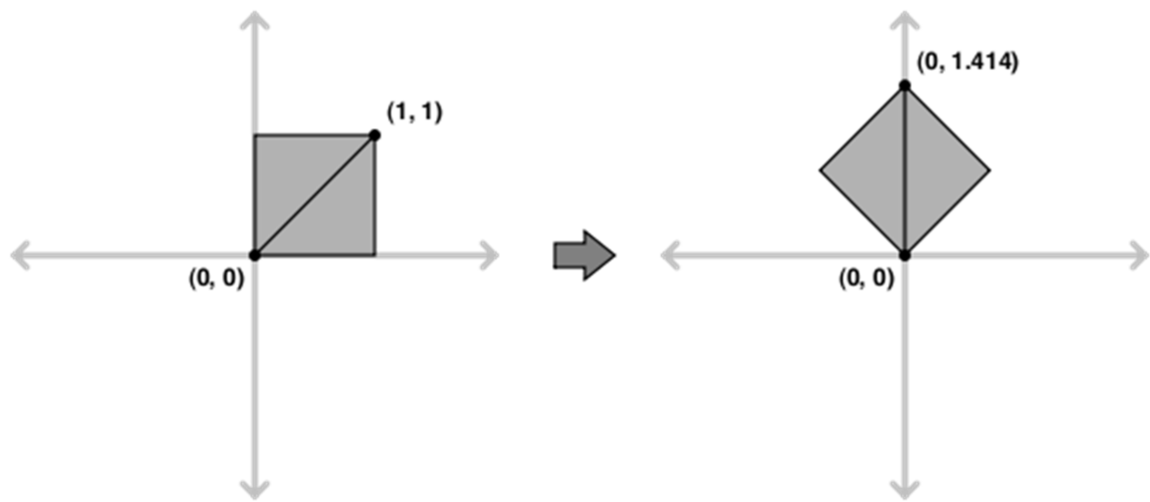
Rotacija

- Mogu se također definirati matrice rotacije oko osa *x*, *y* i *z*:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotacija

$Slika\ opisuje\ rotaciju\ gdje\ je\ ugao\ rotacije\ 45^{\circ}.$

Linearne transformacije

- Poput translacije, i rotacija je primjer *linearne transformacije*
- Ustvari, rotacija sadrži funkcije sin() i cos(), ali one u konačnici završavaju kao konstante u aktualnoj linearnoj jednačini
- Matrica iz prethodnog primjera može se generalizirati tako da bude:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Linearna jednačina

- Opšta linearna jednačina s jednom varijablom je:

  $$f(v) = av + d$$

  gdje su *a* i *d* konstante

- Opšta linearna jednačina s 3 varijable je:

  $$f(v_x, v_y, v_z) = f(\mathbf{v}) = av_x + bv_y + cv_z + d$$

- Napomena: Ne postoje *nelinearni* izrazi poput $v_x v_y$, v_x^2, $\sin(v_x)$…

Sistem linearnih jednačina

- Posmatrajmo sada 3 linearne jednačine s 3 varijable v_x, v_y i v_z

$$
\begin{aligned}
v'_x &= a_1 v_x + b_1 v_y + c_1 v_z + d_1 \\
v'_y &= a_2 v_x + b_2 v_y + c_2 v_z + d_2 \\
v'_z &= a_3 v_x + b_3 v_y + c_3 v_z + d_3
\end{aligned}
$$

- Imajte na umu da su a_n, b_n, c_n i d_n konstante (12 ukupno)

Matrična notacija

$$v'_x = a_1 v_x + b_1 v_y + c_1 v_z + d_1$$

$$v'_y = a_2 v_x + b_2 v_y + c_2 v_z + d_2$$

$$v'_z = a_3 v_x + b_3 v_y + c_3 v_z + d_3$$

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{d}$$

Translacija

- Ponovo pogledajmo translacijsku transformaciju:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{d}$$

$$v'_x = v_x + d_x$$
$$v'_y = v_y + d_y$$
$$v'_z = v_z + d_z$$

- Ukoliko to doista želimo, navedene tri translacijske jednačine možemo ponovo zapisati kao:

$$v'_x = 1v_x + 0v_y + 0v_z + d_x$$
$$v'_y = 0v_x + 1v_y + 0v_z + d_y$$
$$v'_z = 0v_x + 0v_y + 1v_z + d_z$$

Jedinična matrica

- Može se vidjeti da je to jednako transformaciji pomoću jedinične matrice

$$v'_x = 1v_x + 0v_y + 0v_z + d_1$$

$$v'_y = 0v_x + 1v_y + 0v_z + d_2$$

$$v'_z = 0v_x + 0v_y + 1v_z + d_3$$

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica

- Množenje *jediničnom matricom* nema uticaja na vektor

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

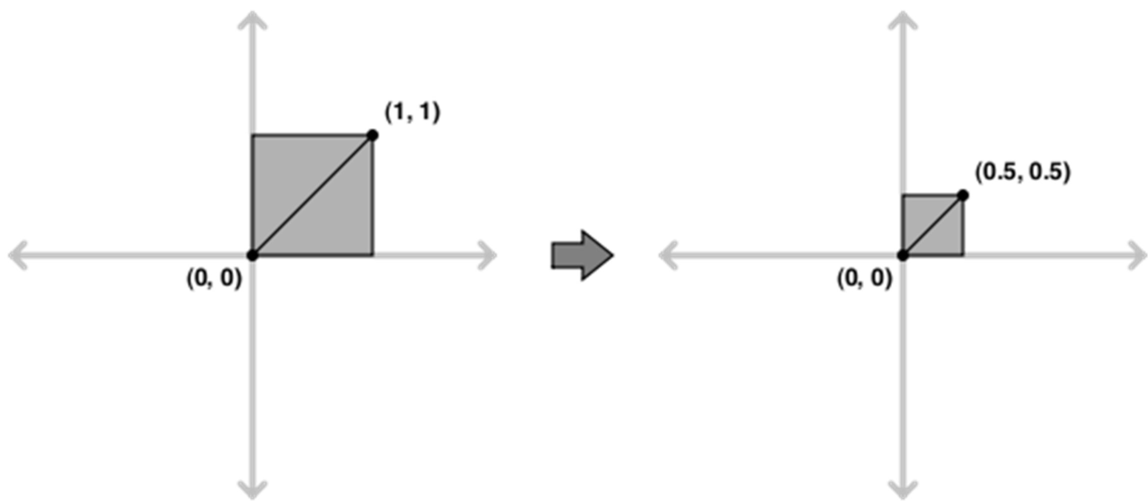
$$\mathbf{v} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v}$$

Uniformno skaliranje

- Na objekt se može primijeniti uniformno skaliranje sa sljedećom transformacijom

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

- Ako je $s>1$, tada će objekt biti uvećan faktorom s po svakoj dimenziji
- Ako je $0<s<1$, objekt će biti umanjen
- Ako je $s<0$, objekt će biti *reflektiran* kroz sve tri dimenzije, što dovodi do objekta koji je "izokrenut"



Skaliranje

Slika opisuje skaliranje gdje je $s_x = s_y = 0.5$.

Neuniformno skaliranje

- Također, može se uraditi i općenitije *neuniformno skaliranje*, gdje svaka dimenzija ima svoj vlastiti faktor skaliranja

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

što dovodi do jednačina:

$$v'_x = s_x v_x$$
$$v'_y = s_y v_y$$
$$v'_z = s_z v_z$$

Višestruke transformacije

- Ako imamo vektor **v** i matricu rotacije oko x ose $\mathbf{R}_x$, možemo generirati rotirani vektor **v′**:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{v}$$

- Ukoliko onda taj vektor želimo rotirati oko y ose, možemo jednostavno uraditi sljedeće:

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{R}_y(\varphi) \cdot \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{R}_y(\varphi) \cdot \left(\mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{v}\right)$$

Višestruke transformacije

- Ovo se može proširiti na koncept primjene bilo koje sekvence transformacija:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}_4 \cdot \left(\mathbf{M}_3 \cdot \left(\mathbf{M}_2 \cdot \left(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{v}\right)\right)\right)$$

- Zbog toga što za matričnu algebru vrijedi zakon *asocijativnosti*, prethodni izraz se može napisati u obliku:

$$\mathbf{v}' = \left(\mathbf{M}_4 \cdot \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1\right) \cdot \mathbf{v}$$

- Ovo nam omogućuje da matrice $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ i $\mathbf{M_4}$ *ulančimo* u jednu matricu:

$$\mathbf{M}_{\text{total}} = \mathbf{M}_4 \cdot \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}_{\text{total}} \cdot \mathbf{v}$$

- Napomena: Za množenje matrica NE vrijedi zakon *komutativnosti*, tako da se mora voditi računa o redoslijedu množenja

Proizvod dvije matrice

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{m_{11}} & \cancel{m_{12}} & \cancel{m_{13}} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22} + m_{13}n_{32}$$

3D linearne transformacije

$$v'_x = a_1 v_x + b_1 v_y + c_1 v_z + d_1$$

$$v'_y = a_2 v_x + b_2 v_y + c_2 v_z + d_2$$

$$v'_z = a_3 v_x + b_3 v_y + c_3 v_z + d_3$$

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{d}$$

Višestruke rotacije i skaliranja

- Sekvenca rotacija i skaliranja može se kombinirati u jednu matricu
- Naprimjer, može se kombinirati y-rotacija, nakon koje slijedi z-rotacija, zatim neuniformno skaliranje, te konačno x-rotacija:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_x(\gamma) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{R}_z(\beta) \cdot \mathbf{R}_y(\alpha)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

Višestruke translacije

- Također, možemo iskoristiti i svojstvo asocijativnosti koje vrijedi za sabiranje vektora da bismo kombinirali sekvencu translacija
- Naprimjer, mogu se kombinirati translacija duž vektora $\mathbf{t}_1$ nakon koje slijedi translacija duž $\mathbf{t}_2$ te konačno duž vektora $\mathbf{t}_3$:

$$\mathbf{d} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{d}$$

Kombiniranje transformacija

- Vidimo da možemo kombinirati sekvencu rotacija i/ili skaliranja
- Također, možemo kombinirati i sekvencu translacija
- Međutim, šta ako želimo kombinirati translacije *s* rotacijama/skaliranjima?